

2.6. Lineáris egyenletrendszerek megoldásának iterációs módszerei

Az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszert írjuk át a vele ekvivalens $\underline{x} = B\underline{x} + \underline{c}$ alakra. Így az egyenletrendszer megoldását az $f(\underline{x}) = B\underline{x} + \underline{c}$ függvény fixpontjának keresésére vezetjük vissza.

2.18. Tétel. (A Banach féle fixponttétel $\mathbb{R}^n$ -re)

Legyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény kontrakció, azaz $\exists q \in [0,1)$:

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \text{-re } \|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| \leq q \cdot \|\underline{x} - \underline{y}\|.$$

Ekkor

- a) az f függvénynek egyértelműen létezik fixpontja ($\underline{x}^*$, melyre $\underline{x}^* = f(\underline{x}^*)$).
- b) $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ -re az $\underline{x}_{k+1} := f(\underline{x}_k)$, ($k \in \mathbb{N}$) formulával definiált $(\underline{x}_k)$ sorozat konvergens és $\lim (\underline{x}_k) = \underline{x}^*$.
- c) Érvényesek a következő hibabecslések:

$$\begin{aligned} \|\underline{x}_k - \underline{x}^*\| &\leq q \cdot \|\underline{x}_{k-1} - \underline{x}^*\| \quad \text{illetve} \\ \|\underline{x}_k - \underline{x}^*\| &\leq \frac{q}{1-q} \|\underline{x}_k - \underline{x}_{k-1}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_0\|. \end{aligned}$$

2.10. Következmény. Ha valamely illeszkedő mátrixnormában $\|B\| < 1$, akkor az $\underline{x}_{k+1} = B\underline{x}_k + \underline{c}$ iteráció $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ kezdőértékre konvergál az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásához.

Bizonyítás. $f(\underline{x}) := B\underline{x} + \underline{c}$ és vizsgáljuk a fixponttétel feltételeit.

$$\|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\| \leq \|B\underline{x} + \underline{c} - B\underline{y} - \underline{c}\| = \|B(\underline{x} - \underline{y})\| \leq \|B\| \cdot \|\underline{x} - \underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \text{-re.}$$

Ha $\|B\| < 1$, akkor az f függvény kontrakció, alkalmazható rá a fixponttétel állítása.

2.19. Lemma.

Tetszőleges B mátrixhoz és $\epsilon > 0$ számhoz konstruálható olyan indukált mátrixnorma, hogy

$$\|B\| \leq r(B) + \epsilon.$$

2.20. Tétel. Az $\underline{x}_{k+1} = B\underline{x}_k + \underline{c}$ iteráció $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ kezdőértékre konvergál az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldásához akkor és csak akkor, ha $r(B) < 1$ (vagyis a B átmenet mátrix spektrálsugara 1-nél kisebb).

Bizonyítás. A tétel bizonyításához szükségünk van a 2.19. lemmára.

Ha $r(B) < 1$, akkor alkalmazzuk a 2.19. lemmát $\epsilon = \frac{1 - r(B)}{2}$ -re, azaz van olyan indukált mátrixnorma, hogy $\|B\| \leq r(B) + \frac{1 - r(B)}{2} < 1$. Ekkor a 2.10. következmény miatt az iteráció konvergál bármely kezdőértékre.

Az állítás másik részét bizonyítsuk indirekt módon. Tegyük fel, hogy az $\underline{x}_{k+1} = B\underline{x}_k + \underline{c}$ iteráció $\forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ kezdőértékre konvergál és $r(B) \geq 1$. Legyen $\underline{x}_0$ olyan, hogy az $\underline{x}_0 - \underline{x}^* \neq \underline{0}$ vektor a B mátrix $|I| \geq 1$ sajátértékéhez tartozó sajátvektor legyen. Ekkor

$$\begin{aligned}\underline{x}_k - \underline{x}^* &= B \cdot (\underline{x}_{k-1} - \underline{x}^*) = B^k (\underline{x}_0 - \underline{x}^*) = B^{k-1} I \cdot (\underline{x}_0 - \underline{x}^*) = I^k (\underline{x}_0 - \underline{x}^*). \\ \|\underline{x}_k - \underline{x}^*\| &= |I|^k \cdot \|\underline{x}_0 - \underline{x}^*\|,\end{aligned}$$

vagyis az $\underline{x}_0$ -ból indított iteráció hibasorozata nem nullsorozat, ami ellentmond a feltételünknek.

Speciális iterációs módszerek

Az A mátrixot bontsuk $L + D + U$ alakra, ahol $l_{ij} = a_{ij}$ (ha $i < j$), $d_{ii} = a_{ii}$, $u_{ij} = a_{ij}$ (ha $i > j$), a többi elemük 0.

Jacobi módszer J(1): $\underline{x}_{k+1} = -D^{-1}(L + U)\underline{x}_k + D^{-1}\underline{b}$

Csillapított Jacobi módszer J(w): $\underline{x}_{k+1} = ((1-w)I - wD^{-1}(L + U))\underline{x}_k + wD^{-1}\underline{b}$

(Gauss-) Seidel módszer S(1): $\underline{x}_{k+1} = -(D + L)^{-1}U\underline{x}_k + (D + L)^{-1}\underline{b}$

Relaxációs módszer S(w): $\underline{x}_{k+1} = (D + wL)^{-1}((1-w)D - wU)\underline{x}_k + (D + wL)^{-1}w\underline{b}$

Richardson típusú módszerek: $\underline{x}_{k+1} = (I + PA)\underline{x}_k - P\underline{b}$, ahol P diagonális mátrix.

2.11. Definíció. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot szigorúan diagonálisan dominánsnak nevezzük, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n\text{-re.}$$

2.21. Tétel. Ha az A mátrix szigorúan diagonálisan domináns, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszerre felírt Jacobi módszer konvergens.

Bizonyítás. Vizsgáljuk a Jacobi módszer konvergenciájának elégséges feltételét a $\|\cdot\|_\infty$ mátrix normában.

Az átmenet mátrix $B = -D^{-1}(L + U)$. Fejezzük ki az elemeit az A mátrix elemeivel.

$$b_{ii} = 0, \quad b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad i \neq j\text{-re és } \forall i, j = 1, \dots, n.$$

$$\|B\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{i=1}^n \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$$

az A szigorúan diagonálisan domináns volta miatt. A 2.10. következmény miatt innen már következik az állítás.

2.22. Tétel. Ha az A mátrixra a Jacobi módszer konvergens, akkor $0 < w < 1$ esetén a csillapított Jacobi módszer is konvergens.

2.23. Tétel. Ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor $0 < w < 2$ esetén a relaxációs módszer is konvergens, így a Seidel módszer is.

Kidolgozott példák.

1. Példa. Konvergál-e a mátrixra felírt Jacobi módszer illetve a Seidel módszer?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Vizsgáljuk a Jacobi módszer átmenet mátrixát

$$B = -D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $1, \infty, F$ -normájuk nagyobb 1-nél, nem alkalmazhatjuk az elégséges feltételt. Határozzuk meg a spektrálsugarát.

$$\begin{vmatrix} -I & 2 & -2 \\ 1 & -I & 1 \\ 2 & 2 & -I \end{vmatrix} = -I(I^2 - 2) - 2(-I - 2) - 2(2 + 2I) = \\ = -I^3 + 2I + 2I + 4 - 4 - 4I = -I^3 = 0$$

A sajátértékei $I_{1,2,3} = 0$, a spektrálsugara $r(B) = 0$. A 2.20. tétel miatt a Jacobi módszer konvergál. Vizsgáljuk a Seidel módszer átmenet mátrixát.

$$D + L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, (D + L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = -(D + L)^{-1}U, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix}.$$

Határozzuk meg a spektrálsugarát.

$$\begin{vmatrix} -I & 2 & 2 \\ 0 & 2 - I & -1 \\ 0 & 8 & -6 - I \end{vmatrix} = -I((-6 - I)(2 - I) + 8) = -I(I^2 + 4I - 4) = 0 \\ I_1 = 0, I_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = -2 \pm \sqrt{8}.$$

Innen $r(B) = 2 + \sqrt{8}$, tehát a Seidel módszer általában nem konvergál.

2. Példa. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ Az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet megoldására írjuk fel a J(1),

J(w), S(1) módszereket. $\underline{x}_0 = \underline{0}$ -ból számítsuk ki $\underline{x}_1$ -et. Konvergensek-e a módszerek?

Milyen w-re konvergens J(w)? Melyik módszer gyorsabb? Milyen w-re a leggyorsabb J(w)? Írjuk fel a hibabecslést és becsüljük meg, hogy hány lépés után tudjuk garantálni a 0,001-es pontosságot?

Megoldás.

a) Némelyik kérdésre egyszerűen válaszolhatunk a módszerekre felírt konvergencia tételek segítségével. A mátrix szigorúan diagonálisan domináns, tehát 2.21. tétel miatt a Jacobi módszer konvergens minden kezdőértékre. A 2.22. tétel szerint ekkor $0 < w < 1$ esetén a csillapított Jacobi módszer is konvergens. Belátható, hogy a mátrix szimmetrikus és pozitív definit, tehát a 2.23. tétel miatt a Seidel módszer is konvergens.

b) A részletes vizsgálathoz elemeznünk kell az adott módszerek átmenet mátrixait.

A Jacobi módszer átmenet mátrixa:

$$B = -D^{-1}(L + U) = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 2.19. tétel elégséges feltételét vizsgáljuk. $\|B\|_1 = \|B\|_\infty = \frac{1}{2} < 1$, tehát a Jacobi módszer

minden kezdőértékre konvergens. Mindkét vektor normában $q = \frac{1}{2}$ a kontrakciós együttható.

Írjuk fel a módszer hibabecslését pl. az 1-es normában. Felhasználva, hogy

$$\underline{x}_1 = B\underline{x}_0 + \underline{c} = B \cdot \underline{0} + D^{-1}\underline{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{x}_1 - \underline{x}_0\|_1 = 1/2 + 2/3 + 1/2 = 5/3,$$

$$\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_0\|_1 = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{5}{3}.$$

$\frac{1}{2^k} \cdot \frac{10}{3} < 0,001$ -ből $\frac{10.000}{3} < 2^k$, tehát $k \leq 12$ lépés után megkapjuk a kívánt pontosságot az

1-es vektornormában.

Másképp is megoldhatjuk a feladatot. Határozzuk meg az átmenet mátrix spektrálsugarát.

Ennek segítségével pontosabb hibabecslést tudunk adni.

$$\begin{vmatrix} -I & 1/4 & 0 \\ 1/4 & -I & 1/4 \\ 0 & 1/4 & -I \end{vmatrix} = -I \left(I^2 - \frac{1}{16} \right) - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{4} I \right) = -I \left(I^2 - \frac{1}{8} \right) = 0,$$

$l_1 = 0$, $l_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}$ a sajátértékek.

A mátrix spektrálsugara $r(B) = \frac{1}{\sqrt{8}} < 1$. Tehát a 2.20. tétel miatt a Jacobi módszer minden

kezdőértékre konvergens. Mivel B szimmetrikus mátrix, $\|B\|_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0,35355$.

A 2-es vektor normabeli hibabecsléshez a $q = \frac{1}{\sqrt{8}}$ kontrakciós együttható használható. Ekkor az előzőnél kevesebb lépéssel tudjuk garantálni a kívánt pontosságot a 2-es vektornormában.

A csillapított Jacobi módszer átmenet mátrixa:

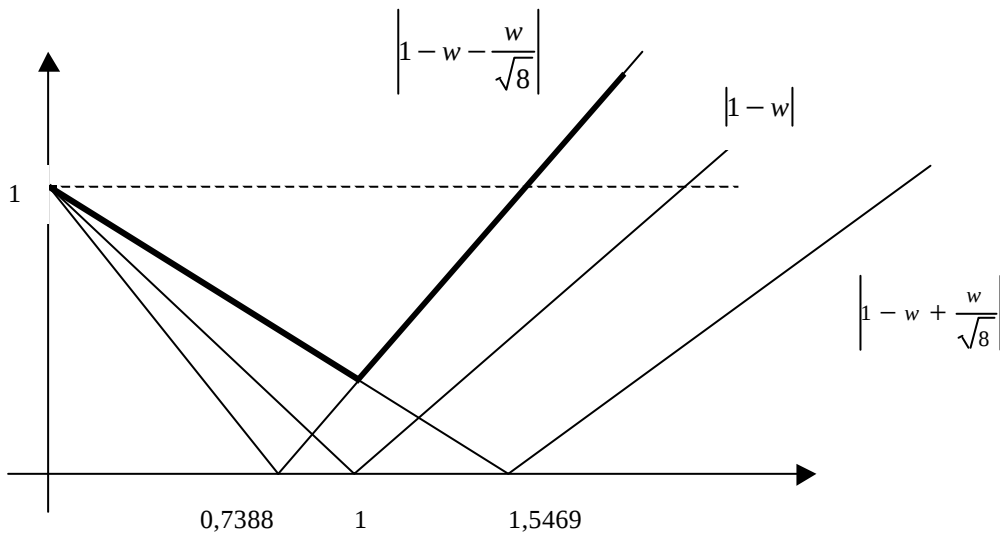
$$B(w) = (1-w) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1-w & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1-w \end{pmatrix}$$

Karakterisztikus polinomja: $(1-w-l) \left(1-w-\frac{w}{\sqrt{8}}-l\right) \left(1-w+\frac{w}{\sqrt{8}}-l\right)$.

Sajátértékei $1-w$ -re szimmetrikusak: $l_1 = 1-w$, $l_{2,3} = 1-w \pm \frac{w}{\sqrt{8}}$.

A módszer konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele, hogy $r(B(w)) < 1$.

Szemléltessük az $|l_i(w)|$ függvényeket grafikonon.



A fenti függvények maximumát, $r(B)$ -t a vastag vonallal húzott görbe jelenti. Ha $r(B(w)) < 1$, akkor w -re konvergens a módszer? A grafikonról leolvasható, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\left|1-w-\frac{w}{\sqrt{8}}\right| < 1$.

$$\begin{aligned}
-1 &< 1 - w \left(1 + \frac{1}{\sqrt{8}} \right) < 1 \\
-2 &< -w \left(\frac{\sqrt{8} + 1}{\sqrt{8}} \right) < 0 \\
0 &< w < \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt{8} + 1}
\end{aligned}$$

Tehát pontosan ezek az w értékek, melyekre a csillapított Jacobi módszer konvergál. Vizsgáljuk a Seidel módszer átmenet mátrixát.

$$D + L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (D + L)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = -(D + L)^{-1}U, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Karakterisztikus polinomja:

$$\begin{vmatrix} -I & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} - I & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{64} & \frac{1}{16} - I \end{vmatrix} = -I \left(\left(\frac{1}{16} - I \right)^2 - \frac{1}{256} \right) = -I \left(I^2 - \frac{1}{8} I \right) = 0.$$

Sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = \frac{1}{8}$, tehát $\rho(B) = \frac{1}{8} < 1$, a Seidel iteráció $\forall \underline{x}_0$ kezdőértékre konvergens.

Írjunk fel a módszerre egy hibabecslést. Mivel $\|B\|_1 = \frac{21}{64} = q < 1$,

$$\|\underline{x}_k - \underline{x}^*\|_1 \leq \frac{\left(\frac{21}{64}\right)^k}{1 - \frac{21}{64}} \|\underline{x}_1 - \underline{x}_0\|_1.$$

3. Példa. Legyen A szimmetrikus, pozitív definit és $c \in \mathbb{R}$ az A sajátértékeire vonatkozó felső becslés, $\rho(A) < c$. Tekintsük az

$$\underline{x}_{k+1} = \left(I - \frac{2}{c} A \right) \underline{x}_k + \frac{2}{c} \underline{b}$$

Richardson típusú iterációt az $A\underline{x} = \underline{b}$ megoldására. Igazoljuk, hogy a módszer $\forall \underline{x}_0$ kezdőértékre konvergens.

Megoldás. A módszer átmenet mátrixa $B = I - \frac{2}{c}A$. Legyen l és $\underline{v} \neq \underline{0}$ az A sajátértéke illetve sajátvektora.

$$\begin{aligned} A\underline{v} &= l\underline{v} \\ -\frac{2}{c}A\underline{v} &= -\frac{2}{c}l\underline{v} \\ \left(I - \frac{2}{c}A\right)\underline{v} &= \underline{v} - \frac{2}{c}A\underline{v} = \underline{v} - \frac{2}{c}l\underline{v} = \left(1 - \frac{2}{c}l\right)\underline{v} \end{aligned}$$

Tehát B sajátértékeit az A sajátértékeivel kifejezhetjük. Pontosán akkor konvergens az iteráció, ha $\left|1 - \frac{2}{c}l\right| < 1$ teljesül az A sajátértékeire.

$-1 < 1 - \frac{2}{c}l < 1 \Leftrightarrow -2 < -\frac{2}{c}l < 0 \Leftrightarrow 0 < l < c$ teljesül az A sajátértékeire. A $\rho(A) < c$ feltétel miatt ez teljesül, így az iteráció konvergens.