

Az ε értéke n^2 szorzás és n^2 összeadás utáni kerekítési hibát jelenti. Így ennek értéke nagy is lehet. Ezért, ha még $\|C\|$ szám is 1 - hez közeli, a kerekítési hibák a megoldást nagymértékben torzíthatják. A gyakorlati alkalmazásoknál ezért arra kell törekedni, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{c}$ ekvivalens alakra való átalakítását úgy csináljuk, hogy $\|C\|$ minél kisebb legyen.

6. NEMLINEÁRIS EGYENLETEK ITERÁCIÓS MEGOLDÁSI MÓDSZEREI

Az általános iteráció elvét most alkalmazzuk nemlineáris egyenletek és egyenletrendszerek megoldására.

FELADAT :

Keressük az

$$(1) \quad F(x) = 0 \quad \text{egyenlet egy } x \text{ megoldását (gyökét), ahol } x^* \text{ az } (1) \text{ megoldása, ha } F(x^*) = 0.$$

Itt az F operátor egy $F : D \rightarrow X \quad D \subset X$ leképezés, $(X, \|\cdot\|)$ Banach - tér (lineáris, normált, teljes).

Tehát (1) megoldását D - ben (X - ben) keressük. Véges sok lépésben meghatározni (1) gyökét azonban csak nagyon ritka esetben lehet, ezért van szükség iterációs módszerekre.

Ehhez írjuk át (1) - et vele ekvivalens alakra:

$$(2) \quad x = \Phi(x) \quad \text{„fixpontegyenlet”}$$

Ha x^* a (2) megoldása, úgynevezett fixpontja, $x^* = \Phi(x^*)$, akkor x^* az (1) - nek is megoldása.

A (2) megoldásának meghatározására képezzük a következő iterációs sorozatot (közelítő megoldások sorozata):

$$(3) \quad x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \text{ahol } \Phi \text{ „iterációs függvény”}$$

KÉRDÉSEK :

1. Hogyan választható alkalmas Φ iterációs függvény?
2. Milyen feltételek esetén konvergál az $\{x_i\}$ közelítő megoldások sorozata?
3. Milyen gyors a konvergencia?
4. Az x_0 kezdőértéket hogyan kell megválasztani?

6.1. KONVERGENCIA

Definíció :

Azt mondjuk, hogy az $\{x_k\}$ iterációs sorozat konvergens, ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad \text{vagy} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0,$$

ahol x^* a (2) megoldása, fixpontja, ami egyben megoldása (1) - nek is.

Tétel Bolzano - tétel

$$\text{Ha} \quad \left. \begin{array}{l} f \in C[a, b] \\ f(a) < 0 < f(b) \end{array} \right\} \implies \exists \quad x^* \in (a, b), \quad \text{hogy} \quad f(x^*) = 0$$

Bizonyítás

Ezt intervallumfelezési eljárással bizonyítjuk (Leindler - Schipp: Analízis I. jegyzet 151. oldal).

Legyen $x_0 = a, \quad y_0 = b$.

Tegyük fel, hogy $x_k, \quad y_k$ - t $k = 1, \dots, n$ - re már meghatároztuk.

$$\text{Ekkor legyen} \quad z_n := \frac{y_n - x_n}{2} \quad \text{és} \quad \begin{array}{ll} x_{n+1} = x_n, & y_{n+1} = z_n, \quad \text{ha} \quad f(z_n) \geq 0, \\ x_{n+1} = z_n, & y_{n+1} = y_n, \quad \text{ha} \quad f(z_n) < 0. \end{array}$$

Így egymásba skatulyázott intervallumok sorozatát kapjuk, amelyre:

$$\lim x_n = \lim y_n = x^*, \quad y_n - x_n = \frac{b - a}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■

Definíció :

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ Banach - tér, $\Phi : X \rightarrow X$ X - nek önmagába való leképezése.

A Φ leképezés kontrakció (összehúzóadás), ha $\exists \quad 0 < \alpha < 1$ szám, hogy $\forall \quad x, y \in X$ - re

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq \alpha \|x - y\|.$$

Elégséges feltétel a (3) iteráció konvergenciájára :

Tétel **Banach - féle fixponttétel**

Legyen $(X, \|\cdot\|)$ Banach - tér, $\Phi : X \rightarrow X$ leképezés kontrakció X - en.

Ekkor az $x = \Phi(x)$ egyenletnek $\exists! x^* \in X$ megoldása, „fixpontja” ($x^* = \Phi(x^*)$), továbbá az $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ iterációs sorozat tetszőleges x_0 esetén konvergál x^* - hoz, azaz $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.

SŐT: A tétel bizonyításából a közelítő megoldásra hibabecslést is kapunk!

Bizonyítás

1.)

$\{x_k\}$ Cauchy - sorozat, ugyanis:

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\| \leq \alpha^k \|x_1 - x_0\| ,$$

ahonnan $s > k$ esetén:

$$(\star) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|x_s - x_k\| \leq \|x_s - x_{s-1} + x_{s-1} - \dots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k\| \leq \\ \leq \|x_s - x_{s-1}\| + \|x_{s-1} - x_{s-2}\| + \dots + \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ \leq \alpha^{s-1} \|x_1 - x_0\| + \alpha^{s-2} \|x_1 - x_0\| + \dots + \alpha^k \|x_1 - x_0\| = \\ = (\alpha^{s-1} + \alpha^{s-2} + \dots + \alpha^k) \|x_1 - x_0\| = \alpha^k (\alpha^{s-k-1} + \dots + \alpha + 1) \|x_1 - x_0\| \leq \\ \leq \alpha^k \frac{1}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\| \end{array} \right.$$

$$(\star) \quad \implies \quad \|x_s - x_k\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|$$

Tehát $\{x_k\}$ tényleg Cauchy - sorozat $\implies \exists x^*$ hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, $x^* \in X$

2.)

x^* a (2) megoldása (fixpontja), ugyanis:

$$\begin{aligned} \|x^* - \Phi(x^*)\| &= \|x^* - x_k + x_k - \Phi(x^*)\| \leq \|x^* - x_k\| + \|\Phi(x_{k-1}) - \Phi(x^*)\| \leq \\ &\leq \|x^* - x_k\| + \alpha \|x_{k-1} - x^*\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \implies \|x^* - \Phi(x^*)\| &= 0 \implies x^* - \Phi(x^*) = 0 \implies x^* = \Phi(x^*) \end{aligned}$$

3.)

x^* egyértelmű megoldás (fixpont), ugyanis:

ha $\eta = \Phi(\eta)$ is teljesül, akkor

$$\begin{aligned} \|\eta - x^*\| &= \|\Phi(\eta) - \Phi(x^*)\| \leq \alpha \|\eta - x^*\| \\ (1 - \alpha) \|\eta - x^*\| &\leq 0 \text{ és mivel } \alpha < 1 \implies x^* = \eta \end{aligned}$$

■

Megjegyzés :

Ha $x_{k+1} = x_k$, akkor megállítjuk az iterációt és $x_k = x_{k+1} = \Phi(x_k)$ a keresett x^* megoldás (fixpont).

Általánosítás :

Sok gyakorlati esetben a Φ leképezés a $D \subset X$ zárt halmazon definiált.

Ha $\Phi : D \rightarrow D$ és Φ kontrakció D -n, a tétel továbbra is érvényben marad.

Ha $x_0 \in D$ (így választjuk), akkor $x_1 = \Phi(x_0) \in D$, és általában $x_k \in D$ $k \geq 2$, tehát az iteráltak D -ben maradnak $\implies \exists! x^* \in D, \lim x_k = x^*$.

6.2. HIBABECSLÉS

A - PRIORI HIBABECSLÉS

$$(\star) \quad \|x_s - x_k\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|$$

Tudjuk, hogy $\lim_{s \rightarrow \infty} x_s = x^*$.

$$(\star) \text{ - ban limeszre térve } \implies \boxed{\|x^* - x_k\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|}$$

Speciális esetben ez kiadja a lineáris egyenletrendszerekre vonatkozó a - priori hibabecslést:

$$\underline{\mathbf{x}} = C \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}, \quad \Phi = C \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}, \quad \|C\| < 1 \quad \implies \quad \Phi \text{ lineáris leképezés kontrakció, és} \\ \alpha = \|C\| < 1$$

A - POSTERIORI HIBABECSLÉS

Vizsgáljuk:

$$\begin{aligned} \|x^* - x_k\| &= \|x^* - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k\| \leq \|x^* - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - x_k\| \leq \\ &\leq \|\Phi(x^*) - \Phi(x_k)\| + \|\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})\| \leq \alpha \|x^* - x_k\| + \alpha \|x_k - x_{k-1}\| \end{aligned}$$

$$\text{Rendezve} \quad \implies \quad (1 - \alpha) \|x^* - x_k\| \leq \alpha \|x_k - x_{k-1}\| ,$$

$$\text{ahol} \quad \alpha < 1 \quad \implies \quad \boxed{\|x^* - x_k\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|x_k - x_{k-1}\|}$$

6.2.1. Az egyszerű iteráció konvergenciasebessége

VOLT :

$$(1) \quad F(x) = 0$$

$$(2) \quad x = \Phi(x)$$

$$(3) \quad x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

$$\text{Legyen} \quad \left. \begin{aligned} \Phi &: [a, b] \rightarrow [a, b] \\ \Phi &\in C^1[a, b] \\ k &:= \max_{x \in [a, b]} |\Phi'(x)| < 1 \end{aligned} \right\} \quad \text{ekkor } \Phi \text{ kontrakció } [a, b] \text{ - n.}$$

Vizsgáljuk a hibát:

$$x_{k+1} - x^* = \Phi(x_k) - \Phi(x^*) = \overset{\text{Lagrange - féle középértéktétel}}{\Phi'(\eta)} (x_k - x^*) ,$$

$$\text{ahol} \quad \eta = x_k + \Theta \varepsilon_k, \quad 0 < \Theta < 1, \quad \varepsilon_k := x_k - x^* .$$

Bevezetve:

$$(4) \quad \varepsilon_k := x_k - x^* \quad \implies \quad \varepsilon_{k+1} = \Phi'(\eta) \varepsilon_k$$

Ha $\Phi'(x) < 0$ $[a, b]$ - n, akkor az $\{x_k\}$ sorozat alternáló,

ha $\Phi'(x) > 0$ $[a, b]$ - n, akkor az $\{x_k\}$ sorozat monoton.

$$(4) \quad \implies \quad \varepsilon_k \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty \quad \text{esetén és}$$

$$\eta \rightarrow x^* \quad (k \rightarrow \infty) \quad \text{így} \quad \implies \quad \boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} = \Phi'(x^*)}$$

Definíció :

Ha $\Phi'(x^*) \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $\{x_k\}$ sorozat lineárisan konvergál az x^* - hoz,

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq K \cdot |\varepsilon_k| \quad \text{vagy} \quad |\varepsilon_{k+1}| = O(|\varepsilon_k|) .$$

Ha $\Phi'(x^*) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az $\{x_k\}$ sorozat szuperlineárisan konvergál az x^* - hoz.

Ekkor a Lagrange - féle középértéktétel nem mond semmit, de a Taylor - formula alapján:

$$x_{k+1} - x^* = \Phi(x_k) - \Phi(x^*)$$

$$\Phi(x_k) = \Phi(x^*) + \frac{\Phi'(x^*)}{1!} (x_k - x^*) + \frac{\Phi''(\eta)}{2!} (x_k - x^*)^2$$

$$\implies \quad x_{k+1} - x^* = \frac{\Phi''(\eta)}{2!} (x_k - x^*)^2$$

$$\implies \quad \varepsilon_{k+1} = \tilde{K} \cdot \varepsilon_k^2 \quad |\varepsilon_{k+1}| = O(|\varepsilon|^2) \quad \text{vagy} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k^2} = \frac{1}{2} \Phi''(x^*) ,$$

ami azt jelenti, hogy a konvergencia legalább másodrendű, de ehhez kell, hogy $\Phi \in C^2[a, b]$.

Definíció :

Az $\{x_k\}$ sorozat konvergenciája p - edrendű, ha $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = c$ (állandó)

$$\text{vagy} \quad \|\varepsilon_{k+1}\| = O(\|\varepsilon_k\|^p) .$$

Kérdés : Alkalmas Φ függvény választásával a szuperlineáris konvergencia elérhető - e?

6.3. NEWTON - MÓDSZER (ITERÁCIÓ)

Legyen $f \in C^1[a, b]$ és keressük

(1) $f(x) = 0$ egyenlet megoldását $[a, b]$ -n.

Tegyük fel, hogy $\exists x^* \in [a, b]$, melyre $f(x^*) = 0$.

(1) - et átírjuk vele ekvivalens alakra, amelyre a $\Phi'(x^*) = 0$ lesz.

Legyen $g \in C^1[a, b]$, $g \neq 0$ $[a, b]$ -n.

$$f(x) = 0 \quad / \cdot g(x)$$

(2) $g(x)f(x) = 0 \quad / + x$

(3) $x = x + f(x)g(x) \quad (\Phi = x + f \cdot g)$

Hogy szuperlineáris legyen a konvergencia, kell, hogy $\Phi'(x^*) = 0$

$$\Phi(x) = x + f(x)g(x)$$

$$\implies \Phi'(x) = 1 + f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\implies \Phi'(x^*) = 1 + f'(x^*)g(x^*) + \overbrace{f(x^*)g'(x^*)}^0$$

$$\implies 1 + f'(x^*)g(x^*) = 0$$

$$\implies g(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)}, \quad f'(x^*) \neq 0, \quad x \in [a, b]$$

Ez elérhető akkor, ha a g függvényt az x^* hely környezetében

$$g(x) = -\frac{1}{f'(x)} \text{ - nek választjuk.}$$

Így a szuperlineáris konvergenciájú módszerünk a következő:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Tétel Konvergencia - tétel

Legyen $f \in C^2[a, b]$ $f(x^*) = 0$, $x^* \in [a, b]$, $f'(x^*) \neq 0$ (x^* egyszeres gyök)
 $0 < m := \inf |f'(x^*)|$ és $M := \sup |f''(x)|$ az x^* valamely környezetében.

Ekkor $\exists U(x^*)$ környezet, amelyre tetszőleges $x_0 \in U(x^*)$ kezdőérték esetén a Newton - módszer konvergens és ez a konvergencia (lokálisan) másodrendű.

Bizonyítás

Legyen $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

a.)

Belátjuk, hogy Φ kontrakció egy alkalmas környezetében x^* - nak.

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \alpha < 1$$

$$\Phi(x) - \Phi(y) = \Phi'(i)(x - y)$$

Vizsgáljuk:

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{-f(x)f''(x) + [f'(x)]^2}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Mivel $f(x^*) = 0$, f folytonos és $\exists m, M$ állandók, azért $\exists U(x^*) := [x^* - \delta, x^* + \delta]$

környezete x^* - nak, amelyre $|\Phi'| < 1$

$\implies \Phi$ az $U(x^*)$ környezetében kontrakció.

b.)

Belátjuk, hogy $\Phi : U(x^*) \rightarrow U(x^*)$.

Legyen $x \in U(x^*)$, azaz $|x - x^*| < \delta$.

Tekintsük: $|\Phi(x) - x^*| = |\Phi(x) - \Phi(x^*)| \leq \alpha |x - x^*| < |x - x^*| < \delta$, $\alpha < 1$

$\implies \forall x \in U(x^*)$ - ra a $\Phi(x) \in U(x^*)$ - nak.

A Banach - féle fixponttétel miatt a Newton - módszer $U(x^*)$ - on konvergens tetszőleges $x_0 \in U(x^*)$ - ra.

c.)

Belátjuk, hogy a Newton - módszer konvergenciája $U(x^*)$ - on másodrendű $(|\varepsilon_{k+1}| = O(|\varepsilon_k|^2))$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad / \cdot (-1) , \quad / + x^*$$

$$(\star) \quad \underbrace{x^* - x_{k+1}}_{\varepsilon_{k+1}} = x^* - x_k + \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Írjuk fel f - re a Taylor - formulát az x_k pontban.

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_k)^2$$

$$x = x^* \text{ - ra: } \underbrace{f(x^*)}_0 = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_k)^2$$

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x^* - x_k)^2 \quad / : f'(x_k)$$

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2$$

$$\text{Ezt } (\star) \text{ - ba írva } \implies x^* - x_{k+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)} \underbrace{(x^* - x_k)^2}_{\varepsilon_k^2}$$

$$\implies |\varepsilon_{k+1}| = O(|\varepsilon_k|^2) , \quad \text{azaz a konvergencia valóban másodrendű } U(x^*) \text{ - on.}$$

■

Megjegyzés :

A Newton - módszer másik neve érintőmódszer.

A többszörös gyökök esete

Sokszor nem ismerjük az x^* gyök multiplicitását. Ezekre hasznosak az olyan módszerek, amelyek nem függenek a gyök multiplicitásától.

Ötlet : ha $f(x) = 0$ - nak x^* valahányszoros gyöke, akkor

$$(1) \quad u(x) := \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ - nek az } x^* \text{ egyszeres gyöke lesz.}$$

$$f(x) = (x - x^*)^r \cdot g(x)$$

$$f'(x) = r(x - x^*)^{r-1} \cdot g(x) + (x - x^*)^r \cdot g'(x)$$

$$u'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Most $u(x) = 0$ - ra alkalmazzuk a Newton - módszert:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{u(x_k)}{u'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k) [f'(x_k)]^2}{f'(x_k) \{ [f'(x_k)]^2 - f(x_k) f''(x_k) \}} \implies$$

$$\implies \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k) f''(x_k)}} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Belátható, hogy ha a jobb oldal kellően sima, akkor e módszer konvergenciája másodrendű marad, de ez a módszer kisebb hatékonyságú általában, mint az „eredeti”, mivel a második deriváltat is számolni kell minden egyes lépésben.

Ha a gyök multiplicitása ismert, mondjuk r , akkor igaz a következő:

Tétel

A tett feltevések mellett az

$$(2) \quad \boxed{x_{k+1} = x_k - r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

formula konvergenciája is másodrendű, ha a gyök multiplicitása r .

Bizonyítás

$$(2) \quad \implies \quad x^* - x_{k+1} = x^* - x_k + r \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad / \cdot f'(x_k)$$

$$(3) \quad (x^* - x_{k+1}) \cdot f'(x_k) = (x^* - x_k) \cdot f'(x_k) + r \cdot f(x_k)$$

$$\text{Legyen} \quad g(x) := (x^* - x) \cdot f'(x) + r \cdot f(x)$$

$$\text{Tudjuk, hogy } x^* \text{ az } f \text{ - nek } r \text{ - szeres gyöke} \quad \implies \quad g(x^*) = 0$$

Vizsgáljuk:

$$g'(x) = (x^* - x) \cdot f''(x) - f'(x) + r \cdot f'(x)$$

$$g''(x) = (x^* - x) \cdot f'''(x) - 2 \cdot f''(x) + r \cdot f''(x)$$

$\vdots$

$$g^{(j)}(x) = (x^* - x) \cdot f^{(j+1)}(x) - j \cdot f^{(j)}(x) + r \cdot f^{(j)}(x)$$

$$\implies g(x^*) = g'(x^*) = \dots = g^{(r)}(x^*) = 0$$

Írjuk fel g - re a Taylor - formulát x^* - ban.

$$g(x) = g(x^*) + g'(x^*)(x - x^*) + \frac{g''(x^*)}{2!}(x - x^*)^2 + \dots + \frac{g^{(r)}(x^*)}{r!}(x - x^*)^r + \frac{g^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x - x^*)^{r+1}$$

$$\implies \boxed{g(x) = \frac{g^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x - x^*)^{r+1}} \quad (4)$$

Továbbá f Taylor - sora:

$$f(x) = \frac{f^{(r)}(\eta)}{r!}(x - x^*)^r \implies \boxed{f'(x) = \frac{f^{(r)}(\eta)}{(r-1)!}(x - x^*)^{r-1}} \quad (5)$$

$$(3) \implies (x^* - x_{k+1}) \cdot f'(x_k) = g(x_k) \implies (x^* - x_{k+1}) = \frac{g(x_k)}{f'(x_k)}$$

Ide beírva (4) - et, (5) - öt:

$$(x^* - x_{k+1}) = \frac{\frac{g^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!}(x_k - x^*)^{r+1}}{\frac{f^{(r)}(\eta)}{(r-1)!}(x_k - x^*)^{r-1}}$$

$$\implies x^* - x_{k+1} = \frac{g^{(r+1)}(\xi)}{r(r+1) \cdot f^{(r)}(\eta)}(x_k - x^*)^2$$

$$x^* - x_{k+1} = C \cdot (x_k - x^*)^2 \implies |\varepsilon_{k+1}| \leq C \cdot |\varepsilon_k|^2 \quad \text{a deriváltak korlátosságát feltéve.}$$

■

6.4. SZELŐ MÓDSZER

A Newton - módszer egyik hátránya lehet, hogy deriváltat kell számolni. Ezt küszöböli ki a szelő módszer. A deriváltat különbségi hányadossal helyettesítjük.

$$\text{Legyen} \quad f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

$$\Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}} \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}} \quad k = 1, 2, \dots$$

Megjegyzés :

i.)

A szelő módszer nem írható $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ alakban, mint a Newton - módszer, most ugyanis két kezdőértékre van szükség : x_0, x_1

ii.)

A szelő módszer konvergenciasebessége kisebb, mint a Newton - módszeré.

A konvergenciasebesség: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

6.5. MÓDOSÍTOTT NEWTON - MÓDSZER

Most az érintő helyett mindig $f'(x_0)$ meredekségű egyenes gyökét határozzuk meg.

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}}$$

6.6. KONVERGENCIAGYORSÍTÁS : AITKEN TRANSZFORMÁCIÓ (AITKEN Δ^2 MÓDSZERE)

Tekintsünk egy konvergens $\{x_k\}$ sorozatot $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, amelyik lineárisan konvergál x^* - hoz:

$$(1) \quad x_{k+1} - x^* \approx \alpha (x_k - x^*), \quad \text{ahol} \quad 0 < \alpha < 1$$

Az (1) segítségével α és x^* kifejezhető a következő módon:

$$(1) \quad \implies \quad x_{k+2} - x^* = \alpha (x_{k+1} - x^*) \quad (2)$$

$$\implies \quad \alpha = \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}$$

Ezt (1) - be írva $\implies$

$$(3) \quad \boxed{x^* = \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}}$$

Várható, hogy az x_k, x_{k+1}, x_{k+2} segítségével x^* jobb közelítése kapható meg, mint az eredeti $\{x_k\}$ sorozat.

$$x'_k = \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} \quad (3)$$

De (3) numerikusan instabil formula, ezért átírjuk:

$$(3) \quad \implies \quad (x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k) x^* = x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2 = (x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k) x_k - (x_{k+1} - x_k)^2$$

$$\implies \quad \boxed{x^* = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}} \quad \text{Ez már numerikusan stabil formula.}$$

Bevezetve a következő differenciaoperátorokat:

$$\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$$

$$\Delta^2 x_k := \Delta x_{k+1} - \Delta x_k = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$$

$$\text{Így (3) alakja:} \quad x^* = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k} \quad (4)$$

A jobb oldal számolásával $\{x'_k\}$ transzformált sorozatot kapjuk, ami gyorsabban konvergál x^* -hoz, mint az eredeti sorozat.

$$(5) \quad \boxed{x'_k := x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k}} \quad k = 1, 2, \dots$$

Tétel

Legyen $0 < \alpha < 1$ olyan szám, amellyel az $\{x_k\}$ sorozat a következő módon írható:

$$(6) \quad x_{k+1} = (\alpha + \delta_k) x_k, \quad \text{ahol} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0.$$

Ekkor az (5) transzformált sorozat elég nagy k -ra jól definiált és $\{x'_k\}$ gyorsabban konvergál x^* -hoz, mint az $\{x_k\}$ sorozat abban az értelemben, hogy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x'_k - x^*}{x_k - x^*} = 0$$

Bizonyítás

Legyen $\varepsilon_k := x_k - x^*$.

$$\text{Ekkor} \quad (6) \quad \implies \quad \varepsilon_{k+1} = (\alpha + \delta_k) \varepsilon_k \quad (7)$$

Vizsgáljuk (5) - öt:

$$x_{k+1} - x_k = (x_{k+1} - x^*) - (x_k - x^*) = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k \stackrel{(7)}{=} \varepsilon_k [(\alpha - 1) + \delta_k]$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k &= (x_{k+2} - x^*) - (2x_{k+1} - 2x^*) + (x_k - x^*) = \varepsilon_{k+2} - 2\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k \stackrel{(7)}{=} \\ &= \varepsilon_{k+1}(\alpha + \delta_{k+1}) - 2(\alpha + \delta_k)\varepsilon_k + \varepsilon_k = \varepsilon_k(\alpha + \delta_k)(\alpha + \delta_{k+1}) - 2\varepsilon_k(\alpha + \delta_k) + \varepsilon_k = \varepsilon_k [(\alpha - 1)^2 + \mu_k], \end{aligned}$$

ahol μ_k a többi tagot tartalmazza, amelyekben δ_k, δ_{k+1} szerepel. $\mu_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$

$$\text{Ezeket figyelembe véve} \quad (5) \quad \implies \quad x'_k - x^* = (x_k - x^*) - \frac{\varepsilon_k^2 [(\alpha - 1) + \delta_k]^2}{\varepsilon_k [(\alpha - 1)^2 + \mu_k]}$$

$$\implies \quad x'_k - x^* = \varepsilon_k \left[1 - \frac{[(\alpha - 1) + \delta_k]^2}{(\alpha - 1)^2 + \mu_k} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{x'_k - x^*}{x_k - x^*} = 1 - \frac{[(\alpha - 1) + \delta_k]^2}{(\alpha - 1)^2 + \mu_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

■

6.7. AITKEN - STEFFENSEN TRANSZFORMÁCIÓ

Tekintsük az $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ iterációs sorozatot, amely az $f(x) = 0$ egyenlet x^* megoldásához tart. Képezzük a következő transzformált sorozatot:

$$\begin{array}{llll} x_0 & x_1 = x_0 - \frac{(y_0 - x_0)^2}{z_0 - 2y_0 + x_0} & x_2 = x_1 - \frac{(y_1 - x_1)^2}{z_1 - 2y_1 + x_1} & \dots \\ y_0 = \Phi(x_0) & y_1 = \Phi(x_1) & y_2 = \Phi(x_2) & \dots \\ z_0 = \Phi(y_0) & z_1 = \Phi(y_1) & z_2 = \Phi(y_2) & \dots \end{array}$$

$$(8) \quad \boxed{x_k = x_{k-1} - \frac{(y_{k-1} - x_{k-1})^2}{z_{k-1} - 2y_{k-1} + x_{k-1}}}$$

Állítás

Ha az $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ iterációs sorozat lineárisan konvergál x^* - hoz, akkor a (8) sorozat legalább másodrendben konvergál x^* - hoz $(\Phi'(x^*) \neq 0)$.

6.8. BECSLÉS POLINOM GYÖKEINEK ELHELYEZKEDÉSÉRE

Legyen

$$f(x) = 0 \quad \text{helyett most} \quad P_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{P_n(x_n)}{P'_n(x_n)}$$

a Newton - módszer polinomokra.

Tétel

Tekintsük a $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ polinomot,

és legyen $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ és

$$A := \max \{|a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \dots, |a_0|\},$$

$$B := \max \{|a_n|, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|\}.$$

Ekkor a $P_n(x)$ polinom gyökeinek elhelyezkedésére igaz a következő becslés:

$$0 < \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} < |x_k| < 1 + \frac{A}{|a_n|}$$

Bizonyítás

Vizsgáljuk $P_n(x)$ - et $|x| > 1$ esetén. $P_n(x)$ - et rendezve:

$$P_n(x) - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0 = a_n x^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & |P_n(x)| + |a_{n-1}x^{n-1}| + \dots + |a_1x| + |a_0| \geq |a_n| \cdot |x|^n \geq |a_n| |x|^n - A(|x|^{n-1} + \dots + |x| + 1) = \\ = & |a_n| \cdot |x|^n - A \frac{|x|^{n-1} - 1}{|x| - 1} > |a_n| \cdot |x|^n - A \frac{|x|^n}{|x| - 1} = |x|^n \left(|a_n| - A \frac{1}{|x| - 1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Legyen } x_k \text{ a polinom gyöke} & \Rightarrow |P_n(x_k)| = 0 \Rightarrow |a_n| - \frac{A}{|x_k| - 1} < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & |a_n| < \frac{A}{|x_k| - 1}, \quad |a_n| \cdot |x_k| - |a_n| < A, \quad |x_k| < 1 + \frac{A}{|a_n|} \end{aligned}$$

Tehát a $P_n(x) = 0$ egyenlet gyökei a komplex számsík $R = 1 + \frac{A}{|a_n|}$ sugarú nyílt körlemezén helyezkednek el, speciálisan a valós gyökök a $(-R, R)$ intervallumban.

Alsó becslés :

Mivel $a_0 \neq 0 \Rightarrow$ a 0 nem gyöke a $P_n(x)$ polinomnak. Ezért, ha x_k a $P_n(x)$ polinom gyöke, akkor $\frac{1}{x_k}$ a $P_n(x)$ úgynevezett reciprok polinomjának a gyöke lesz, ahol a reciprok polinom:

$$\tilde{P}_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Tekintsük:

$$P_n(x_k) = a_n x_k^n + a_{n-1} x_k^{n-1} + \dots + a_1 x_k + a_0 = x_k^n \left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{x_k} + \dots + a_1 \frac{1}{x_k^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x_k^n} \right) = 0$$

$$\implies \tilde{P}_n \left(\frac{1}{x_k} \right) = 0 \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{x_k} \text{ a } \tilde{P}_n \text{ reciprok polinom gyöke.}$$

Most alkalmazzuk a felső becslést a reciprok polinom gyökeire.

$$\left| \frac{1}{x_k} \right| < 1 + \frac{B}{|a_0|} \implies r := \frac{1}{1 + \frac{B}{|a_0|}} < |x_k|$$

A negatív valós gyökök a $[-R, -r]$, a pozitív valós gyökök az $[r, R]$ intervallumban helyezkednek el.

■

6.9. NEWTON - MÓDSZER POLINOMOKRA

$$\text{Legyen } f(x) = 0 \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\boxed{P_n(x) = 0}$$

Ha polinomokra alkalmazzuk a Newton - módszert, akkor a feladat $P_n(x_0)$ és $P'_n(x_0)$ helyettesítési értékek meghatározása.

(★) $P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x) + b_0$ alakban írható, ugyanis $P_n(x)$ - re a Taylor - formulát x_0 - ban felírva:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P'_n(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x) + P_n(x_0), \quad \text{ahol}$$

$$Q_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1 \quad \text{és} \quad \boxed{P_n(x_0) = b_0}$$

Q_{n-1} - et (★) - ba írva $\implies$

$$\begin{aligned} \implies P_n(x) &= (x - x_0) (b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1) + b_0 = \\ &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 - b_n x_0 x^{n-1} - b_{n-1} x_0 x^{n-2} - \dots - b_1 x_0 = \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - b_n x_0) x^{n-1} + \dots + (b_1 - b_2 x_0) x + (b_0 - b_1 x_0) \end{aligned}$$