Az $F_{\exists}^{2}$ típusrendszer

$F^2_\exists$: bevezetés

Ha $F : \forall\alpha.\tau'$ és $F\ [\tau''] \twoheadrightarrow_\beta E$, akkor $E : \tau'\ [\alpha := \tau'']$.

„A τ'-beli típusváltozóra van olyan τ'' típus, amellyel az E típusa leírható.”

$\exists\alpha.\tau'$: egzisztenciális típus, $\exists$: típuskonstruktor, ahol a $\exists\alpha.\tau'$ típus elemei: $\langle\tau'', E\rangle \equiv (\texttt{pack}\ \tau''\ \texttt{with}\ E) : \exists\alpha.\tau'$ („csomag”)

$id_{Nat} \equiv (\lambda x : \alpha.x) : (\alpha \to \alpha)\ [\alpha := Nat]$
$(\texttt{pack}\ Nat\ \texttt{with}\ \lambda x : Nat.x) : \exists\alpha.\alpha \to \alpha$

$\lambda x : Nat. +\ x\ 1 : (Nat \to \alpha)\ [\alpha := Nat]$
$(\texttt{pack}\ Nat\ \texttt{with}\ \lambda x : Nat. +\ x\ 1) : \exists\alpha.Nat \to \alpha$

$(\lambda x : Nat.\texttt{true}) : (Nat \to \alpha)\ [\alpha := Bool]$
$(\texttt{pack}\ Bool\ \texttt{with}\ \lambda x : Nat.\texttt{true}) : \exists\alpha.Nat \to \alpha$

$F^2_\exists$: bevezetés

Több különböző egzisztenciális típusnak lehet közös eleme:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{pack}\ \mathit{Nat}\ \texttt{with}\ \lambda x : \mathit{Nat}.x & \in & \exists\alpha.\alpha \to \alpha \\ & \in & \exists\alpha.\mathit{Nat} \to \alpha \\ & \in & \exists\alpha.\alpha \to \mathit{Nat} \end{array}$$

`pack` („becsomagolás”) $\leftrightarrow$ `unpack` („kicsomagolás”, `open`)

$\texttt{unpack}\ \beta, x\ \texttt{from}\ F\ \texttt{in}\ G$, ahol

$F \equiv \texttt{pack}\ \tau''\ \texttt{with}\ E : \exists\alpha.\tau'$

x: új változó, $x := E : \tau'\ [\alpha := \beta]$
β: új típusváltozó, $\beta := \tau''$, $\beta \notin FTV(G)$

- F-ben az α változó, a τ'' típus és az E kifejezés rejtett marad
- G-ben az x és β értékekre lehet csak hivatkozni

$F^2_\exists$: szintaktika

Definíció. ***Az $F^2_\exists$ típusrendszer szintaktikája***

<típus> ::= *<típusváltozó>*
| *(<típus> $\to$ <típus>)*
| *($\forall$ <típusváltozó> . <típus>)*
| *($\exists$ <típusváltozó> . <típus>)*

<λ-kifejezés> ::= *<változó>*
| *(λ <változó> : <típus> . <λ-kifejezés>)*
| *(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)*
| *(Λ <típusváltozó> . <λ-kifejezés>)*
| *(<λ-kifejezés> [<típus>])*
| `pack` *<típus>* `with` *<λ-kifejezés>*
| `unpack` *<típusváltozó>, <változó>*
`from` *<λ-kifejezés>* `in` *<λ-kifejezés>*

$F^2_\exists$: új szabályok

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \tau}{\Gamma \vdash \exists\alpha.\tau} \text{ (TYPE EXISTS)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau'' \qquad \Gamma \vdash E : \tau'[\alpha := \tau'']}{\Gamma \vdash \texttt{pack } \tau'' \texttt{ with } E : \exists\alpha.\tau'} \text{ (VAL PACK)}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \beta \qquad \Gamma \vdash F : \exists\alpha.\tau' \\ \Gamma, \beta, x : \tau'[\alpha := \beta] \vdash G : \tau, \ \alpha \notin FTV(\tau)\end{array}}{\Gamma \vdash (\texttt{unpack } \beta, x \texttt{ from } F \texttt{ in } G) : \tau} \text{ (VAL UNPACK)}$$

Nincs szükség az F kifejezésbe csomagolt E kifejezésre és τ'' típusra, futási időig rejtve maradnak

$F^2_\exists$: példa típusellenőrzésre

$$E \equiv \texttt{pack}\ \mathit{Nat}\ \texttt{with}\ \{\ f_1 = 0, f_2 = \lambda x : \mathit{Nat}. +\ \ x\ 1\ \}$$
$$E : \exists\alpha.\{\!|\ \ f_1 : \alpha, f_2 : \alpha \to \mathit{Nat}\ \ |\!\}$$

$$F \equiv \texttt{unpack}\ \beta, y\ \texttt{from}\ E\ \texttt{in}\ (+\ (y.f_2\ y.f_1)\ 2)$$
$$F : \tau,\ \ \tau = ?$$

$$y : \{\!|\ \ f_1 : \alpha, f_2 : \alpha \to \mathit{Nat}\ \ |\!\}\ [\alpha := \beta] = \text{(VAL UNPACK)}$$
$$y : \{\!|\ \ f_1 : \beta, f_2 : \beta \to \mathit{Nat}\ |\!\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y.f_2 : \beta \to \mathit{Nat} \\ y.f_1 : \beta \end{array}\right\} y.f_2\ y.f_1 : \mathit{Nat}$$

$$\tau = \mathit{Nat}$$

$F_\exists^2$: operációs szemantika

Definíció. ***Az $F_\exists^2$ típusrendszer operációs szemantikája***

Ha $E : \tau' \, [\alpha := \tau'']$ *és így* $\texttt{pack}\, \tau''\, \texttt{with}\, E : \exists\alpha.\tau'$, *akkor*
$\texttt{unpack}\, \beta, x\, \texttt{from}\, (\texttt{pack}\, \tau''\, \texttt{with}\, E)\, \texttt{in}\, G \rightarrow_\beta G[x := E][\beta := \tau'']$

Például:

$E \equiv (\texttt{pack}\ Nat\ \texttt{with}\ \lambda x : Nat. + \ x\ 1) : \exists\alpha.Nat \rightarrow \alpha$

$\texttt{unpack}\ \beta, y\ \texttt{from}\ E\ \texttt{in}\ (y\ 3) \twoheadrightarrow_\beta$
$(y\ 3)\ [y := \lambda x : Nat. + \ x\ 1][\beta := Nat] \equiv$
$(y\ 3)\ [y := \lambda x : Nat. + \ x\ 1] \equiv (\lambda x : Nat. + \ x\ 1)\ 3 \twoheadrightarrow^+ 4$

$E \equiv (\texttt{pack}\ Nat\ \texttt{with}\ \{f_1 = 0, f_2 = \lambda x : Nat. + \ x\ 1\})$
$E : \exists\alpha.\{\!|\ f_1 : \alpha, f_2 : \alpha \rightarrow Nat\ |\!\}$

$\texttt{unpack}\ \beta, y\ \texttt{from}\ E\ \texttt{in}\ ((\lambda z : \beta.(y.f_2\ z))\ y.f_1) \twoheadrightarrow_\beta$
$((\lambda z : \beta.(y.f_2\ z))\ y.f_1)\ [y := \{f_1 = 0, f_2 = \lambda x : Nat. + \ x\ 1\}]\ [\beta := Nat]$
$((\lambda z : \beta.((\lambda x : Nat. + \ x\ 1)\ z))\ 0)\ [\beta := Nat] \equiv$
$(\lambda z : Nat.((\lambda x : Nat. + \ x\ 1)\ z))\ 0 \twoheadrightarrow (\lambda z : Nat.(+\ z\ 1))\ 0 \twoheadrightarrow$
$+\ 0\ 1 \twoheadrightarrow_\delta 1$

Az egzisztenciális típusok használata

Egzisztenciális típus: *Number1*

$$Number1 \equiv Nat$$

$$A_{Number1} \equiv \left\{\!\left|\begin{array}{ll} \texttt{make} & : Nat \to Number1 \\ ,\ \texttt{add} & : Number1 \to Number1 \to Number1 \\ ,\ \texttt{parity} & : Number1 \to Bool \end{array}\right|\!\right\}$$

$$E_{Number1} \equiv \left\{\begin{array}{ll} \texttt{make} & = \lambda x : Nat.x \\ ,\ \texttt{add} & = \lambda x : Number1.\lambda y : Number1.\texttt{add}\ x\ y \\ ,\ \texttt{parity} & = \lambda x : Number1.\texttt{isodd}\ x \end{array}\right\}$$

$$A \equiv \left\{\!\left|\begin{array}{ll} \texttt{make} & : Nat \to \alpha \\ ,\ \texttt{add} & : \alpha \to \alpha \to \alpha \\ ,\ \texttt{parity} & : \alpha \to Bool \end{array}\right|\!\right\}$$

$$A_{Number1} \equiv A\,[\alpha := Number1]$$
$$E_{Number1} : A\,[\alpha := Number1]$$

$$\texttt{pack}\ Number1\ \texttt{with}\ E_{Number1} : \exists\alpha.A$$

Egzisztenciális típus: *Number2*

$$Number2 \equiv Pair_{Nat \times Bool}$$

$$\begin{array}{lcll}
A_{Number2} & \equiv & \{\!|\ \mathtt{make} & : Nat \to Number2 \\
 & & ,\ \mathtt{add} & : Number2 \to Number2 \to Number2 \\
 & & ,\ \mathtt{parity} & : Number2 \to Bool \\
 & & |\!\} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
E_{Number2} & \equiv & \{\ \mathtt{make} & = \lambda x : Nat.\langle x, \mathtt{isodd}\, x\rangle \\
 & & ,\ \mathtt{add} & = \lambda x : Number2.\lambda y : Number2. \\
 & & & \quad \langle \mathtt{add}\,(\mathtt{first}\ x)\ (\mathtt{first}\ y) \\
 & & & \quad ,\ \mathtt{xor}\,(\mathtt{second}\ x)\ (\mathtt{second}\ y)\rangle \\
 & & ,\ \mathtt{parity} & = \lambda x : Number2.\mathtt{second}\ x \\
 & & \} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcll}
A & \equiv & \{\!|\ \mathtt{make} & : Nat \to \alpha \\
 & & ,\ \mathtt{add} & : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
 & & ,\ \mathtt{parity} & : \alpha \to Bool \\
 & & |\!\} &
\end{array}$$

$$A_{Number2} \equiv A\,[\alpha := Number2]$$
$$E_{Number2} : A\,[\alpha := Number2]$$

$$\mathtt{pack}\ Number2\ \mathtt{with}\ E_{Number2} : \exists \alpha.A$$

A felhasználói program

A következő *Bool* kifejezés értékét akarjuk meghatározni:

`parity` (`add` (`make` 28) (`make` 32))

A programfüggvény:

$$
\begin{array}{llllll}
\texttt{client} & \equiv & \Lambda\alpha. & \lambda x : & \{\!|\ \texttt{make} & : \mathit{Nat} \to \alpha \\
 & & & & ,\ \texttt{add} & : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
 & & & & ,\ \texttt{parity} & : \alpha \to \mathit{Bool} \\
 & & & & |\!\}\ . & \\
 & & & \texttt{let} & \{\!|\ \texttt{makes} & : \mathit{Nat} \to \alpha \\
 & & & & ,\ \texttt{adds} & : \alpha \to \alpha \to \alpha \\
 & & & & ,\ \texttt{checks} & : \alpha \to \mathit{Bool} \\
 & & & & |\!\} & \\
 & & & & \{\ \texttt{makes} & = x.\texttt{make} \\
 & & & & ,\ \texttt{adds} & = x.\texttt{add} \\
 & & & & ,\ \texttt{checks} & = x.\texttt{parity} \\
 & & & & \} & \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{\texttt{in checks}\ (\texttt{adds}\ (\texttt{makes}\ 28)\ (\texttt{makes}\ 32))}
\end{array}
$$

A felhasználói program (folytatás)

$\texttt{client}\ [\mathit{Number1}]\ E_{\mathit{Number1}}$

vagy

$\texttt{client}\ [\mathit{Number2}]\ E_{\mathit{Number2}}$

Ha $\texttt{client} : \mathit{Client}$ és

$$\texttt{lib}_1 \equiv \lambda x : \mathit{Client}.x\ [\mathit{Number1}]\ E_{\mathit{Number1}}$$
$$\texttt{lib}_2 \equiv \lambda x : \mathit{Client}.x\ [\mathit{Number2}]\ E_{\mathit{Number2}}$$

akkor program a

$\texttt{lib}_1\ \texttt{client}$

vagy

$\texttt{lib}_2\ \texttt{client}$

kifejezésekre egyszerűsödik.

A gond viszont az, hogy a $\texttt{lib}_1$ és $\texttt{lib}_2$ argumentuma egy polimorf függvény.

A felhasználói program egzisztenciális típussal

$p_1 \equiv (\texttt{pack}\ \mathit{Number1}\ \texttt{with}\ E_{\mathit{Number1}}) : A$
$p_2 \equiv (\texttt{pack}\ \mathit{Number2}\ \texttt{with}\ E_{\mathit{Number2}}) : A$

$$A \equiv \exists\alpha.\ \{\!|\ \texttt{make} : \mathit{Nat} \to \alpha,\ \texttt{add} : \alpha \to \alpha \to \alpha,\ \texttt{parity} : \alpha \to \mathit{Bool}\ |\!\}$$

```
unpack β, x from p1 in
   let {| makes   : Nat → β
        , adds    : β → β → β
        , checks  : β → Bool
        |} .
        { makes   = x.make
        , adds    = x.add
        , checks  = x.parity
        }
   in checks (adds (makes 28) (makes 32))
```

Az `unpack` kifejezésben nem használjuk a p_1 reprezentációját

Az F_3 típusrendszer

F_3: bevezetés

F_2: $\mathtt{id} \equiv \Lambda\alpha.\lambda x:\alpha.x : \forall\alpha.\alpha \to \alpha$

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{id}\,[\mathit{Nat}] & : & \mathit{Nat} \to \mathit{Nat} \\ \mathtt{id}\,[\mathit{Int}] & : & \mathit{Int} \to \mathit{Int} \\ \mathtt{id}\,[\mathit{Bool}] & : & \mathit{Bool} \to \mathit{Bool} \end{array}$$

Ilyenkor argumentumként mindig meg kell adni a típust, ezért vezessünk be egy típuskonstruktor(-absztrakció)t: $\Lambda\alpha.\alpha \to \alpha$

$$\begin{array}{lclcl} \mathtt{id}\,[\mathit{Nat}] & : & (\Lambda\alpha.\alpha \to \alpha)\ \mathit{Nat} & \twoheadrightarrow & \mathit{Nat} \to \mathit{Nat} \\ \mathtt{id}\,[\mathit{Int}] & : & (\Lambda\alpha.\alpha \to \alpha)\ \mathit{Int} & \twoheadrightarrow & \mathit{Int} \to \mathit{Int} \\ \mathtt{id}\,[\mathit{Bool}] & : & (\Lambda\alpha.\alpha \to \alpha)\ \mathit{Bool} & \twoheadrightarrow & \mathit{Bool} \to \mathit{Bool} \end{array}$$

$E \equiv \Lambda\alpha.F : \forall\alpha.\tau$
és legyen $\Lambda\alpha.\tau$ az E típus típuskonstruktora.

$$\begin{array}{lcl} E[\tau'] & \equiv & (\Lambda\alpha.F)\ [\tau'] \twoheadrightarrow_\beta F\ [\alpha := \tau'] \\ E[\tau'] & : & (\Lambda\alpha.\tau)\ \tau' \twoheadrightarrow_\beta \tau\ [\alpha := \tau'] \end{array}$$

F_3: fajták

$\texttt{twice} \equiv \lambda f.\lambda x.f\ (f\ x)$
F_2: $\Lambda\alpha.\lambda f : \alpha \to \alpha.\lambda x : \alpha.f\ (f\ x) : \forall\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$

A típuskonstruktor: $\Lambda\alpha.(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$

Mi az α típusa az absztrakcióban?

Az összes jól típusozott kifejezés típusának típusa, „fajta” vagy „kind”, jelölés:

$\tau :: \star$ (itt τ „valódi” típus)
$\star \Rightarrow K$: fajtakifejezés:
$(\Lambda\alpha :: \star.\tau) :: \star \Rightarrow K$, ha $\tau :: K$

F_3: szintaktika

Definíció. ***Az F_3 típusrendszer szintaktikája***

<fajta>	::=	$\star$
	|	*($\star \Rightarrow$ <fajta>)*
<típus>	::=	*<típusváltozó>*
	|	*(<típus> $\rightarrow$ <típus>)*
	|	*($\forall$ <típusváltozó> :: <fajta> . <típus>)*
	|	*(Λ <típusváltozó> :: <fajta> . <típus>)*
	|	*(<típus> <típus>)*
<λ-kifejezés>	::=	*<változó>*
	|	*(λ <változó> : <típus> . <λ-kifejezés>)*
	|	*(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)*
	|	*(Λ <típusváltozó> :: <fajta> . <λ-kifejezés>)*
	|	*(<λ-kifejezés> [<típus>])*

F_3: fajták, példák

Definíció. ***Jól formált fajta***

Egy fajta jól formált, ha szintaktikusan helyes, azaz megfelel a fajta szintaktikájának leírásában megadott szintaktikai szabályoknak.

Példák:

$$(\Lambda\alpha :: \star.\lambda : \alpha.x) : (\forall\alpha :: \star.\alpha \to \alpha) :: \star \Rightarrow \star$$

$$(\Lambda\alpha :: \star.(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha) :: \star \Rightarrow \star$$

$$(\Lambda\alpha :: \star.\Lambda\beta :: \star.Pair_{\alpha\times\beta}) :: \star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)$$

$$\star$$
$$\star \Rightarrow \star$$
$$\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)$$
$$\star \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star))$$
$$\star \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)))$$
$$\ldots$$

F_3: típuskörnyezet

Definíció. ***A típuskörnyezet szintaktikája***

<típuskörnyezet> ::= $\varnothing$
| *<típuskörnyezet>, <változó> : <típus>*
| *<típuskörnyezet>, <típusváltozó> :: <fajta>*

valamint a következő tulajdonságokat követeljük meg:

- *ha* $x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2 \in \Gamma$, *akkor* $x_1 \neq x_2$
- *ha* $\alpha_1 :: K_1, \alpha_2 :: K_2 \in \Gamma$, *akkor* $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$\Gamma_V = \{\ x \mid x : \tau \in \Gamma\ \}, \Gamma_{TV} = \{\ \alpha \mid \alpha :: K \in \Gamma\ \}, dom(\Gamma) = \Gamma_V \cup \Gamma_{TV}$$

Definíció. ***Jól formált típuskörnyezet***

A típuskörnyezet jól formált,

- *ha szintaktikusan helyes,*
- $FTV(\Gamma) \subseteq \Gamma_{TV}$, $FTV(\Gamma) = \{\ \alpha \mid \{x : \tau\} \in \Gamma$ *és* $\alpha \in FTV(\tau)\ \}$

F_3: következtetések, következtetési szabályok

Definíció. ***Az F_3 típusrendszer következtetései***

$\Gamma \vdash wf$	*a Γ jól formált típuskörnyezet*
$\Gamma \vdash \tau :: K$	*a Γ környezetben τ fajtája K*
$\Gamma \vdash E : \tau$	*a Γ környezetben az E kifejezés típusa τ*
$\Gamma \vdash K$	*a Γ környezetben a K jól formált fajta*

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : \tau \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } \alpha) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \star}\ (\text{KIND } \star)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \star \qquad \Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash \star \Rightarrow K}\ (\text{KIND } \Rightarrow)$$

F_3: következtetési szabályok (folytatás)

$$\frac{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \alpha :: K} \ (\textsc{Type}\ \alpha)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau' \to \tau'' :: \star} \ (\textsc{Type} \to) \qquad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: \star}{\Gamma \vdash \forall \alpha :: K.\tau :: \star} \ (\textsc{Type}\ \forall)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: \star \vdash \tau :: K}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha :: \star.\tau :: \star \Rightarrow K} \ (\textsc{Type}\ \Lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \Rightarrow K \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau'\ \tau'' :: K} \ (\textsc{Type Appl})$$

F_3: következtetési szabályok (folytatás)

$$\frac{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash x : A}\ (\textsc{val}\ x) \qquad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash E : \tau'' \qquad \Gamma \vdash \tau' :: \star}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau'.E : \tau' \to \tau''}\ (\textsc{val}\ \lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau' \to \tau'' \qquad \Gamma \vdash F : \tau'}{\Gamma \vdash E\ F : \tau''}\ (\textsc{val appl})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash E : \tau}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.E : \forall\alpha :: K.\tau}\ (\textsc{val}\ \Lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \forall\alpha :: K : \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash E\ [\tau''] : \tau'\ [\alpha := \tau'']}\ (\textsc{val}\ [])$$

F_3: példa levezetésre

A $\Lambda\alpha :: \star.\alpha \to \alpha$ típusának levezetése:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{wf}}}{\varnothing \vdash \star} \qquad a \notin dom(\varnothing)}{\alpha :: \star \vdash \mathsf{wf}}}{\alpha :: \star \vdash \alpha :: \star} \qquad \dfrac{\dots}{\alpha :: \star \vdash \alpha :: \star}}{\dfrac{\alpha :: \star \vdash \alpha \to \alpha :: \star}{\varnothing \vdash \Lambda\alpha :: \star.\alpha \to \alpha :: \star \Rightarrow \star}}$$

F_3: operációs szemantika

Tétel. ***A típusváltozó α-konverziójának típusszabálya***

$$\frac{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: \star.\tau :: \star \Rightarrow L \qquad \beta \notin FTV(\tau) \qquad \beta \notin dom(\Gamma)}{\Gamma \vdash \Lambda\beta :: \star.\tau[\alpha := \beta] :: \star \Rightarrow L}\ (\textsc{conv}\ \alpha)$$

Tétel. ***A típusok normalizációjának tétele***

Az F_3 típusrendszerben ha $\Gamma \vdash \tau :: K$, akkor a τ típuskifejezésnek van normálformája.

Tétel. ***A típusok tárgyredukciójának tétele***

Ha $\Gamma \vdash \tau :: K$ és $\tau \twoheadrightarrow^* \tau'$, akkor $\Gamma \vdash \tau' :: K$.

Tétel. ***A haladás tétele***

Ha E egy jól típusozott zárt kifejezés, akkor

- *E egy érték, vagy*
- *van olyan F kifejezés, amelyre $E \rightarrow F$.*

Az $F_4, F_5, \ldots$ típusrendszerek

F_i: a fajták szintjei

Az F_3 rendszerben a fajtákat csak jobbról zárójelezhettük.
Ennek enyhítésére vezessük be a szint fogalmát:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{K}_0 & = & \varnothing, \\
\mathcal{K}_1 & = & \varnothing, \\
\mathcal{K}_2 & = & \{\star\}, \\
\mathcal{K}_i & = & \{\star\} \cup \{\ K \Rightarrow L \mid K \in \mathcal{K}_{i-1} \text{ és } L \in \mathcal{K}_i\ \},\ i > 2,
\end{array}
$$

tehát:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{K}_0 & = & \varnothing, \\
\mathcal{K}_1 & = & \varnothing, \\
\mathcal{K}_2 & = & \{\star\}, \\
\mathcal{K}_3 & = & \{\star, \star \Rightarrow \star, \star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star), \star \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)), \ldots\}, \\
\mathcal{K}_4 & = & \{\star, \star \Rightarrow \star, \star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star), \star \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)), \ldots, \\
 & & (\star \Rightarrow \star) \Rightarrow \star, (\star \Rightarrow \star) \Rightarrow (\star \Rightarrow \star), (\star \Rightarrow \star) \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)), \\
 & & (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)) \Rightarrow \star, (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)) \Rightarrow (\star \Rightarrow \star), \\
 & & \qquad (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)) \Rightarrow (\star \Rightarrow (\star \Rightarrow \star)), \ldots, \\
 & & \ldots\}, \\
\ldots & &
\end{array}
$$

F_i: típusrendszerek és fajták

típusrendszer	típusváltozó fajtája	fajták
F_1	$\mathcal{K}_0(\varnothing)$	$\mathcal{K}_1(\varnothing)$
F_2	$\mathcal{K}_1(\varnothing)$	$\mathcal{K}_2(\star)$
F_3	$\mathcal{K}_2(\star)$	$\mathcal{K}_3$
F_4	$\mathcal{K}_3$	$\mathcal{K}_4$
F_5	$\mathcal{K}_4$	$\mathcal{K}_5$

Az F_ω típusrendszer

F_ω: bevezetés

Az F_ω az $F_1, F_2, \ldots$ típusrendszerek egységesítéseként adható meg:

$$F_\omega = \bigcup_{i \geq 1} F_i$$

Ezektől a típusrendszerektől csak a fajta megadásában különbözik.

<fajta>	::=	$\star$
	|	(<fajta> $\Rightarrow$ <fajta>)

azaz tetszőleges $K \Rightarrow L$ alakú kifejezés, zárójelezés (jobbasszociatív):

$$K_1 \Rightarrow (K_2 \Rightarrow K_3) \equiv K_1 \Rightarrow K_2 \Rightarrow K_3$$

F_ω: szintaktika

Definíció. ***Az*** F_3 ***típusrendszer szintaktikája***

<fajta> ::= $\star$
  | *(<fajta>* $\Rightarrow$ *<fajta>)*

<típus> ::= *<típusváltozó>*
  | *(<típus>* $\rightarrow$ *<típus>)*
  | *(* $\forall$ *<típusváltozó> :: <fajta> . <típus>)*
  | *(* Λ *<típusváltozó> :: <fajta> . <típus>)*
  | *(<típus> <típus>)*

<λ*-kifejezés>* ::= *<változó>*
  | *(*λ *<változó> : <típus> . <*λ*-kifejezés>)*
  | *(<*λ*-kifejezés> <*λ*-kifejezés>)*
  | *(*Λ *<típusváltozó> :: <fajta> . <*λ*-kifejezés>)*
  | *(<*λ*-kifejezés> [<típus>])*

F_ω: példák

Az `id` függvénynek kétféle változata is megadható az F_ω típusrendszerben:

$\mathtt{id} \equiv (\Lambda\alpha :: \star.\lambda x : \alpha.x) : (\forall\alpha :: \star.\alpha \to \alpha)$
$(\Lambda\alpha :: \star.\alpha \to \alpha) :: \star \Rightarrow \star$

$\mathtt{id}_{np} \equiv \Lambda\alpha :: \star \Rightarrow \star.\Lambda\beta :: \star.\lambda x : (\alpha\ \beta).x$
$\mathtt{id}_{np} : \forall\alpha :: \star \Rightarrow \star.\forall\beta :: \star.(\alpha\ \beta) \to (\alpha\ \beta)$
$\Lambda\alpha :: \star \Rightarrow \star.\Lambda\beta :: \star.(\alpha\ \beta) \to (\alpha\ \beta) :: (\star \Rightarrow \star) \Rightarrow \star \Rightarrow \star$

$\mathtt{id}_{np}\ [\lambda\gamma.List\ \gamma]\ [Nat] \equiv$
$(\Lambda\alpha :: \star \Rightarrow \star.\Lambda\beta :: \star.\lambda x : (\alpha\ \beta).x)\ [\lambda\gamma.Nat\ \gamma]\ [Nat] \twoheadrightarrow^{+}$
$\lambda x : ((\lambda\gamma.List\ \gamma)\ Nat).x \to$
$\lambda x : (List\ Nat).x \equiv \lambda x : List_{Nat}.x$

F_ω: típuskörnyezet, következtetések

Definíció. ***A típuskörnyezet szintaktikája***

<típuskörnyezet> ::= $\varnothing$
| *<típuskörnyezet>, <változó> : <típus>*
| *<típuskörnyezet>, <típusváltozó> :: <fajta>*

Definíció. ***Az F_ω típusrendszer következtetései***

$\Gamma \vdash wf$	*a Γ jól formált típuskörnyezet*
$\Gamma \vdash \tau :: K$	*a Γ környezetben τ fajtája K*
$\Gamma \vdash E : \tau$	*a Γ környezetben az E kifejezés típusa τ*
$\Gamma \vdash K$	*a Γ környezetben a K jól formált fajta*

F_ω: következtetési szabályok (1/2)

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : \tau \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } \alpha) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash \star}\ (\text{KIND } \star)$$

$$\frac{\Gamma \vdash K \qquad \Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash K \Rightarrow K}\ (\text{KIND } \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \alpha :: K}\ (\text{TYPE } \alpha)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau' \to \tau'' :: \star}\ (\text{TYPE } \to) \qquad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: \star}{\Gamma \vdash \forall \alpha :: K.\tau :: \star}\ (\text{TYPE } \forall)$$

F_ω: következtetési szabályok (2/2)

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: L}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.\tau :: K \Rightarrow L} \;(\text{TYPE } \Lambda) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau' :: K \Rightarrow L \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau'\;\tau'' :: L} \;(\text{TYPE APP}$$

$$\frac{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash x : \tau} \;(\text{VAL } x) \qquad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash E : \tau'' \qquad \Gamma \vdash \tau' :: \star}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau'.E : \tau' \to \tau''} \;(\text{VAL } \lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau' \to \tau'' \qquad \Gamma \vdash F : \tau'}{\Gamma \vdash E\;F : \tau''} \;(\text{VAL APPL}) \qquad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash E : \tau}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.E : \forall\alpha :: K.\tau} \;(\text{VAL } \Lambda$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \forall\alpha :: K : \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash E\;[\tau''] : \tau'\;[\alpha := \tau'']} \;(\text{VAL } [\,])$$

F_ω: példa levezetésre

A $(\star \Rightarrow \star) \Rightarrow \star$ fajta levezetése:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf}}}{\emptyset \vdash \star} \quad \dfrac{\dfrac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf}}}{\emptyset \vdash \star}}{\emptyset \vdash \star \Rightarrow \star} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\emptyset \vdash \mathrm{wf}}}{\emptyset \vdash \star}}{\emptyset \vdash (\star \Rightarrow \star) \Rightarrow \star}$$

F_ω: operációs szemantika

Lemma. ***A típuskörnyezet gyengítése***
Ha $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash E : \tau$, *akkor* $\Gamma_1, x : \tau', \Gamma_2 \vdash E : \tau$, *és ha* $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \tau :: K$, *akkor* $\Gamma_1, \alpha :: K', \Gamma_2 \vdash \tau :: K$.

Lemma. ***A típuskörnyezet erősítése***
Ha $\Gamma_1, x : \tau, \Gamma_2 \vdash \tau' :: K$, *akkor* $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \tau' :: K$.

Lemma. ***A típuskörnyezet permutációja***
Legyen a Γ *típuskörnyezet permutációja* Γ'. *Ha* $\Gamma \vdash E : \tau$, *akkor* $\Gamma' \vdash E : \tau$, *és ha* $\Gamma \vdash \tau :: K$, *akkor* $\Gamma' \vdash \tau :: K$.

Lemma. ***Kifejezés és típus helyettesítése***
Ha $\Gamma_1, x : \tau, \Gamma_2 \vdash E : \tau'$, *és* $\Gamma_1 \vdash F : \tau$, *akkor* $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash E\left[x := F\right] : \tau'$, *és ha* $\Gamma_1, \alpha :: K, \Gamma_2 \vdash \tau :: K'$, *és* $\Gamma_1 \vdash \tau' :: K$, *akkor* $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \tau\left[\alpha := \tau'\right] :: K'$.

Lemma. ***Összevonás***
Ha $\Gamma_1, x_2 : \tau', x_3 : \tau', \Gamma_2 \vdash E : \tau$, *akkor* $\Gamma_1, x_1 : \tau', \Gamma_2 \vdash E\left[x_2 := x_1\right]\left[x_3 := x_1\right] : \tau$.

F_ω: tulajdonságok

Az F_ω típusrendszer redukciós szabályai:

$(\lambda x : \tau . E)\ F \rightharpoonup E\ [x := F]$
$(\Lambda \alpha :: K . \tau)\ \tau' \rightharpoonup \tau\ [\alpha := \tau']$

Ekkor beláthatóak a következő tételek:

Tétel. ***A típusmegmaradás tétele***
Ha $\Gamma \vdash E : \tau$ *és* $E \rightharpoonup^* F$*, akkor* $\Gamma \vdash F : \tau$*.*

<érték>	::=	<változó>
	|	<típusváltozó>
	|	λ <változó> : <típus> . <λ-kifejezés>
	|	Λ <típusváltozó> :: <fajta> . <λ-kifejezés>

Tétel. ***A haladás tétele***
Ha az E *zárt kifejezésre* $\Gamma \vdash E : \tau$*, akkor* E *vagy egy érték, vagy van olyan* F *kifejezés, amelyre* $E \rightharpoonup F$*.*

Az $F^{\omega}_{<:}$ típusrendszer

$F^{\omega}_{<:}$: bevezetés

F_ω + altípusok = $F^{\omega}_{<:}$

$Top(K) \;\sim\; Top(K) :: K$

$Top(K_1) \neq Top(K_2)$, ha $K_1 \neq K_2$

Egyszerűsítés:

$\alpha <: \tau :: K \equiv a <: Top(K)$

A korábbi típusrendszerek tulajdonságai érvényesek: típusmegmaradás és a haladás tétele

$F^{\omega}_{<:}$: szintaktika

Definíció. ***Az*** $F^{\omega}_{<:}$ ***típusrendszer szintaktikája***

<fajta>	::=	$\star$
	|	*(<fajta>* $\Rightarrow$ *<fajta>)*
<típus>	::=	*(Top (<fajta>))*
	|	*<típusváltozó>*
	|	*(<típus>* $\rightarrow$ *<típus>)*
	|	*(* $\forall$ *<típusváltozó>* $<:$ *<típus> :: <fajta> . <típus>)*
	|	*(* Λ *<típusváltozó>* $<:$ *<típus> :: <fajta> . <típus>)*
	|	*(<típus> <típus>)*
<λ*-kifejezés>*	::=	*<változó>*
	|	*(*λ *<változó> : <típus> . <*λ*-kifejezés>)*
	|	*(<*λ*-kifejezés> <*λ*-kifejezés>)*
	|	*(*Λ *<típusváltozó>* $<:$ *<típus> :: <fajta> . <*λ*-kifejezés>)*
	|	*(<*λ*-kifejezés> [<típus>])*

$F^{\omega}_{<:}$: típuskörnyezet, következtetések

Definíció. ***A típuskörnyezet szintaktikája***

<típuskörnyezet>
::= $\varnothing$
| *<típuskörnyezet>, <változó> : <típus>*
| *<típuskörnyezet>, <típusváltozó>* $<:$ *<típus> :: <fajta>*

Definíció. ***Az*** $F^{\omega}_{<:}$ ***típusrendszer következtetései***

$\Gamma \vdash wf$	*a* Γ *jól formált típuskörnyezet*
$\Gamma \vdash \tau <: \tau' :: K$	*a* Γ *környezetben a* τ' *altípusa* τ *és fajtája* K
$\Gamma \vdash E : \tau$	*a* Γ *környezetben az* E *kifejezés típusa* τ
$\Gamma \vdash K$	*a* Γ *környezetben a* K *jól formált fajta*

$F^{\omega}_{<:}$: következtetési szabályok (1/5)

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : \tau \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau :: K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha <: \tau :: K \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } \alpha_{<:}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash \star}\ (\text{KIND } \star)$$

$$\frac{\Gamma \vdash K \qquad \Gamma \vdash L}{\Gamma \vdash K \Rightarrow L}\ (\text{KIND } \Rightarrow)$$

$F^{\omega}_{<:}$: következtetési szabályok (2/5)

$$\frac{\Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash \mathit{Top}(K) :: K} \ (\text{TYPE } \mathit{Top}) \qquad \frac{\Gamma', \alpha <: \tau :: K, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', \alpha <: \tau :: K, \Gamma'' \vdash \alpha <: \tau :: K} \ (\text{TYPE } \alpha_{<:})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau' \to \tau'' :: \star} \ (\text{TYPE} \Rightarrow) \qquad \frac{\Gamma, \alpha <: \tau' :: K \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \forall \alpha <: \tau' :: K.\tau'' :: \star} \ (\text{TYPE } \forall_{<:})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \mathit{Top}(K) \vdash \tau :: L \qquad \Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.\tau :: K \Rightarrow L} \ (\text{TYPE } \Lambda_{<:})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: K \Rightarrow L \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau' \ \tau'' :: L} \ (\text{TYPE APPL})$$

$F^{\omega}_{<:}$: következtetési szabályok (3/5)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau :: K \qquad \Gamma \vdash K}{\Gamma \vdash \tau <: \mathit{Top}(K) :: K}\ (\textsc{Sub}\ \mathit{Top}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau :: K}{\Gamma \vdash \tau <: \tau :: K}\ (\textsc{Sub Refl})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau <: \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau' <: \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau <: \tau'' :: K}\ (\textsc{Sub Trans})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' <: \tau \qquad \Gamma \vdash \tau'' <: \tau''' \qquad \Gamma \vdash \tau \to \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau \to \tau'' <: \tau' \to \tau'''}\ (\textsc{Sub} \to)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' <: \tau \qquad \Gamma, \alpha <: \tau' \vdash \tau'' <: \tau''' \qquad \Gamma \vdash \forall \alpha <: \tau.\tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \forall \alpha <: \tau.\tau'' <: \forall \alpha <: \tau'.\tau'''}\ (\textsc{Sub}\ \forall)$$

$F^{\omega}_{<:}$: következtetési szabályok (4/5)

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \mathit{Top}(K) \vdash \tau <: \tau'}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.\tau <: \Lambda\alpha :: K.\tau'} \text{ (SUB } \Lambda\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau <: \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau\ \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau\ \tau'' <: \tau'\ \tau''} \text{ (SUB APPL')}$$

$$\frac{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash x : \tau} \text{ (VAL } x\text{)} \qquad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash E : \tau'' \qquad \Gamma \vdash \tau' :: \star}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau'.E : \tau' \to \tau''} \text{ (VAL } \lambda\text{)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau' \to \tau'' \qquad \Gamma \vdash F : \tau'}{\Gamma \vdash E\ F : \tau''} \text{ (VAL APPL)}$$

$F^{\omega}_{<:}$: következtetési szabályok (5/5)

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \tau :: K \vdash E : \tau'}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha <: \tau :: K.E : \forall\alpha <: \tau :: K.\tau'} \ (\text{VAL } \Lambda_{<:})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \forall\alpha <: \tau :: K.\tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' <: \tau :: K}{\Gamma \vdash E\ [\tau''] : \tau'\ [\alpha := \tau'']} \ (\text{VAL APPL'}_{<:})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau \qquad \Gamma \vdash \tau <: \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau' :: \star}{\Gamma \vdash E : \tau'} \ (\text{VAL SUBSUMPTION}_{<:})$$

Az $F_{<:}^{\omega\exists}$ típusrendszer

$F_{<:}^{\omega\exists}$: szintaktika

Definíció. ***Az*** $F_{<:}^{\omega\exists}$ ***típusrendszer szintaktikája***

...

<típus>	*::=*	...
	|	$(\{\!\mid f_1 : \tau_1, \ldots, f_n : \tau_n \mid\!\})$
	|	$\exists\alpha <: \tau.\tau'$

<λ-kifejezés>	*::=*	...
	|	$\{ f_1 = F_1, \ldots, f_n = F_n \}$
	|	`selector_`f_i
	|	`pack` *<típus>* `with` *<λ-kifejezés>*
	|	`unpack` *<típusváltozó>, <változó>* `from` *<λ-kifejezés>* `in` *<λ-kifejezés>*

$F_{<:}^{\omega\exists}$: új következtetési szabályok (1/2)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau_1 :: \star \qquad \dots \qquad \Gamma \vdash \tau_n :: \star}{\Gamma \vdash \{\!|\, f_1 : \tau_1, \dots, f_n : \tau_n \,|\!\}} \text{ (TYPE RECORD)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \tau \vdash \tau' :: \star}{\Gamma \vdash \exists \alpha <: \tau . \tau' : \star} \text{ (TYPE } \exists\text{)}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \tau_1 <: \tau_1' \dots \Gamma \vdash \tau_m <: \tau_m' \quad \Gamma \vdash \tau_{m+1} \dots \Gamma \vdash \tau_n \quad (m \leq n) \\ \{\!|\, f_1 : \tau_1, \dots, f_n : \tau_n \,|\!\} :: \star\end{array}}{\Gamma \vdash \{\!|\, f_1 : \tau_1, \dots, f_n : \tau_n \,|\!\} <: \{\!|\, f_1 : \tau_1', \dots, f_m : \tau_m' \,|\!\}} \text{ (SUB RECORD)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' <: \tau''' \qquad \Gamma, \alpha <: \tau' \vdash \tau'' <: \tau^{iv} \qquad \Gamma \vdash \exists \alpha <: \tau' . \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \exists \alpha <: \tau' . \tau'' <: \exists \alpha <: \tau'' . \tau^{iv}} \text{ (SUB } \exists\text{)}$$

$F^{\omega\exists}_{<:}$: következtetési szabályok (2/2)

$$\frac{\Gamma \vdash F_1 : \tau_1 \ldots \Gamma \vdash F_n : \tau_n}{\Gamma \vdash \{f_1 = F_1, \ldots, f_n = F_n\} : \{\!|\ f_1 : \tau_1, \ldots, f_n : \tau_n \ |\!\}} \text{ (VAL RECORD)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{f_1 = F_1, \ldots, f_n = F_n\} : \{\!|\ f_1 : \tau_1, \ldots, f_n : \tau_n \ |\!\}}{\Gamma \vdash \texttt{selector\_}f_i\{f_1 = F_1, \ldots, f_n = F_n\} : \tau_i} \text{ (FUN SELECTOR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau'' <: \tau \qquad \Gamma \vdash E : \tau' \ [\alpha := \tau'']}{\Gamma \vdash \texttt{pack}\ \tau''\ \texttt{with}\ E : \exists\alpha <: \tau.\tau'} \text{ (VAL } \texttt{PACK}\text{)}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \beta \qquad \Gamma \vdash F : \exists\alpha <: \tau.\tau \\ \Gamma, \beta <: \tau, x : \tau' \ [\alpha := \beta] \vdash G : \tau'' \quad \alpha \notin FTV(\tau'')\end{array}}{\Gamma \vdash (\texttt{unpack}\ \beta, x\ \texttt{from}\ F\ \texttt{in}\ G) : \tau''} \text{ (VAL } \texttt{UNPACK}\text{)}$$