

2. Előadás

Numerikus Analízis ELTE Kieg.

2007. február 20.

Lineáris egyenletrendszerek (LER) megoldása

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = ?, \quad \text{ahol } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \underline{x}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Lineáris algebrából ismert tételek

- ❶ A LER megoldható $\Leftrightarrow \underline{b}$ előállítható az A oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként.
- ❷ A LER-nek $\exists!$ megoldása $\Leftrightarrow$ az A oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
 $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$
 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- ❸ Cramer-szabály: Ha $\det(A) \neq 0$, akkor $\exists!$ megoldás és

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\det(A)},$$

ahol Δ_k a k -adik módosított determináns, amit úgy kapunk, hogy az A mátrix k -adik oszlopának helyére a $\underline{b}$ vektort írjuk.

Megjegyzések:

1. A Cramer-szabályt csak kicsi mátrixokra érdemes használni az $n!$ körüli műveletigény miatt.
2. Ha A alakja speciális, pl. diagonális vagy háromszög-alakú, akkor a megoldás egymás utáni behelyettesítésekkel megadható.

I. Direkt módszerek:

- Gauss elimináció
- LU -felbontás
- Cholesky-felbontás
- QR -felbontás:
 - Gram-Schmidt ortogonalizáció
 - Householder transzformációval

II. Iterációs módszerek

- Jacobi-iteráció
- Gauss-Seidel-iteráció
- Richardson-iteráció
- ILU -iteráció (inkomplett LU)

LER megoldása Gauss-eliminációval (GE)

Az eljárást részletesen tárgyalták Lineáris Algebrából, így ettől most eltekintünk.
GE alkalmazásai:

① Mátrix determinánsának kiszámítása

Az elimináció műveletei rangtartó átalakítások, a Δ alakról a determináns értéke leolvasható. Ezt korrigálni kell a sor és oszlopindexekben lévő inverziók együttes számával (t).

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{nn}^{(n-1)} \cdot (-1)^t$$

② Különböző jobboldalú, azonos mátrixú LER megoldása

A -n csak egyszer eliminálunk.

③ Mátrix inverzének meghatározása:

$$A \cdot A^{-1} = I, \quad A \cdot X = I, \quad \text{ahol } X = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n), \quad I = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcl} A\underline{x}_1 & = & \underline{e}_1 \\ A\underline{x}_2 & = & \underline{e}_2 \\ & \vdots & \\ A\underline{x}_n & = & \underline{e}_n \end{array}$$

LU -felbontás (Trianguláris-felbontás)

Az A mátrixot egy L alsóháromszög mátrix és egy U felsőháromszög mátrix szorzatára bontjuk, ahol L főátlójában lévő elemek mind 1-esek.

Ekkor a LER megoldása Δ -alakú LER-ek megoldására vezethető vissza:

$$\begin{array}{rcl} A \cdot \underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow L(U \cdot \underline{x}) = \underline{b} \Leftrightarrow & L \cdot \underline{y} & = \underline{b} \rightarrow \underline{y} \\ & U \cdot \underline{x} & = \underline{y} \rightarrow \underline{x} \end{array}$$

Tétel. L és U egyértelmű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$. Ekkor

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}.$$

A fenti mátrixegyenlet bal oldalán egy alsóháromszög mátrix áll (melynek főátlójában 1-esek vannak), jobb oldalán viszont egy felsőháromszög mátrixot találunk. Ezért

$$L_2^{-1} L_1 = I \quad \text{és} \quad U_2 U_1^{-1} = I$$

■

Tétel. Az LU -felbontás $\exists!$ $\Leftrightarrow$ a GE elvégezhető sor és oszlopcseré nélkül.

Tétel. Jelölje A_k az A mátrix k -adik főminorát ($A_k = (a_{ij})_{i,j=1}^k$). Ha $\det(A_k) \neq 0$ ($k = 1, \dots, n$), akkor $\exists!$ LU -felbontás és $u_{kk} \neq 0$ ($k = 1, \dots, n$)

L és U elemeinek meghatározása:

Az $A = LU$ szorzatból számoljuk az egyes elemeket.

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min i,j} \ell_{ik} u_{kj},$$

mivel $u_{kj} = 0$, ha $k > j$ és $\ell_{ik} = 0$, ha $i < k$.

$$i \leq j \text{ - re : } a_{ij} = \ell_{ii} u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj} \rightarrow u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{ik} u_{kj}$$

A képlethez U -ból az első $i-1$ sort és L -ből az első $i-1$ oszlopot kell ismernünk.

$$i > j \text{ - re : } a_{ij} = \ell_{ij} u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \rightarrow \ell_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} u_{kj} \right)$$

Fontos, hogy jó sorrendet válasszunk az u_{ij}, ℓ_{ij} elemek kiszámítása során. A leggyakoribb sorrendek:

sorfolytonos,

oszlopfolytonos,

parkettaszerű

1	
2	3
4	5

1	3	
2	4	

1	
2	3
	4

Megjegyzések:

1. A elemei helyén tárolhatóak a már kiszámított ℓ_{ij}, u_{ij} értékek.
2. U 1. sora = A 1. sora ($\ell_{ii} = 1$ miatt)
 L 1. oszlopa = A 1. oszlopa / a_{11}
3. Ha az LU felbontás elakad ($u_{jj} = 0$ miatt), akkor sorcserét kell alkalmazni, ami L szerkezetét elrontja, de még így is jól használható LER megoldására. (gyak.)

Az LDU -felbontás

$$A = L \cdot \tilde{U} \quad \text{és} \quad D = \text{diag}(\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{22}, \dots, \tilde{u}_{nn})$$

$$U = D^{-1} \cdot \tilde{U}, \quad \text{azaz } \tilde{U} \text{ } i\text{-edik sorát leosztjuk } \tilde{u}_{ii}\text{-vel.}$$

Ekkor

$$A = L \cdot (D \cdot U) = L \cdot D \cdot U, \quad \text{ahol } \ell_{ii} = 1 \text{ és } u_{ii} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

Tétel. Ha A szimmetrikus, akkor az LDU -felbontásban szereplő mátrixokra $L^T = U$.

Az Cholesky-felbontás

Definíció. Az $A = L \cdot L^T$ alakú felbontást Cholesky-felbontásnak nevezzük, ahol L alsó-háromszögmátrix, melyre $\ell_{ii} > 0 \quad (i = 1, \dots, n)$.

Tétel. Ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor $\exists! A = LL^T$ felbontás.

Megjegyzés: Ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor $A = LDL^T$ felbontásból

$$A = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L)^T$$

a Cholesky-felbontás, ahol $D = \text{diag}(\ell_{ii})$.

A Cholesky-felbontás előállítás:

$$A = L \cdot L^T$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min i,j} \ell_{ik} \cdot \ell_{kj} \quad \text{felirásból}$$

$$\left. \begin{array}{l} i = j\text{-re: } \ell_{jj} = \left(a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}^2 \right)^{1/2} \\ i > j\text{-re: } \ell_{ij} = \frac{1}{\ell_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{ik} \ell_{jk} \right) \end{array} \right\} \text{ az alsó-háromszög elemei.}$$

QR -felbontás (Ortogonalis felbontás)

Definíció. Az $A = Q \cdot R$ alakú felbontást, ahol Q ortogonalis mátrix ($Q^T Q = I$) és R felső-háromszögmátrix, QR - vagy ortogonalis felbontásnak nevezzük.

QR -felbontás alkalmazása LER megoldására

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

LER helyett a vele ekvivalens

$$QR\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow R\underline{x} = Q^T \underline{b}$$

felső-háromszög alakú egyenletrendszert oldjuk meg.

Gram-Schmidt ortogonalizáció

$$[\underline{q}_1, \underline{q}_2, \dots, \underline{q}_n] \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n]$$

$$r_{11} \cdot \underline{q}_1 = \underline{a}_1 \rightarrow \underline{q}_1 = \frac{\underline{a}_1}{r_{11}},$$

de mivel $\underline{q}_1$ normált, $r_{11} = \|\underline{a}_1\|_2$.

$$\sum_{j=1}^k r_{jk} \cdot \underline{q}_j = \underline{a}_k \Rightarrow \underline{q}_k = \frac{1}{r_{kk}} \left(\underline{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot \underline{q}_j \right), \quad (*)$$

de mivel $\underline{q}_k$ normált, ezért $r_{kk} = \|\underline{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot \underline{q}_j\|_2$. Továbbá mivel $\underline{q}_k \perp \underline{q}_j$ ($j = 1, \dots, k-1$)

$$\langle (*), \underline{q}_i \rangle \Rightarrow r_{ik} \langle \underline{q}_i, \underline{q}_i \rangle = \langle \underline{a}_k, \underline{q}_i \rangle.$$

Mivel $\langle \underline{q}_i, \underline{q}_i \rangle = 1$, ezért $r_{ik} = \langle \underline{a}_k, \underline{q}_i \rangle$.

Megjegyzések:

1. A $\underline{q}_k$ számítása során az R mátrix k -adik oszlopát is előállítjuk.
2. A konstrukció miatt $r_{kk} > 0$.
3. A módszer kézi számolása kellemetlen, mivel irracionális értékekkel kell számolnunk racionális mátrix elemek esetén is. A kézi számolásra alkalmasabb változatnál nem normálunk lépésenként, ezzel ortogonális bázist állítunk elő.

$$A = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}, \quad \text{ahol } \langle \tilde{q}_i, \tilde{q}_j \rangle = 0, \quad (i \neq j) \text{ és } \tilde{r}_{ii} = 1.$$

Ekkor $\tilde{Q}$ nem ortogonális mátrix, de oszlopai ortogonálisak. $\Rightarrow \tilde{Q} \cdot \tilde{Q}^T = \Lambda$ diagonális mátrix.

A módszer:

$$\tilde{q}_1 = \underline{a}_1 \text{ és } \tilde{r}_{11} = 1.$$

$$\underline{a}_k = \sum_{j=1}^k \tilde{r}_{jk} \cdot \tilde{q}_j \Rightarrow \tilde{q}_k = \underline{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{r}_{jk} \cdot \tilde{q}_j, \quad (**)$$

$$\begin{aligned} \langle (*), \tilde{q}_i \rangle &\Rightarrow \langle \underline{a}_k, \tilde{q}_i \rangle = \tilde{r}_{ik} \cdot \langle \tilde{q}_i, \tilde{q}_i \rangle \\ &\Rightarrow \tilde{r}_{ik} = \frac{\langle \underline{a}_k, \tilde{q}_i \rangle}{\langle \tilde{q}_i, \tilde{q}_i \rangle} \end{aligned}$$

A QR -felbontás előállítása $\tilde{Q}$ és $\tilde{R}$ ismeretében:

$$A = Q \cdot R = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$$

Legyen $D := \text{diag}(\|\tilde{q}_1\|_2, \|\tilde{q}_2\|_2, \dots, \|\tilde{q}_n\|_2)$

$$A = (\tilde{Q} \cdot D^{-1})(D \cdot \tilde{R}) \quad \text{azaz } Q = \tilde{Q} \cdot D^{-1}, \quad R = D \cdot \tilde{R}.$$

QR-felbontás Householder transzformációval

Definíció. A $H(\underline{v}) = I - 2\underline{v}\underline{v}^T$ mátrixot, ahol $\|\underline{v}\|_2 = 1$ ($\underline{v}^T \underline{v} = 1$) Householder mátrixnak (transzformációnak) nevezzük.

Tétel. $H(\underline{v})$ tulajdonságai:

1. szimmetrikus ($H^T = H$)
2. $H^2 = I \Rightarrow H^{-1} = H \Rightarrow H$ ortogonális
3. $H(\underline{v}) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$
4. Ha $\underline{y} \perp \underline{v}$, akkor $H(\underline{v}) \cdot \underline{y} = \underline{y}$.

Megjegyzések:

1. 3 és 4 tulajdonságok mutatják, hogy $H(\underline{v})$ egy tükröző mátrix. A $\underline{v}$ normálvektorú $n-1$ dimenziós altérre tükröz.
2. A $H(\underline{v})$ mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk a transzformációt. $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ esetén:

$$H(\underline{v}) \cdot \underline{x} = (I - 2\underline{v}\underline{v}^T) \cdot \underline{x} = \underline{x} - 2\underline{v}(\underline{v}^T \cdot \underline{x})$$

alakban számolunk.

Tétel. Legyen $\underline{a} \neq \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ és $\|\underline{a}\|_2 = \|\underline{b}\|_2$. Ekkor a

$$\underline{v} = \frac{\underline{a} - \underline{b}}{\|\underline{a} - \underline{b}\|_2}$$

vektorral megadott Householder transzformáció az $\underline{a}$ -ból $\underline{b}$ -t állítja elő.

Alapfeladat:

Legyen $\underline{a} = \underline{a}_1$ (az A mátrix első oszlopa) és $\underline{b} := k \cdot \underline{e}_1$ ($k \in \mathbb{R}$, $\underline{b} = (k, 0, \dots, 0)^T$). Ekkor

$$\|\underline{a}\|_2 = \|\underline{b}\|_2 \Rightarrow k = \pm \|\underline{a}_1\|_2$$

Legyen $\sigma_1 := -\text{sgn}(a_{11}) \cdot \|\underline{a}_1\|_2$ (ha $a_{11} = 0$, akkor bármelyik előjel jó.)

$$\underline{v} = \frac{\underline{a}_1 - \sigma_1 \underline{e}_1}{\|\underline{a}_1 - \sigma_1 \underline{e}_1\|_2}$$

Megjegyzés:

Bármelyi előjelválasztás jó eredményt ad, de $\sigma_1 := -\text{sgn}(a_{11}) \cdot \|\underline{a}_1\|_2$ esetén az $\|\underline{a}_1 - \sigma_1 \underline{e}_1\|_2 > \|\underline{a}_1\|_2$, így osztáskor kisebb lesz a hiba.

A Householder algoritmus

A lineárisan független oszlopvektorokat tartalmazó A mátrix $(n-1)$ darab Householder transzformációval felső-háromszög alakra hozható.

Részletes magyarázat előadáson, vagy *Sövegjártó András*: Numerikus analízis I. 43. oldal.

LER megoldásának iterációs módszerei

A LER-t átírjuk:

$$A\underline{x} = \underline{b} \Leftrightarrow \underline{x} = B\underline{x} + \underline{c}, \quad \varphi(\underline{x}) = B\underline{x} + \underline{c}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n.$$

Ilyen átírás sokféle lehet.

Tétel. (*Fixponttétel* $\mathbb{R}^n$ -re)

Legyen $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kontrakció, (azaz $\exists \kappa \in [0,1): \|\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{y})\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$). Ekkor

1. $\exists!$ $\underline{x}^*$ fixpont, amelyre $\varphi(\underline{x}^*) = \underline{x}^*$
2. $\forall \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ esetén az $\underline{x}^{(k+1)} := \varphi(\underline{x}^{(k)})$ sorozat konvergens és $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}^*$.
3. $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\| \leq \kappa \cdot \|\underline{x}^{(k-1)} - \underline{x}^*\| \leq \kappa^k \cdot \|\underline{x}^{(0)} - \underline{x}^*\|$, illetve
 $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\| \leq \frac{\kappa}{1-\kappa} \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)}\| \leq \frac{\kappa^k}{1-\kappa} \|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\|$.

Tétel. Ha valamely illeszkedő mátrixnormában $\|B\| < 1$, akkor az $\underline{x}^{(k+1)} := \varphi(\underline{x}^{(k)}) = B\underline{x}^{(k)} + \underline{c}$ iteráció minden $\underline{x}^{(0)}$ -ra az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldásához konvergál.

Tétel. Az $\underline{x}^{(k+1)} = B\underline{x}^{(k)} + \underline{c}$ iteráció minden $\underline{x}^{(0)}$ -ra az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldásához konvergál
 $\Leftrightarrow \rho(B) < 1$.

Speciális iterációs módszerek

$$A = L + D + U, \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} \ell_{ij} &= a_{ij}, & \text{ha } i < j \\ d_{ii} &= a_{ii} \\ u_{ij} &= a_{ij} & \text{ha } i > j, \end{aligned}$$

az itt nem definiált elemek 0-k.

Jacobi-iteráció: $\mathcal{J}(1)$

Ötlet:

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= (L + D + U)\underline{x} = \underline{b} \\ D\underline{x} &= -(L + U)\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -D^{-1}(L + U)\underline{x} + D^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b} = B_{\mathcal{J}}\underline{x}^{(k)} + \underline{c}_{\mathcal{J}},$$

ahol $B_{\mathcal{J}} = -D^{-1}(L + U)$ és $\underline{c}_{\mathcal{J}} = D^{-1}\underline{b}$.

A koordinátás alakja:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) \quad (i = 1, \dots, n)$$

Megjegyzés:

Az $\underline{x}^{(k+1)}$ előállításánál végig meg kell őriznünk $\underline{x}^{(k)}$ -t. Bár a módszer lassú, de jól párhuzamosítható.

Tétel. Ha A szigorúan diagonálisan domináns a soraira, vagy az oszlopaira nézve, akkor a Jacobi-iteráció minden $\underline{x}^{(0)}$ -ra konvergens.

Csillapított Jacobi-iteráció: $\mathcal{J}(\omega)$

Ötlet:

$$\begin{array}{rcl} D\underline{x} & = & -(L+U)\underline{x} + \underline{b} \quad | \cdot \omega \\ + \quad D\underline{x} & = & D\underline{x} \quad | \cdot (1-\omega) \end{array}$$

$$\begin{aligned} D\underline{x} &= \omega D\underline{x} + (1-\omega)D\underline{x} = -\omega(L+U)\underline{x} + \omega\underline{b} + (1-\omega)D\underline{x} = \\ &= [(1-\omega)D - \omega(L+U)]\underline{x} + \omega\underline{b} \end{aligned}$$

$$\underline{x} = [(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)] \cdot \underline{x} + \omega D^{-1}\underline{b}$$

$$B_{\mathcal{J}(\omega)} = [(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)], \quad \underline{c}_{\mathcal{J}(\omega)} = \omega D^{-1}\underline{b}$$

$$\begin{aligned} \underline{x}^{(k+1)} &= [(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)] \cdot \underline{x}^{(k)} + \omega D^{-1}\underline{b} = \\ &= (1-\omega)\underline{x}^{(k)} + \omega \cdot [-D^{-1}(L+U)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b}] \end{aligned}$$

Koordinátás alakja:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Tétel. Ha $\mathcal{J}(1)$ konvergens, akkor $0 < \omega < 1$ -re $\mathcal{J}(\omega)$ is konvergens.

Gauss-Seidel-iteráció: $\mathcal{S}(1)$

Ötlet:

$$\begin{aligned} A\underline{x} &= (L+D+U)\underline{x} = \underline{b} \\ (L+D)\underline{x} &= -U\underline{x} + \underline{b} \\ \underline{x} &= -(L+D)^{-1}U\underline{x} + (L+D)^{-1}\underline{b} \end{aligned}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}U\underline{x}^{(k)} + (L+D)^{-1}\underline{b} = B_S \underline{x}^{(k)} + \underline{c}_S,$$

ahol $B_S = -(L+D)^{-1}U$ és $\underline{c}_S = (L+D)^{-1}\underline{b}$.

A koordinátás számoláshoz nem kell kiszámolni $L+D$ inverzét, hanem más alakban kell felírni az iterációt:

$$\begin{aligned} (L+D) \cdot \underline{x}^{(k+1)} &= -U\underline{x}^{(k)} + \underline{b} \\ D\underline{x}^{(k+1)} &= -L\underline{x}^{(k+1)} - U\underline{x}^{(k)} + \underline{b} \\ \underline{x}^{(k+1)} &= -D^{-1}L\underline{x}^{(k+1)} - D^{-1}U\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b} \\ x_i^{(k+1)} &= -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} - b_i \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

Megjegyzés:

Az $x_i^{(k+1)}$ számolásához már nincs szükség az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ komponensekre, tehát $\underline{x}^{(k)}$ az iteráció során felülírható.

Tétel. Ha A szigorúan diagonálisan domináns a soraira, illetve az oszlopaira nézve, akkor

$$\|B_S\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty < 1$$

illetve

$$\|B_S\|_1 \leq \|B_J\|_1 < 1.$$

Gauss-Seidel-relaxáció: $\mathcal{S}(\omega)$

$$\begin{array}{lcl} (L+D)\underline{x} = -U\underline{x} + \underline{b} & | \cdot \omega \\ + D\underline{x} = D\underline{x} & | \cdot (1-\omega) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \omega(L+D)\underline{x} + (1-\omega)D\underline{x} &= [-\omega U + (1-\omega)D] \cdot \underline{x} + \omega \underline{b} \\ (D+\omega L)\underline{x} &= [(1-\omega)D - \omega U] \cdot \underline{x} + \omega \underline{b} \\ \underline{x} &= (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U] \cdot \underline{x} + \omega(D+\omega L)^{-1}\underline{b} \\ \underline{x}^{(k+1)} &= (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U] \cdot \underline{x}^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\underline{b}. \end{aligned}$$

A koordinántánkénti számoláshoz alakítsuk át a formulát, hogy ne kelljen inverzt számolni:

$$\begin{aligned} (D+\omega L)\underline{x}^{(k+1)} &= [(1-\omega)D - \omega U]\underline{x}^{(k)} + \omega \underline{b} \\ D\underline{x}^{(k+1)} &= -\omega L\underline{x}^{(k+1)} + [(1-\omega)D - \omega U]\underline{x}^{(k)} + \omega \underline{b} \\ \underline{x}^{(k+1)} &= -\omega D^{-1} \cdot \left[L\underline{x}^{(k+1)} + \frac{1-\omega}{\omega} D\underline{x}^{(k)} + \underline{b} \right] \end{aligned}$$

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{\omega}{a_{ii}} \cdot \left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \frac{1-\omega}{\omega} a_{ii}x_i^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right].$$

Vektoros alakban felírva látszik a kapcsolat a Gauss-Seidel-iterációval:

$$\underline{x}^{(k+1)} = -\omega D^{-1}(L\underline{x}^{(k+1)} + U\underline{x}^{(k)} - \underline{b}) + (1-\omega)\underline{x}^{(k)}$$

Tétel. Ha $\mathcal{S}(1)$ konvergens, akkor $0 < \omega < 2$ -re $\mathcal{S}(\omega)$ is konvergens.

Megjegyzés:

A fenti módszerek mindegyikénél feltettük, hogy $a_{ii} \neq 0$. ($i = 1, 2, \dots, n$).