

2.5. Lineáris egyenletrendszer kondicionáltsága

2.10. Definíció. A $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix kondíciós számának nevezzük. (Csak invertálható mátrixra definiálható.)

Megjegyzés: Mivel a kondíciós szám függ a normától $\text{cond}_p(A) = \|A\|_p \cdot \|A^{-1}\|_p$.

2.16. Tétel. Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertálható mátrix, $\underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{K}^n$ vektorok.

A) Tekintsük az $A\underline{x} = \underline{b}$ és az $A(\underline{x} + \Delta\underline{x}) = \underline{b} + \Delta\underline{b}$ egyenletrendszert.

Ha $\underline{b} \neq \underline{0}$, akkor

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \frac{\|\Delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \leq \frac{\|\Delta\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$$

B) Tekintsük az $A\underline{x} = \underline{b}$ és az $(A + \Delta A)(\underline{x} + \Delta\underline{x}) = \underline{b}$ egyenletrendszert.

Ha $A + \Delta A$ invertálható (pl. $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$), akkor

$$\frac{\|\Delta\underline{x}\|}{\|\underline{x} + \Delta\underline{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} =: k$$

illetve $\frac{\|\Delta\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{k}{1-k}.$

Bizonyítás.

Az A) állítás felső becslését bizonyítjuk.

$A\underline{x} = \underline{b}$ -ből $\|\underline{b}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|$, ahonnan $\|\underline{x}\|$ -t kifejezve $\frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|} \leq \|\underline{x}\|$.

$A(\underline{x} + \Delta\underline{x}) = \underline{b} + \Delta\underline{b}$ -ből $A \cdot \Delta\underline{x} = \Delta\underline{b}$ és $\Delta\underline{x} = A^{-1} \Delta\underline{b}$.

Vektornormát alkalmazva $\|\Delta\underline{x}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\underline{b}\|$. A kapott egyenlőtlenségekkel becslünk.

$$\frac{\|\Delta\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\underline{b}\|}{\frac{\|\underline{b}\|}{\|A\|}} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} = \text{cond}(A) \frac{\|\Delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}.$$

2.17. Tétel. A kondíciós szám tulajdonságai.

a) Indukált norma esetén $\text{cond}(I) = 1$.

b) Tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertálható mátrix és indukált norma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.

c) Tetszőleges $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ esetén $\text{cond}(cA) = \text{cond}(A)$.

d) Q unitér (ortogonális) mátrixra $\text{cond}_2(Q) = 1$.

e) A szimmetrikus, pozitív definit mátrixra $\text{cond}_2(A) = \frac{\max_i l_i(A)}{\min_i l_i(A)}$.

f) A szimmetrikus és invertálható mátrixra $\text{cond}_2(A) = \frac{\max_i |l_i(A)|}{\min_i |l_i(A)|}$.

g) Tetszőleges $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ invertálható mátrix esetén $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |l_i(A)|}{\min |l_i(A)|}$.

Bizonyítás.

a) Trivi a 2.4. fejezet 1. példája alapján.

b) $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$.

c) $\text{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| = |c| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A\| \cdot \|A\|^{-1} = \text{cond}(A)$.

d) Trivi a 2.4. fejezet 7. példája alapján.

e) A 2.4. fejezet 5. példája alapján $\|A\|_2 = \max l_i(A)$. A^{-1} sajátértékei: $\frac{1}{l_i(A)}$ -k.

$$\text{cond}_2(A) = \max l_i(A) \cdot \max \frac{1}{l_i(A)} = \max l_i(A) \cdot \frac{1}{\min l_i(A)}.$$

f) Az e)-vel analóg módon.

g) A 2.4. fejezet 4. példája alapján $\max |l_i(A)| \leq \|A\|$ és $\frac{1}{\min |l_i(A)|} = \max |l_i(A^{-1})| \leq \|A^{-1}\|$.

Kidolgozott példák.

1. **Példa.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ mátrix 1-es és ∞ kondíciós számát.

Megoldás. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$\|A\|_1 = 9$, $\|A^{-1}\|_1 = 10$, tehát $\text{cond}_1(A) = 90$.

$\|A\|_\infty = 10$, $\|A^{-1}\|_\infty = 9$, tehát $\text{cond}_\infty(A) = 90$.

2. **Példa.** Határozzuk meg a $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix 2-es kondíciós számát.

Megoldás. Mivel B szimmetrikus, határozzuk meg a sajátértékeit.

$\begin{vmatrix} 1-l & 2 \\ 2 & 1-l \end{vmatrix} = (1-l)^2 - 4 = l^2 - 2l - 3 = 0$ karakterisztikus polinom gyökei

$l_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$, $l_1 = 3$, $l_2 = -1$ a mátrix sajátértékei.

A 2.17. tétel f) állítása alapján $\text{cond}_2(A) = \frac{3}{1} = 3$.