A λP típusrendszer

λP: bevezetés

	absztrakció	arg.	erdm.	arg. $\Rrightarrow$ erdm.
F_1	$\lambda x : A.E$	F	G	kifejezés $\Rrightarrow$ kifejezés
F_2	$\Lambda\alpha.E$	τ	F	típus $\Rrightarrow$ kifejezés
F_ω	$\Lambda\alpha.\tau$	τ'	τ''	típus $\Rrightarrow$ típus
?				kifejezés $\Rrightarrow$ típus

$? \equiv \lambda P \equiv F_1 +$ függő típusok

λP: szintaktika

Definíció. ***A*** λP ***típusrendszer szintaktikája***

<típus>	*::=*	*<alaptípus>*
	|	*(<típus>* $\to$ *<típus>)*
	|	*(* Π *<típusváltozó> : <típus> . <típus>)*

<λ*-kifejezés>*	*::=*	*<változó>*
	|	*(*λ *<változó> : <típus> . <*λ*-kifejezés>)*
	|	*(<*λ*-kifejezés> <*λ*-kifejezés>)*

$\Pi x : A.B$: változótól függő és típust adó absztrakció

függő típus: a B típus függ az x változótól, x hatóköre B

ha $x \notin B$, akkor $\Pi x : A.B \equiv A \to B$

Definíció. ***A*** λP ***típusrendszer következtetései***

$\Gamma \vdash wf$	*a* Γ *jól formált környezet*
$\Gamma \vdash A$	*a* Γ *környezetben az* A *jól formált típus*
$\Gamma \vdash E : A$	*a* Γ *környezetben az* E *kifejezés típusa* A

λP: következtetési szabályok

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathrm{wf}}\ (\textsc{env}\ \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash \mathrm{wf}}\ (\textsc{env}\ x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash wf, A \in T_K}{\Gamma \vdash A}\ (\textsc{type}\ T_K) \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash B}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B}\ (\textsc{type}\ \Pi)$$

$$\frac{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash x : A}\ (\textsc{val}\ x) \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash E : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : \Pi x : A.B}\ (\textsc{val}\ \lambda_\Pi)$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \Pi x : A.B \qquad \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B\,[x := F]}\ (\textsc{val appl}_\Pi)$$

λP: operációs szemantika

$E \equiv \lambda x : A.E : \Pi x : A.B$ és $F : A$
$E\ F \equiv (\lambda x : A.E)\ F \twoheadrightarrow_\beta E[x := F] : B[x := F]$

Lemma. ***A β-redukció típusszabálya***
Ha $\lambda x : A.E : \Pi x : A.B$, $FV(F) \subseteq FV(E[x := F])$ és $FV(F) \subseteq FV(B[x := F])$, akkor

$$\frac{\Gamma \vdash (\lambda x : A.E)\ F : B[x := F]}{\Gamma \vdash E[x := F] : B[x := F]}\ (\text{CONV } \beta_\Pi)$$

Tétel. ***A normalizálás tétele***
A λP típusrendszerben minden jól típusozott λ-kifejezésnek van normálformája.

Tétel. ***I. Church-Rosser-tétel***
Ha az $E : A$ jól típusozott kifejezésre $E : A \twoheadrightarrow_* E_1 : A$ és $E : A \twoheadrightarrow_* E_2 : A$, akkor létezik egy olyan $F : A$ kifejezés, amelyre $E_1 : A \twoheadrightarrow_* F : A$ és $E_2 : A \twoheadrightarrow_* F : A$.

λP: példák

$List_{Int}^{(n)}$

$$\begin{array}{ll}
\texttt{nil} & : List_{Int}^{(0)} \\
\texttt{cons} & : \Pi n : Nat.Int \to List_{Int}^{(n)} \to List_{Int}^{(succ\ n)} \\
\texttt{head} & : \Pi n : Nat.List_{Int}^{(succ\ n)} \to Int \\
\texttt{tail} & : \Pi n : Nat.List_{Int}^{(succ\ n)} \to List_{Int}^{(n)}
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\texttt{head nil} \\ \texttt{tail nil}\end{array}\right\} \Rightarrow 0 = \texttt{succ}\ n \Rightarrow \text{típushiba}$$

$\texttt{null} \equiv \texttt{iszero}\ n$

λP: példák

$List_A^{(n)}$

$$\begin{array}{lll} \texttt{nil} & \equiv & \texttt{pair true true} : List_A^{(0)} \\ \texttt{cons} & \equiv & \lambda n : Nat.\lambda x : A.\lambda y : List_A^{(n)}.\texttt{pair false}\ (\texttt{pair}\ x\ y) \\ \texttt{cons} & : & \Pi n : Nat.A \to List_A^{(n)} \to List_A^{(succ\ n)} \end{array}$$

$\texttt{cons}\ 2 \equiv$

$(\lambda n : Nat.\lambda x : A.\lambda y : List_A^{(n)}.\texttt{pair false}\ (\texttt{pair}\ x\ y))\ 2 \twoheadrightarrow$

$(\lambda x : A.\lambda y : List_A^{(n)}.\texttt{pair false}\ (\texttt{pair}\ x\ y))\ [n := 2] \equiv$

$\lambda x : A.\lambda y : List_A^{(2)}.\texttt{pair false}\ (\texttt{pair}\ x\ y)$

$\texttt{cons}\ 2 : (A \to List_A^{(n)} \to List_A^{(succ\ n)})\ [n := 2] \equiv$

$A \to List_A^{(2)} \to List_A^{(3)}$

λP: példák

$F : \Pi n : Nat.List_{Nat}^{(n)}$

$$\begin{array}{lcl} F\ 0 & = & [\,] \\ F\ 1 & = & [1] \\ F\ 2 & = & [1,2] \\ F\ 3 & = & [1,2,3] \\ \ldots & & \end{array}$$

$\texttt{plus}\ n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$\begin{array}{lcl} \texttt{plus}\ 2 & : & Nat \to Nat \to Nat \\ \texttt{plus}\ 3 & : & Nat \to Nat \to Nat \to Nat \\ \ldots & & \\ \texttt{plus}\ n & : & Nat^n \to Nat \end{array}$$

tehát

$\texttt{plus} : \Pi n : Nat.Nat^n \to Nat$

Függő típusok a programozásban

Függő típusok: a *Vec* (induktív) típuscsalád

Induktív típuscsaládok ⇒ polimorfikus adattípusok indexelése
azaz: strukturális invariáns tulajdonságok leírása

A *Vec* típuscsalád:

$$\begin{array}{ll} \mathtt{vnil} & : \Pi\tau :: \star.\, \mathit{Vec}\; 0\; \tau \\ \mathtt{vcons} & : \Pi n : \mathit{Nat}.\Pi\tau :: \star.\tau \to \mathit{Vec}\; n\; \tau \to \mathit{Vec}\; (\mathtt{succ}\; n)\; \tau \end{array}$$

$n \in \mathit{Nat}$: index, a vektor alakja (mérete)

$$\frac{n : \mathit{Nat} \qquad \tau :: \star}{\mathit{Vec}\; n\; \tau :: \star} \qquad\qquad \frac{0 : \mathit{Nat} \qquad \tau :: \star}{\mathtt{vnil} : \mathit{Vec}\; 0\; \tau}$$

$$\frac{y : \tau \qquad ys : \mathit{Vec}\; n\; \tau}{\mathtt{vcons}\; y\; ys : \mathit{Vec}\; (\mathtt{succ}\; n)\; \tau}$$

$\mathit{Vec} : \mathit{Nat} \to \star \Rightarrow \star$?

Függő típusok: a λP bővítései

Definíció. ***A λP típusrendszer szintaktikájának bővítése***

<fajta> *::=* $\star$
| *(*Π *<változó> : <típus> . <fajta>)*

Definíció. ***A λP típusrendszer szabályainak bővítése***

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \star}\ (\textsc{Kind}\ \star) \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash K}{\Gamma \vdash \Pi x : \tau . K}\ (\textsc{Kind}\ \Pi)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau :: \Pi x : \tau . K \qquad \Gamma \vdash E : \tau}{\Gamma \vdash \tau\ E :: K[x := E]}\ (\textsc{Kind Appl}_\Pi)$$

$\Pi x : \tau . K$: a típuscsalád típusa (fajtája), az x változó értékeinek applikációjával adható meg

$Vec : \Pi n : Nat . \star \Rightarrow \star$, $Vec\ n : \star \Rightarrow \star$, $Vec\ n\ \tau : \star$

Függő típusok: case-elemzések

$$
\begin{array}{rl|l}
ys : & Vec\,0\;\tau & \\
\hline
\mathtt{vnil}_Y : & Vec\,0\;\;Y & \tau = Y,\; ys = \mathtt{vnil} \\
\mathtt{vcons}_{m,Y}\;y'\;ys' : & Vec\,(\mathtt{succ}\;m)\;\;Y & 0 \neq (\mathtt{succ}\;n)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl|l}
ys : & Vec\,1\;\tau & \\
\hline
\mathtt{vnil}_Y : & Vec\,0\;\;Y & 0 \neq 1 \\
\mathtt{vcons}_{m,Y}\;y'\;ys' : & Vec\,(\mathtt{succ}\;m)\;\;Y & \tau = Y,\; m = 0, \\
 & & y' : \tau, ys' : Vec\,0\;\tau, \\
 & & ys = \mathtt{vcons}_{0,\tau}\;y'\;\mathtt{vnil}_\tau
\end{array}
$$

$\ldots$

$$
\begin{array}{rl|l}
ys : & Vec\,(\mathtt{succ}\;n)\;\tau & \\
\hline
\mathtt{vnil}_Y : & Vec\,0\;\;Y & 0 \neq \mathtt{succ}\;n \\
\mathtt{vcons}_{m,Y}\;y'\;ys' : & Vec\,(\mathtt{succ}\;m)\;\;Y & \tau = Y,\; m = n, \\
 & & y' : \tau, ys' : Vec\;n\;\tau, \\
 & & ys = \mathtt{vcons}_{n,\tau}\;y'\;ys'
\end{array}
$$

Függő típusok: `vzip`

`vzip`: vektorok párjainak leképezése párok vektoraira

$$\frac{xs : Vec_{\tau'} \qquad ys : Vec_{\tau''}}{\mathtt{vzip}\ xs, ys : Vec_{\tau' \times \tau''}}$$

$$\frac{n : Nat \qquad xs : Vec\ n\ \tau' \qquad ys : Vec\ n\ \tau''}{\mathtt{vzip}\ xs, ys : Vec\ n\ (\tau', \tau'')}$$

$$\mathtt{vzip} : \Pi n : Nat. Vec\ n\ \tau' \rightarrow Vec\ n\ \tau'' \rightarrow Vec\ n\ (\tau', \tau'')$$

$\mathtt{vzip}\ xs\ ys \equiv \mathtt{case}\ (xs, ys)\ \{$

$\quad \mathtt{vzip}\ (\mathtt{vnil}\quad , \mathtt{vnil}) \rightarrow_\beta \mathtt{vnil}$

$\quad \mathtt{vzip}\ ((\mathtt{vcons}\ x\ xs), (\mathtt{vcons}\ y\ ys)) \rightarrow_\beta$

$\qquad \mathtt{vcons}\ (x, y)\ (\mathtt{vzip}\ xs\ ys)$

$\}$

Függő típusok: `vhead` és `vtail`

`vhead`: a vektor fejeleme, `vtail`: a vektor maradék része

$$\frac{ys : Vec\ (\mathtt{succ}\ n)\ \tau}{\mathtt{vhead}\ ys : \tau} \qquad \frac{ys : Vec\ (\mathtt{succ}\ n)\ \tau}{\mathtt{vtail}\ ys : Vec\ n\ \tau}$$

$\mathtt{succ}\ n \neq 0 \Rightarrow ys \neq \mathtt{nil}$

Nincs n, amelyre $((\mathtt{vhead}\ n\ \tau)\ \mathtt{vnil})$ és $((\mathtt{vtail}\ n\ \tau)\ \mathtt{vnil})$ jól típusozott

$\mathtt{vhead} : \Pi n : Nat. Vec\ (\mathtt{succ}\ n)\ \tau \rightarrow \tau$
$\mathtt{vtail} : \Pi n : Nat. Vec\ (\mathtt{succ}\ n)\ \tau \rightarrow Vec\ n\ \tau$

$\mathtt{vhead}\ ys \equiv \mathtt{case}\ ys\ \{$
$\quad \mathtt{vhead}\ (\mathtt{vcons}\ x\ xs) \rightharpoonup x$
$\}$

$\mathtt{vtail}\ ys \equiv \mathtt{case}\ ys\ \{$
$\quad \mathtt{vtail}\ (\mathtt{vcons}\ x\ xs) \rightharpoonup xs$
$\}$

Függő típusok: `vappend`

`vappend`: vektorok összefűzése

$$\frac{n : Nat \qquad m : Nat \qquad xs : Vec\ n\ \tau \qquad ys : Vec\ m\ \tau}{\mathtt{vappend}\ xs\ ys : Vec\ (\mathtt{add}\ n\ m)\ \tau}$$

$$\mathtt{vappend} : \Pi n : Nat.\Pi m : Nat.\, Vec\ n\ \tau \to Vec\ m\ \tau \to Vec\ (\mathtt{add}\ n\ m)\ \tau$$

$$\begin{array}{lll} \mathtt{vappend}\ xs\ ys \equiv \mathtt{case}\ xs\ \{ & & \\ \quad \mathtt{vappend}\ []\ ys & \rightarrow_\beta & ys \\ \quad \mathtt{vappend}\ (\mathtt{vcons}\ x'\ xs')\ ys & \rightarrow_\beta & \mathtt{vcons}\ x'\ (\mathtt{vappend}\ xs'\ ys) \\ \} & & \end{array}$$

Függő típusok: `length` és `map`

`length`: vektor hossza, `map`: vektorok leképezése

$$\frac{n : Nat \qquad ys : Vec\ n\ \tau}{\texttt{length}\ ys : Nat}$$

$$\frac{n : Nat \qquad f : \tau' \to \tau'' \qquad xs : Vec\ n\ \tau'}{\texttt{map}\ f\ xs : Vec\ n\ \tau''}$$

$\texttt{length} : \Pi n : Nat. Vec\ n\ \tau \to Nat$
$\texttt{length}\ xs \equiv$
$\quad \texttt{length}\ xs \quad \rightharpoonup_\beta \quad n$

$\texttt{map} : \Pi n : Nat. (\tau' \to \tau'') \to Vec\ n\ \tau' \to Vec\ n\ \tau''$
$\texttt{map}\ f\ xs \equiv \texttt{case}\ xs\ \{$
$\quad \texttt{map}\ f\ \texttt{vnil} \quad \rightharpoonup_\beta \quad \texttt{vnil}$
$\quad \texttt{map}\ f\ (\texttt{vcons}\ x\ xs) \quad \rightharpoonup_\beta \quad \texttt{vcons}\ (f\ x)\ (\texttt{map}\ f\ xs)$
$\}$

Függő típusok: a *Fin* (induktív) típuscsalád

Fin n: megszámlálható típus, pontosan *n* elem

$$\frac{n : Nat}{Fin\ n :: \star} \qquad \frac{n : Nat}{\mathtt{fzero} : Fin\ (\mathtt{succ}\ n)} \qquad \frac{i : Fin\ n}{\mathtt{fsucc}\ i : Fin\ (\mathtt{succ}\ n)}$$

$$\mathtt{fzero} : \Pi n : Nat.Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$$
$$\mathtt{fsucc} : \Pi n : Nat.Fin\ n \to Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$$

	$Fin\ 0$	
$\mathtt{fzero}_n :$	$Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$	$0 \neq (\mathtt{succ}\ n)$
$\mathtt{fsucc}_{n,j} :$	$Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$	$0 \neq (\mathtt{succ}\ n)$

$Fin\ 0 \equiv Absurd$

Függő típusok: a *Fin* (induktív) típuscsalád

	$Fin\ 1$	
$\mathtt{fzero}_n :$	$Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$	$n = 0, 1 = \mathtt{succ}\ 0 \Rightarrow \mathtt{fzero}_0 : Fin\ 1$
$\mathtt{fsucc}_{n,j} :$	$Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$	$n = 0, j : Fin\ 0 \Rightarrow Fin\ 0 = \varnothing$

$Fin\ 1 \equiv Unit$

	$Fin\ 2$	
$\mathtt{fzero}_n :$	$Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$	$n = 1, 2 = \mathtt{succ}\ 1 \Rightarrow \mathtt{fzero}_1 : Fin\ 2$
$\mathtt{fsucc}_{n,j} :$	$Fin\ (\mathtt{succ}\ n)$	$n = 1, j : Fin\ 1, j = \mathtt{fsucc}_1\ \mathtt{fzero}_0$

$Fin\ 2 \equiv Bool$

Függő típusok: a *Fin n* elemei

`fz` ≡ `fzero`

`fs` ≡ `fsucc`

Fin 0	$\varnothing$				
Fin 1	$\texttt{fz}_0$				
Fin 2	$\texttt{fz}_1$	$\texttt{fs}_1\ \texttt{fz}_0$			
Fin 3	$\texttt{fz}_2$	$\texttt{fs}_2\ \texttt{fz}_1$	$\texttt{fs}_2\ (\texttt{fs}_1\ \texttt{fz}_0)$		
Fin 4	$\texttt{fz}_3$	$\texttt{fs}_3\ \texttt{fz}_2$	$\texttt{fs}_3\ (\texttt{fs}_2\ \texttt{fz}_1)$	$\texttt{fs}_3\ (\texttt{fs}_2\ (\texttt{fs}_1\ \texttt{fz}_0))$	
...					

– Minden *n*-re az `fsucc` beépíti a teljes *Fin n*-t a *Fin* (`succ` *n*)-be

– `fzero` olyan elemet hoz létre, amely nincs benne *Fin n*-ben

Függő típusok: a *Vec* és *Fin* együttes alkalmazása

`vec-elem`: a vektor *i*. eleme

$$\frac{xs : Vec\ n\ \tau \qquad i : Fin\ n}{\texttt{vec-elem}\ xs\ i : \tau}$$

A *Vec n* τ és *Fin n* típusok biztosítják, hogy az *i*. elem mindig a vektorban van

$$
\begin{array}{l}
\texttt{vec-elem}\ xs\ i \equiv \texttt{case}\ xs\ \{ \\
\quad \texttt{vec-elem}\ \texttt{vnil}\ i \quad \rightarrow \quad () \\
\quad \texttt{vec-elem}\ (\texttt{vcons}\ y\ ys)\ i \quad \rightarrow \quad \{ \\
\qquad \texttt{vec-elem}\ (\texttt{vcons}\ y\ ys)\ \texttt{case}\ i\ \{ \\
\qquad\qquad \texttt{vec-elem}\ (\texttt{vcons}\ y\ ys)\ \texttt{fzero} \quad \rightarrow \quad y \\
\qquad\qquad \texttt{vec-elem}\ (\texttt{vcons}\ y\ ys)\ (\texttt{fsucc}\ i) \quad \rightarrow \quad \texttt{vec-elem}\ ys\ i \\
\\
\qquad \} \\
\}
\end{array}
$$

Függő típusok: a *Btree* (induktív) típuscsalád

Kiegyensúlyozott fa, 2^n elemmel

$$\frac{n : Nat \qquad \tau :: \star}{Btree\ n\ \tau :: \star} \qquad\qquad \frac{0 : Nat \qquad \tau :: \star}{\texttt{leaf} : Btree\ 0\ \tau}$$

$$\frac{t_1 : Btree\ n\ \tau \qquad t_2 : Btree\ n\ \tau}{\texttt{node}\ t_1\ t_2 : Btree\ (\texttt{succ}\ n)\ \tau}$$

A λP típusrendszer általánosításai

λP: λP-ből CC-be

$F_1 \rightsquigarrow \lambda P$
$F_2 \rightsquigarrow \lambda P_2$
$\dots$
$F_\omega \rightsquigarrow CC$

λP: $A \to B \equiv \Pi x : A.B$
λP_2: $\forall \alpha.B \equiv \Pi \alpha :: \star.B$
CC: „konstrukciók kalkulusa”

Típusrendszerek egységes leírása

Egységes leírás: fajták típusai

Vezessük be fajta típusának fogalmát:

<fajta típusa>	::=	$\square$
<fajta>	::=	$\star$
	|	*(<fajta>* $\Rightarrow$ *<fajta>)*

Ekkor $\star :: \square$ és $K \Rightarrow L :: \square$

$A \rightarrow B \equiv \Pi x : A.B$ ha $x \notin FV(B)$ mintájára:

$\Pi\alpha :: K.L$: fajtaabsztrakció, α: változó, L: törzs (hatáskör)
$K \Rightarrow L \equiv \Pi\alpha :: K.L$ ha $\alpha \notin FTV(L)$
$(\Pi\alpha :: K.L) :: \square$
$(\Pi\alpha :: K.L)\ \tau \equiv L\,[\alpha := \tau]$: fajtaapplikáció ($\beta$-redukció)

Egységes leírás: az F_ω típusrendszer módosítása

Definíció. ***Az F_ω típusrendszer módosított szintaktikája***

<fajta>	*::=*	$\star :: \Box$
	|	*(Π <típusváltozó> :: <fajta> . <fajta>)*

A fajtaabsztrakció változója egy típusváltozó

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \star :: \Box}\ (\textsc{kind}\ \star) \qquad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash L :: \Box}{\Gamma \vdash \Pi\alpha :: K.L :: \Box}\ (\textsc{kind}\ \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: L \qquad \Gamma \vdash K :: \Box}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.\tau :: \Pi\alpha :: K.L}\ (\textsc{type}\ \Lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \Pi\alpha :: K.L \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau'\ \tau'' :: L\,[\alpha := \tau'']}\ (\textsc{type appl})$$

Egységes leírás: szintaktika

változók = típusváltozók: pszeudo-kifejezések

$$\mathcal{T} ::= V \mid \mathcal{S} \mid \mathcal{T}\ \mathcal{T} \mid \lambda V : \mathcal{T}.\mathcal{T} \mid \Pi V : \mathcal{T}.\mathcal{T}$$

ahol

V: a változók halmaza
$\mathcal{S}$: (kifejezéseket) osztályozó halmaz, $\mathcal{S} = \{\star, \square\}$

$A, B, \ldots, E, F, \ldots$: tetszőleges pszeudo-kifejezések
$x, y, \ldots$: tetszőleges változók

Példák:

$E : \square$ – az E egy fajtakifejezés
$E : K$ és $K : \square$ – az E egy típuskifejezés
$E : A$, $A : K$ és $K : \square$ – az E egy kifejezés

Egységes leírás: típuskörnyezet

Definíció. ***A típuskörnyezet szintaktikája***

Legyen $\Gamma \subset \mathcal{G}$, *ahol*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{G} & ::= & \varnothing \\ & | & \mathcal{G}, V : \mathcal{T}, \end{array}$$

ha $v_1 : A_1, v_2 : A_2 \in \mathcal{G}, v_i \in V, A_i \in \mathcal{T}$, *akkor* $v_1 \neq v_2$.

Az $x : A$ $(A \in \mathcal{T})$ párok deklarációk, és Γ egy rendezett lista:

ha $\Gamma = \{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n\}$,
akkor $\Gamma, y : B = \{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n, y : B\}$

bővítés, kiolvasás csak a lista elejéről:

$\Gamma = \{nil, \alpha : \star, x : \alpha\}$
$\Gamma = \{nil, x : \alpha, \alpha : \star\}$ (nem állítható elő)

Egységes leírás: következtetések

Egyetlen és nagyon egyszerű következtetési forma:

Definíció. ***A következtetések***

$\Gamma \vdash A : B$ a Γ környezetben az A kifejezés típusa B

Példák:

ha $\Gamma \vdash A : B$, $B \in \mathcal{S}$, akkor A egy típus
ha $B \equiv \star$, akkor az A egy típus és egy kifejezésnek a típusa
ha $B \equiv \Box$, akkor az A egy típus típusa, vagyis fajta

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \star}\ (\text{KIND } \star) \quad \Longrightarrow \quad \frac{}{\varnothing \vdash \star :: \Box}\ (\text{AXIOM})$$

$$\frac{\Gamma \vdash K \qquad \Gamma \vdash L}{\Gamma \vdash K \Rightarrow L}\ (\text{KIND } \Rightarrow) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash K :: \Box \qquad \Gamma, \alpha :: K \vdash L :: \Box}{\Gamma \vdash \Pi\alpha :: K.L :: \Box}\ (\text{KIND } \Rightarrow\text{'})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: \star}{\Gamma \vdash \forall\alpha :: K.\tau :: \star}\ (\text{TYPE } \forall) \quad \text{és } \forall\alpha :: K.\tau \equiv \Pi\alpha :: K.\tau \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash K :: \Box \qquad \Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: \star}{\Gamma \vdash \Pi\alpha :: K.\tau :: \star}\ (\text{TYPE } \forall\text{'})$$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau' \rightarrow \tau'' :: \star} \text{ (TYPE } \rightarrow\text{)}$$

$$\text{és } \tau' \rightarrow \tau'' \equiv \Pi x : \tau'.\tau'', \text{ha } x \notin FV(\tau'') \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma, x : \tau' \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \Pi x : \tau'.\tau'' :: \star} \text{ (TYPE } \rightarrow\text{')}$$

Összesítve:

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : s_2} \text{ (RULE TYPE } (s_1, s_2))$$

ahol $(s_1, s_2) \in \{(\Box, \Box), (\Box, \star), (\star, \star)\}$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \alpha :: K}\ (\text{TYPE } \alpha) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \alpha :: K}\ (\text{TYPE } \alpha\text{'})$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \mathsf{wf}}\ (\text{ENV } \alpha)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \alpha :: K}\ (\text{TYPE } \alpha) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \alpha :: K}$$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma', x :: \tau, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x :: \tau, \Gamma'' \vdash x :: \tau}\ (\text{VAL } x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\Gamma, x :: \tau \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma, x :: \tau \vdash x :: \tau}\ (\text{VAL } x') \quad\Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x :: \tau \vdash \mathrm{wf}}\ (\text{ENV } x)}{\Gamma, x :: \tau \vdash x :: \tau}\ (\text{VAL } x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma}{\Gamma, x :: \tau \vdash x :: \tau}$$

Összesítve:

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ (\text{RULE START})$$

ahol $s \in \{\square, \star\}$