PROGRAMOZÁSMÓDSZERTAN
5. ELŐADÁS'2004
(VÁZLAT)

1. RENDEZÉSI TÉTELEK

1.1. Rendezési tételekről előzetesen

1.1.1. A feladat

Egy adatsorozat elemeinek átrendezése úgy, hogy elemei a művelet után valamely „szempontból" rendezettek legyenek.

A **szempontot** gyakorta az elem egy valamely része, **mezője** testesíti meg: a **kulcs**.

Azaz az Elem=Kulcs×Érték. Ekkor $e_1 \le e_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} e_1.\text{Kulcs} \le e_2.\text{Kulcs}$.

E helyett elképzelhető egy, az elemek alaphalmazán értelmezett olyan **függvény** is, amely értékkészlete egy nyilvánvalóan rendezett halmaz, pl. $\mathbb{N}$.

Azaz KulcsFv:Elem→$\mathbb{N}$[1]. Ekkor $e_1 \le e_2 \overset{def}{\Leftrightarrow} \text{KulcsFv}(e_1) \le \text{KulcsFv}(e_2)$

1.1.2. Fajtái

- Belső rendezések – a rendezendő sorozat **befér a memóriába**, ezért feltehetjük, hogy **tömb**ben tárolható.
- Külső rendezések – a sorozat **egésze nem** tartható egyidejűleg a tárban, ekkor elemei valamely (háttértár) **állomány**(ok)ban tárolódnak. (L. Adatfeldolgozás előadásban.)

Megjegyzés:

Ha –bár nem fér a sorozat a memóriába, de– olyan háttértár adatszerkezetben tárolódik, amely ***közvetlen elérésű***, vagyis létezik egy rajta értelmezett ***indexszelés***-szerű művelet (az elemeléréshez, illetve az elemmódosításhoz), akkor kicsi átalakítással a belső rendezés algoritmusai alkalmazhatók.

Ebből a megjegyzésből is érződik a fenti fajták elnevezésének nem túl szerencsés volta. Kifejezőbb lenne valami efféle: „Rendezés *közvetlen elérésű* adatszerkezetben", ill. „Rendezés *szekvenciális* adatszerkezetben".

[1] Persze $\mathbb{N}$ helyett megfelelő bármely „közismert" rendezett halmaz. Pl.: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{S}$ (=Szövegek halmaza) stb.

1.1.3. Algoritmikus „filozófiák”

Mivel a rendezés során *permutáljuk* a bemenő sorozatot, sok út vezet a rendezettből rendezett felé, ezért sokféle módszer található a permutálásra. Ezek eltérő **hatékonyság**gal rendelkeznek, más körülmények között másképpen („okosan”, „bután”) viselkednek.

Fajta	Lényeg
Transzpozíciós	Ha az összehasonlításban szereplő ***elempár**ok* egymáshoz képesti sorrendje (transzpozíció) rossz, akkor megcseréljük… Pl.: (***4***,**3**,2,5,1) ⇒ (3,***4***,**2**,5,1) ⇒ (3,2,***4***,**5**,1) ⇒ (3,2,4,***5***,**1**) ⇒ (***3***,**2**,4,1,***5***) ⇒ (2,***3***,**4**,1,***5***) ⇒ (2,3,***4***,**1**,***5***) ⇒ (***2***,**3**,1,***4***,***5***) ⇒ …
Szelekciós	Mindig a ***rendezettségszerinti következő*** kiválasztása (szelekciója), majd helyre tétele csere útján… Pl.: (4,3,2,5,1) ⇒ …minimum kiválasztás(4,3,2,5,1): ***1*** … ⇒ (***1***,3,2,5,**4**) ⇒ …minimum kiválasztás(3,2,5,4): ***2*** … ⇒ (***1***,***2***, **3**,5,4) ⇒ …
Beszúrásos	A következő elemnek a rendezettségnek megfelelő helyre tétele a már ***rendezett részsorozat***ban… Pl.: (***4***,**3**,2,5,1) ⇒ (***3***,***4***,**2**,5,1) ⇒ (***2***,***3***,***4***,**5**,1) ⇒ (***2***,***3***,***4***,***5***,**1**) ⇒ (***1***,***2***,***3***,***4***,***5***)

1.1.4. A hatékonyságról dióhéjban

Mit mérhetünk?

- Helyfoglalás
- Végrehajtási idő

A mérés „skálája”:

- Minimális – optimista
- Átlagos – praktikus
- Maximális – pesszimista

Hogyan mérhetünk?

- Absztrakt módon
  - **Elem**-hasonlítások száma ($\leq_H$)
  - **Elem**-mozgatások száma ($:=_H$)
  - **Elem**ek össz-száma
- „Colstockkal-stopperrel”

Az absztrakt mérés matematikai eszközeiről:[2]

Miként változik az **elem**számmal (sorozathosszal) a hasonlításszám, ill. a mozgatásszám; társzükséglet *aszimptotikus*an?

Egy $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény aszimptotikus[3] viselkedésének kifejezésére (többek közt) a Θ- (theta), O- (nagy ordó), Ω-függvények alkalmasak:

$\Theta(g(n)):=\{f(n) \mid \exists c_1,c_2\in\mathbb{R}_+, n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0 \Rightarrow c_1*g(n)\leq f(n)\leq c_2*g(n)\}$ – korlátos

$O(g(n)):=\{f(n) \mid \exists c\in\mathbb{R}_+, n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0 \Rightarrow 0\leq f(n)\leq c*g(n)\}$ – felülről korlátos

$\Omega(g(n)):=\{f(n) \mid \exists c\in\mathbb{R}_+, n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0 \Rightarrow c*g(n)\leq f(n)\}$ – alulról korlátos

---

[2] Ajánlható ehhez az alábbi irodalom:
- Cormen et al.: Algoritmusok, Műszaki Könyvkiadó, 1997 [18-34. oldalak]
- Knuth: A számítógép-programozás művészete 3., Műszaki Könyvkiadó, 1988

[3] Azért éppen $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, mert a feladat szempontjából érdekes sorozat *hossza* függvényében szeretnénk meghatározni bizonyos gyakoriságszerű programjellemzők tendenciáját (ezért aszimptotikusan).

Megjegyzések:

1. f(n)=O(g(n)) helytelen szokás, hisz O(…) függvény**halmaz**. Helyesen: f(n)∈O(g(n))
2. Értelme persze csak akkor van a fentieknek, ha az f(n) függvény valamilyen „egyszerű” függvény; pl. *hatvány*függvény, *exponenciális* függvény stb.

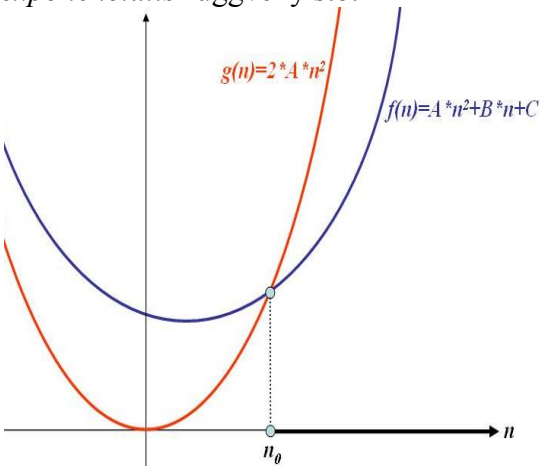
   Pl.: ha $f(n)=A*n^2+B*n+C$, akkor

   $f\in O(n^2)$,

   hiszen $c:=2*A$, s ekkor megadható egy megfelelő választás n_0-ra

   $$n_0 := \left\lceil \frac{B}{2*A} + \sqrt{\frac{B^2}{4*A^2}+C} \right\rceil$$

   hogy $n\geq n_0$ esetén $0\leq f(n)\leq c*n^2$ teljesüljön. Sőt az $f\in\Theta(n^2)$ is igaz.



1.1.5. A specifikációjukról

Legtöbbjük specifikációja ugyanaz:

BelsőRendezés$(H^*, F(H\times H,\mathbb{L})):H^*$

Megjegyzések:

Be:	$N\in\mathbb{N}$, $X\in H^*$, $H=Kulcs\times Érték$, $\leq_{Kulcs}:Kulcs\times Kulcs\to\mathbb{L}$	*Sorozat és egy reláció.*
Ki:	$X'\in H^*$	*A transzformáció helyben történik.*
Ef:	$N=Hossz(X)\wedge\leq_{Kulcs}$ *rendezés* $\wedge$ *X közvetlen elérésű*	*Rendezési reláció a szokásos tulajdonságokkal; X elemei indexeléssel elérhetők:* $\exists$ *Elem(x,i)=*x_i *operáció….*
Uf:	$X'\in P(X)\wedge RendezettSorozat_{\leq}(X')$	*A kimenet a bemenet egy permutációja, amelyben az elemek rendezetten követik egymást. A továbbiakban is föltesszük, hogy a rendezettség mindig* **nem-csökkenő***t jelent.*

A tételek szerkezete visszatérő:

- *specifikáció* (amit elhagyunk, ha a fentivel megegyező),
- *algoritmus, amelyben az alábbi definíciós rész unós untig ismétlődik (ezért ezt sem írjuk le):*

```
Konstans MaxN:Egész(???)
Típus THk=Tömb(1..MaxN:TH)  [TH az alaphalmaz típusa]
Infix Operátor ≤(Konstans e,f:TH):Logikai
  Másként KisebbEgyenlő
  KisebbEgyenlő:=e.Kulcs≤f.Kulcs [visszavezetés ≤Kulcs-ra]
Operátor vége.
Infix Operátor >(Konstans e,f:TH):Logikai
  Másként Nagyobb
  Nagyobb:=nem(e≤f)
Operátor vége.
```

- *hatékonysági* megfontolások.

1.2. Belső rendezések

1.2.1. Egyszerű cserés rendezés

CsereRendezés$(H^*, F(H\times H, \mathbb{L})):H^*$

Alg:

```
Eljárás CsereRendezés(Konstans N:Egész, Változó[4] X:THk):
  Változó i,j:Egész
  Ciklus i=1-től N-1-ig
    Ciklus j=i+1-től N-ig
      Ha X(i)>X(j) akkor Csere(X(i),X(j))
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
Eljárás Csere(Változó e,f:TH):[5]
  Változó s:TH
  s:=e; e:=f; f:=s
Eljárás vége.
```

A filozófiát tekintve: *transzpozíciós* rendezés.

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	N+1[6]		$\Theta(N)$
Hasonlításszám	N*(N-1)/2		$\Theta(N^2)$
Mozgatásszám	0	3*N*(N-1)/2	$O(N^2)$

Érdemes megfontolni: milyen tulajdonságú bemenő adat esetén viselkedik a fentiek szerint.

1.2.2. Minimumkiválasztásos rendezés

Minimumkiválasztásos$(H^*, F(H\times H, \mathbb{L})):H^*$

Alg:

```
Eljárás MinimumKiválasztásos(Konstans N:Egész
                             Változó  X:THk):
  Változó i,j:Egész
```

[4] Ki- és bemenő paraméter egyben, ezért változó.
[5] A csere-eljárás később is elő fog bukkanni, de akkor már nem deklaráljuk újra.
[6] A"+1" az s TH-típusú segédváltozó.

```
  Ciklus i=1-től N-1-ig
    [mini:=MinimumKiválasztás(X(i..N),>)]
    mini:=i
    Ciklus j=i+1-től N-ig
      Ha X(mini)>X(j) akkor mini:=j
    Ciklus vége
    Csere(X(i),X(mini))
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A filozófiát tekintve: *szelekciós* rendezés.

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	N+1		Θ(N)
Hasonlításszám	N*(N-1)/2		Θ(N^2)
Mozgatásszám	3*(N-1)		Θ(N)

Gondoljon bele: mi lehet az *invariáns állítás* az egyes ciklusokban az egyszerű cserés és mi ennél a rendezésnél?

1.2.3. Buborékos rendezés

Buborékos(H^*,F($H\times H$,$\mathbb{L}$)):H^*

Alg:

```
Eljárás Buborékos(Konstans N:Egész, Változó X:THk):
  Változó i,j:Egész
  Ciklus i=N-től 2-ig -1-esével
    Ciklus j=1-től i-1-ig
      Ha X(j)>X(j+1) akkor Csere(X(j),X(j+1))
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A filozófiát tekintve: *transzpozíciós* rendezés.

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	N+1		Θ(N)
Hasonlításszám	N*(N-1)/2		Θ(N^2)
Mozgatásszám	0	3*N*(N-1)/2	O(N^2)

Észreveheti, hatékonysági szempontból megegyezik az egyszerű cserés rendezéssel. Meglepő ez?

1.2.4. Javított buborékos rendezés

JavítottBuborékos(H^*,$F(H\times H,\mathbb{L})$):H^*

Alg:

```
Eljárás JavítottBuborékos(Konstans N:Egész
                          Változó  X:THk):
  Változó i,j,csH:Egész    [csH:a csere helye, indexe]
  i:=N
  Ciklus amíg i≥2
    csH:=0
    Ciklus j=1-től i-1-ig
      Ha X(j)>X(j+1) akkor Csere(X(j),X(j+1)); csH:=j
    Ciklus vége
    i:=csH
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A filozófiát tekintve: *transzpozíciós* rendezés.

A `csH` kezdőértékére tud-e még más, többé-kevésbé „logikus” választást?

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	N+1		Θ(N)
Hasonlításszám	N-1	N*(N-1)/2	Ω(N), $O(N^2)$
Mozgatásszám	0	3*N*(N-1)/2	$O(N^2)$

A hatékonyság „átlagos” esetben javul.

1.2.5. Beillesztéses rendezés

Beillesztéses(H^*,$F(H\times H,\mathbb{L})$):H^*

Alg:

```
Eljárás Beillesztéses(Konstans N:Egész, Változó X:THk):
  Változó i,j:Egész
  Ciklus i=2-től N-ig
    j:=i-1
    Ciklus amíg j≥1 és X(j)>X(j+1)
      Csere(X(j),X(j+1)); j:-1
    Ciklus vége
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A filozófiát tekintve: *beszúrásos* rendezés.

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	N+1		Θ(N)
Hasonlításszám	N-1	N*(N-1)/2	Ω(N), O(N^2)
Mozgatásszám	0	3*N*(N-1)/2	O(N^2)

Gondoljon bele: mik az *invariáns állítások* ennél a rendezésnél?

1.2.6. Javított beillesztéses rendezés

JavítottBeillesztéses(H*,*F*(H×H,𝕃)):H*

Alg:

```
Eljárás JavítottBeillesztéses(Konstans N:Egész
                              Változó  X:THk):
  Változó i,j:Egész
          segéd:TH
  Ciklus i=2-től N-ig
    j:=i-1; segéd:=X(i)
    Ciklus amíg j≥1 és X(j)>segéd
      X(j+1):=X(j); j:-1
    Ciklus vége
    X(j+1):=segéd
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

A filozófiát tekintve: *beszúrásos* rendezés.

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	N+1		Θ(N)
Hasonlításszám	N-1	N*(N-1)/2	Ω(N), O(N^2)
Mozgatásszám	2*(N-1)	2*(N-1)+N*(N-1)/2	Ω(N), O(N^2)

1.3. Speciális rendezések

1.3.1. Szétosztó rendezés

Egy **nem helyben** dolgozó rendezés, amely igen kemény elvárásokat fogalmaz meg a bemenő sorozatra.

SzétosztóRendezés((KULCS×H)*,*F*(KULCS×KULCS,𝕃)): (KULCS×H)*

Be: $N\in\mathbb{N}, X\in(Kulcs\times H)^*, Kulcs=\mathbb{N}, \leq_{Kulcs}:Kulcs\times Kulcs\to\mathbb{L}$ – $\leq_{Kulcs}$ elhagyható, hisz létezése nyilvánvaló

Ki: $Y\in(Kulcs\times H)^*$ – nem helyben rendezés

Ef: $N=Hossz(X) \wedge \leq_{Kulcs}$ *rendezés* $\wedge\ X.Kulcs\in\mathcal{P}((1..N))$ – $\leq_{Kulcs}$ elhagyható, hisz tulajdonsága nyilvánvaló

Uf: $Y\in\mathcal{P}(X) \wedge RendezettSorozat_{\leq}(Y)$

Alg:

```
Eljárás SzétosztóRendezés(Konstans N:Egész, X:THk
                          Változó  Y:THk):
  Változó
    i,j:Egész
  Ciklus i=1-től N-ig
    Y(X(i).Kulcs):=X(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	2*N		Θ(N)
Hasonlításszám	0		O(1)
Mozgatásszám	N		Θ(N)

1.3.2. Számlálva szétosztó rendezés

Az előbbi rendezéstől abban tér el, hogy gyengíti az előfeltételt, és a tényleges rendezés előtt némi –kényszerű– előkészületeket tesz.

SzámlálvaSzétosztóRendezés$((\text{KULCS}\times\text{H})^*, F(\text{KULCS}\times\text{KULCS},\mathbb{L}))$: $(\text{KULCS}\times\text{H})^*$

Be: $N\in\mathbb{N}$, $X\in(Kulcs\times H)^*$, $M\in\mathbb{N}$, $Kulcs=\mathbb{N}[\leq_{\text{Kulcs}}:Kulcs\times Kulcs\to\mathbb{L}]$

Ki: $Y\in(Kulcs\times H)^*$

Ef: $N=Hossz(X) \wedge \forall i\in[1..N]: x_i.Kulcs\in\{1..M\}\ [\wedge \leq_{\text{Kulcs}}\ rendezés]$

Uf: $Y\in P(X) \wedge RendezettSorozat_{\leq}(Y)$

Alg:

```
Eljárás SzámlálvaSzétosztóRendezés(Konstans N:Egész, X:THk
                                   Változó  Y:THk):
  Konstans
    MaxM:Egész(???)
  Változó
    i:Egész
    Db:Tömb(1..MaxM:Egész)
  Db(1..M):=0
  Ciklus i=1-től N-ig
    Db(X(i).Kulcs):+1
  Ciklus vége
  Ciklus i=2-től M-ig
    Db(i):+Db(i-1)   [Db(i): i. kulcsúak utolsójára mutat]
  Ciklus vége
  Ciklus i=1-től N-ig
    Y(Db(X(i).Kulcs)):=X(i); Db(X(i).Kulcs):-1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Érdemes eltöprengeni, mely tételek bukkantak föl az algoritmusban!

Hatékonyság:

Szempont	*Min*	*Max*	
Helyfoglalás	2*N+ε*M		Θ(N)
Hasonlításszám	0		Θ(1)
Mozgatásszám	N		Θ(N)
Kulcsmező indexelés száma	3*N ♣		Θ(N)

A számláló tömb elemének mérete kicsiny, azaz „εpszilon” (lehet) a rendezendő sorozat eleméhez képest. Mivel számosan lehetnek, helyet mégis foglalnak.

1.3.3. Számláló rendezés

Az alábbi rendezés sem helyben rendez, és több rendezésből is átvesz ötleteket.

SzámlálóRendezés$(H^*, F(H\times H, \mathbb{L})):H^*$

Be: $N\in\mathbb{N}, X\in H^*, \leq: H\times H\to\mathbb{L}$

Ki: $Y\in H^*$

Ef: $N=Hossz(X) \wedge \leq_H$ *rendezés*

Uf: $Y\in P(X) \wedge RendezettSorozat_{\leq}(Y)$

Alg:

```
Eljárás SzámlálóRendezés(Konstans N:Egész, X:THk
                         Változó  Y:THk):
  Változó
    i,j:Egész
    Db:Tömb(1..MaxN:Egész)
  Db(1..N):=1
  [Majdnem egyszerű cserés rendezés:]
  Ciklus i=1-től N-1-ig
    Ciklus j=i+1-től N-ig
      Ha X(i)>X(j) akkor  Db(i):+1
                  különben Db(j):+1
    Ciklus vége
  Ciklus vége
  [Szétosztó rendezés:]
  Ciklus i=1-től N-ig
    Y(Db(i)):=X(i)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Az egyszerű cserés rendezést csak az inverziók felderítésére használjuk, az elemmozgatást a végére hagyjuk. Hogy miért?

♣ Az `X(i).Kulcs`-csal indexelést az inkrementálásban és a dekrementálásban csak egyszer számolva.

Hatékonyság:

Szempont	***Min***	***Max***	
Helyfoglalás	2*N+ε*N		Θ(N)
Hasonlításszám	N*(N-1)/2		$\Theta(N^2)$
Mozgatásszám	N		Θ(N)
Kulcsmező indexelés száma	N		Θ(N)

1.4. Shell rendezés

Egy valóban hatékony rendezéssel fejezzük be a rendező algoritmusok sorát.

ShellRendezés$(H^*, F(H\times H, \mathbb{L})):H^*$

Kezdjük egy beszúrásos rendezéses példával! A példa egy-egy sora a belső ciklus teljes lefutása utáni állapotot rögzíti. Ahol mozgás volt ott színes a háttér.

503	87	512	61	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
87	**503**	512	61	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
87	**503**	**512**	61	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**503**	**512**	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**503**	**512**	**908**	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**170**	**503**	**512**	**908**	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**170**	**503**	**512**	**897**	**908**	275	653	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**170**	**275**	**503**	**512**	**897**	**908**	653	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**170**	**275**	**503**	**512**	**653**	**897**	**908**	426	154	509	612	677	765	703
61	**87**	**170**	**275**	**426**	**503**	**512**	**653**	**897**	**908**	154	509	612	677	765	703
…															
61	**87**	**154**	**170**	**275**	**426**	**503**	**509**	**512**	**612**	**653**	**677**	**703**	**765**	**897**	**908**

Megállapítható, hogy nagyon lassan haladnak, nagyon sok apró lépéssel araszolnak a magas értékek a helyük felé. Ebből támadhat az ötlet: ne „egyesével” tekintsük sorozatnak a rendezendőt, hanem nagyobb „lépésközösével”. Pontosabban több részsorozatot rendezzünk egyidejűleg, s „maj’mekláttyuk”… Nézzük pl. az előbbit 7-esével bontva részsorozatokra. Most az egy részsorozatba tartozókat azonos színű számokkal jelöltük.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
503	**87**	**512**	**61**	**908**	**170**	**897**	**275**	**653**	**426**	**154**	**509**	**612**	**677**	**765**	**703**
275	**87**	**426**	**61**	**509**	**170**	**677**	**503**	**653**	**512**	**154**	**908**	**612**	**897**	**765**	**703**

A „nagyot ugró” elemek: **275**, **503**, **426**, **512**, **509**, **908**, **677**, **897**. Összevethetjük az eredeti (1. sor) és a majdani végleges (3. sor) helyzetüket a pillanatnyival (5. sor). A 2. és a 4. sorban a végleges helyétől vett távolság látható.

503	87	512	61	908	170	897	275	653	426	154	509	612	677	765	703
6	*0*	*6*	*3*	*11*	*2*	*8*	*3*	*2*	*4*	*8*	*4*	*3*	*2*	*1*	*3*
61	87	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908
4	*0*	*3*	*3*	*3*	*2*	*4*	*1*	*2*	*1*	*8*	*4*	*3*	*1*	*1*	*3*
275	87	426	61	509	170	677	503	653	512	154	908	612	897	765	703

A távolságösszeg jócskán csökkent: 66→43. (Mindezt 15 összehasonlítással értük el. Összevetve az előbbi példával: ott 15 összehasonlítás után jóval 50 fölött találnánk a távolságösszeget.)

Ha most már 5-ös rendezést végzünk:

275	87	426	61	509	170	677	503	653	512	154	908	612	897	765	703
154	87	426	61	509	170	677	503	653	512	275	908	612	897	765	703

Folytassuk 3-asával:

154	87	426	61	509	170	677	503	653	512	275	908	612	897	765	703
61	87	170	154	275	426	512	503	653	612	509	765	677	897	908	703

Majd 1-esével:

61	87	170	154	275	426	512	503	653	612	509	765	677	897	908	703
61	87	154	170	275	426	503	509	512	612	653	677	703	765	897	908

Fontosnak látszó kérdés: *hogyan változzék a lépésköz*.

Szempontok, megfontolások:

- *Ne „apránként” változzék*, mert akkor nagyon sok lépést kell tenni, sőt valószínűleg nagyot már nem is tudna mozdítani az elemeken egy kb. ugyanakkora lépésközű „újrarendezés”. Pl. feleződjön!
- *Relatív prímek* legyenek az egymást követő lépésközök, mert ellenkező esetben sok elemet ugyanabba a részsorozatba sorolván, fölöslegesen hasonlítjuk egymáshoz. Pl. csökkenő prímek!

Ezek után maga az algoritmus, amely alapja a már ismert javított beillesztéses rendezés.

Alg:

```
Eljárás ShellRendezés(Konstans N:Egész, Változó X:THk):
  Változó
    i,j,k,m:Egész
    segéd:TH
```

```
  m:=m0 [kezdő lépésköz]
  Ciklus amíg m≥1  [lépésköz-ciklus]
    Ciklus k=m+1-től 2*m-ig [k: az m. részsorozat 2. eleme]
      [Javított beillesztéses rendezés
       m-lépésközű sorozatra:]
      Ciklus i=k-tól N-ig m-esével
        j:=i-m; segéd:=X(i)
        Ciklus amíg j>0 és X(j)>segéd
          X(j+m):=X(j); j:-m
        Ciklus vége
        X(j+m):=segéd
      Ciklus vége
    Ciklus vége
    m:=Követező(m)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
  [l0=2^k-1 esetén:]
Függvény Következő(Konstans m:Egész):Egész
  [Ef: m=2^k-1]
  Következő:=(m+1) Div 2 -1
  [uf: Következő(m)=2^k-1-1]
Függvény vége.
  vagy [m0,m1=egymást követő Fibonacci-számok esetén
        m0,m1 globális változók:]
Függvény Következő(Konstans m:Egész):Egész
  [Ef: m,m1=egymást követő Fibonacci-számok]
  Változó
    mm,m2:Egész
  m2:=m-m1; mm:=m1; m1:=m2
  Következő:=mm
  [Uf: Következő(m),m1=egymást követő Fibonacci-számok]
Függvény vége.
[Pl. m0=m=13, m1=8 ⇒ (m,m1)=(8,5),(5,3),(3,2),(2,1)]
```

Megjegyzés:

David Russell (1971) „kimérte” a Shell rendezés hatékonyságát: $100 \le N \le 60000$ mellett, különböző lépésköz-függvény esetén így találta:

a) $m_k=2^k+1$ esetén $1.09*N^{1.27}$

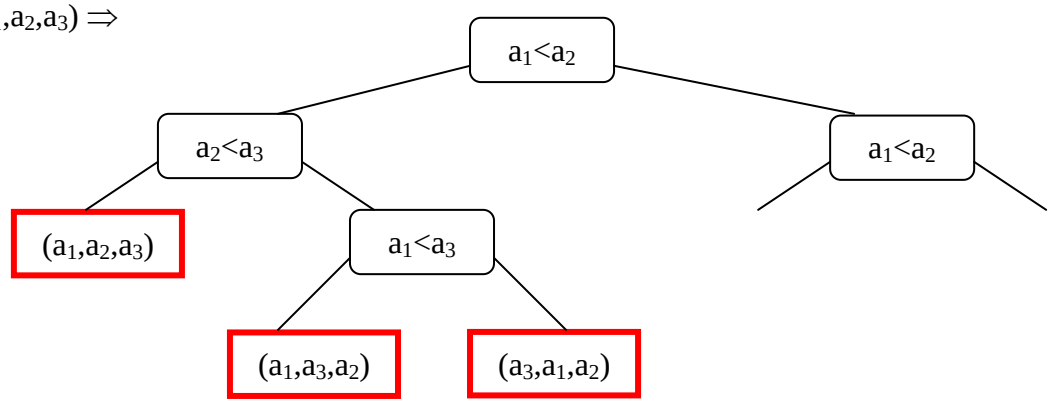
b) $m_k=2^k-1$ esetén $1.22*N^{1.26}$

2. EGY CSÖPP RENDEZÉSELMÉLET

2.1. Minimális hasonlításszám

N elem rendezéseinek feleltessünk meg az ún. *döntés (összehasonlítási)* v. *végrehajtási fá*t!

Pl. $(a_1,a_2,a_3) \Rightarrow$



A fa leveleinek száma 3 elem permutációinak száma: 3!=6. N elem esetén N! .

Állítás:

A rendezés hasonlításainak száma elemszám függvényében $H(n) \in \Omega(n*\log(n))$

Bizonyítás:

1. Rendeljük az n elemű sorozathoz a döntési fát!
2. Ekkor a permutációk száma: n!, ami éppen a leveleinek száma.
3. Legyen h:=a magassága, azaz leghosszabb ágának hossza (vagyis a legkedvezőtlenebb esetben a szükséges hasonlítások száma).
4. Ekkor egy bináris fának legfeljebb (a teljes bináris fának pontosan) 2^h levele van.

   Azaz $n! \le 2^h$. Innen $h \ge \log(n!)$.

A Stirling-formula legegyszerűbb alakját $(n! \approx (n/e)^n)$ felhasználva:

$H(n) \ge \log(n!) \approx n*\log(n)-n*\log(e) \Rightarrow H \in \Omega(n*\log(n))$

(A $H \in \Omega(n*\log(n))$ belátása:

keressük olyan $c \in \mathbb{R}_+$-t és $n_0 \in \mathbb{N}$, amelyre $\forall n \ge n_0$-re teljesül

$n*\log(n)-n*\log(e) \ge c*n*\log(n)$

c-re rendezve:

$1 - \log(e)/\log(n) \ge c$

Legyen pl. c:=0,5, akkor n_0 határindexnek megfelelő lesz:

$1 - \log(e)/\log(n) \ge 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5 \ge \log(e)/\log(n) \Leftrightarrow \log(n) \ge 2*\log(e) \Leftrightarrow n \ge e^2 = n_0$.)

Q.e.d.

2.2. Minimális mozgatásszám

N elem rendezése úgy, hogy a lehető legkevesebb mozgatást végezze az algoritmus.

Megoldás nyilván a szétosztó rendezés. Hátránya, hogy

1. Megduplázza a helyigényt (sőt).
2. Komoly előzetes elvárással él (Kulcs=rendezés szerint hely indexe).

Tegyük föl (anélkül, hogy magát az algoritmust keresnénk), hogy valahonnan rendelkezésre áll a rendezési index-információ[7], s ezután kell a minimális mozgatást megvalósítanunk. Tehát a sorozat megduplázása nélkül, helyben helyretételre kell módszert találnunk.

Lássunk egy számpéldát! Jelölje **S** a sorozat elemeit, az elem indexét az **I**, és a rendezettség szerinti helyének indexét **RI** (**R**end**I**ndex).

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	2	7	1	5	3	6	4
S:	20	70	10	50	30	60	40

A helyrerakás lépései:

1. Helyet csinálunk – az S(1)-ben.

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:		7	1	5	3	6	4
S:		70	10	50	30	60	40

2
20

Ekkor már helyére tehetjük az 1. helyre valót: a 10-et.

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	7		5	3	6	4
S:	**10**	70		50	30	60	40

2
20

A felszabadult 10 helyére való a 30.

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	7	**3**	5		6	4
S:	**10**	70	**30**	50		60	40

2
20

és így tovább…

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	7	**3**		**5**	6	4
S:	**10**	70	**30**		**50**	60	40

2
20

[7] Láttuk a számláló rendezésnél, ilyen információ megszerezhető.

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	7	**3**	**4**	**5**	6	
S:	**10**	70	**30**	**40**	**50**	60	
	2						
	20						

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**		**3**	**4**	**5**	6	**7**
S:	**10**		**30**	**40**	**50**	60	**70**
	2						
	20						

Már csak az előzetesen kimentett 20-at kell visszatennünk, és kész.

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6	**7**
S:	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	60	**70**

(Ne is vegyük észre, hogy a 60 meg sem moccant!)

De nézzük az alábbi, picit módosított példát:

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:		3	1	5	7	6	4
S:		30	10	50	70	60	40
	2						
	20						

Ugyanúgy járunk el, ahogy előbb:

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	3		5	7	6	4
S:	**10**	30		50	70	60	40
	2						
	20						

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**		**3**	5	7	6	4
S:	**10**		**30**	50	70	60	40
	2						
	20						

… és máris visszatehető a 20, sőt egyebet sem tehetünk.

I:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
RI:	**1**	**2**	**3**	5	7	6	4
S:	**10**	**20**	**30**	50	70	60	40

De baj van: nem vagyunk még készen! :-(

…

A probléma: a permutáció gyakorta (sőt többnyire) –csoportelméleti szóhasználat szerinti– ún. *ciklusok szorzata*, amelyeken belül az elemek egymástól függetlenül permutálhatók a helyükre. A fenti példa ciklusok szorzatára bontva: (132)(754)(6).

Alg:

```
Konstans MaxN:Egész(???)
Típus THk= Tömb(1..MaxN:TH)
      TIndk=Tömb(1..MaxN:0..MaxN) [=0⇒OK; =0⇒i. helyre való]
      TKeresett=Rekord(van:Logikai, hol:Egész)
Eljárás Helyretétel(Konstans N:Egész, Változó[8] Ind:TIndk
                    [Változó] S:THk):
  Változó
    j:Egész
    tovább:TKeresett
  tovább.hol:=1; tovább.van:=Igaz
  Ciklus amíg tovább.van
    EgyCiklusHelyre(tovább.hol,Ind,S)
    tovább:=Keresés(Ind,≠0) [van még ciklus? hol?]
  Ciklus vége
Eljárás vége.
Eljárás EgyCiklusHelyre(Változó j:Egész,
                                  Ind:TIndk, S:THk):
  Változó
    r:TH
    i:Egész
```

[8] Bár nem ***kimeneti*** szerepű az adat!

```
  r:=S(j)   [S(j) fölszabadítása]
  Ind(j):=0 [ez már rendben lesz]
  Ciklus amíg Ind(j)≠0
    i:=Kiválasztás(Ind,=j) [hol van a j-vel egyező indexű?]
    S(j):=S(i) [S(i) helyretétele, fölszabadítása]
    Ind(i):=0  [ez már rendben lesz]
    j:=i
  Ciklus vége
  S(j):=r
Eljárás vége.
```

Hatékonysági elemzés:

$:=_{TH}$	$=_{TH},\leq_{TH}$	$:=_{\mathbb{N}}$	$=_{\mathbb{N}},\leq_{\mathbb{N}}$	**Indexelés**	**TH**	$\mathbb{N}$
EgyCiklusHelyre						
$2+c_j*1$	0	$(O(N)*c_j+$ *Kiválasztás*$*c_j$ $+3*c_j)+1$	$O(N)*c_j$	$O(N)*c_j$ $+4$	1	1
$2+c_i$	**0**	**$(O(N)+3)*c_i+1$**	**$O(N)*c_i+1$**	**$O(N)*c_i+4$**	**1**	**1**
HelyreTétel ($\Sigma_j c_j = c$)						
$\Sigma_j\ 2+c_j$	0	$O(N)*c$ *Keresés*$*c$ $+1)$	$O(N)*c$	$O(N)*c$ $+4$	0	3
$O(N)$	**0**	**$\Sigma_i\ O(N)+1$**	**$\Sigma_i\ O(N)$**	**$\Sigma_i\ O(N)$**	**0**	**3**
$O(N)$	**0**	**$O(N)$**	**$O(N)$**	**$O(N)$**	**1**	**4**

TARTALOM

ProgramozásMódszertan 5. előadás'2004 (vázlat) 1
1. Rendezési tételek 1
1.1. Rendezési tételekről előzetesen 1
1.1.1. A feladat 1
1.1.2. Fajtái 1
1.1.3. Algoritmikus „filozófiák" 2
1.1.4. A hatékonyságról 2
1.1.5. A specifikációjukról 3
1.2. Belső rendezések 4
1.2.1. Egyszerű cserés rendezés 4
1.2.2. Minimumkiválasztásos rendezés 4
1.2.3. Buborékos rendezés 5
1.2.4. Javított buborékos rendezés 6
1.2.5. Beillesztéses rendezés 6
1.2.6. Javított beillesztéses rendezés 7
1.3. Speciális rendezések 7
1.3.1. Szétosztó rendezés 7
1.3.2. Számlálva szétosztó rendezés 8
1.3.3. Számláló rendezés 9
1.4. Shell rendezés 10
2. Egy csöpp rendezéselmélet 13
2.1. Minimális hasonlításszám 13
2.2. Minimális mozgatásszám 13