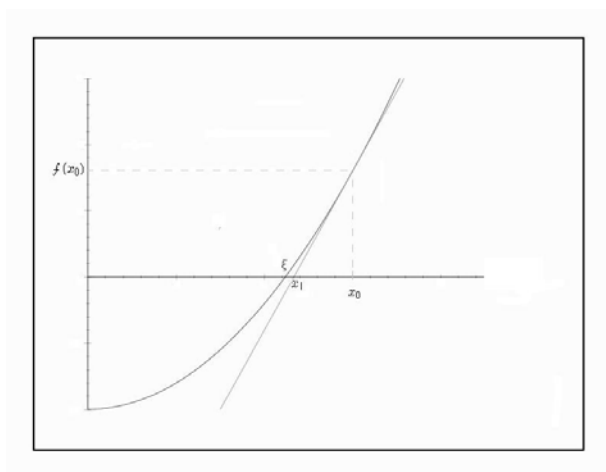


Newton-módszer

Ötlet:

A k -adik lépésben f -et közelítsük az $(x_k, f(x_k))$ ponton átmenő $f'(x_k)$ meredekségű egyenessel (érintő). x_{k+1} az egyenes és az x -tengely metszéspontja.



$$\begin{aligned}
 y - f(x_k) &= f'(x_k)(x - x_k) \\
 -f(x_k) &= f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\
 -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &= x_{k+1} - x_k \\
 &\Downarrow \\
 x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}
 \end{aligned}$$

8. Tétel. Monoton konvergencia

Legyen $f \in \mathcal{C}_{[a,b]}^2$ és

1. $\exists x^* \in [a, b] : f(x^*) = 0$ (az ábrán ξ)
2. f' és f'' állandó előjelű (> 0 , vagy < 0).
3. $x_0 \in [a, b]$ -re $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Ekkor az x_0 -ból indított Newton-módszer monoton konvergál az x^* gyökhöz.

Bizonyítás. Csak az $f' > 0$, $f'' > 0$ esetet nézzük, a többi analóg módon bizonyítható. Írjuk fel az f függvény x_k körüli Taylor-polinomját másodrendű maradéktaggal.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x - x_k)^2 = \\
 &= e_k(x) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x - x_k)^2,
 \end{aligned}$$

ahol e_k az érintő egyenes. Az $x = x_k$ helyen:

$$f(x_{k+1}) = \underbrace{e_k(x_{k+1})}_0 + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x - x_k)^2 > 0 \quad (*)$$

$f(x_0) > 0$ a 3. feltétel miatt, tehát $f(x_k) > 0 \forall k$ -ra. Így az $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} < x_k \Rightarrow x_k$ monoton fogyó sorozat. Az 1. feltételből $0 = f(x^*) < f(x_k) \Rightarrow x^* \leq x_k$, mivel f szigorúan monoton növekvő, tehát x_k alulról korlátos. Mivel x_k monoton fogyó és alulról korlátos, konvergens.

$$\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

$k \rightarrow \infty$ mellett (*) egyenlet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{k+1}) = f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f''(\xi_k)}{2} (x_{k+1} - x_k)^2 = 0,$$

mert $\frac{f''(\xi_k)}{2}$ korlátos és $x_{k+1} - x_k \rightarrow 0$, mert x_k Cauchy-sorozat. Az f szigorú monotonitása miatt $f(x^*) = f(\alpha) = 0 \Rightarrow x^* = \alpha$. ■

9. Tétel. Lokális konvergencia

Legyen $f \in C_{[a,b]}^2$ és

1. $\exists x^* \in [a, b] : f(x^*) = 0$ (az ábrán ξ)
2. $f'(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$
3. $m_1 := \inf_{x \in [a,b]} |f'(x)| > 0$
4. $M_2 := \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| < \infty$
5. $x_0 \in [a, b] : |x_0 - x^*| < r := \min \frac{2m_1}{M_2}; |x^* - a|; |x^* - b|,$

akkor az x_0 -ból indított Newton-módszer konvergál az x^* gyökhöz és a konvergencia rendje 2.

Bizonyítás. Az f x_k körüli Taylor-sorfejtéséből x^* helyel:

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}(x^* - x_k)^2$$

$\varepsilon_k := x_k - x^*$ jelöléssel

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2}\varepsilon_k^2 \quad | : f'(x_k)$$

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (x^* - x_k) + \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\varepsilon_k^2$$

$$\varepsilon_{k+1} = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{x_{k+1}} - x^* = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\varepsilon_k^2$$

Legyen $M := \frac{M_2}{2m_1}$, így

$$|\varepsilon_{k+1}| \leq M \cdot |\varepsilon_k|^2 \quad (**)$$

Teljes indukcióval belátjuk, hogy $|x_k - x^*| < r$, minden k -ra.
 $|x_0 - x^*| < r$ az 5. feltétel miatt.