

3.2. Húrmódszer

Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, ekkor (a, b) -ben van gyöke f -nek. $x_0 := a$, $x_1 := b$.

Az x_k és x_s közelítések ismeretében (ahol $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$) az f függvényt közelítsük az $(x_k, f(x_k))$ és $(x_s, f(x_s))$ pontokon átmenő egyenessel. Az egyenes x tengellyel vett metszéspontja legyen x_{k+1} . A következő közelítésben szereplő s index legyen

$$s := \begin{cases} k & , \text{ha } f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) < 0 \\ s & , \text{ha } f(x_k) \cdot f(x_{k+1}) > 0 \end{cases}.$$

Képlettel: x_0, x_1 adott, $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. Ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_s)}{f(x_k) - f(x_s)} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

ahol s a legnagyobb index, melyre $f(x_k) \cdot f(x_s) < 0$.

3.5. Tétel.

Ha $f \in C^2[a, b]$,

- (1) $f(a) \cdot f(b) < 0$
- (2) f' és f'' állandó előjelű az $[a, b]$ -n,
- (3) $0 < m_1 \leq |f'|$,
- (4) $|f''| \leq M_2 < \infty$,

akkor a húrmódszer konvergencia és hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_s - x^*| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

3.3. Szelőmódszer

Legyen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 := a$, $x_1 := b$. Az x_{k-1} és x_k közelítések ismeretében az f függvényt közelítsük az $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ és $(x_k, f(x_k))$ pontokon átmenő egyenessel. Az egyenes x tengellyel vett metszéspontja legyen x_{k+1} .

Képlettel: x_0, x_1 adott. Ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

3.6. Tétel.

Ha $f \in C^2[a, b]$ és teljesülnek a Newton-módszer lokális konvergencia tételének feltételei, akkor a megfelelő környezetből indított szelőmódszer konvergál az f gyökéhez és

konvergencia rendje $p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Hibabecslése: $|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*| \cdot |x_{k-1} - x^*| \quad (k \in \mathbb{N}).$

3.4. Newton-módszer (1669. Newton, 1690. Raphson)

Legyen $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ adott kezdőérték. Az x_k közelítés ismeretében az f függvényt közelítsük az $(x_k, f(x_k))$ pontokon átmenő $f'(x_k)$ meredekségű egyenessel. Az egyenes x tengellyel vett metszéspontja legyen x_{k+1} .

Más megközelítésben: Közelítsük f -et az x_k pont körüli elsőfokú Taylor-polinommal.

Legyen x_{k+1} olyan, hogy $T_1(f)(x_{k+1}) = 0$.

Általában: x_0 adott. Ekkor

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

3.7. Tétel. (Globális vagy monoton konvergencia tétel)

Ha $f \in C^2[a,b]$,

- (1) $\exists x^* \in (a,b): f(x^*) = 0$,
- (2) f' és f'' állandó előjelű az $[a,b]$ -n,
- (3) $x_0 \in (a,b): f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$,

akkor az x_0 -ból indított Newton módszer (x_k) sorozata monoton konvergál f gyökéhez.

3.8. Tétel. (Lokális konvergencia tétel)

Ha $f \in C^2[a,b]$,

- (1) $\exists x^* \in (a,b): f(x^*) = 0$
- (2) f' állandó előjelű az $[a,b]$ -n,
- (3) $0 < m_1 \leq |f'|$,
- (4) $|f''| \leq M_2 < \infty$,
- (5) legyen $x_0 \in [a,b]$ olyan, hogy $|x_0 - x^*| < r := \min \left\{ \frac{2m_1}{M_2}, |x^* - a|, |x^* - b| \right\}$.

Ekkor az x_0 -ból indított Newton módszer $p = 2$ rendben konvergál az f gyökéhez és a hibabecslése

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_k - x^*|^2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Megjegyzés: Többszörös gyökök közelében a Newton módszer konvergencia rendje csak lineáris. Erre a speciális esetre létezik a módszernek módosítása.

Kidolgozott példák.

1. Példa.

Az $f(x) = e^x + x = 0$, $(x \in \mathbb{R})$ megoldására írjuk fel a Newton módszert. Vizsgáljuk meg, milyen x_0 -ra konvergens?

Megoldás.

$$x_{k+1} := x_k - \frac{e^{x_k} + x_k}{e^{x_k} + 1} = x_k - 1 - \frac{x_k - 1}{e^{x_k} + 1} = (x_k - 1) \left(1 - \frac{1}{e^{x_k} + 1} \right) = (x_k - 1) \frac{e^{x_k}}{e^{x_k} + 1}.$$

a) Először vizsgáljuk a globális konvergencia tétel feltételeit!

$f'(x) = e^x + 1 > 0$, $f''(x) = e^x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), tehát a (2) feltétel teljesül.

Pl. $[a, b] = [-10, +10]$ esetén $f(-10) \cdot f(10) < 0$,

így ebben az intervallumban van gyöke az egyenletnek, az (1) feltétel is teljesül.

Mivel $f'' > 0$, ha $x_0 \in [-10, +10]$ -t úgy választjuk, hogy $f(x_0) > 0$,

akkor a Newton módszer (x_k) sorozata monoton konvergál f gyökéhez.

b) Próbáljuk a lokális konvergencia tételt alkalmazni, hogy lássuk más feltételekkel más eredményre jutunk. Mivel szeretnénk minél nagyobb környezetet megadni, ahonnan indítva a módszer konvergál, ezért m_1 -re a lehető legnagyobb, M_2 -re a lehető legkisebb értéket keressük.

$f'(x) = e^x + 1 > 1$, ($\forall x \in \mathbb{R}$), így $m_1 = 1$ és a (2) feltétel is teljesül.

$f''(x) = e^x < 1$, ha $x < 0$, így $M_2 = 1$.

Pl. $[a, b] = [-10, 0]$ esetén $f(-10) \cdot f(0) < 0$,

így ebben az intervallumban van gyöke az egyenletnek, az (1) feltétel is teljesül.

Tehát, ha $x_0 \in [-10, 0]$ olyan, hogy $|x_0 - x^*| < r := \min \{2, |x^* + 10|, |x^* - 0|\}$,

akkor az x_0 -ból indított Newton módszer $p = 2$ rendben konvergál az f gyökéhez.

Hibabecslése:

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{1}{2} |x_k - x^*|^2.$$

3.5. Polinomegyenletek gyökeinek becslése

A $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, ($n \in \mathbb{N}$, $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$) valós együtthatós polinomok gyökeinek elhelyezkedését vizsgáljuk.

3.9. Tétel.

A P polinom bármely x_k gyökére fennáll, hogy

$$|x_k| < 1 + \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|a_0|} =: R$$

$$\text{illetve } r := \frac{1}{\frac{n-1}{\max_{i=0}^n |a_i|}} < |x_k|, \text{ ha } a_n \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N})\text{-re.}$$

Megjegyzés. Ha $a_n = 0$, akkor a 0 gyöke a polinomnak, így $(x-0)$ -val osztás után kapott polinomra alkalmazhatjuk a tétel állítását.

Bizonyítás. Az állítás első részének bizonyításához tegyük fel, hogy $|x| \geq R$. Ekkor

$$\begin{aligned}
 |P(x)| &\geq |a_0| \cdot |x|^n - (|a_n| + |a_{n-1}| \cdot |x| + \dots + |a_1| \cdot |x|^{n-1}) \geq \\
 &\geq |a_0| \cdot |x|^n - \max_{i=1}^n |a_i| \cdot (1 + |x| + \dots + |x|^{n-1}) = \\
 &= |a_0| \cdot |x|^n - \max_{i=1}^n |a_i| \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} > |a_0| \cdot |x|^n - \frac{\max_{i=1}^n |a_i| \cdot |x|^n}{|x| - 1} = \\
 &= |x|^n \cdot \left(|a_0| - \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|x| - 1} \right) \geq 0 \\
 |P(x)| > 0 &\Leftrightarrow |a_0| - \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|x| - 1} \geq 0 \Leftrightarrow |a_0| \geq \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|x| - 1} \Leftrightarrow |x| - 1 \geq \frac{\max_{i=1}^n |a_i|}{|a_0|} \Leftrightarrow |x| \geq R.
 \end{aligned}$$

Tehát a 0 körüli R sugarú körön kívül a polinom nem vehet fel 0 értéket.

Az állítás második részének bizonyításához vezessük be az $y := \frac{1}{x}$ változót.

Ekkor $P(x) = P\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^n} \cdot Q(y)$, ahol $Q(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_1 y + a_0$ a P polinom reciprok polinomja. Alkalmazzuk a Q polinom y_k gyökeire a már bizonyított állítást.

$$|y_k| < 1 + \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r < \left| \frac{1}{y_k} \right| = |x_k| \quad (k \in \mathbb{N})\text{-re.}$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Kidolgozott példák.

1. Példa.

Adjunk korlátokat a következő polinomok gyökeire:

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

b) $Q(x) = 3x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$

Megoldás. a) $R = 1 + \frac{12}{1} = 13$, $r = \frac{1}{1 + \frac{8}{12}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$, tehát $\frac{3}{5} < |x_k| < 13$.

b) $R = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, $r = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$, tehát $\frac{2}{5} < |x_k| < \frac{5}{3}$.