A kibővített alaptípus-halmazú F_1 típusrendszer

F_1: szintaktika (ismétlés)

<típus>	::=	<alaptípus>
	|	(<típus> → <típus>)
<λ-kifejezés>	::=	<változó>
	|	(λ <változó> : <típus> . <λ-kifejezés>)
	|	(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}, A \in T_K}{\Gamma \vdash A}\ (\text{TYPE CONST}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\text{TYPE ARROW})$$

$$\frac{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash x : A}\ (\text{VAL X})$$

$$\frac{\Gamma, x : A, x \notin dom(\Gamma) \vdash E : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : A \to B}\ (\text{VAL ABS}) \qquad \frac{\Gamma \vdash E : A \to B, \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B}\ (\text{VAL APPL})$$

F_1: szemantika (ismétlés)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash E : B, \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E[x := F] : B} \text{ (SUBST)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : A \to B, y \notin (FV(E) \cup dom(\Gamma))}{\Gamma \vdash \lambda y : A.E[x := y] : A \to B} \text{ (CONV } \alpha\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\lambda x : A.E)\ F : B, FV(F) \subseteq FV(E[x := F])}{\Gamma \vdash E[x := F] : B} \text{ (RED } \beta\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \lambda x : A.E\ x : A \to B, x \notin FV(E)}{\Gamma \vdash E : A \to B} \text{ (CONV } \eta\text{)}$$

F_1: tulajdonságok (ismétlés)

Tétel. ***A haladás tétele***

Ha E típusozható és zárt, akkor:

- *E egy érték (változó vagy λ-absztrakció), vagy*
- *van olyan F kifejezés, amelyre $E \twoheadrightarrow F$.*

Tétel. ***A tárgyredukció (típusmegmaradás) tétele***

Ha $\Gamma \vdash E : A$ és $E \overset{*}{\twoheadrightarrow}_\beta F$, akkor $\Gamma \vdash F : A$.

Tétel. ***A tárgykiterjesztés (típuskiterjesztés) tétele***

Ha $\Gamma \vdash F : B$ és létezik olyan E, hogy $E \overset{*}{\twoheadrightarrow}_\beta F$ és $\Gamma \vdash E : A$, akkor $A \equiv B$.

Tétel. ***Típusok egyértelműsége***

Ha $\Gamma \vdash E : A$ és $\Gamma \vdash E : B$, akkor $A \equiv B$.

Tétel. ***Az erős normalizálás tétele***

Ha $E : A$ típusozható, nincs végtelen redukciós sorozata.

Tétel. ***A normalizálás tétele***

Ha $E : A$, akkor E normalizálható.

F_1: az alaptípusok bővítése

Az F_1 típusrendszer eddig a *Bool* és *Nat* alaptípusokat tartalmazta.

$$\text{alaptípus} \equiv \text{elemi típus}$$

De számos további alaptípus adható hozzá a rendszerhez: *Unit*, *Pair*, *Union*, *List*, ...

F_1: a *Unit* típus

$Unit \equiv Void \equiv Null$

A típusnak csak egyetlen, eldobható értéke van, ez a unit.
Nincsenek műveletei, mellékhatásos függvények eredménye.

$unit \equiv \lambda x.x$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash Unit}\ (\textsc{Type Unit}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \mathrm{unit} : Unit}\ (\textsc{Val Unit})$$

F_1: a *Bool* típus

$$\begin{array}{lcl} \text{true} & \equiv & \lambda x\, y.x \\ \text{false} & \equiv & \lambda x\, y.y \\ \text{if} & \equiv & \lambda p\, q\, r.p\, q\, r \end{array}$$

Például:

$$\text{if true } 1\ 0 \equiv (\lambda p\, q\, r.p\, q\, r)\ (\lambda x\, y.x)\ 1\ 0 \twoheadrightarrow_{\beta_*} (\lambda x\, y.x)\ 1\ 0 \twoheadrightarrow_{\beta} 1$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{wf}}{\Gamma \vdash \mathit{Bool}}\ (\textsc{Type Bool}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \text{wf}}{\Gamma \vdash \text{true} : \mathit{Bool}}\ (\textsc{Val True})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \text{wf}}{\Gamma \vdash \text{false} : \mathit{Bool}}\ (\textsc{Val False})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Bool}, \Gamma \vdash F : A, \Gamma \vdash G : A}{\Gamma \vdash (\text{if } E\ F\ G) : A}\ (\textsc{Fun If})$$

F_1: a *Nat* típus

Ábrázolás Church-számokkal:

$$
\begin{array}{lcl}
c_0 & \equiv & \lambda f\, x.x \\
\mathrm{succ} & \equiv & \lambda n\, f\, x.f\ (n\ f\ x) \\
\mathrm{pred} & \equiv & \lambda n.(n\ (\lambda yz.z\ (\mathrm{succ}\ (y\ \mathrm{true}))(y\ \mathrm{true}))\ (\lambda z.z\ c_0 c_0))\ \mathrm{false} \\
\mathrm{zero} & \equiv & \lambda x.x\ (\mathrm{true}\ \mathrm{false})\ \mathrm{true}
\end{array}
$$

Például:

$$c_1 \equiv \mathrm{succ}\ c_0 \equiv (\lambda n\, f\, x.f\ (n\ f\ x))\ (\lambda f\, x.x)$$
$$\rightarrow_\beta \lambda f\, x.f\ ((\lambda f\, x.x)\ f\ x) \rightarrow_{\beta_*} \lambda f\, x.f\ x$$
$$c_2 \equiv \mathrm{succ}\ c_1 \equiv (\lambda n\, f\, x.f\ (n\ f\ x))\ (\lambda f\, x.f\ x)$$
$$\rightarrow_\beta \lambda f\, x.f\ ((\lambda f\, x.f\ x)\ f\ x) \rightarrow_{\beta_*} \lambda f\, x.f\ (f\ x)$$
$$\ldots$$
$$\mathrm{zero}\ c_1 \equiv (\lambda x.x\ ((\lambda x\, y.x)\ (\lambda x\, y.y))\ (\lambda x\, y.x))\ (\lambda f\, x.f\ x)$$
$$\rightarrow_\beta (\lambda f\, x.f\ x)\ ((\lambda x\, y.x)\ (\lambda x\, y.y))\ (\lambda x\, y.x)$$
$$\rightarrow_{\beta_*} ((\lambda x\, y.x)\ (\lambda x\, y.y))\ (\lambda x\, y.x) \rightarrow_{\beta_*} \lambda x\, y.y \equiv \mathrm{false}$$

F_1: a *Nat* típus

$$
\begin{array}{lcl}
c_0 & \equiv & \lambda f\, x.x \\
\mathrm{succ} & \equiv & \lambda n\, f\, x.f\ (n\ f\ x) \\
\mathrm{pred} & \equiv & \lambda n.(n\ (\lambda yz.z\ (\mathrm{succ}\ (y\ \mathrm{true}))(y\ \mathrm{true}))\ (\lambda z.z\ c_0 c_0))\ \mathrm{false} \\
\mathrm{zero} & \equiv & \lambda x.x\ (\mathrm{true\ false})\ \mathrm{true}
\end{array}
$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \mathit{Nat}}\ (\text{TYPE NAT}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash c_0 : \mathit{Nat}}\ (\text{VAL } c_0)$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Nat}}{\Gamma \vdash \mathrm{succ}\ E : \mathit{Nat}}\ (\text{VAL SUCC}) \qquad \frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Nat}}{\Gamma \vdash \mathrm{pred}\ E : \mathit{Nat}}\ (\text{FUN PRED})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Nat}}{\Gamma \vdash \mathrm{zero}\ E : \mathit{Bool}}\ (\text{FUN ZERO})$$

F_1: a *Pair* típus

$$\begin{array}{lclcl} \text{pair} & \equiv & \lambda x\ y\ z.z\ x\ y & & \\ \text{first} & \equiv & \lambda x.x\ \text{true} & \equiv & \lambda x.x\ (\lambda y\ z.y) \\ \text{second} & \equiv & \lambda x.x\ \text{false} & \equiv & \lambda x.x\ (\lambda y\ z.z) \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash Pair_{A_1 \times A_2}} \ (\text{TYPE PAIR}_{A_1 \times A_2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E_1 : A_1, \Gamma \vdash E_2 : A_2}{\Gamma \vdash \text{pair}\ E_1\ \ E_2 : Pair_{A_1 \times A_2}} \ (\text{VAL PAIR})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : Pair_{A_1 \times A_2}}{\Gamma \vdash \text{first}\ E : A_1} \ (\text{FUN FIRST})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : Pair_{A_1 \times A_2}}{\Gamma \vdash \text{second}\ E : A_2} \ (\text{FUN SECOND})$$

F_1: a *Union* típus (1/3)

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 , \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash \mathit{Union}_{A_1+A_2}} \ (\text{TYPE UNION}_{A_1+A_2})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : A_1 , \Gamma \vdash A_2}{\Gamma \vdash (\text{inLeft}_{A_1+A_2}\ E) : \mathit{Union}_{A_1+A_2}} \ (\text{VAL INLEFT})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Union}_{A_1+A_2}}{\Gamma \vdash (\text{isLeft}\ E) : \mathit{Bool}} \ (\text{FUN ISLEFT})$$

Ha $E : A_1$, akkor
isLeft $(\text{inLeft}_{A_1+A_2}\ E) \quad \rightarrow_\beta \quad$ true

F_1: a *Union* típus (2/3)

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \Gamma \vdash E : A_2}{\Gamma \vdash (\mathrm{inRight}_{A_1+A_2}\ E) : Union_{A_1+A_2}} \quad (\text{VAL INRIGHT})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : Union_{A_1+A_2}}{\Gamma \vdash (\mathrm{isRight}\ E) : Bool} \quad (\text{FUN ISRIGHT})$$

Ha $F : A_2$, akkor

$$\begin{array}{lll} \mathrm{isLeft}\ (\mathrm{inRight}_{A_1+A_2}\ F) & \rightarrow_\beta & \mathrm{false} \\ \mathrm{isRight}\ (\mathrm{inRight}_{A_1+A_2}\ F) & \rightarrow_\beta & \mathrm{true} \end{array}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : Union_{A_1+A_2}, \Gamma \vdash F_1 : B, \Gamma \vdash F_2 : B}{\Gamma \vdash \begin{array}{ll} (\mathrm{case}\ E\ \mathrm{of} & \\ \quad (\mathrm{isLeft}\ E) & \mathrm{then}\ F_1 \\ \quad (\mathrm{isRight}\ E) & \mathrm{then}\ F_2) : B \end{array}} \quad (\text{FUN CASE})$$

F_1: a *Union* típus (3/3)

$$\begin{array}{lcl} \mathit{Bool} & \equiv & \mathit{Union}_{\mathit{Unit}+\mathit{Unit}} \\ \\ \text{true} & \equiv & \text{inLeft}_{\mathit{Unit}+\mathit{Unit}}\ \text{unit} \\ \text{false} & \equiv & \text{inRight}_{\mathit{Unit}+\mathit{Unit}}\ \text{unit} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{case } E \text{ of} \\ \qquad \begin{array}{ll} (\text{isLeft } E) & \text{then } F_1 \\ (\text{isRight } E) & \text{then } F_2 \end{array} \end{array} \quad \equiv \quad \text{if } E \text{ then } F_1 \text{ else } F_2$$

F_1: a *Ref* típus

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathit{Ref}_A}\ (\textsc{type ref}_A) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (\text{alloc } M) : \mathit{Ref}_A}\ (\textsc{val alloc})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Ref}_A}{\Gamma \vdash (\text{dealloc } M) : A}\ (\textsc{val dealloc})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathit{Ref}_A, \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (M \ := \ N) : \mathit{Unit}}\ (\textsc{fun assign})$$

F_1: a *List* típus (1/2)

Típus nélküli esetben:

$$\begin{array}{lcl} \text{nil} & \equiv & \text{pair true true} \\ \text{cons} & \equiv & \lambda x\ y.\text{pair false}\ (\text{pair}\ x\ y) \\ \text{head} & \equiv & \lambda x.\text{first}\ (\text{second}\ x) \\ \text{tail} & \equiv & \lambda x.\text{second}\ (\text{second}\ x) \\ \text{empty} & \equiv & \text{first} \end{array}$$

A konkrét típus mindig $List_A$, ahol A a lista elemeinek típusa.

nil : $List_A$

Ennek megfelelően: $\text{nil}_A, \text{nil}_B, \text{nil}_C, \ldots$

F_1: a *List* típus (2/2)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash List_A}\ (\textsc{type list}_A) \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \mathrm{nil} : List_A}\ (\textsc{val nil})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : A, \Gamma \vdash F : List_A}{\Gamma \vdash (\mathrm{cons}\ E\ F) : List_A}\ (\textsc{val cons})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : List_A}{\Gamma \vdash (\mathrm{head}\ E) : A}\ (\textsc{fun head}) \qquad \frac{\Gamma \vdash E : List_A}{\Gamma \vdash (\mathrm{tail}\ E) : List_A}\ (\textsc{fun tail})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : List_A}{\Gamma \vdash (\mathrm{empty}\ E) : Bool}\ (\textsc{fun empty})$$

F_1: a *Record* (általánosított *Pair*) típus

Típus nélküli esetben (a sorrend lényeges):

record $l_1 = E_1 \ \ldots \ l_n = E_n$
selector_l_j (record $l_1 = E_1 \ \ldots \ l_n = E_n$) $\rightarrow_\beta$ E_j $(1 \le j \le n)$

$$\mathit{Record}\{l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n\} \ \equiv \ \{\!|\ l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \ |\!\}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \ldots, \Gamma \vdash A_n}{\Gamma \vdash \{\!|\ l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \ |\!\}} \ (\text{TYPE RECORD})$$

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 : A_1, \ldots, \Gamma \vdash F_n : A_n}{\Gamma \vdash (\text{record } l_1 = F_1 \ \ldots \ l_n = F_n) : \{\!|\ l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \ |\!\}} \ (\text{VAL RECORD})$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\text{record } l_1 = F_1 \ \ldots \ l_n = F_n) : \{\!|\ l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \ |\!\}}{\Gamma \vdash \text{selector\_}l_i \ (\text{record } l_1 = F_1 \ \ldots \ l_n = F_n) : A_i} \ (\text{FUN SELECTOR})$$

F_1: a *Variant* (általánosított *Union*) típus

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \ldots, \Gamma \vdash A_n}{\Gamma \vdash \mathit{Variant}\{l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n\}} \text{ (TYPE VARIANT)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1, \ldots, A_n, \Gamma \vdash E : A_i}{\Gamma \vdash (\mathrm{inVariant}_{l_1:A_1,\ldots,l_n:A_n}\ l_i = E) : \mathit{Variant}\{l_1 : A_1, \ldots, l_i : A_i, \ldots, l_n : A_n\}} \text{ (VAL INVARIAN}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Variant}\{l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n\}}{\Gamma \vdash (\mathrm{isVariant}_{l_1:A_1,\ldots,l_n:A_n}\_l_i\ E) : \mathit{Bool}} \text{ (FUN ISVARIANT)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Variant}\{l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n\}, \Gamma \vdash F_1 : B, \ldots, \Gamma \vdash F_n : B}{\Gamma \vdash \begin{array}{l} (\text{case } E \text{ of} \\ \qquad (\mathrm{isVariant}_{l_1:A_1,\ldots,l_n:A_n}\_l_1\ E) \quad \text{then } F_1 \\ \qquad \ldots \\ \qquad (\mathrm{isVariant}_{l_1:A_1,\ldots,l_n:A_n}\_l_n\ E) \quad \text{then } F_n) : B \end{array}} \text{ (FUN CASEVARIANT)}$$

Az alaptípusok hagyományos definiálása az F_1 típusrendszerben

F^1_{ind}: induktív típusdefiníció (1/2)

Definíció. *Induktív típusdefiníció*
Az <alaptípus> típust definiáló kifejezés a következő:

indtype *<alaptípus>* with

$$E_1 : T_{11} \to T_{12} \to \ldots \to T_{1m_1} \to \textit{<alaptípus>}$$
$$E_2 : T_{21} \to T_{22} \to \ldots \to T_{2m_2} \to \textit{<alaptípus>}$$
$$\ldots$$
$$E_n : T_{n1} \to T_{n2} \to \ldots \to T_{nm_n} \to \textit{<alaptípus>}$$

ahol

- $n \geq 0$ *és* $m_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$
- $E_i (1 \leq i \leq n)$ *az <alaptípus> típuskonstruktora, speciálisan lehet a típus értékhalmazának egy eleme, azaz a típus konstansa is*
- $T_{ij} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i)$ *az ezzel a típusdefinícióval megadott <alaptípus> típusból és a típusrendszerben már ismert típusokból készített jól formált típus.*

F^1_{ind}: induktív típusdefiníció (2/2)

Példák:

$$
\begin{array}{lll}
\text{indtype } \mathit{Absurd} \text{ with} & \varnothing & \\[1ex]
\text{indtype } \mathit{Unit} \text{ with} & \text{unit} & : \mathit{Unit} \\[1ex]
\text{indtype } \mathit{Bool} \text{ with} & \text{true} & : \mathit{Bool} \\
 & \text{false} & : \mathit{Bool} \\[1ex]
\text{indtype } \mathit{Nat} \text{ with} & 0 & : \mathit{Nat} \\
 & \text{succ} & : \mathit{Nat} \to \mathit{Nat} \\[1ex]
\text{indtype } \mathit{Pair}_{A_1 \times A_2} \text{ with} & \text{pair} & : A_1 \to A_2 \to \mathit{Pair}_{A_1 \times A_2} \\[1ex]
\text{indtype } \mathit{List}_A \text{ with} & \text{nil} & : \mathit{List}_A \\
 & \text{cons} & : A \to \mathit{List}_A \to \mathit{List}_A
\end{array}
$$

F^1_{ind}: az iter függvény

Definíció. ***Az iter függvény***

$$
\begin{array}{llcl}
\mathit{iter}\ 0 & x\ f & \rightarrowtriangle & x \\
\mathit{iter}\ (\mathit{succ}\ n) & x\ f & \rightarrowtriangle & f\ (\mathit{iter}\ n\ x\ f)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{iter } 0\ x\ f & = & x \\
\text{iter } 1\ x\ f & = & f\ x \\
\text{iter } 2\ x\ f & = & f\ (f\ x) \\
\ldots & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
E_x & \equiv & \lambda x : \mathit{Nat}.\text{iter } x\ 0 \text{ succ} \\
E_{2x+1} & \equiv & \lambda x : \mathit{Nat}.\text{iter } x\ (\text{succ } 0)\ (\lambda z : \mathit{Nat}.\text{succ } (\text{succ } z)) \\
E_{x+y} & \equiv & \lambda x : \mathit{Nat}.\lambda y : \mathit{Nat}.\text{iter } x\ y \text{ succ} \\
E_{x*y} & \equiv & \lambda x : \mathit{Nat}.\lambda y : \mathit{Nat}.\text{iter } x\ 0\ (\lambda z : \mathit{Nat}.E_{x+y}\ z\ y)
\end{array}
$$

F^1_{ind}: az iter általánosítása: iter_A_B

Definíció. ***Az iter_A_B függvény***

Legyen B egy tetszőleges típus. Ha az A típust megadó induktív típusdefinícióban n konstruktor van, és az i. $(1 \leq i \leq n)$ konstruktor

$$E_i : T_{i1} \to T_{i2} \to \ldots \to T_{im_i} \to A \qquad (m_i \geq 0)$$

alakú, akkor

$$\text{iter\_A\_B}\ (E_i\ G_1\ G_2\ \ldots\ G_{m_i})\ F_1\ F_2\ \ldots\ F_n \twoheadrightarrow F_i\ G'_1\ G'_2\ \ldots\ G'_{m_i}$$

ahol

- $F_i : T'_{i1} \to T'_{i2} \to \ldots \to T'_{im_i} \to B$
- G'_j *azt jelöli, hogy* G_j*-ben minden A típusú* G''_j *részkifejezést az* $(\text{iter\_A\_B}\ G''_j\ F_1\ F_2\ \ldots\ F_n)$ *kifejezéssel helyettesítünk* $(1 \leq j \leq m_i)$
- *és* T'_{ik} *pedig azt jelöli, hogy* T_{ik}*-ban az A minden előfordulását B-re helyettesítjük* $(1 \leq k \leq m_i)$

F^1_{ind}: az iter_Bool_Bool függvény

$$\text{indtype } Bool \text{ with } \begin{array}{ll} \text{true} & : Bool \\ \text{false} & : Bool \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{iter\_Bool\_Bool true } F_1\ F_2 & \rightarrow & F_1 \\ \text{iter\_Bool\_Bool false } F_1\ F_2 & \rightarrow & F_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{and} & \equiv & \lambda x : Bool.\lambda y : Bool.\text{iter\_Bool\_Bool } x\ y \text{ false} \\ \text{or} & \equiv & \lambda x : Bool.\lambda y : Bool.\text{iter\_Bool\_Bool } x \text{ true } y \\ \text{not} & \equiv & \lambda x : Bool.\text{iter\_Bool\_Bool } x \text{ false true} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{not true} & \equiv & (\lambda x : Bool.\text{iter\_Bool\_Bool } x \text{ false true}) \text{ true } \rightarrow_\beta \\ & & \text{iter\_Bool\_Bool true false true } \rightarrow \\ & & \text{false} \end{array}$$

F^1_{ind}: az iter_Bool_Nat függvény

$$\text{iter\_Bool\_Nat} \quad \sim \quad \text{iter\_Bool\_Bool}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{iter\_Bool\_Nat true } F_1 \; F_2 & \rightarrow & F_1 \\ \text{iter\_Bool\_Nat false } F_1 \; F_2 & \rightarrow & F_2 \end{array}$$

$$\text{if } x : \mathit{Bool} \text{ then } y : \mathit{Nat} \text{ else } z : \mathit{Nat} \equiv$$
$$\lambda x : \mathit{Bool}.\lambda y : \mathit{Nat}.\lambda z : \mathit{Nat}.\text{iter\_Bool\_Nat } x \; y \; z$$

$$\text{if false } 2 \; 3 \; \overset{+}{\rightarrow}_\beta \; \text{iter\_Bool\_Nat false } 2 \; 3 \; \rightarrow \; 3$$