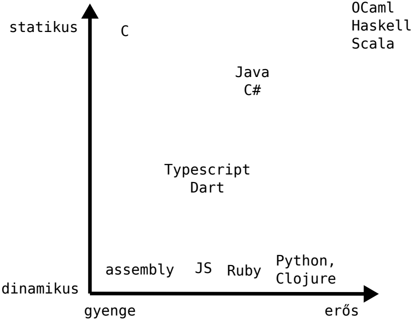
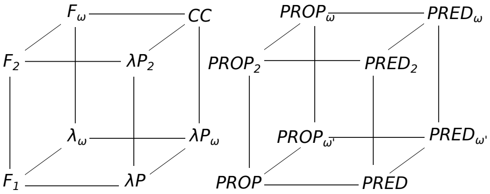
Az előző előadás tartalmából

Típusrendszerek, típuselméletek





λ-kalkulus: szintaktika, szemantika

Definíció. ***Egyszerű típusnélküli λ-kifejezések***

<λ-kifejezés>	::=	*<változó>*
	|	*<λ-absztrakció>*
	|	*<applikáció>*
<λ-absztrakció>	::=	*(λ<változó>.<λ-kifejezés>)*
<applikáció>	::=	*(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)*

Definíció. ***(β-)redukció***
Ha az $E[x := F]$ kifejezésben az F szabad változói válnak az E kötött változóivá, akkor $(\lambda x.E)F \to_\beta E[x := F]$.

Példák:

$(\lambda x.x)\ y \to_\beta y$
$(\lambda f.f\ u)\ (\lambda x.x\ y) \to_\beta (\lambda x.x\ y)\ u \to_\beta u\ y$
$(\lambda xy.x\ y)\ y \leftrightarrow_\alpha (\lambda xz.x\ z)\ y \to_\beta \lambda z.y\ z$

λ-kalkulus: normálforma

Definíció. ***Normálforma***
Ha egy λ-kifejezésben nincs elvégezhető redukció (redukálható kifejezés), akkor λ-kifejezés normálformában van.

Példák:

$\lambda x.(\lambda y.z)$
$\Omega \equiv (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$ (nincs)

Redukálási stratégia: meghatározza, több redukció esetén melyiket kell elvégezni, redukálási sorrendet ad meg.

- legbaloldalibb legkülső (normál, lusta):
  $\underline{((\lambda p.p)\ ((\lambda q.q)\ r))}\ s\ ((\lambda t.t)\ ((\lambda u.u)\ v))$

Tétel. ***II. Church-Rosser-tétel (normalizálás)***
A normál sorrendű redukálási stratégia normalizáló redukálási stratégia.

Formális matematikai rendszer

Definíció. ***Formális matematikai rendszer***
Legyen $\Phi = (\Sigma, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$ *egy formális matematikai rendszer, ahol*

- Σ *egy ábécé,*
- $\mathcal{F}$ *a nyelvtani szabályok halmaza,*
- $\mathcal{A}$ *az axiómák halmaza,*
- $\mathcal{R}$ *a levezetési szabályok halmaza.*

Formális típusrendszer: jelölések

$E, F, \ldots$	(λ-)kifejezés
$A, B, \ldots$	típus(kifejezés) (F_1)
$\tau, \sigma, \ldots$	típus(kifejezés)
$x, y, \ldots$	változó
$\alpha, \beta, \ldots$	típusváltozó
$\Gamma, \Delta, \ldots$	(típus)környezet, kontextus

$E : A$	E típusa A
$\Gamma \vdash A$	A egy jól formált típus
$\Gamma \vdash E : A$	E típusa A a Γ környezetben
$E \equiv F$	E és F egyenlőek

Formális típusrendszer: jól formáltság

Definíció. ***Jól formált λ-kifejezés***
Az E λ-kifejezés jól formált, ha nyelvtanilag helyes, azaz megfelel a λ-kifejezéseket leíró nyelvtan szabályainak.

Definíció. ***Jól formált típus***
Az A típus jól formált, ha nyelvtanilag helyes, azaz megfelel a típusokat leíró nyelvtan szabályainak.

Egy jól formált kifejezésre a típusok jól formáltságának megkövetelése viszont önmagában még nem elég.

Formális típusrendszer: típuskörnyezet

Definíció. ***Típuskörnyezet (szintaktika)***

<típuskörnyezet>	::=	$\emptyset$
	|	*<környezet>, <változó> : <típus>*

valamint ha x_i *egy* A_i *típusú változó* $(1 \leq i \leq n)$ *és a típuskörnyezet egy*

$$\Gamma = \{\ x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n\ \}$$

halmaz*, akkor* $x_i \neq x_j\ (i \neq j)$.

$$dom(\Gamma) = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

Definíció. ***Jól formált típuskörnyezet***
Egy Γ *típuskörnyezet jól formált, ha megfelel a típuskörnyezet definíciójában megadott nyelvtannak.*

Formális típusrendszer: következtetés

A következtetések általános alakja:

$$\Gamma \vdash \mathcal{I}$$

ahol Γ egy (statikus) típuskörnyezet, $\mathcal{I}$ egy állítás.

Példák:

$\varnothing \vdash \mathrm{wf}$	$\varnothing$ jól formált
$\Gamma \vdash \mathrm{wf}$	Γ jól formált
$\Gamma \vdash A$	A egy jól formált típus
$\Gamma \vdash E : A$	E típusa A a Γ környezetben

Formális típusrendszer: következtetési szabály

A következtetési szabályok általános alakja:

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \mathcal{I}_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \mathcal{I}_n}{\Gamma \vdash \mathcal{I}} \ (\text{SZABÁLYNÉV})$$

ahol

- $\Gamma_1 \vdash \mathcal{I}_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \mathcal{I}_n$: feltételek
- $\Gamma \vdash \mathcal{I}$: következmény

Axiómák: A feltételek halmaza üres.

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{wf}} \ (\text{ENV } \varnothing)$$

Ha a feltételek teljesülnek, akkor a következmény is teljesül.

Formális típusrendszer: levezetés

A következtetésekből levezetési fákat építhetünk.

$$\cfrac{K_{11}}{\cfrac{K_{12}}{\cfrac{K_{22}}{K_{32}}\;(\textsc{s}3)}\;(\textsc{s}2)}\;(\textsc{s}1)
\qquad\qquad
\cfrac{\cfrac{K_{41}}{\cfrac{K_{42}}{K_{52}}\;(\textsc{s}5)}\;(\textsc{s}4) \qquad \cfrac{K_{61}}{K_{62}}\;(\textsc{s}6)}{K_{72}}\;(\textsc{s}7)$$

Formális típusrendszer: érvényes következtetés

Definíció. ***Érvényes következtetés***
Azt mondjuk, hogy a $\Gamma \vdash E : A$ *következtetés érvényes, ha létezik olyan (típus)levezetés, ahol a következtetés a levezetéshez tartozó (következtetési) fa gyökere.*

Definíció. ***Jól típusozott kifejezés***
Ha egy típusrendszerben a $\Gamma \vdash E : A$ *következtetés érvényes, akkor azt mondjuk, hogy az E kifejezés jól típusozott.*

Jól típusozott kifejezés = típusozható kifejezés

Formális típusrendszer: definíció

Definíció. *Formális típusrendszer*
Legyen $\mathcal{T} = (\mathcal{S}, \mathcal{I}, \mathcal{R})$ egy formális típusrendszer, ahol

- $\mathcal{S}$ *a típusrendszer nyelvtana,*
- $\mathcal{I}$ *a következtetések formáit adja meg,*
- $\mathcal{R}$ *a következtetési szabályok halmaza.*

Egy formális típusrendszer egy formális matematikai rendszernek felel meg.

Formális típusrendszer: típusrendszerek

- Az F_1 (Church-)típusrendszer
  - Alaptípusok
  - Altípusok
  - Típuskikövetkeztetés
- A Curry-típusrendszer
  - Hindley-Milner típuskikövetkeztetés
  - W-, J-, és M-algoritmus
  - Milner-Mycroft típuskikövetkeztetés
- Az F_2 típusrendszer
- Speciális típusos típusrendszerek
  - Rekurzív típus
  - Egzisztenciális típus
  - Lineáris típus
- Magasabbrendű típusrendszerek
- Függő típusrendszerek

Az F_1 típusrendszer

F_1: szintaktika

Definíció. ***Az F_1 típusrendszer szintaktikája***

$$\begin{array}{lcl}
\textit{<típus>} & ::= & \textit{<alaptípus>} \\
 & | & (\textit{<típus>} \to \textit{<típus>}) \\
\textit{<}\lambda\textit{-kifejezés>} & ::= & \textit{<változó>} \\
 & | & (\lambda\ \textit{<változó>} : \textit{<típus>} \ .\ \textit{<}\lambda\textit{-kifejezés>}\ ) \\
 & | & (\textit{<}\lambda\textit{-kifejezés>}\ \textit{<}\lambda\textit{-kifejezés>})
\end{array}$$

Alaptípusok (T_K): $\{$ *Bool*, *Nat* $\}$

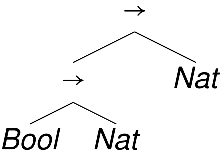
Jelölések és precedenciák:

$$\begin{array}{lcl}
\lambda x : A.(\lambda y : B.E) & \equiv & \lambda x : A.\lambda y : B.E \\
(EF)G & \equiv & EFG \\
(EF) : A & \equiv & EF : A \\
(\lambda x : A.E) : B & \equiv & \lambda x : A.E : B \\
A \to (B \to C) & \equiv & A \to B \to C
\end{array}$$

F_1: a típus mint fa

csomópont	:	$\rightarrow$
levél	:	alaptípus

Például:



A $(Bool \rightarrow Nat) \rightarrow Nat$ típus ábrázolása.

F_1: következtetések

Definíció. ***Az F_1 típusrendszer következtetései***

$\Gamma \vdash wf$	*a Γ jól formált környezet*
$\Gamma \vdash A$	*a Γ környezetben az A jól formált típus*
$\Gamma \vdash E : A$	*a Γ környezetben az E kifejezés típusa A*

Definíció. ***Az F_1 típusrendszer szabályai***

A környezetre vonatkozó szabályok:

$$\frac{}{\varnothing \vdash wf}\ (\text{ENV } \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash A,\ x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash wf}\ (\text{ENV } x)$$

F_1: következtetések (folytatás)

A típusra vonatkozó szabályok:

$$\frac{\Gamma \vdash wf, A \in T_K}{\Gamma \vdash A} \text{ (TYPE CONST)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \text{ (TYPE ARROW)}$$

A kifejezések típusaira vonatkozó szabályok:

$$\frac{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash wf}{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash x : A} \text{ (VAL X)}$$

$$\frac{\Gamma, x : A, x \notin dom(\Gamma) \vdash E : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : A \to B} \text{ (VAL ABS)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : A \to B, \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B} \text{ (VAL APPL)}$$

F_1: példák

A $\lambda x : \mathrm{Nat}.x$ kifejezés típusának meghatározása.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\varnothing \vdash \mathrm{wf}}\;(\textsc{Env}\ \varnothing) \qquad Nat \in T_K}{\varnothing \vdash \mathrm{Nat}}\;(\textsc{Type Const}) \qquad x \notin dom(\varnothing)}{x : Nat \vdash \mathrm{wf}}\;(\textsc{Env x})}{x : Nat \vdash x : Nat}\;(\textsc{V}}{\varnothing \vdash (\lambda x : Nat.x) : Nat \to Nat}$$

F_1: példák

$\varnothing \vdash$

$(\lambda x : Bool \to Nat.\lambda y : Bool.\, \underbrace{x\ y}_{\text{Nat}}) : (Bool \to Nat) \to Bool \to Nat$

$y : Bool \vdash (\lambda x : Bool \to Nat.xy) : (Bool \to Nat) \to Nat$

$\varnothing \vdash (\lambda f : A \to A.\lambda x : A.f\ (f\ x)) : (A \to A) \to A \to A$

$\varnothing \vdash (\lambda x : A.x\ x)(\lambda x : A.x\ x)$

Önalkalmazás:

$\underbrace{x}_{A \to B}\ \underbrace{x}_{A}$

Ekkor $A \to B = A$ (rekurzió), a típus nem határozható meg.

F_1: operációs szemantika, szabad változó

Definíció. ***Szabad változó***

$$
\begin{array}{lcl}
FV(x) & = & \{x\} \\
FV(EF) & = & FV(E) \cup FV(F) \\
FV(\lambda x : A.E) & = & FV(E) \setminus \{x\}
\end{array}
$$

Például:

$FV(x\ y) = \{x, y\}$
$FV(\lambda x : A.x\ y) = \{y\}$
$FV(\lambda x : A.\lambda y : B.x\ y) = \emptyset$

F_1: operációs szemantika, helyettesítés

Definíció. ***Helyettesítés***

$$1.\quad x[y := G] \equiv \begin{cases} G & \textit{ha } x \equiv y \\ x & \textit{egyébként} \end{cases}$$

$$2.\quad (EF)[y := G] \equiv (E[y := G])(F[y := G])$$

$$3.\quad (\lambda x : A.E)[y := G] \equiv \begin{cases} \lambda x : A.E[y := G] & \textit{ha } x \not\equiv y \textit{ és} \\ & x \notin FV(G) \\ \lambda x : A.E & \textit{egyébként} \end{cases}$$

Lemma. ***Helyettesítési lemma***

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash E : B, \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E[x := F] : B}\ (\text{SUBST})$$

F_1: operációs szemantika, típuskörnyezet

Lemma. ***Típuskörnyezet permutációja***
Legyen a Γ típuskörnyezet egy permutációja Γ'. Ha $\Gamma \vdash E : A$, akkor $\Gamma' \vdash E : A$.

Lemma. ***Típuskörnyezet bővítése***
Ha $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash E : A$ és $x \notin FV(E)$, akkor $\Gamma_1, x : B, \Gamma_2 \vdash E : A$.

Lemma. ***Típuskörnyezet szűkítése***
Ha $\Gamma' \vdash E : A$ és

$$\Gamma'' = \{x : B \mid x : B \in \Gamma', x \in FV(E)\}$$

akkor $\Gamma'' \vdash E : A$.

F_1: operációs szemantika, α-konverzió

Definíció. ***α-konverzió***
Ha $y \notin FV(E)$, akkor

$$\lambda x : A.E \leftrightarrow_\alpha \lambda y : A.E[x := y]$$

Lemma. ***Az α-konverzió típusszabálya***

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : A \to B, y \notin (FV(E) \cup dom(\Gamma))}{\Gamma \vdash \lambda y : A.E[x := y] : A \to B} \;(\text{CONV } \alpha)$$

F_1: operációs szemantika, helyettesítés α-konverzióval

Definíció. ***Helyettesítés α-konverzióval***

$$
\begin{array}{lll}
1. & x[y := G] & \equiv \begin{cases} G & \textit{ha } x \equiv y \\ x & \textit{egyébként} \end{cases} \\[2ex]
2. & (EF)[y := G] & \equiv (E[y := G])(F[y := G]) \\[2ex]
3. & (\lambda x : A.E)[y := G] & \equiv \begin{cases} \lambda x : A.E & \textit{ha } x \equiv y \\ \lambda x : A.E[y := G] & \textit{ha } x \not\equiv y \textit{ és} \\ & x \notin FV(G) \\ \leftrightarrow_\alpha (\lambda z : A.E[x := z])[y := G] & \\ \equiv \lambda z : A.E[x := z][y := G] & \\ & \textit{ha } x \not\equiv y \textit{ és} \\ & x \in FV(G) \\ & z \notin FV(E) \\ & z \notin FV(G) \end{cases}
\end{array}
$$

F_1: operációs szemantika, β-redukció

Definíció. ***β*-redukció**
Ha $FV(F) \subseteq FV(E[x := F])$, akkor

$$(\lambda x : A.E)\ F \rightharpoonup_\beta E[x := F]$$

Lemma. ***A β-redukció típusszabálya***

$$\frac{\Gamma \vdash (\lambda x : A.E)\ F : B, FV(F) \subseteq FV(E[x := F])}{\Gamma \vdash E[x := F] : B}\ (\text{RED } \beta)$$

F_1: operációs szemantika, η-konverzió

Definíció. ***η-konverzió***
Ha E egy absztrakció és $x \notin FV(E)$, akkor

$$\lambda x : A.E\ x \leftrightarrow_\eta E$$

Lemma. ***Az η-konverzió típusszabálya***

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x : A.E\ x : A \to B, x \notin FV(E)}{\Gamma \vdash E : A \to B}\ (\textsc{conv}\ \eta)$$

F_1: operációs szemantika, tulajdonságok

Tétel. ***A haladás tétele***
Ha E egy jól típusozott zárt kifejezés, akkor

- *E egy érték (változó vagy λ-absztrakció), vagy*
- *van olyan F kifejezés, amelyre $E \rightarrowtriangle F$.*

Tétel. ***A tárgyredukció (típusmegmaradás) tétele***
Ha $\Gamma \vdash E : A$ és $E \overset{*}{\rightarrowtriangle}_\beta F$, akkor $\Gamma \vdash F : A$.

$$K\ I\ \Omega \rightarrow_\beta I, \text{ viszont } \varnothing \vdash K\ I\ \Omega :?$$

Tétel. ***A tárgykiterjesztés (típuskiterjesztés) tétele***
Ha $\Gamma \vdash F : B$ és létezik olyan E, hogy $E \overset{*}{\rightarrowtriangle}_\beta F$ és $\Gamma \vdash E : A$, akkor $A \equiv B$.

F_1: operációs szemantika, tulajdonságok (folytatás)

Tétel. ***Típusok egyértelműsége***
Ha $\Gamma \vdash E : A$ *és* $\Gamma \vdash E : B$*, akkor* $A \equiv B$*.*

Tétel. ***Az erős normalizálás tétele***
Az $E : A$ *jól típusozott kifejezésnek nincs végtelen redukciós sorozata.*

Tétel. ***A normalizálás tétele***
Ha $E : A$*, akkor* E *normalizálható.*