

Megjegyzés :

A fenti tétel általánosítható.

$$\text{Az } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A + \Delta A)(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$$

egyenletek megoldásaira igazolható a következő becslés:

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

Példa :

A Hilbert - mátrix rosszul kondicionált!

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} := \frac{1}{i+j-1} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$$\text{Ha } b_i = \sum_{k=1}^n \frac{1}{i+k-1}, \quad \text{akkor } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{megoldása } \mathbf{x} = [1, \dots, 1]^T.$$

$n = 10$ - re már minden megoldás rossz eredményt ad.

5. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK ITERÁCIÓS MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Főleg akkor hasznosak, ha

$$(1) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$$

egyenletrendszerben A ritka és nagy méretű mátrix.

Az (1) - et először vele ekvivalens

$$(2) \quad \mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

alakra hozzuk, úgynevezett „fixpont egyenlet”. Ez

$$(3) \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}) \quad \text{alakú, ahol } \Phi(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{c}.$$

AZ ITERÁCIÓ ELVE :

Kiindulva egy tetszőleges $\underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ kezdővektorból, képezzük az

$$\underline{x}_{k+1} = C\underline{x}_k + \underline{c} \quad \text{úgynevezett „közelítő megoldások” sorozatát.}$$

Ha $\underline{x}_k$ sorozat konvergens és tart $\underline{x}^*$ -hoz, akkor a (3) - nak, (2) - nek és így (1) - nek is a megoldása lesz.

KÉRDÉSEK :

A.)

Milyen feltételek biztosítják, hogy tetszőleges $\underline{x}_0$ - ből kiindulva az $\{\underline{x}_k\}$ sorozat konvergens?
(KONVERGENCIA KÉRDÉSE)

B.)

Hogyan becsülhető a közelítő ($\underline{x}_k$) megoldások hibája? (HIBABECSLÉS)

C.)

Milyen gyors a konvergencia? (KONVERGENCIASEBESSÉG)

5.1. KONVERGENCIA

Tekintsük az $\underline{x}_{k+1} = C\underline{x}_k + \underline{c}$ sorozatot tetszőleges $\underline{x}_0$ esetén.

Legyen $\underline{x}^* = C\underline{x}^* + \underline{c}$ pontos megoldás.

Vizsgáljuk meg:

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}^* = C\underline{x}_k + \underline{c} - C\underline{x}^* - \underline{c} = C(\underline{x}_k - \underline{x}^*) = C^2(\underline{x}_{k-1} - \underline{x}^*) = \dots = C^{k+1}(\underline{x}_0 - \underline{x}^*) \stackrel{?}{\rightarrow} 0$$

$$\implies \{\underline{x}_k\} \text{ sorozat konvergens} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0$$

Tétel Konvergenciakritérium

Legyen $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0 \iff \rho(C) < 1$, azaz a C mátrix spektrálsugara < 1 .

Bizonyítás

$\implies$

Tegyük fel, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0$ és bizonyítjuk, hogy $\rho(C) < 1$, azaz, hogy a C mátrix minden sajátértéke kisebb, mint 1 (abszolútértékben).

Indirekt.

Tegyük fel, hogy létezik olyan λ sajátértéke a C mátrixnak, amelyre $|\lambda| \geq 1$.

Mivel λ a C sajátértéke $\implies \exists \underline{x} \neq \underline{0}$, hogy:

$$\begin{aligned} C\underline{x} &= \lambda\underline{x} \\ C^2\underline{x} &= \lambda C\underline{x} = \lambda^2\underline{x} \\ C^k\underline{x} &= \lambda^k\underline{x} \end{aligned}$$

Mivel $\lim \lambda^k \neq 0 \implies \{C^k\}$ nem lehet nullsorozat, tehát $\rho(C) < 1$ szükséges feltétel.

$\boxed{\Leftarrow}$

Tegyük fel, hogy $\rho(C) < 1$ és bizonyítjuk, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0$.

Tudjuk, hogy létezik olyan T reguláris mátrix, hogy a C mátrix a T segítségével Jordan - alakra transzformálható:

$$J = TCT^{-1} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & J_i & \\ 0 & \cdots & 0 & J_m \end{bmatrix}, \text{ ahol}$$

J_i ($n_i \times n_i$) - es mátrix, amelynek alakja:

$$J_i := \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Mivel:

$$\begin{aligned} J^k &= (TCT^{-1})^k = TC^kT^{-1} \implies J^2 = (TCT^{-1})(TCT^{-1}) = TC^2T^{-1} \\ \implies C^k &= T^{-1}J^kT \end{aligned}$$

Ezért $\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$

Viszont:

$$J^k = \begin{bmatrix} J_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & J_i^k & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_m^k \end{bmatrix},$$

ezért elég belátni, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} J_i^k = 0$, azaz az egyes Jordan - blokkok 0 - hoz való tartását $\forall i = 1, \dots, m$ - re.

A J_i ($n_i \times n_i$) - es mátrix a következő alakban írható:

$$J_i = \lambda_i I + S_i, \quad \text{ahol } I, S_i \text{ } (n_i \times n_i) \text{ - es mátrixok és } S_i := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}$$

Tudjuk (Gyapjas jegyzet 125. oldal), hogy S_i mátrix n_i - edrendben nilpotens mátrix, azaz $S_i^{n_i} = 0$.

Így J_i^k alakja (Newton binomiális formulája alapján):

$$J_i^k = (\lambda_i I + S_i)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} S_i^j = \sum_{j=0}^{n_i-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} S_i^j$$

Fix j - re a $\sum n_i$ darab tagból áll, és fix i - re az egyes tagokban S_i^j mátrix nem változik $k \rightarrow \infty$ esetén.

Kérdés : $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k \stackrel{?}{=} 0$

Ha belátjuk, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} = 0$, akkor a $\sum$ minden tagja tart 0 - hoz, és ekkor

$\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$ - t is beláttuk.

Továbbá $\left| \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} \right| \leq |k^j| \cdot |\lambda_i^{k-j}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \lambda_i < 1$

HF. $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k k^j = 0, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \text{fix } \lambda, j \text{ - re.}$

■

Tétel Konvergenca - tétel

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Ekkor az $\underline{x}_k = C\underline{x}_{k-1} + \underline{c}$ alakú iterációs sorozat tetszőleges $\underline{x}_0$ kezdővektorból kiindulva konvergál

a (2) $(\underline{x} = C\underline{x} + \underline{c})$ illetve (1) $(A\underline{x} = \underline{b})$ pontos $\underline{x}^*$ megoldásához $\iff \rho(C) < 1$

Lemma

Legyen $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Ekkor $\rho(C) \leq \|C\|$ valamilyen természetes mátrixnormára.

Bizonyítás

Legyen λ a C mátrix tetszőleges sajátértéke és a λ - hoz tartozó sajátvektor $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Ekkor $C\underline{x} = \lambda\underline{x}$.

Természetes mátrixnormát véve:

$$\|\lambda\underline{x}\| = \|C\underline{x}\|$$

$$|\lambda| \cdot \|\underline{x}\| = \|C\underline{x}\| \leq \|C\| \cdot \|\underline{x}\|$$

$$\underline{x} \neq \underline{0} \implies \|\underline{x}\| \neq 0 \implies |\lambda| \leq \|C\|$$

$$\text{Tetszőleges } \lambda \text{ sajátértékre igaz, így } \implies \rho(C) \leq \|C\|$$

■

Tétel Elégséges feltétel

Az $\underline{x}_k = C\underline{x}_{k-1} + \underline{c}$ iterációs sorozat konvergenciájának elégséges feltétele az, hogy valamilyen természetes mátrixnormára teljesüljön, hogy $\|C\| < 1$ tetszőleges $\underline{x}_0$ -ból kiindulva.

5.2. HIBABECSLÉS

Legyen

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ (2) \quad \mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{c} \end{array} \right\} \quad \mathbf{x}^* \text{ legyen a pontos megoldás}$$

Kicsit általánosabban: Legyen $C := C_1 + C_2$ és tekintsük a következő iterációs sorozatot:

$$(3) \quad \mathbf{x}_k = -C_1\mathbf{x}_k + C_2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{c} \quad (\mathbf{x}^* = C_1\mathbf{x}^* + C_2\mathbf{x}^* + \mathbf{c})$$

Tegyük fel, hogy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ -ból kiindulva a (3) konvergens sorozat.

Tétel A - POSTERIORI HIBABECSLÉS

Ha $\|C\| < 1$ valamilyen természetes mátrixnormára, akkor érvényes a következő hibabecslés:

$$(4) \quad \boxed{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|C_2\|}{1 - \|C\|} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|}$$

Bizonyítás

Vizsgáljuk:

$$\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* = C_1\mathbf{x}_k + C_2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{c} - (C_1\mathbf{x}^* + C_2\mathbf{x}^* + \mathbf{c}) = C_1(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) + C_2(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}^*)$$

$$(I - C_1 - C_2)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) = C_2(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}^*) - C_2(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) = C_2(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k)$$

$$(I - C)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) = C_2(\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k)$$

$$\text{Mivel } \|C\| < 1 \implies \exists (I - C)^{-1}$$

$$\left(\text{Lemma és következménye a 60. oldalon.} \implies \| (I - C)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \|C\|} \right)$$

$$\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^* = (I - C)^{-1} C_2 (\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_k) \quad \text{Normára térve:}$$

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leq \| (I - C)^{-1} \| \cdot \|C_2\| \cdot \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|C_2\|}{1 - \|C\|} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$$

■

Megjegyzés :

A (4) hibabecslés érvényes az $\mathbf{x}_k = C\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{c}$ alakú iterációs eljárásokra is, ugyanis ez következik (3) - ből $C_1 = 0$, $C_2 = C$ választásával.

Ekkor (4) alakja:

$$(5) \quad \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$$

A (4) és (5) jól alkalmazható, azonban gyakorlati esetben figyelembe kell vennünk a kerekítési hibákat is.

Következmény

A - PRIORI HIBABECSLÉS

$\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{c}$ alakú iterációra, $\|C\| < 1$.

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{\|C\|^k}{1 - \|C\|} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Bizonyítását lásd később, a nemlineáris egyenletek megoldásánál, a Banach - féle fixponttétel után.

5.3. JACOBI ITERÁCIÓ

Legyen

$$(1) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \text{ nem szinguláris}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Bontsuk fel A - t a következő módon:

$$A = -L + D - R, \quad \text{ahol}$$

$$L := - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad D := \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad R := - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad \implies (-L + D - R)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x} = (L + R)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Ha A reguláris mátrix, akkor mindig elérhető, hogy D nem szinguláris (sorcsérékkel).

$$(2) \quad \underline{\mathbf{x}} = D^{-1} (L + R) \underline{\mathbf{x}} + D^{-1} \underline{\mathbf{b}} \quad (\underline{\mathbf{x}} = \Phi(\underline{\mathbf{x}}) \text{ alakú})$$

Így tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}_0$ - ből kiindulva képezhetjük a közelítő megoldások sorozatát.

$$(3) \quad \boxed{\underline{\mathbf{x}}_k = D^{-1} (L + R) \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + D^{-1} \underline{\mathbf{b}}} \quad \text{Jacobi iteráció}$$

Koordinátánként írva :

$$\boxed{x_i^{[k]} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{[k-1]} \right]} \quad (i = 1, \dots, n)$$

„SZIMULTÁN VÁLTOZTATÁSOK MÓDSZERE”

$$\text{Most} \quad C := D^{-1} (L + R) , \quad \underline{\mathbf{c}} := D^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_k = C \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + \underline{\mathbf{c}} \quad \text{alakú.}$$

5.3.1. Konvergencia kritérium

$$(3) \text{ Jacobi iteráció tetszőleges } \underline{\mathbf{x}}_0 \text{ kezdőérték esetén konvergens} \iff \rho(D^{-1} (L + R)) < 1$$

Elégséges feltétel a módszer konvergenciájára : $\| D^{-1} (L + R) \| < 1$ valamilyen természetes mátrixnormára

Definíció :

Az A mátrix

erős sor-összeg tulajdonságú, ha: $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall \quad i - \text{re},$

erős-oszlopösszeg tulajdonságú, ha: $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| < |a_{jj}| \quad \forall \quad j - \text{re}.$

Tétel

Elégséges feltétel a Jacobi módszer konvergenciájára :

Ha az A mátrixra az erős sor- , vagy oszlop-összeg tulajdonság teljesül, akkor (3) Jacobi iteráció konvergál tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}_0$ esetén.

Ugyanis ekkor a $D^{-1} (L + R)$ mátrix sor- vagy oszlopnormája < 1 lesz!

5.4. GAUSS - SEIDEL ITERÁCIÓ

A (3) formulát vizsgálva látható, hogy a k -adik iterált vektor i -edik koordinátájának kiszámításához már felhasználhatjuk az előző $1, \dots, i-1$ koordinátáit a k -adik iteráltnak. Így kapjuk a Gauss - Seidel iterációt.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$(-L + D - R)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$D\mathbf{x} = (L + R)\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = D^{-1}(L\mathbf{x} + R\mathbf{x}) + D^{-1}\mathbf{b}$$

$$(4) \quad \boxed{\mathbf{x}_k = D^{-1}(L\mathbf{x}_k + R\mathbf{x}_{k-1}) + D^{-1}\mathbf{b}} \quad \text{Gauss - Seidel iteráció}$$

Koordinátánként írva :

$$\boxed{x_i^{[k]} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{[k]} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{[k-1]} \right]}$$

„FOKOZATOS VÁLTOZTATÁSOK MÓDSZERE”

5.4.1. Konvergencia kritérium

A Gauss - Seidel iteráció vizsgálatához (4) - et átírjuk:

$$D\mathbf{x}_k - L\mathbf{x}_k = R\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}$$

$$(D - L)\mathbf{x}_k = R\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_k = (D - L)^{-1}R\mathbf{x}_{k-1} + (D - L)^{-1}\mathbf{b},$$

$$\text{ahol} \quad C := (D - L)^{-1}R, \quad \mathbf{c} := (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

A Gauss - Seidel iteráció tetszőleges $\mathbf{x}_0$ kezdőérték esetén konvergál $\iff \rho((D - L)^{-1}R) < 1$

Elégséges feltétel a Gauss - Seidel iteráció konvergenciájára :

$$\|(D - L)^{-1}R\| < 1 \quad \text{valamilyen természetes mátrixnormára.}$$

Tétel

Ha az A mátrixra az erős sor- vagy oszlop-összeg tulajdonság teljesül, akkor a Gauss - Seidel iteráció is konvergál tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}_0$ - ből kiindulva és a konvergencia legalább olyan gyors, mint a Jacobi iterációnál.

5.5. RELAXÁCIÓS MÓDSZEREK**5.5.1. Jacobi relaxáció**

A Jacobi iteráció:

$$\underline{\mathbf{x}}_k = D^{-1} (L + R) \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + D^{-1} \underline{\mathbf{b}} \quad / \pm (\underline{\mathbf{x}}_{k-1})$$

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \underline{\mathbf{x}}_{k-1} - \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + D^{-1} (L + R) \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + D^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + D^{-1} (L - D + R) \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + D^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \underline{\mathbf{x}}_{k-1} - D^{-1} \underbrace{[A \underline{\mathbf{x}}_{k-1} - \underline{\mathbf{b}}]}_{\text{ez a } (k-1) - \text{edik lépés defektus (eltérés) vektora}}$$

A Jacobi relaxáció interpretációja: a k - adik iteráltat a $(k-1)$ - edik iterált vektorból a defektus vektor segítségével kapjuk. Természetes dolog egy úgynevezett ω relaxációs paraméter bevezetése.

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}}_k = \underline{\mathbf{x}}_{k-1} - \omega D^{-1} [A \underline{\mathbf{x}}_{k-1} - \underline{\mathbf{b}}]$$

$$\underline{\mathbf{x}}_k = \omega D^{-1} [L + R] \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + (1 - \omega) \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + \omega D^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$

Jacobi relaxáció

Koordinátás alak :

$$x_i^{[k]} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{[k-1]} \right] + (1 - \omega) x_j^{[k-1]}$$

Tétel

Legyen a Jacobi iteráció konvergens.

Ekkor a Jacobi relaxáció is konvergens $\forall \quad 0 < \omega \leq 1$ - re.

5.5.2. Gauss - Seidel relaxáció

Tekintsük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$(1) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad / \cdot \omega \quad \omega \text{ paraméter} \quad (A = -L + D - R)$$

$$\omega A\mathbf{x} = \omega \mathbf{b} \quad / + D\mathbf{x}$$

$$D\mathbf{x} = D\mathbf{x} - \omega A\mathbf{x} + \omega \mathbf{b} = D\mathbf{x} + \omega (\mathbf{b} - A\mathbf{x})$$

$$\implies \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} + \omega D^{-1} (\mathbf{b} - A\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \omega D^{-1} (\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k) \quad \text{Jacobi - relaxáció}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} + \omega D^{-1} (\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \omega D^{-1} (\mathbf{b} + L\mathbf{x} - D\mathbf{x} + R\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \omega D^{-1} (\mathbf{b} + L\mathbf{x} + R\mathbf{x}) + (1 - \omega) \mathbf{x} \quad \implies \quad \text{újra visszkapjuk a Jacobi relaxációt} \quad \implies$$

$$\boxed{\mathbf{x}_k = \omega D^{-1} (\mathbf{b} + L\mathbf{x}_{k-1} + R\mathbf{x}_{k-1}) + (1 - \omega) \mathbf{x}_{k-1}} \quad \text{Jacobi relaxáció}$$

Koordinátás alak :

$$\boxed{x_i^{[k]} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{[k-1]} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{[k-1]} \right] + (1 - \omega) x_i^{[k-1]}} \quad i = 1, \dots, n$$

Ha az első $\sum$ - ba a k - adik iterált vektor már kiszámolt koordinátáit írjuk, megkapjuk az úgynevezett **Gauss - Seidel relaxációt**:

$$(2) \quad \boxed{\mathbf{x}_k = \omega D^{-1} [\mathbf{b} + L\mathbf{x}_k + R\mathbf{x}_{k-1}] + (1 - \omega) \mathbf{x}_{k-1}}$$

Koordinátás alak :

$$\boxed{x_i^{[k]} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{[k]} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{[k-1]} \right] + (1 - \omega) x_i^{[k-1]}} \quad i = 1, \dots, n$$

A Gauss - Seidel relaxáció konvergencia vizsgálatához (2) - t átalakítjuk $\mathbf{x}_k = C\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{c}$ formára. (2) - t rendezve:

$$(I - \omega D^{-1} L) \mathbf{x}_k = \omega D^{-1} R \mathbf{x}_{k-1} + (1 - \omega) I \mathbf{x}_{k-1} + \omega D^{-1} \mathbf{b}$$

$$(I - \omega D^{-1} L) \mathbf{x}_k = [(1 - \omega) I + \omega D^{-1} R] \mathbf{x}_{k-1} + \omega D^{-1} \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x}}_k = (I - \omega D^{-1}L)^{-1} [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}R] \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + (I - \omega D^{-1}L)^{-1} \omega D^{-1} \underline{\mathbf{b}}$$

Ez most már $\underline{\mathbf{x}}_k = C \underline{\mathbf{x}}_{k-1} + \underline{\mathbf{c}}$ alakú.

Konvergencia kritérium :

A Gauss - Seidel relaxáció konvergens tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}_0$ - ből kiindulva $\iff$

$$\iff \quad \rho \left((I - \omega D^{-1}L)^{-1} [(1 - \omega)I + \omega D^{-1}R] \right) < 1$$

Tétel

Legyen A szimmetrikus $(n \times n)$ - es mátrix.

$$\forall \quad a_{ii} > 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Ekkor a Gauss - Seidel relaxáció konvergens $\iff$ A pozitív definit mátrix és $0 < \omega < 2$

Elégséges feltétel :

Ha az A szimmetrikus, pozitív definit mátrix és $0 < \omega < 2$ $\implies$ a Gauss - Seidel relaxáció konvergens.

Ha $0 < \omega < 1$ „alulrelaxálás”,

ha $1 < \omega < 2$ „túlrelaxálás”.

Tétel

Legyen A szimmetrikus pozitív definit, tridiagonális mátrix. Ekkor a Gauss - Seidel relaxáció optimális ω paramétere a következő:

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(C_j)]^2}}$$

ahol $\rho(C_j)$ az „eredeti” Jacobi iteráció C mátrixának spektrálsugara.

5.6. KÉTRÉTEGŰ ITERÁCIÓS ELJÁRÁSOK

Tekintsük az

$$(1) \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{lineáris egyenletrendszert.}$$

Ebből az

$$(2) \quad \mathbf{x}_k = C\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{c} \quad \text{iterációs eljárásához a következő módon is eljuthatunk:}$$

Legyen $A = P - Q$, ahol P reguláris mátrix.

$$(1) \quad \Rightarrow \quad P\mathbf{x} = Q\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = P^{-1}Q\mathbf{x} + P^{-1}\mathbf{b}, \quad \text{ami } (2) \text{ alakú.}$$

$$\mathbf{x}_k = P^{-1}Q\mathbf{x}_{k-1} + P^{-1}\mathbf{b}, \quad C := P^{-1}Q, \quad \mathbf{c} := P^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \quad P\mathbf{x}_k = Q\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b} \quad / - P\mathbf{x}_{k-1}$$

$$P(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = -(P - Q)\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}$$

$$(3) \quad \boxed{P(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = -A\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}} \quad \xrightarrow{(2)} \quad \boxed{\mathbf{x}_k = (I - P^{-1}A)\mathbf{x}_{k-1} + P^{-1}\mathbf{b}}$$

Az ilyen alakú iterációs módszereket kétrétegű iterációs módszereknek, P mátrixot prekondicionálási mátrixnak nevezzük ($C := I - P^{-1}A$).

A P mátrix megválasztásánál két, gyakran ellentétes szempontot kell figyelembe venni:

- i.)* A P mátrix legyen közel az A mátrixhoz, mert ekkor a $C = I - P^{-1}A$ normája kicsi, a konvergencia pedig gyors lesz.
- ii.)* A P mátrix legyen könnyen invertálható, mert különben minden iterációs lépés túl nagy műveletigénnyel járna.

Néhány példa P megválasztására :

1.

$P = D$, akkor visszkapjuk a Jacobi iterációt.

$$D(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = -(-L + D - R)\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}_k = D^{-1}(\mathbf{b} + L\mathbf{x}_{k-1} + R\mathbf{x}_{k-1})$$

2.

$P = (D - L)$, akkor a Gauss - Seidel iterációt kapjuk.

3.

$P = \frac{D}{\omega}$ vagy $P = \frac{D - L}{\omega}$, akkor pedig a Jacobi relaxációt, illetve a Gauss - Seidel relaxációt kapjuk vissza.

5.6.1. Tompított Jacobi módszer

A (3) iterációs módszer általánosításaként kapható, ugyanis a módszer kapcsolatba hozható a következő differenciálegyenlet-rendszerrel:

$$(4) \quad P \frac{d\mathbf{y}}{dt} = -A\mathbf{y} + \mathbf{b}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Belátható, hogy a (4) úgynevezett „stacionárius” megoldása (amikor $\mathbf{y}$ már nem függ a t időtől, azaz amikor $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = 0 \quad (t \rightarrow \infty)$) az (1) lineáris egyenletrendszer megoldását adja.

A (4) -ből pedig (3) alakú iterációs módszert kaphatunk!

A (4) -ben a deriváltat különbségi hányadossal helyettesítve $\implies$

$$\implies \quad P \frac{\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{y}(t_{k-1})}{\Delta t} = -A\mathbf{y}(t_{k-1}) + \mathbf{b}$$

Legyen:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}(t_k) =: \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}(t_{k-1}) =: \mathbf{x}_{k-1} \\ \Delta t := 1 \end{array} \right\} \implies \boxed{P(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = -A\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{b}} \quad (3)$$

$$\text{Ha } \Delta t = \omega \implies \boxed{P(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) = -\omega A\mathbf{x}_{k-1} + \omega \mathbf{b}}$$

iterációs módszert kapjuk, amit tompított Jacobi módszernek nevezünk.

Ha $P = I$, akkor EXPLICIT TOMPÍTOTT JACOBI módszernek (RICHARDSON ITERÁCIÓ) nevezzük, egyébként IMPLICIT TOMPÍTOTT JACOBI módszernek.

Tétel

Legyen A szimmetrikus pozitív definit mátrix, $P = I$, $\underline{\mathbf{y}}(t)$ a (4) megoldása $\underline{\mathbf{y}}(0) = \underline{\mathbf{y}}_0$ kezdeti érték esetén.

Ekkor $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{x}}\| = 0$, ahol $\underline{\mathbf{x}}$ az (1) lineáris egyenletrendszer megoldása.

Bizonyítás

Legyen $\underline{\mathbf{z}}(t) := \underline{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{x}}$ a hiba, ahonnan $\underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{z}}(t) + \underline{\mathbf{x}}$

Ezt (4) - be írva $\implies \frac{d\underline{\mathbf{z}}}{dt} + A\underline{\mathbf{z}} = 0 \quad t > 0, \quad \underline{\mathbf{z}}(0) = \underline{\mathbf{y}}(0) - \underline{\mathbf{x}}$

Majd $\underline{\mathbf{z}}$ - vel skalárisan szorozva: $\left(\frac{d\underline{\mathbf{z}}}{dt}, \underline{\mathbf{z}}\right) + (A\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}}) = 0 \quad (*)$

Itt az első tag: $\left(\frac{d\underline{\mathbf{z}}}{dt}, \underline{\mathbf{z}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \|\underline{\mathbf{z}}\|^2$,

és mivel A pozitív definit $\implies (A\underline{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{z}}) \geq \delta \|\underline{\mathbf{z}}\|^2$ ahol $\delta > 0$,

(*) - ből $\implies \frac{d}{dt} \|\underline{\mathbf{z}}(t)\|^2 + 2\delta \|\underline{\mathbf{z}}(t)\|^2 \leq 0$

Ezt szorozva $e^{2\delta t} > 0$ - val $\implies \frac{d}{dt} e^{2\delta t} \|\underline{\mathbf{z}}(t)\|^2 \leq 0$,

ahonnan integrálva 0 - tól t - ig $\implies e^{2\delta t} \|\underline{\mathbf{z}}(t)\|^2 \leq \|\underline{\mathbf{z}}(0)\|^2$

Most gyököt vonva és $\underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{y}} - \underline{\mathbf{x}}$ - et visszaírva, $e^{\delta t}$ - vel osztva

$\implies \|\underline{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{x}}\| \leq e^{-\delta t} \|\underline{\mathbf{y}}(0) - \underline{\mathbf{x}}\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

■

Tétel

Legyen A szimmetrikus pozitív definit, $P = I$.

Ekkor az egyszerű iteráció (Richardson iteráció) konvergens, ha

$$0 < \omega < \frac{2}{\rho(A)} \quad \text{tetszőleges } \underline{\mathbf{x}}_0 \text{ kezdővektor esetén.}$$

Az optimális ω paraméter megválasztására igaz a következő tétel.

Tétel

Ha A szimmetrikus pozitív definit mátrix, akkor az egyszerű iterációra egyértelműen létezik ω_{opt} optimális paraméter, amelynek értéke:

$$\boxed{\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{m + M}} \quad \text{ahol} \quad \begin{aligned} m &:= \min \lambda(A) \\ M &:= \max \lambda(A) \end{aligned}$$

5.6.2. A kerekítési hibák hatása az iterációs eljárásokra

Vizsgáljuk meg, hogyan befolyásolják a kerekítési hibák az

$$(1) \quad \underline{\mathbf{x}}_k = C\underline{\mathbf{x}}_{k-1} + \underline{\mathbf{c}}$$

alakú iterációs eljárások közelítő megoldásainak sorozatát. Az iterációs módszerek gyakorlati alkalmazása során is kerekítjük a számított értékeket.

Tetszőleges $\underline{\mathbf{x}}_0$ - ből kiindulva az $\underline{\mathbf{x}}_1 = C\underline{\mathbf{x}}_0 + \underline{\mathbf{c}}$ pontos érték helyett a kerekítési hiba miatt $\underline{\mathbf{y}}_1 = \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\varepsilon}_1$ értéket kapjuk, ahol $\underline{\varepsilon}_1$ az első lépésben elkövetett kerekítési hibavektor.

A második lépésben

$$\underline{\mathbf{y}}_2 = C\underline{\mathbf{y}}_1 + \underline{\mathbf{c}} + \underline{\varepsilon}_2, \quad \text{ahol } \underline{\varepsilon}_2 \text{ a második lépésben elkövetett kerekítés hibája.}$$

Így az (1) közelítő megoldássorozat helyett a következő sorozatot kapjuk:

$$(2) \quad \underline{\mathbf{y}}_k = C\underline{\mathbf{y}}_{k-1} + \underline{\mathbf{c}} + \underline{\varepsilon}_k, \quad \text{ahol } \underline{\varepsilon}_k \text{ a } k\text{-adik lépésbeli hibavektor,} \quad \underline{\mathbf{y}}_0 = \underline{\mathbf{x}}_0, \quad \underline{\varepsilon}_0 = \underline{\mathbf{0}}$$

Legyen $\|\underline{\varepsilon}_k\| < \varepsilon$ és vezessük be a

$$\underline{\mathbf{z}}_k := \underline{\mathbf{y}}_k - \underline{\mathbf{x}}_k \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{jelölést. Itt } \underline{\mathbf{z}}_k \text{ a hibavektor.}$$

Ekkor $\underline{\mathbf{y}}_k = \underline{\mathbf{z}}_k + \underline{\mathbf{x}}_k$ - t (2) - be írva (1) $\implies$

$$\implies \underline{\mathbf{z}}_k = C\underline{\mathbf{z}}_{k-1} + \underline{\varepsilon}_k \quad \text{és innen} \quad \implies$$

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{z}}_k\| &\leq \|C\| \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_{k-1}\| + \|\underline{\varepsilon}_k\| \leq \|C\| (\|C\| \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_{k-2}\| + \|\underline{\varepsilon}_{k-1}\|) + \|\underline{\varepsilon}_k\| \leq \|C\|^2 \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_{k-2}\| + \\ &+ \|C\| \cdot \varepsilon + \varepsilon \leq \dots \leq \|C\|^k \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_0\| + \varepsilon (\|C\|^{k-1} + \|C\|^{k-2} + \dots + \|C\| + 1) \end{aligned}$$

$$\implies \|\underline{\mathbf{z}}_k\| \leq \|C\|^k \cdot \|\underline{\mathbf{z}}_0\| + \varepsilon \frac{1}{1 - \|C\|}$$

$$\implies \boxed{\|\underline{\mathbf{z}}_k\| \leq \frac{1}{1 - \|C\|} \cdot \varepsilon}, \quad \text{ha } \|C\| < 1$$