Típusrendszerek egységes leírása

Egységes leírás: fajták típusai

Vezessük be fajta típusának fogalmát:

<fajta típusa>	::=	$\square$
<fajta>	::=	$\star$
	|	(*<fajta>* $\Rightarrow$ *<fajta>*)

Ekkor $\star :: \square$ és $K \Rightarrow L :: \square$

$A \to B \equiv \Pi x : A.B$ ha $x \notin FV(B)$ mintájára:

$\Pi\alpha :: K.L$: fajtaabsztrakció, α: változó, L: törzs (hatáskör)
$K \Rightarrow L \equiv \Pi\alpha :: K.L$ ha $\alpha \notin FTV(L)$
$(\Pi\alpha :: K.L) :: \square$
$(\Pi\alpha :: K.L)\ \tau \equiv L\,[\alpha := \tau]$: fajtaapplikáció ($\beta$-redukció)

Egységes leírás: az F_ω típusrendszer módosítása

Definíció. ***Az F_ω típusrendszer módosított szintaktikája***

<fajta>	*::=*	$\star$ :: $\square$
	|	*(Π <típusváltozó> :: <fajta> . <fajta>)*

A fajtaabsztrakció változója egy típusváltozó

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \star :: \square}\ (\textsc{kind}\ \star) \qquad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash L :: \square}{\Gamma \vdash \Pi\alpha :: K.L :: \square}\ (\textsc{kind} \Rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: L \qquad \Gamma \vdash K :: \square}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.\tau :: \Pi\alpha :: K.L}\ (\textsc{type}\ \Lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \Pi\alpha :: K.L \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau'\ \tau'' :: L\,[\alpha := \tau'']}\ (\textsc{type appl})$$

Egységes leírás: szintaktika

változók = típusváltozók: pszeudo-kifejezések

$\mathcal{T} ::= V \mid \mathcal{S} \mid \mathcal{T}\,\mathcal{T} \mid \lambda V : \mathcal{T}.\mathcal{T} \mid \Pi V : \mathcal{T}.\mathcal{T}$

ahol

V: a változók halmaza
$\mathcal{S}$: (kifejezéseket) osztályozó halmaz, $\mathcal{S} = \{\star, \Box\}$

$A, B, \ldots, E, F, \ldots$: tetszőleges pszeudo-kifejezések
$x, y, \ldots$: tetszőleges változók

Példák:

$E : \Box$ – az E egy fajtakifejezés
$E : K$ és $K : \Box$ – az E egy típuskifejezés
$E : A$, $A : K$ és $K : \Box$ – az E egy kifejezés

Egységes leírás: típuskörnyezet

Definíció. ***A típuskörnyezet szintaktikája***

Legyen $\Gamma \subset \mathcal{G}$, *ahol*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{G} & ::= & \varnothing \\ & | & \mathcal{G}, V : \mathcal{T}, \end{array}$$

ha $v_1 : A_1, v_2 : A_2 \in \mathcal{G}, v_i \in V, A_i \in \mathcal{T}$, *akkor* $v_1 \neq v_2$.

Az $x : A$ $(A \in \mathcal{T})$ párok deklarációk, és Γ egy rendezett lista:

ha $\Gamma = \{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n\}$,
akkor $\Gamma, y : B = \{x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n, y : B\}$

bővítés, kiolvasás csak a lista elejéről:

$\Gamma = \{nil, \alpha : \star, x : \alpha\}$
$\Gamma = \{nil, x : \alpha, \alpha : \star\}$ (nem állítható elő)

Egységes leírás: következtetések

Egyetlen és nagyon egyszerű következtetési forma:

Definíció. ***A következtetések***

$\Gamma \vdash A : B$ a Γ környezetben az A kifejezés típusa B

Példák:

ha $\Gamma \vdash A : B$, $B \in \mathcal{S}$, akkor A egy típus
ha $B \equiv \star$, akkor az A egy típus és egy kifejezésnek a típusa
ha $B \equiv \square$, akkor az A egy típus típusa, vagyis fajta

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma \vdash \star}\ (\text{KIND } \star) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{}{\varnothing \vdash \star :: \Box}\ (\text{AXIOM})$$

$$\frac{\Gamma \vdash K \qquad \Gamma \vdash L}{\Gamma \vdash K \Rightarrow L}\ (\text{KIND } \Rightarrow) \qquad \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash K :: \Box \qquad \Gamma, \alpha :: K \vdash L :: \Box}{\Gamma \vdash \Pi\alpha :: K.L :: \Box}\ (\text{KIND } \Rightarrow\text{'})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: \star}{\Gamma \vdash \forall\alpha :: K.\tau :: \star}\ (\text{TYPE } \forall) \qquad \text{és } \forall\alpha :: K.\tau \equiv \Pi\alpha :: K.\tau \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash K :: \Box \qquad \Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: \star}{\Gamma \vdash \Pi\alpha :: K.\tau :: \star}\ (\text{TYPE } \forall\text{'})$$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \tau' \to \tau'' :: \star} \ (\text{TYPE} \to)$$

$$\text{és } \tau' \to \tau'' \equiv \Pi x : \tau'.\tau'', \text{ha } x \notin FV(\tau'') \Longrightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: \star \qquad \Gamma, x : \tau' \vdash \tau'' :: \star}{\Gamma \vdash \Pi x : \tau'.\tau'' :: \star} \ (\text{TYPE} \to\text{'})$$

Összesítve:

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : s_2} \ (\text{RULE TYPE } (s_1, s_2))$$

ahol $(s_1, s_2) \in \{(\square, \square), (\square, \star), (\star, \star)\}$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \text{wf}}{\Gamma', \alpha :: K, \Gamma'' \vdash \alpha :: K} \ (\text{TYPE } \alpha) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \text{wf}}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \alpha :: K} \ (\text{TYPE } \alpha\text{'})$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \text{wf}} \ (\text{ENV } \alpha)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \alpha :: K} \ (\text{TYPE } \alpha) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash K \qquad \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha :: K \vdash \alpha :: K}$$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma', x :: \tau, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x :: \tau, \Gamma'' \vdash x :: \tau} \;(\textsc{val}\ x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma, x :: \tau \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma, x :: \tau \vdash x :: \tau} \;(\textsc{val}\ x\text{'}) \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x :: \tau \vdash \mathrm{wf}} \;(\textsc{env}\ x)}{\Gamma, x :: \tau \vdash x :: \tau} \;(\textsc{val}\ x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma \vdash \tau :: \star \qquad x \notin dom(\Gamma}{\Gamma, x :: \tau \vdash x :: \tau}$$

Összesítve:

$$\frac{\Gamma \vdash A : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \;(\textsc{rule start})$$

ahol $s \in \{\square, \star\}$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash \tau :: L}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.\tau :: K \Rightarrow L}\ (\text{TYPE } \Lambda) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash A :: L \qquad \Gamma \vdash K :: \square}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.A : \Pi\alpha :: K.L}\ (\text{TYPE } \Lambda'$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau' \vdash E : \tau'' \qquad \Gamma \vdash \tau' :: \star}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau'.E : \tau' \to \tau''}\ (\text{VAL } \lambda) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma, x : A \vdash E : B \qquad \Gamma \vdash A :: \star}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : \Pi x : A.B}\ (\text{VA}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash E :: \tau}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.E : \forall\alpha :: K.\tau}\ (\text{VAL } \Lambda) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Gamma, \alpha :: K \vdash E : A \qquad \Gamma \vdash K :: \square}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha :: K.E :: \Pi\alpha :: K.A}\ (\text{VAL } \Lambda'$$

Összesítve:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash E : B \qquad \Gamma \vdash A : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : \Pi x : A.B}\ (\text{RULE } \lambda)$$

ahol $s \in \{\square, \star\}$

Egységes leírás: típusszabályok

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' :: K \Rightarrow L \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau'\ \tau'' :: L} \implies \frac{\Gamma \vdash \tau' :: \Pi\alpha : K.L \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash \tau'\ \tau'' :: L\,[\alpha := \tau'']}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau' \to \tau'' \qquad \Gamma \vdash F : \tau'}{\Gamma \vdash E\ F : \tau''} \implies \frac{\Gamma \vdash E : \Pi\alpha : \tau'.\tau'' \qquad \Gamma \vdash F : \tau'}{\Gamma \vdash E\ F : \tau''}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \forall\alpha :: K.\tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash E\,[\tau''] : \tau'\,[\alpha := \tau'']} \implies \frac{\Gamma \vdash E : \Pi\alpha :: K.\tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' :: K}{\Gamma \vdash E\,[\tau''] : \tau'\,[\alpha := \tau'']}$$

Összesítve:

$$\frac{\Gamma \vdash E : \Pi x : A.B \qquad \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B\,[x := F]}\ (\text{RULE APPL})$$

Egységes leírás: új típusszabályok

Típusekvivalencia (definíció szerinti):

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad B \equiv B' \qquad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'} \text{ (RULE CONV)}$$

ahol $s \in \{\Box, \star\}$

Típuskörnyezet gyengítése:

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \text{ (RULE WEAKEN)}$$

ahol $s \in \{\Box, \star\}$

Egységes leírás: az F_ω típusrendszer megadása

$$\frac{}{\emptyset \vdash \star :: \Box}\ (\text{AXIOM}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ (\text{START})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : s_2}\ (\text{TYPE } (s_1, s_2))$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash E : B \qquad \Gamma \vdash A : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : \Pi x : A.B}\ (\lambda) \qquad \frac{\Gamma \vdash E : \Pi x : A.B \qquad \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B\,[x := F]}\ (\text{APPL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : C \vdash A : B}\ (\text{WEAKEN})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad B \equiv B' \qquad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'}\ (\text{CONV})$$

$s \in \{\Box, \star\}$

$(s_1, s_2) \in \{(\Box, \Box), (\Box, \star), (\star, \star)\}$

A λ-kocka

A λ-kocka típusrendszerei

$$\frac{}{\varnothing \vdash \star :: \Box}\ (\textsc{axiom}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ (\textsc{start})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : s_2}\ (\textsc{type}\ (s_1, s_2))$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash E : B \qquad \Gamma \vdash A : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : \Pi x : A.B}\ (\lambda) \qquad \frac{\Gamma \vdash E : \Pi x : A.B \qquad \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B\,[x := F]}\ (\textsc{appl})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash C : s \qquad x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : C \vdash A : B}\ (\textsc{weaken})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad B \equiv B' \qquad \Gamma \vdash B' : s}{\Gamma \vdash A : B'}\ (\textsc{conv})$$

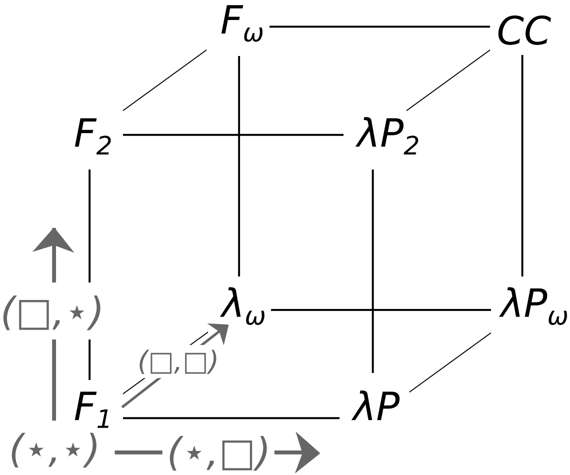
$s \in \{\Box, \star\}$

$(s_1, s_2) \in \{(\Box, \Box), (\Box, \star), (\star, \Box), (\star, \star)\}$

A λ-kocka típusrendszerei

típusrendszer	(s_1, s_2)			
F_1	$(\star,\star)$			
F_2	$(\star,\star)$	$(\square,\star)$		
λP	$(\star,\star)$		$(\star,\square)$	
λP_2	$(\star,\star)$	$(\square,\star)$	$(\star,\square)$	
λ_ω	$(\star,\star)$			$(\square,\square)$
F_ω	$(\star,\star)$	$(\square,\star)$		$(\square,\square)$
λP_ω	$(\star,\star)$		$(\star,\square)$	$(\square,\square)$
CC	$(\star,\star)$	$(\square,\star)$	$(\star,\square)$	$(\square,\square)$

A λ-kocka



λ-kocka: az F_1 típusrendszer

Ha $(s_1, s_2) = \{(\star, \star)\}$, akkor ez az F_1 típusrendszer

Ekkor a $\text{TYPE}(s_1, s_2)$ szabály a következő alakú lesz:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \star \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \star}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : \star} \; (\text{TYPE } (\star, \star))$$

A, B: valódi típusok, $A \equiv \tau'$, $B \equiv \tau''$, x: változó, és mivel $x \notin \tau''$:

$\Pi x : \tau'.\tau'' \equiv \tau' \to \tau''$
$\Gamma, x : \tau' \vdash \tau'' : \star \equiv \Gamma \vdash \tau'' : \star$

Ezért:

$$TYPE(s_1, s_2) \;\equiv\; \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \; (\text{TYPE} \to)$$

λ-kocka: a λP típusrendszer

Ha $(s_1, s_2) = \{(\star, \star), (\star, \square)\}$, akkor ez a λP típusrendszer

Ekkor a TYPE(s_1, s_2) szabály a következő alakú lesz:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \star \qquad \Gamma, x : A \vdash B : \square}{\Gamma \vdash \Pi x : A.B : \square} \ (\text{TYPE } (\star, \square))$$

ahol A: típus, B: fajta, x : változó

Ezért:

$$TYPE(s_1, s_2) \ \equiv \ \frac{\Gamma, x : A \vdash K}{\Gamma \vdash \Pi x : A.K} \ (\text{KIND } \Pi)$$

A Curry-Howard-izomorfizmus

Intuicionista logika

Klasszikus logika
központi fogalom az (abszolút) igazságérték („igaz” vagy „hamis”)

Állítás: Van két olyan x és y irracionális szám, amelyre x^y racionális.

Bizonyítás: Ha $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ racionális szám, akkor $x = y = \sqrt{2}$, különben legyen $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ és $y = \sqrt{2}$.

Nem tudjuk, hogy a két lehetőség közül melyik igaz: nem konstruktív.

$A \vee \neg A$ („tertium non datur”): nem intuicionista

Intuicionista (konstruktív) logika (Brouwer)
egy objektum létezésének kulcsa, hogy létezik egy módszer az előállítására

Intuicionista logika: konstruktív gondolkodás

Egy érték konstrukciója: a szám, vagy egy eljárás megadása, amely előállítja az adott értéket.

Az algoritmusoknál az esetszétválasztás okozhat problémát:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{ha a } \pi \text{ decimális alakjában van } n \text{ db. egymás utáni 7-es} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A konstruktív matematikában esetszétválasztást akkor használhatunk, ha érvényes döntési algoritmust tudunk adni.

A hangsúly az igazság fogalmáról a konstrukció fogalmára került át: a bizonyítás az algoritmus

Minimális logika

Definíció. ***A minimalista logika formulái***
$F ::= V \mid F \to F$, ahol V egy ítéletlogikai változó.

$\mathrm{IPC}_{\to}$: intuicionista konstruktív ítéletlogika

Definíció. ***Az $\mathrm{IPC}_{\to}$ Brouwer-Heyting-Kolmogorov-interpretációja***

- *az A változót az A nem specifikált konstrukciójának tekintjük,*
- *az $A \to B$ konstrukciója egy olyan módszer, amelyik az A minden konstrukcióját B konstrukciójába transzformálja.*

A formula bizonyítása ugyanaz, mint a konstrukció (bizonyítás, függvény, eljárás) előállítása

Például: $f \equiv \lambda x.x$ az $A \to A$ formula konstrukciója, mivel ha a az A egy konstrukciója, akkor $f\ a = (\lambda x.x)\ a = a$

Minimális logika: további példák

Az $A \to B \to A$ formula konstrukciója a $\lambda x.\lambda y.x$ függvény

A $\bot$ (konstans hamis formula) definíciójával a negáció is értelmezhető:

$\bot$: az abszurdum formula, nincs hozzá konstrukció

$\neg A \equiv A \to \bot$

Legyen a egy $\bot$ konstrukciója, de a BHK-interpretáció szerint $\bot$-nak nincs konstrukciója, ezért $\bot \to A$ konstrukciója tetszőleges függvény lehet, például $\lambda x.1$

$\emptyset \vdash_{\lambda f.\lambda g.\lambda x.g\ (f\ x)} (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (kontrapozíció)

$x : A,\ f : A \to B,\ f\ x : B,\ g : \neg B \equiv B \to \bot,\ g\ (f\ x) : \bot$

$\lambda x.g\ (f\ x) : A \to \bot \equiv \neg A$

$\lambda g.\lambda x.g\ (f\ x) : \neg B \to \neg A$

$\lambda f.\lambda g.\lambda x.g\ (f\ x) : (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Természetes levezetés

A minimális logikában a szemantikus eldöntésprobléma megoldására a természetes levezetést alkalmazzuk

$$\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{A \vdash B \supset A}}{\vdash A \supset B \supset A}$$

Címkézett feltételek:

$x : A$, $x \in \mathcal{V}$, A egy formula, $\mathcal{V}$ a címkék halmaza

Γ: a címkézett feltételek véges halmaza

Következtetések:

$\Gamma \vdash_E A$, ahol Γ: környezet, A: formula

E: a következtetésekhez tartozó bizonyítás (konstrukció)

Például:

$\emptyset \vdash_{\lambda x:A.x} \ A \to A$

$\emptyset \vdash_{\lambda x:A.\lambda y:B.x} \ A \to B \to A$

Levezetési szabályok

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash_x A} \text{ (IDENT AXIOM)} \qquad \frac{\Gamma \vdash_E B \qquad x \notin \Gamma}{\Gamma, x : A \vdash_E B} \text{ (ASSUMP } A\text{)}$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash_E B}{\Gamma \vdash_{\lambda x:A.E} A \rightarrow B} \text{ (IMPL INTRO)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash_E A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash_F A}{\Gamma \vdash_{E\ F} B} \text{ (IMPL ELIM)}$$

Levezetés: példák

$$\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash_x A}\ (\text{IDENT AXIOM})}{\varnothing \vdash_{\lambda x:A.x} A \to A}\ (\text{IMPL INTRO})$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : A \vdash_x A}\ (\text{IDENT AXIOM})}{x : A, y : B \vdash_x A}\ (\text{ASSUMP } B)}{x : A \vdash_{\lambda y:B.x} B \to A}\ (\text{IMPL INTRO})}{\vdash_{\lambda x:A.\lambda y:B.x} A \to (B \to A)}\ (\text{IMPL INTRO})$$

Nem minden klasszikusan levezethető formulának van levezetése konstruktív esetben.

Az izomorfizmus

Tétel. ***Curry-Howard-izomorfizmus***
Ha az F_1 típusrendszerben az A típushoz van olyan zárt E λ-kifejezés, amelyre $E : A$, akkor és csak akkor az A formula az $IPC_{\rightarrow}$ egy bizonyítható formulája.

Ha $\vdash E : A$, akkor $\vdash_E A$, $\Gamma = \varnothing$ (tautológia)

Az F_1 típusrendszer kifejezései az $\text{IPC}_{\rightarrow}$ bizonyításai: „bizonyítás mint kifejezés”

Az F_1 típusrendszer kifejezéseinek típusai a bizonyítandó formulák: „a formula mint típus”

Az izomorfizmus

Az F_1 típusrendszer kifejezései az $\mathrm{IPC}_{\rightarrow}$ bizonyításai: „bizonyítás mint kifejezés”

$\mathrm{IPC}_{\rightarrow}$	F_1 típusrendszer
$\rightarrow$ logikai összekötőjel	$\rightarrow$ típuskonstruktor
formula	típus

Az F_1 típusrendszer kifejezéseinek típusai a bizonyítandó formulák: „a formula mint típus”

$\mathrm{IPC}_{\rightarrow}$	F_1 típusrendszer
feltétel címkéje	típusrendszer változója
implikáció bevezetése	absztrakció
implikáció eliminálása	applikáció
bizonyítás, konstrukció	λ-kifejezés

Az izomorfizmus

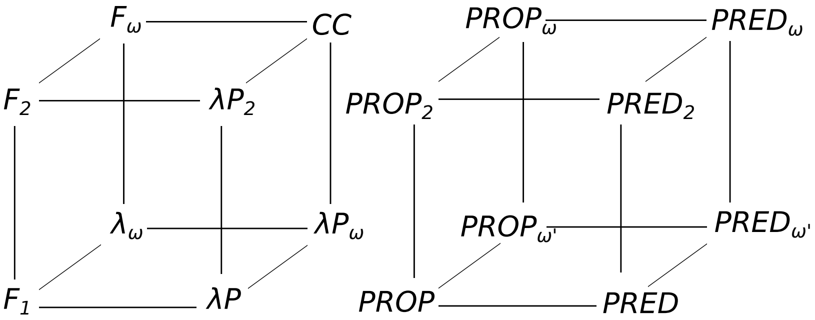
Az F_1 típusrendszer kifejezései az $\mathrm{IPC}_{\rightarrow}$ bizonyításai: „van-e a formulának bizonyítása?”

$\mathrm{IPC}_{\rightarrow}$	F_1 típusrendszer
normalizálás szabálya	redukálás szabálya
normalizálás	redukálás

Az F_1 típusrendszer kifejezéseinek típusai a bizonyítandó formulák: „a bizonyítás a formula egy bizonyítása?”

$\mathrm{IPC}_{\rightarrow}$	F_1 típusrendszer
bizonyíthatóság	típusos kifejezés létezése
bizonyítás ellenőrzés	típusellenőrzés

A λ-kocka és a logikák kockája



PROP = ítéletlogika
X_2 = másodrendű
$X_{\omega'}$ = gyenge magasabbrendű

PRED = predikátumlogika
X_ω = magasabbrendű