VÉLETLEN PERMUTÁCIÓ ELŐÁLLÍTÁSA

Az alábbi algoritmusban `X(1..N)` tömb elemeinek egy véletlen permutációját állítjuk elő. Természetesen elvárjuk, hogy a `HalmazFelsorolás(X)` előfeltétel teljesüljön.
Talán első hallásra meglepő lesz az ötlet: induljunk ki a permutációgenerálás algoritmusának elkészítésénél a rendezésből. A következő (P1.) algoritmust pl. a minimumkiválasztásos néven ismert rendezésből eredeztetjük.

P1. Algoritmus:

Permutálás („Keverés”)	**Rendezés**

Ciklus i=1-től N-1-ig
  j:=VéletlenSzám(i..N)
  Csere(X(i),X(j))
Ciklus vége
	Ciklus i=1-től N-1-ig
	  j:=MinIndex(i..N)
	  Csere(X(i),X(j))
	Ciklus vége

Jelölések:

`X` – *sorozat;* `X'` – *az* `X` *sorozat algoritmus végrehajtás utáni értéke*

$P(X'_k=X_j)$ – *annak a valószínűsége, hogy az algoritmusbeli ciklus után az* X'_k X_j *lesz.*

$i,j\in\mathbb{N}$, $\alpha\in[0,1]\subset\mathbb{R}$

`VéletlenSzám(i..j)` – *(egyenletesen) véletlen egész szám* $\in[i,j]$.

`VéletlenSzám` – *(egyenletesen) véletlen valós szám* $\in[0,1)\subset\mathbb{R}$.

Feltevések – egyenletesség:

F1. $P(\text{VéletlenSzám}(i..j)=k)=P(\text{VéletlenSzám}(i..j)=m)$ $\quad k,m=i..j$

F2. $P(\text{VéletlenSzám}<\alpha)=\alpha$

Lemma:

$P(\text{VéletlenSzám}(i..j)=k)=1/(j-i+1)$ $\quad k=i..j$

Bizonyítás:

Az `i` *és a* `j` *között* `j-i+1` *féle érték van, tehát ezek közül valamelyik kijövetelének valószínűsége biztos esemény (***1***); és* $P(\mathbf{1})=1$*; továbbá egymást kizáró események*

$\Rightarrow$

$$\sum_{k=i}^{j} P(\text{VéletlenSzám}(i..j)=k)=1 \ .$$

Az 1. feltevés miatt ez a `j-i+1` *esemény egyenletesen osztozik az* `1` *valószínűségen. Ebből már adódik az állítás.*

Qed.

Például:

P(VéletlenSzám(1..N)=k)=1/(N-1+1)=1/N

P1-1. Állítás:

A P1. algoritmus a bemeneti sorozat egy permutációját állítja elő.

Bizonyítás:

1. a kimeneti állapot hossza megegyezik a bemenetiével,

Mivel az X sorozat változása csak elemeinek helycseréjét jelenti, ezért

2. új elem az eredménysorozatba nem kerül,
3. minden eleme a sorozatban marad.

$\Rightarrow \forall i \in [1..N]: X'_i \in X$

Qed.

P1-2. Állítás:

Az X′ minden elemében az X bármely eleme azonos eséllyel lesz a P1. algoritmus végrehajtása után: $P(X'_i=X_k)=1/N \quad \forall i,k \in [1..N]$. *(Előfeltétel:* $X_i \neq X_j \quad i \neq j$, *vagyis* HalmazFelsorolás(X)=Igaz.*)*

Bizonyítás:

Indukcióval bizonyítunk: belátjuk, hogy

(i=1) $P(X'_1=X_k)=1/N \quad \forall k \in [1..N]$

(azaz bármelyik elem azonos valószínűséggel kerülhet az első helyre

(i⇒i+1) $P(X'_{i+1}=X_k)=1/N \quad \forall k \in [1..N]$

(azaz bármelyik elem azonos valószínűséggel kerülhet az i+1. helyre)

feltéve, hogy

(a) $P(X'_j=X_m)=1/N \quad \forall j \in [1..i], m \in [1..N]$

(azaz bármelyik elem azonos valószínűséggel kerülhet az i.-re vagy az előtti helyre) és

(b) $X' \in Perm(X)$ ♥ (X′ a ciklus egyszeri lefutása után X-et jelöli)

(i=1)

A csere juttathat elemet valahova, pl. X'_1–be X_k-t, –az algoritmus szerint– a ciklus i=1 esetében (máskor nem!), amikor a VéletlenSzám(1..N) éppen k-t eredményez. Ennek ($P(X'_1=X_k)$) a lemma szerint 1/N az esélye

(i⇒i+1)

Indukciós feltételként feltesszük (a)-t.

A továbblépés csak akkor értelmes, ha teljesül (b). Ez viszont az algoritmusból azért következik, mert az elemek legfeljebb helyet tudnak cserélni, de egyéb módon megváltozni nem, azaz az elemek permutálódhatnak csupán.

♥ Perm = Permutációhalmaz

Meghatározzuk annak valószínűségét, hogy egy elem az i+1. helyre kerüljön. Az alábbi két esemény fennállásának valószínűségét kell meghatározni:

- nem került az 1..i helyek egyikére sem (=1-i/N) és
- a „maradékok” (N-i) közül épp őt sorsolta ki cserére (=1/(N-i))

Vagyis (1-i/N) * 1/(N-i) = (N-i)/N * 1/(N-i) = 1/N

Qed.

P1-3. Állítás:

A P1. algoritmus azonos eséllyel állítja elő az $X_{1..N}$ *elemek tetszőleges permutációját.*

(Előfeltétel: $X_i \neq X_j$ $i \neq j$*, vagyis* HalmazFelsorolás(X)=Igaz*.)*

Bizonyítás:

Belátjuk, hogy $P(X' = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_N})) = 1/N!$.

$P(X' = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_N})) = P(X'_1 = X_{i_1}) *$

$P(X'_2 = X_{i_2} \mid X'_1 = X_{i_1}) * \ldots *$

$P(X'_N = X_{i_N} \mid X'_1 = X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X'_{N-1} = X_{i_{N-1}})$

P1-1. ⇒

$P(X'_1 = X_{i_1}) = 1/N$

P1-1. & P1-2. & F1. ⇒

$P(X'_2 = X_{i_2} \mid X'_1 = X_{i_1}) = 1/(N-1)$

(hiszen csak N–1 közül, azonos valószínűséggel választható a 2.)

…

P1-1. & P1-2. & F1. ⇒

$P(X'_N = X_{i_N} \mid X'_1 = X_{i_1} \wedge \ldots \wedge X'_{N-1} = X_{i_{N-1}})) = 1/(N-(N-1)) = 1/1$

(hiszen csak 1 közül választható az N.)

Végülis:

$P(X' = (X_{i_1}, \ldots, X_{i_N})) = P(X'_1 = X_{i_1}) = 1/N * 1/(N-1) * \ldots * 1/1 = 1/N!$

Qed.

Az elmélet után jöjjön egy csipet gyakorlat! Győződjünk meg arról, hogy a fentiekben belátott „egyenletesség” a permutációk terében, mennyire és milyen számú permutációgenerálás után mutatható ki.

Írjunk programot, amely a P1. eljárással előállít számos permutációt, s eközben számolja, hogy az éppen generált permutáció hányadszorra jött ki. Azt várjuk, hogy minden permutációra ez kb. azonos érték lesz.

Mivel a permutációk száma N!, ezért

1. ahhoz, hogy elvileg minden permutáció létrejöhessen: legalább N!-szor kell az eljárást meghívni;

♦ Pirossal emeltük ki a cserében résztvevő elemeket.

2. a számláló tömbnek is N! eleműnek kell lennie (a legszorosabban számolva♠). Pl. 8!= =40320, ami már a Turbo Pascal memóriában tartott tömbjének a méretét meghaladja.

Segíthetünk ez utóbbi problémás helyzeten, ha építünk a P1-2. állításra. Ugyanis e szerint „elegendő" azt számlálni, hogy az egyes X′-beli elemek gyanánt hány ízben fordultak elő az eredeti X-beli elemek. Vagyis egy N×N-es mátrix is elég a számláláshoz, ha N az X hossza.

Permutációk

	1	2	3	4	5	6	7
1:	1452	1467	1433	1472	1463	1388	1405
2:	1480	1424	1442	1400	1450	1439	1445
3:	1446	1424	1397	1422	1490	1412	1489
4:	1375	1408	1399	1445	1441	1521	1491
5:	1454	1454	1447	1448	1406	1465	1406
6:	1496	1415	1475	1447	1399	1444	1404
7:	1377	1488	1487	1446	1431	1411	1440
Szumm:	10080	10080	10080	10080	10080	10080	10080

1. ábra. A program eredményének magyarázata.
A 7 (N) elemű 7! számú permutációt a P1. algoritmussal generálva azt tapasztaltuk, hogy a generált permutációkban 1. helyen az 1 (X_1) 1452-ször, … a 7. helyen ugyanő 1377-szer fordult elő, … a 7 (X_7) az 1. helyen 1405-ször, … a 7. helyen ugyanő 1440-szer. Ellenőrizhető, hogy mind a sor-, mind az oszlopösszegek 10080 (=2*N!), aminek az az oka, hogy –biztos, ami biztos– ennyi (2*N!) darab véletlen permutációt generáltunk a programmal.

A kiértékelést vezérlő algoritmus nagyjából az alábbi lehet:

```
Procedure PermutacioVezerles;
  Var
    i:LongInt;
Begin
  PermInic;
  For i:=1 to Fakt(N) {esetleg 2*Fakt(N)} do
  Begin
    VeletlenPermutacio;
    PermErtekeles;
  End;
  GyakorisagMegjelenites('Permutációk');
End;
```

A VéletlenPermutáció eljárása állítja elő a globálisan elérhető tömbben (legyen ez p:TPermutacio) az új permutációt:

```
Procedure VeletlenPermutácio;
  Var
    i,j:integer;
  Procedure Csere(Var x,y:byte);
    Var
      s:integer;
  Begin
    s:=x; x:=y; y:=s
  End;
```

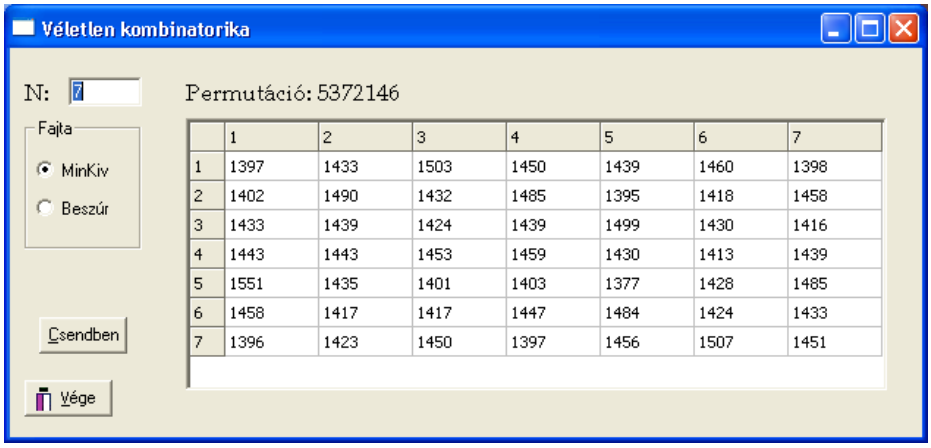
♠ Ugyanis e mögött az a feltevés húzódik, hogy minden egyes permutációhoz kölcsönösen egyértelműen tudunk a (számláló tömb-beli) indexértéket rendelni. Ha belegondolunk, ez nem is könnyű feladat!

```
Begin
  For i:=1 to N-1 do
  Begin
    j:=Random(N-i+1)+i; Csere(p[i],p[j])
  End;
End;
```

A `PermErtekeles` a gyakoriságokat számláló mátrix (`gy:TGyakorisag`) megfelelő elemét növeli:

```
Procedure PermErtekeles;
  Var
    i:Byte;
Begin
  For i:=1 to N do Inc(gy[p[i],i]);
End;
```

Az egészet lásd egyben: VELKOMB.PAS, illetve működés közben: VELKOMB.EXE.
Ugyanennek egy barátságosabb, vizuális (Lazarus) környezetbeli változatának eredményét mutatja a 2. ábra. (Kipróbálhatja: veletlenkombinatorika.exe.)



	1	2	3	4	5	6	7
1	1397	1433	1503	1450	1439	1460	1398
2	1402	1490	1432	1485	1395	1418	1458
3	1433	1439	1424	1439	1499	1430	1416
4	1443	1443	1453	1459	1430	1413	1439
5	1551	1435	1401	1403	1377	1428	1485
6	1458	1417	1417	1447	1484	1424	1433
7	1396	1423	1450	1397	1456	1507	1451

2. ábra. A Lazarus alkalmazás eredménye.

A következő (P2.) algoritmus beszúrásos rendezés alapgondolata alapján készült.

P2. Algoritmus:

Permutálás („Keverés”)	**Rendezés**

Ciklus i=2-től N-ig
  j:=VéletlenSzám(1..i)
  y:=X(i)
  JobbraLéptet(X(j..i-1))
  X(j):=y
Ciklus vége
	Ciklus i=2-től N-ig
	  j:=RendezettHelye(1..i)
	  y:=X(i)
	  JobbraLéptet(X(j..i-1))
	  X(j):=y
	Ciklus vége

P2-1. Állítás:

A P2. algoritmus a bemeneti sorozat egy permutációját állítja elő.

Bizonyítás:

A P1-1. bizonyításához hasonlóan.

Qed.

P2-2. Állítás:

Az X' *minden elemében az* X *bármely eleme azonos eséllyel lesz a P2. algoritmus végrehajtása után:* $P(X'_i=X_k)=1/N \quad \forall i,k\in[1..N]$. *(Előfeltétel:* $X_i\neq X_j \quad i\neq j$, *vagyis* `HalmazFelsorolás(X)=Igaz`.*)*

Bizonyítás:

Belátandó: $P(X'_i=X_k)=1/N \quad \forall i,k\in[1..N]$!

… hf. …

Qed.

P2-3. Állítás:

A P2. algoritmus azonos eséllyel állítja elő az $X_{1..N}$ *elemek tetszőleges permutációját.*

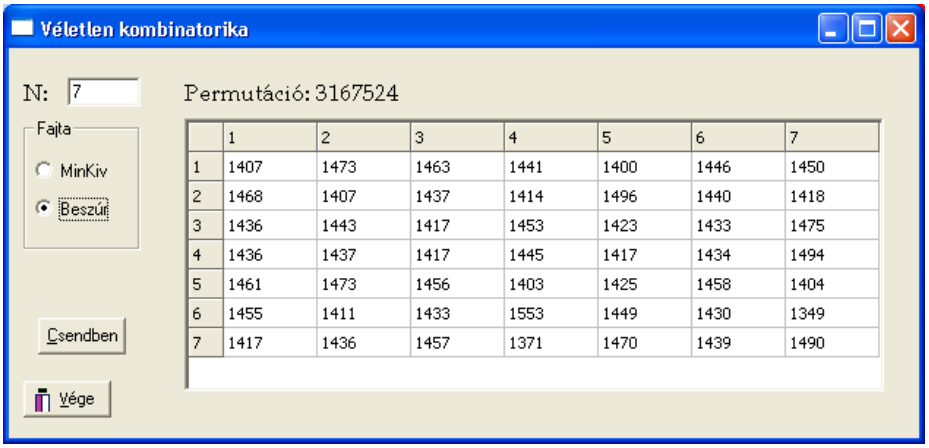
(Előfeltétel: $X_i\neq X_j \quad i\neq j$, *vagyis* `HalmazFelsorolás(X)=Igaz`.*)*

Bizonyítás:

A P2-1. és a P2-2. állítások nyilvánvaló következménye.

Qed.

Ismét a gyakorlat következik: írjunk programot, amely a P2. eljárással előállít számos permutációt, s eközben az előző programhoz hasonlóan adminisztrálja az elemek előfordulásszámát.



3. ábra. A P2. algoritmust megvalósító alkalmazás eredménye.

VÉLETLEN KOMBINÁCIÓ ELŐÁLLÍTÁSA

Az alábbi algoritmus*ok* segítségével az `1,2,…,N` számok `K`-ad osztályú véletlen kombinációit tudjuk előállítani. (Ez nyilvánvalóan nem jelent megszorítást, hiszen a feltehető halmaztulajdonság miatt egy-egy kapcsolatban áll az elem és indexe.)

K0. Algoritmus:

```
Db:=0
Ciklus i=1-től N-ig
  Ha VéletlenSzám<K/N akkor Db:+1; Y(Db):=i
Ciklus vége
```

Világos, hogy az algoritmusban K/N eséllyel kerül be egy elem, csakhogy az össz elemszám (Db) eltérhet az elvárt K-tól. $M(Db)=K$, $D^2(Db)=N*K/N*(1-K/N)=K-K^2/N$

K1. Algoritmus:

```
Db:=0
Ciklus i=1-től N-ig
  Ha VéletlenSzám<(K-Db)/(N+1-i) akkor Db:+1; Y(Db):=i
Ciklus vége
```

Az algoritmus kiküszöböli az előbbi hibáját. Azt az elvet alkalmazza, hogy figyeli a még beveendő elemek számát, és garantálja, hogy éppen annyi kerüljön be.

K2. Algoritmus:

```
Ciklus i=1-től K-ig
  Y(i):=i
Ciklus vége
Ciklus i=K+1-tól N-ig
  Ha VéletlenSzám<K/i akkor j:=VéletlenSzám(1..K); Y(j):=i
Ciklus vége
```

K2-1. Állítás:

A K2. algoritmus az `{1..N}` *számok egy* `K`*-ad osztályú kombinációját eredményezi.*

Bizonyítás:

… hf. …

(a P1-1. mintája alapján könnyű)

Qed.

K2-2. Állítás:

A K2. algoritmus végrehajtása utáni `Y`*-ra igaz, hogy* `Y` *bármely eleme helyén az* `{1..N}` *számok bármelyike azonos eséllyel (*`K/N`*) előfordulhat.*

Bizonyítás:

Mivel N elem van, és ebből K-nak kell előfordulni Y-ban, azonos eséllyel, ezért tetszőleges elemre az előfordulás valószínűségének K/N-nek kell lennie.

Két esetet kell vizsgálni:

1. i≤K,
2. i>K.

Azért érdekes a szétválasztás, mert az első esetbeli i-k az inicializálás során, *1 valószínűséggel* kerülnek az eredmény sorozatba, így azt kell belátnunk, hogy K/N valószínűséggel benn is tud maradni egy kiválasztott ilyen i. Ezzel szemben a 2. esetben nemcsak a bennmaradással, hanem a bekerüléssel is foglalkozni kell. Tehát:

1. A K+1. lépésben (bármely) j. (azaz a j értékű) elem bennmaradásának valószínűsége:

   (1 – K / (K + 1)) [*azaz a következő adat nem „akarta” kilökni*]
   + K / (K+1) * (K–1) / K [*azaz a következő adat „akarta” ugyan, de nem sikerült*]
   = (K+1–K) / (K+1) + (K–1) / (K+1) =
   = K / (K+1)

   Indukciós feltétel: az L. (>K) lépésben a bennmaradás esélye = K / L.

   Indukciós lépés: az L+1. lépésben …:

   K / L [*az L. lépésig bennmaradt=indukciós feltétel*]
   * ((1 – K / (L+1)) + K / (L+1) * (K–1) / K) =
   = K / L * ((L+1–K) / (L+1) + K*(K–1) / ((L+1)*K)) =
   = K / L * ((K*L+K–K*K + K*K–K)) / (K*(L+1))) =
   = K / L * (K*L) / (K*(L+1)) = K / L * L / (L+1) = K /(L+1)

   Innen már következik, hogy az N. lépésben a bennmaradás valószínűsége: K / N.

   Azaz ∀i≤K: a keresett valószínűség K/N.

2. Az i. lépésben az i bekerülése és az i+1. lépésben bennmaradás valószínűsége:

   K / i [*bekerülés valószínűsége*]
   * (1 – 1 / (i+1)) [*az adott j elem nem módosulásának valószínsége*]♣
   = K / i * (i+1–1) / (i+1) = K / (i+1)

   Indukciós feltétel: az „i. lépésben bekerül i, s az i+L. lépésig a benn is marad” esélye = K / (i+L).

   Indukciós lépés: az i+L+1. lépésben …:

♣ 1–K/(i+1) [*semmi sem kerül be*] + K/(i+1)*(K–1)/K [i+1 *bekerül, de nem oda*] =
= 1+ (–K + K–1)/(i+1) = 1 – 1/(i+1)

K / (i+L) [L.*-ig bennvan*]
 * (1 - i / (i+L+1) [*„békén hagyták”*]
  + K / (i+L+1) * (K-1)/K) [*megpróbálták kilökni, de nem sikerült*]
= K / (i+L) * ((i+L+1)*K - K*K K*K-K) / ((i+L+1)*K)) =
…
= K / (i+L+1)

Innen már látszik, hogy az N-nel jelölt utolsó lépésben a bennmaradás valószínűsége: K / N.

Azaz ∀i>K: a keresett valószínűség K/N.

Qed.

K2-3. Állítás:

A K2. algoritmus azonos eséllyel állítja elő az {1..N} számok tetszőleges K-ad osztályú kombinációját.

Bizonyítás:

A K2-1. és K2-2. állítások nyilvánvaló következménye.

Qed.

Az elmélet után jöjjön ismét a gyakorlat! Győződjünk meg arról, hogy a fentiekben belátott „egyenletesség” a kombinációk terében, mennyire és milyen számú kombinációgenerálás után mutatható ki.

Írjunk programot (vagy folytassuk az előbbit), amely a K2. eljárással előállít számos kombinációt, s eközben számolja, hogy az éppen generált hányadszorra jött ki. Azt várjuk, hogy minden kombinációra ez kb. azonos érték lesz.

Bár a kombinációk száma jóval alatta marad a faktoriálisnak, ennek ellenére alkalmazzuk a P1. megvalósításánál ecsetelt számláló módszert! Itt a K2-2. állításra építhetünk. Ugyanis e szerint elegendő azt számlálni, hogy az egyes X′-beli elemek gyanánt hány ízben fordultak elő az eredeti X-beli elemek. Vagyis egy N×K-as mátrix is elég a számláláshoz, ha N az X hossza, K a kombináció rendje.

…

Kombinációk

	1	2	3	4
1:	2978	2921	2836	2854
2:	2858	2857	2887	2867
3:	2786	2872	2860	2877
4:	2895	2848	2850	2868
5:	2835	2965	2868	2942
6:	2951	2815	2974	2847
7:	2857	2882	2885	2905
Szumm:	20160	20160	20160	20160

4. ábra. A program eredménye (N=7, K=4).

ALKALMAZÁSOK

PERMUTÁCIÓK TÉMAKÖRHÖZ

Feladat:

N*K elemű halmaz K egyenlő részre osztása véletlenszerűen.

Algoritmus:

Véletlen részekre osztás

```
Eljárás VélOszt(Konstans X:Tömb(1..N*K:TElem)
                Változó H:Tömb(0..K-1:Halmaz(TElem)):
  Változó i:Egész
  H(1..K):=∅
  Ciklus i=1-től K*N-1-ig
    j:=VéletlenSzám(i..K*N); Csere(X(i),X(j))
    H((i-1) Div K):+X(i) ['+'=unió]
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```