A Curry-típusrendszer

Curry-típusrendszer: szintaktika

Definíció. ***A Curry-típusrendszer szintaktikája***

<típus>	::=	*<típusváltozó>*
	|	*(<típus>* $\rightarrow$ *<típus>)*
<λ-kifejezés>	::=	*<változó>*
	|	*(λ <változó> . <λ-kifejezés>)*
	|	*(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)*

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha, \beta, \dots & \text{típusváltozók} \\ \tau & \text{típuskifejezés} \end{array}\right\} E : \tau : \text{Az } E \text{ kifejezés típusa } \tau$$

F_1: $\lambda x : Nat.x : Nat \rightarrow Nat$ $\qquad$ $\alpha \equiv \alpha$

Curry: $\lambda x.x : \alpha \rightarrow \alpha$ $\qquad$ $\alpha \not\equiv \beta$

Curry: $\lambda x.x : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ $\qquad$ $\alpha \rightarrow \alpha \not\equiv \beta \rightarrow \beta$

F_1: $\{ y : Bool \} \vdash \lambda x : Bool \rightarrow Nat.x\ y : (Bool \rightarrow Nat) \rightarrow Nat$

Curry: $\{ y : \beta \} \vdash \lambda x.x\ y : (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Curry-típusrendszer: következtetések

$$\frac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } \emptyset) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau, x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : \tau \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}\ \alpha \in V_T}{\Gamma \vdash \alpha}\ (\text{TYPE VAR}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau, \Gamma \vdash \tau'}{\Gamma \vdash \tau \to \tau'}\ (\text{TYPE ARROW})$$

$$\frac{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash x : \tau}\ (\text{VAL } x) \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash E : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x.E : \tau \to \tau'}\ (\text{VAL ABS})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau \to \tau', \Gamma \vdash F : \tau}{\Gamma \vdash E\ F : \tau'}\ (\text{VAL APPL})$$

$\Gamma \vdash \mathrm{wf}$	A Γ jól formált típuskörnyezet
$\Gamma \vdash \tau$	A Γ környezetben τ jól formált típus
$\Gamma \vdash E : \tau$	A Γ környezetben az E kifejezés típusa τ

Curry-típusrendszer: példák

Egy kifejezéshez több típus is levezethető:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf}, \alpha \in V_T}}{\emptyset \vdash \alpha, x \notin dom(\emptyset)}}{x : \alpha \vdash \mathrm{wf}}}{x : \alpha \vdash x : \alpha}}{\emptyset \vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf},\ \alpha \in V_T}}{\emptyset \vdash \alpha} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf},\ \beta \in V_T}}{\emptyset \vdash \beta}}{\emptyset \vdash \alpha \to \beta,\ x \notin dom(\emptyset)}}{x : \alpha \to \beta \vdash \mathrm{wf}}}{\dfrac{x : \alpha \to \beta \vdash x : \alpha \to \beta}{\emptyset \vdash \lambda x.x : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)}}
$$

Curry-típusrendszer: operációs szemantika

Lemma. ***Helyettesítési lemma***

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash E : \tau', \Gamma \vdash F : \tau}{\Gamma \vdash E[x := F] : \tau'} \text{ (SUBST)}$$

Definíció. ***Típusváltozó helyettesítése (α-konverzió)***

1. $\alpha[\beta := \tau] \equiv \begin{cases} \tau & \textit{ha } \alpha \equiv \beta \\ \alpha & \textit{egyébként} \end{cases}$
2. $(\tau' \to \tau'')[\beta := \tau] \equiv \tau'[\beta := \tau] \to \tau''[\beta := \tau]$

$\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \sim \forall\alpha_1.\ldots.\forall\alpha_n.\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ (korlátozott polimorfizmus)

$$\begin{array}{lcl}
(\alpha \to \alpha)[\alpha := \beta] & \equiv & \beta \to \beta \\
(\alpha \to \alpha)[\alpha := \alpha \to \beta] & \equiv & (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta) \\
(\beta \to \alpha)[\alpha := \beta] & \equiv & \beta \to \beta \\
(\alpha \to \beta)[\alpha := \beta] & \equiv & \beta \to \beta \\
(\alpha \to \alpha)[\alpha := \beta \to \beta] & \equiv & (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta) \\
(\alpha \to \beta \to \alpha)[\alpha := \beta] & \equiv & \beta \to \beta \to \beta
\end{array}$$

Curry-típusrendszer: helyettesítés a környezetben

Típushiba helyettesítés után:

Legyen $\Gamma \equiv \{y : \alpha\}$ és $\lambda x.x : \alpha \to \alpha$, ekkor $(\lambda x.x)\ y$ típusosan helyes. $\alpha := \beta$ helyettesítés hatására ez megszűnik $(\lambda x.x : \beta \to \beta)$.

Definíció. ***Típusváltozó helyettesítése a típuskörnyezetben***

Ha $\Gamma \equiv \{(x_1 : \tau_1), \ldots, (x_n : \tau_n)\}$*, akkor:*
$\Gamma[\beta := \tau] \equiv \{(x_1 : \tau_1[\beta := \tau]), \ldots, (x_n : \tau_n[\beta := \tau])\}$*.*

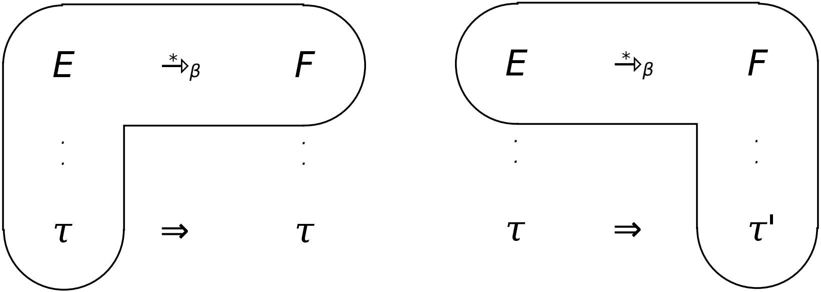
Lemma. ***Típushelyettesítési lemma***

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau}{\Gamma[\alpha := \tau'] \vdash E : \tau[\alpha := \tau']}$$

Curry-típusrendszer: tulajdonságok

Tétel. ***A tárgyredukció (típusmegmaradás) tétele***
Ha $\Gamma \vdash E : \tau$ *és* $E \stackrel{*}{\rightarrow}_\beta F$, *akkor* $\Gamma \vdash F : \tau$.

Tétel. ***A tárgykiterjesztés (típuskiterjesztés) tétele***
Ha $\Gamma \vdash F : \tau'$ *és létezik olyan* E, *hogy* $E \stackrel{*}{\rightarrow}_\beta F$ *és* $\Gamma \vdash E : \tau$, *akkor* $\tau \equiv \tau'$ *nem feltétlenül teljesül.*



Curry-típusrendszer: nem egyértelmű típusok

Tegyük fel, hogy $x : \alpha \to \beta \to \gamma$, $y : \alpha \to \beta$, $z : \alpha$, $u : \phi$, $v : \psi$.

$S \equiv \lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z)$, $S : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$
$K \equiv \lambda u\ v.u$, $K : \phi \to \psi \to \phi$

$S\ K$ csak akkor típusozható, ha $\alpha \to \beta \to \gamma \equiv \phi \to \psi \to \phi$, azaz $\alpha \equiv \gamma \equiv \phi$, $\beta \equiv \psi \leadsto S\ K : (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \alpha$

$S\ K \equiv (\lambda x\ y\ z.x\ z\ (y\ z))\ (\lambda u\ v.u) \overset{+}{\rightarrowtriangle} \lambda y\ z.z : \xi \to \zeta \to \zeta$

Tétel. ***A típusok nem egyértelműek***

Ha $\Gamma \vdash E : \tau$ *és* $\Gamma \vdash E : \tau'$, *akkor a* $\tau \equiv \tau'$ *nem feltétlenül teljesül.*

$\emptyset \vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha$
$\emptyset \vdash \lambda x.x : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$

Curry-típusrendszer: kapcsolat a Church-rendszerrel

$|\cdot| : \Lambda_T \Rightarrow \Lambda$ („felejtés”), ahol

$$
\begin{array}{lcl}
|\, x \,| & \mapsto & x \\
|\, E\ F \,| & \mapsto & |\, E \,|\,|\, F \,| \\
|\, \lambda x:\tau.E \,| & \mapsto & \lambda x.\,|\, E \,|
\end{array}
$$

Tétel. ***Church → Curry konverzió***
Legyen $E \in \Lambda_T$. *Ha* $\Gamma \vdash_{Church} E : \tau$, *akkor* $\Gamma \vdash_{Curry} |\, E \,| : \tau$.

Tétel. ***Curry → Church konverzió***
Legyen $E \in \Lambda$. *Ha* $\Gamma \vdash_{Curry} E : \tau$, *akkor* $\exists E' \in \Lambda_T$, *amelyre* $\Gamma \vdash_{Church} E' : \tau$ *és* $|\, E' \,| \mapsto E$.

Curry-típusrendszer: kapcsolat a Church-rendszerrel

Ha $E, F \in \Lambda_T$ és $E \twoheadrightarrow_\beta F$, akkor $|\, E \,| \twoheadrightarrow_\beta |\, F \,|$.

$$\begin{array}{lcllcl} E & \equiv & (\lambda x:\tau.\lambda y:\tau'.y)\ (\lambda x:\tau.x) & \leadsto & (\lambda x.\lambda y.y)\ (\lambda x.x) \\ F & \equiv & \lambda y:\tau'.y & \leadsto & \lambda y.y \end{array}$$

Ha $E, F \in \Lambda$ és $E \twoheadrightarrow_\beta F$, akkor minden $E' \in \Lambda_T$-hez, amelyre $|\, E' \,| \equiv E$, létezik olyan $F' \in \Lambda_T$, amelyre $|\, F' \,| \equiv F$ és $E' \twoheadrightarrow_\beta F'$.

$$\begin{array}{lcllcl} E & \equiv & (\lambda x.\lambda y.y)\ (\lambda x.x) & \leadsto & (\lambda x:\tau \to \tau.\lambda y:\tau'.y)\ (\lambda x:\tau.x) \\ F & \equiv & \lambda y.y & \leadsto & \lambda y:\tau'.y \end{array}$$

A Curry-típuskikövetkeztetés

Curry-típuskikövetkeztetés: bevezetés

- Típusellenőrzés, a típus levezetése:
  Adott τ és E esetén $\emptyset \vdash E : \tau$ teljesül-e?
- Típusreprezentáció:
  Adott τ esetén, létezik-e E, hogy $\emptyset \vdash E : \tau$?
- Típuskikövetkeztetés, a típus rekonstrukciója:
  Adott E esetén létezik-e τ, hogy $\emptyset \vdash E : \tau$?

$\{x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \ldots, x_n : \tau_n\} \vdash E : \tau$

E lezártja: $\lambda x_1\ x_2\ \ldots\ x_n.E$

$\emptyset \vdash \lambda x_1\ x_2\ \ldots\ x_n.E : \tau_1 \to \tau_2 \to \ldots \to \tau_n \to \tau$

Csak zárt kifejezések típusaival foglalkozunk.

Curry-típuskikövetkeztetés: a módszer összefoglalása

Algoritmus: a típusrendszer szabályaira alapszik

Típusozás korlátozásokkal: a korlátozások generálása, azok megoldása

- Korlátozás (*constraint*): típuskifejezések közti egyenlőség
- Egységesítés (*unification*): a korlátozások egyenletrendszerének megoldása

Curry-típuskikövetkeztetés ≡ Wand-algoritmus

Curry-típusrendszer + `let`-polimorfizmus = Hindley-Milner típusrendszer

Hindley-Milner típusrendszer + polimorfikus rekurzió = Milner-Mycroft típusrendszer

Curry-típusrendszer: típusváltozók helyettesítése

Definíció. ***Típusváltozó helyettesítése***

$$
\begin{array}{lll}
1. & \alpha[\beta := \tau] & \equiv \begin{cases} \tau & \textit{ha } \alpha \equiv \beta \\ \alpha & \textit{egyébként} \end{cases} \\
2. & (\tau' \to \tau'')[\beta := \tau] & \equiv \tau'[\beta := \tau] \to \tau''[\beta := \tau]
\end{array}
$$

Definíció. ***Típusváltozó helyettesítése a típuskörnyezetben***

Ha $\Gamma \equiv \{(x_1 : \tau_1), \ldots, (x_n : \tau_n)\}$, *akkor:*
$\Gamma[\beta := \tau] \equiv \{(x_1 : \tau_1[\beta := \tau]), \ldots, (x_n : \tau_n[\beta := \tau])\}$.

Lemma. ***Típushelyettesítési lemma***

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau}{\Gamma[\alpha := \tau'] \vdash E : \tau[\alpha := \tau']}$$

Curry-típusrendszer: helyettesítések

Definíció. ***Szimultán helyettesítés***

$s \equiv [\alpha_1 := \tau_1, \alpha_2 := \tau_2, \ldots, \alpha_n := \tau_n]$

Példa: $(\alpha \to \beta)\ [\alpha := \beta, \beta := \gamma] \equiv \beta \to \gamma$

Definíció. ***Egymás utáni helyettesítések***

$\tau\ s_1\ s_2 \equiv (\tau\ s_1)\ s_2$

$\tau\ s$	$\equiv$	$\tau\ [..]$	τ helyettesítése
$s_1\ s_2$	$\equiv$	$[..]\ [..]$	egymás utáni helyettesítések
$\tau\ s_1\ s_2$	$\equiv$	$\tau\ [..]\ [..]$	τ egymás utáni helyettesítései

$\tau\ (s_2 \circ s_1) \equiv (\tau\ s_1)\ s_2$

Curry-típusrendszer: típusok variánsai

Definíció. ***Típus variánsa***

Azt mondjuk, hogy a τ típus a τ' típus variánsa, ha van olyan s_1 és s_2 helyettesítés, amelyre $\tau\ s_1 \equiv \tau'$ és $\tau'\ s_2 \equiv \tau$.

Ha τ variánsa τ'-nek, akkor τ' is variánsa τ-nak (szimmetrikus).

α variánsa β:

$$\begin{array}{lll} \alpha\ [\alpha := \beta] & \equiv & \beta \\ \beta\ [\beta := \alpha] & \equiv & \alpha \end{array}$$

$\alpha \to \beta$ variánsa $\gamma \to \delta$:

$$\begin{array}{lll} \alpha \to \beta\ [\alpha := \gamma, \beta := \delta] & \equiv & \gamma \to \delta \\ \gamma \to \delta\ [\gamma := \alpha, \delta := \beta] & \equiv & \alpha \to \beta \end{array}$$

$\alpha \to \beta \to \alpha$ variánsa $\gamma \to \delta \to \gamma$:

$$\begin{array}{lll} (\alpha \to \beta \to \alpha)\ [\alpha := \gamma, \beta := \delta] & \equiv & \gamma \to \delta \to \gamma \\ (\gamma \to \delta \to \gamma)\ [\gamma := \alpha, \delta := \beta] & \equiv & \alpha \to \beta \to \alpha \end{array}$$

Curry-típusrendszer: egységesítő helyettesítés

Definíció. ***Egységesítő helyettesítés***

Azt mondjuk, hogy s egy egységesítő helyettesítés τ *és* τ'*-re, ha* $\tau\ s \equiv \tau'\ s$*.*

$\alpha \to \beta \to \alpha$ és $(\gamma \to \gamma) \to \delta$ egységesítő helyettesítései:

$$
\begin{array}{lcl}
s_1 & \equiv & [\alpha := \gamma \to \gamma, \delta := \beta \to (\gamma \to \gamma)] \\
s_2 & \equiv & [\alpha := \gamma \to \gamma, \beta := \varphi \to \varphi, \delta := (\varphi \to \varphi) \to (\gamma \to \gamma)]
\end{array}
$$

α és $\alpha \to \alpha$ egységesítő helyettesítései:

Nincs ilyen helyettesítés.

Curry-típusrendszer: a legáltalánosabb helyettesítés

Definíció. ***A legáltalánosabb egységesítő helyettesítés***

A τ és τ' típuskifejezések legáltalánosabb egységesítő helyettesítése s, ha:

- *s egységesítő helyettesítés,*
- *minden s_1 egységesítő helyettesítésre van olyan s_2 helyettesítés, hogy $s_1 \equiv s\ s_2$.*

$\alpha \to \beta \to \beta \to \gamma$ és $\alpha \to \alpha \to \beta \to \delta$ egységesítő helyettesítései:

$$
\begin{array}{lcl}
s_1 & \equiv & [\beta := \alpha, \delta := \gamma] \\
s_2 & \equiv & [\alpha := \varphi, \beta := \varphi, \gamma := \delta]
\end{array}
$$

amelyek közül az s_1 a legáltalánosabb egységesítő helyettesítés, mivel:

$$s_2 \equiv s_1\ [\alpha := \varphi, \gamma := \delta]$$

Curry-típusrendszer: általánosabb típus

Definíció. ***Általánosabb típus***

Azt mondjuk, hogy a τ típus általánosabb típus a τ' típusnál, ha létezik olyan s helyettesítés, hogy $\tau' \equiv \tau\, s$. Ezt úgy jelöljük, hogy $\tau' \prec \tau$.

$(\alpha \to \alpha) \prec (\alpha \to \beta)$, mivel $\alpha \to \alpha \equiv \alpha \to \beta\ [\beta := \alpha]$

$(\alpha \to \alpha) \prec (\beta \to \alpha)$, mivel $\alpha \to \alpha \equiv \beta \to \alpha\ [\beta := \alpha]$

$(\alpha \to (\beta \to \beta) \to \alpha) \prec (\alpha \to \beta \to \alpha)$,
mivel $\alpha \to (\beta \to \beta) \to \alpha \equiv (\alpha \to \beta \to \alpha)\ [\beta := \beta \to \beta]$

Curry-típusrendszer: principális típus

Definíció. ***Principális kettős***

A Γ típuskörnyezetből és a τ típusból álló (Γ, τ) kettőst az E kifejezés principális kettősének nevezzük, ha:

- *E minden szabad változója szerepel a Γ környezetben,*
- $\Gamma \vdash E : \tau$
- $\Delta \vdash E : \tau'$, *akkor van olyan s helyettesítés, hogy $\Delta \equiv \Gamma\, s$ és $\tau' \equiv \tau\, s$, azaz $\tau' \prec \tau$.*

Definíció. ***Principális típus***

Legyen $E \in \Lambda_0$ esetén az E kifejezés principális kettőse $(\varnothing, \tau)$. Ekkor a τ típust az E kifejezés principális típusának nevezzük.

$\varnothing \vdash \lambda x.x : \alpha \to \alpha \sim (\beta \to \beta) \to (\beta \to \beta) \equiv \alpha \to \alpha\, [\alpha := \beta \to \beta]$

$\varnothing \vdash \lambda x\, y.x : \alpha \to \beta \to \alpha \sim \beta \to \beta \to \beta \equiv \alpha \to \beta \to \alpha\, [\alpha := \beta]$

$\varnothing \vdash \lambda x\, y\, z.x\, z\, (y\, z) : (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$

Curry-típusrendszer: korlátozások

Principális típus kikövetkeztetése = korlátozások generálása + egységesítés

Definíció. *Korlátozások generálása*

A korlátozások generálását a $\mathcal{T}(\Gamma, E, \tau)$ leképezéssel végezzük, ahol Γ egy típuskörnyezet, E egy kifejezés, és τ egy típus.

$$
\begin{array}{lll}
1.\ \mathcal{T}(\Gamma, x, \tau) & \rightsquigarrow & \{\tau = \Gamma(x)\} \\
2.\ \mathcal{T}(\Gamma, \lambda x.E, \tau) & \rightsquigarrow & \mathcal{T}(\Gamma \cup \{x : \alpha\}, E, \beta) \cup \{\tau = \alpha \to \beta\} \\
 & & \textit{ahol } \alpha \textit{ és } \beta \textit{ új típusváltozók} \\
3.\ \mathcal{T}(\Gamma, E\ F, \tau) & \rightsquigarrow & \mathcal{T}(\Gamma, E, \alpha \to \tau) \cup \mathcal{T}(\Gamma, F, \alpha) \\
 & & \textit{ahol } \alpha \textit{ új típusváltozó}
\end{array}
$$

$\tau = \tau' \sim \tau' = \tau$

Curry-típusrendszer: korlátozások generálása

$$\mathcal{T}(\varnothing, \lambda x.x, \alpha) \rightsquigarrow \mathcal{T}(\{x : \beta\}, x, \gamma) \cup \{\alpha = \beta \to \gamma\} \rightsquigarrow$$
$$\{\gamma = \beta\} \cup \{\alpha = \beta \to \gamma\} \rightsquigarrow \{\alpha = \beta \to \gamma, \gamma = \beta\}$$

$$\mathcal{T}(\{x : \alpha\}, x\ x, \beta) \rightsquigarrow \mathcal{T}(\{x : \alpha\}, x, \gamma \to \beta) \cup \mathcal{T}(\{x : \alpha\}, x, \gamma) \rightsquigarrow$$
$$\{\gamma \to \beta = \alpha\} \cup \mathcal{T}(\{x : \alpha\}, x, \gamma) \rightsquigarrow \{\gamma \to \beta = \alpha\} \cup \{\gamma = \alpha\} \rightsquigarrow$$
$$\{\alpha = \gamma \to \beta, \alpha = \gamma\} \rightsquigarrow \{\alpha \to \beta = \alpha\}$$

$$\mathcal{T}(\varnothing, \lambda x\ y.x, \alpha) \rightsquigarrow \mathcal{T}(\{x : \beta\}, \lambda y.x, \gamma) \cup \{\alpha = \beta \to \gamma\} \rightsquigarrow$$
$$\mathcal{T}(\{x : \beta, y : \delta\}, x, \varphi) \cup \{\gamma = \delta \to \varphi\} \cup \{\alpha = \beta \to \gamma\} \rightsquigarrow$$
$$\{\varphi = \beta\} \cup \{\gamma = \delta \to \varphi\} \cup \{\alpha = \beta \to \gamma\} \rightsquigarrow$$
$$\{\alpha = \beta \to \gamma, \gamma = \delta \to \varphi, \varphi = \beta\} \rightsquigarrow \{\alpha = \beta \to (\delta \to \beta)\}$$

Curry-típusrendszer: a korlátozások kielégítése

Definíció. ***A típusegyenlet megoldása***

A $\tau = \tau'$ típusegyenlet megoldása a τ és τ' típusok s egységesítő helyettesítése. Ha s a legáltalánosabb egységesítő helyettesítés, akkor s az egyenlet legáltalánosabb megoldása.

Definíció. ***A típusegyenlet-rendszer megoldása***

A $\{\tau_1 = \tau'_1, \tau_2 = \tau'_2, \ldots, \tau_n = \tau'_n\}$ egyenletrendszer megoldása egy olyan s egységesítő helyettesítés, amely az egyenletrendszer mindegyik egyenletének a megoldása. Az egyenletrendszer s megoldása a legáltalánosabb, ha s az egyenletrendszer mindegyik egyenletének a legáltalánosabb megoldása.

Curry-típusrendszer: egységesítés

Definíció. ***Egységesítés***

Az egységesítést az $\mathcal{U}(\mathcal{E}, s)$ eljárással végezzük, ahol $\mathcal{E}$ egy egyenletrendszer, és s típusváltozók helyettesítéseiből áll.

1. $\mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\alpha = \alpha\}, s) \rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathcal{E}, s)$
2. $\mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\alpha = \tau\}, s) \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{U}(\mathcal{E}\,[\alpha := \tau], s\,[\alpha := \tau]) & \text{ha } \alpha \notin \tau \\ \texttt{fail} & \text{egyébként} \end{cases}$
3. $\mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\tau \to \tau' = \tau'' \to \tau'''\}, s) \rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\tau = \tau'', \tau' = \tau'''\}, s)$

   $\mathcal{U}(\varnothing, s) \rightsquigarrow s$

Minden típus *monomorf*: ha E egy F részkifejezése τ típusú, akkor az F minden (E-beli) előfordulására fennáll.

Tétel. ***Az egységesítés tétele***

Ha az $\mathcal{E}$ egyenletrendszernek van megoldása,

- *akkor az $\mathcal{U}(\mathcal{E}, \varepsilon)$ eljárás az $\mathcal{E}$ legáltalánosabb megoldását határozza meg,*
- *egyébként az eljárás a `fail` állapottal fejeződik be.*

Curry-típusrendszer: egységesítés, principális típus

Definíció. ***Egységesítés***

Az egységesítést az $\mathcal{U}(\mathcal{E}, s)$ eljárással végezzük, ahol $\mathcal{E}$ egy egyenletrendszer, és s típusváltozók helyettesítéseiből áll.

1. $\mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\alpha = \alpha\}, s) \rightsquigarrow U(\mathcal{E}, s)$
2. $\mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\alpha = \tau\}, s) \rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{U}(\mathcal{E}\,[\alpha := \tau], s\,[\alpha := \tau]) & \textit{ha } \alpha \notin \tau \\ \texttt{fail} & \textit{egyébként} \end{cases}$
3. $\mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\tau \to \tau' = \tau'' \to \tau''', s) \rightsquigarrow \mathcal{U}(\mathcal{E} \cup \{\tau = \tau'', \tau' = \tau'''\}, s)$

Tétel. ***Principális típus tétel***

Ha az $E \in \Lambda_0$ kifejezésnek van típusa,

- *akkor az E principális típusa α s, ahol s az $\mathcal{U}(\mathcal{T}(\varnothing, E, \alpha), \varepsilon)$ eljárásssal meghatározott helyettesítés,*
- *egyébként az $\mathcal{U}(\mathcal{T}(\varnothing, E, \alpha), \varepsilon)$ eljárás eredménye `fail`.*

Curry-típusrendszer: egységesítés

$$\mathcal{T}(\varnothing, \lambda x.x, \alpha) \rightsquigarrow \{\alpha = \beta \to \gamma, \gamma = \beta\}$$

$$\mathcal{U}(\{\alpha = \beta \to \gamma, \gamma = \beta\}, \varepsilon) \rightsquigarrow \mathcal{U}(\{\alpha = \beta \to \beta\}, [\gamma := \beta]) \rightsquigarrow$$
$$\mathcal{U}(\varnothing, [\gamma := \beta]\ [\alpha := \beta \to \beta]) \rightsquigarrow \alpha\ [\gamma := \beta]\ [\alpha := \beta \to \beta] \rightsquigarrow \beta \to \beta$$

$$\mathcal{T}(\{x : \alpha\}, x\ x, \beta) \rightsquigarrow \{\alpha = \gamma \to \beta, \alpha = \gamma\}$$

$$\mathcal{U}(\{\alpha = \gamma \to \beta, \alpha = \gamma\}, \varepsilon) \rightsquigarrow \mathcal{U}(\{\gamma = \gamma \to \beta\}, [\alpha := \gamma]) \rightsquigarrow \texttt{fail}$$