

## 2.4. Vektor és mátrixnormák

A következőkben összefoglaljuk a témakörhöz felhasználásra kerülő már tanult ismeretanyagot is.

**2.2. Definíció.** A  $\|\cdot\|: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}$  a valós vagy komplex számok halmazát jelöli) többváltozós függvényt vektornormának nevezzük, ha teljesülnek a következő feltételek.

- 1)  $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ -re.
- 2)  $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$ .
- 3)  $\|l \cdot \underline{x}\| = |l| \cdot \|\underline{x}\| \quad \forall l \in \mathbb{K}, \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ -re.
- 4)  $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$ -re ( $\Delta$ -egyenlőtlenség).

**2.6. Tétel.** (A különbségre vonatkozó  $\Delta$ -egyenlőtlenség)

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \geq \|\underline{x}\| - \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{K}^n$$

**2.7. Tétel.** (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség)

Legyen  $V$  euklideszi tér.  $\|\underline{x}\| := \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$  a skaláris szorzatból származtatott vektornorma.

Ekkor

$$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \cdot \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in V$$

**2.8. Tétel.** A következő formulák vektornormát definiálnak  $\mathbb{K}^n$ -en.

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\|_1 &:= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|\underline{x}\|_2 &:= \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = (\underline{x}^* \underline{x})^{1/2} \text{ (euklideszi vektornorma)} \\ \|\underline{x}\|_\infty &:= \max_{i=1}^n |x_i| \end{aligned}$$

**2.3. Definíció.** A  $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$  vektornormákat ekvivalens normáknak nevezzük,

ha  $\exists c_1, c_2 > 0$ , hogy  $\forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ -re

$$c_1 \cdot \|\underline{x}\|_A \leq \|\underline{x}\|_B \leq c_2 \cdot \|\underline{x}\|_A.$$

**2.9. Tétel.** Az  $\|\underline{x}\|_1, \|\underline{x}\|_2$  és  $\|\underline{x}\|_\infty$  vektornormák ekvivalensek, azaz  $\forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ -re

$$\begin{aligned} \|\underline{x}\|_\infty &\leq \|\underline{x}\|_1 \leq n \cdot \|\underline{x}\|_\infty \\ \|\underline{x}\|_\infty &\leq \|\underline{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \cdot \|\underline{x}\|_\infty \\ \|\underline{x}\|_2 &\leq \|\underline{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|\underline{x}\|_2. \end{aligned}$$

A becslések élesek, azaz minden egyenlőtlenséghez  $\exists \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ , melyre az egyenlőséggel teljesül.

**2.10. Tétel.** A vektornorma folytonos függvény.

**2.3. Definíció.** A  $\|\cdot\|: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $\mathbb{K}$  a valós vagy komplex számok halmazát jelöli,  $n \in \mathbb{N}$ ) többváltozós függvényt mátrixnormának nevezzük, ha teljesülnek rá a következő feltételek.

- 1)  $\|A\| \geq 0 \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re.
- 2)  $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ .
- 3)  $\|I \cdot A\| = |I| \cdot \|A\| \quad \forall I \in \mathbb{K}, \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re.
- 4)  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re ( $\Delta$ -egyenlőtlenség).
- 5)  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re.

**2.4. Definíció.** Az  $\|\cdot\|_i$  és a  $\|\cdot\|_j$  mátrixnormákat ekvivalens normáknak nevezzük,

ha  $\exists c_1, c_2 > 0$ , hogy  $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re

$$c_1 \cdot \|A\|_i \leq \|A\|_j \leq c_2 \cdot \|A\|_i.$$

**2.11. Tétel.** (Mátrixnorma konstrukciója vektornormából.)

Legyen  $\|\cdot\|$  egy tetszőleges vektornorma. Ekkor  $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re az

$$\|A\| := \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$$

alakban definiált mennyiség kielégíti a mátrixnorma tulajdonságait.

A továbbiakban indukált vagy természetes mátrixnormának nevezzük.

**Bizonyítás.** Az 1) 2) 3) 4) feltétel bizonyítása triviális, a megfelelő vektornorma tulajdonságokból következik. Csak az 5) feltétel teljesülését bizonyítjuk.

Ha  $B = 0$ , akkor 2) miatt  $\|B\| = 0$ , másrészt  $A \cdot B = 0$ -ből ugyanígy  $\|A \cdot B\| = 0$ , tehát az állítás igaz.

Ha  $B \neq 0$ , akkor

$$\sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A B \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \sup_{\substack{\underline{x} \neq \underline{0} \\ B \underline{x} \neq \underline{0}}} \frac{\|A(B \underline{x})\|}{\|B \underline{x}\|} \cdot \frac{\|B \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \sup_{B \underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A(B \underline{x})\|}{\|B \underline{x}\|} \cdot \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|B \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Gondoljuk végig a felső határra vonatkozó becsléseket. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

**2.12. Tétel.** A fenti indukált normát az alábbi alakban is felírhatjuk.

$$\|A\| = \sup_{\|\underline{x}\|=1} \|A\underline{x}\|.$$

**Bizonyítás.** Tetszőleges  $\underline{x} \neq 0$  vektorra

$$\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\underline{x}\| \cdot \left\| A \left( \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right) \right\|}{\|\underline{x}\|} = \left\| A \left( \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \right) \right\|.$$

Az  $\underline{y} := \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$  helyettesítéssel  $\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \|A\underline{y}\|$ , ahol  $\|\underline{y}\| = 1$ .

**2.5. Definíció.** Ha egy vektor és mátrixnormára az

$$\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|, \quad \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}, \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n \text{-re}$$

teljesül, akkor illeszkedő normáknak nevezzük őket.

**2.13. Tétel.** Az indukált mátrixnormák illeszkednek az őket indukáló vektornormához.

**Bizonyítás.**  $\|A\| = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$ -ből következik, hogy  $\|A\| \geq \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}, \underline{x} \neq \underline{0}$ -ra.

Innen  $\|A\| \cdot \|\underline{x}\| \geq \|A\underline{x}\|$ . Az  $\underline{x} = \underline{0}$  esetre  $\|\underline{x}\| = 0$  és  $\|A\underline{x}\| = 0$  miatt igaz az állítás.

**2.14. Tétel.** Az  $\|\underline{x}\|_1, \|\underline{x}\|_2$  és  $\|\underline{x}\|_\infty$  vektornormák rendre a következő mátrixnormákat indukálják.  $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re

$$\|A\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{”oszlopnorma”}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad \text{”sornorma”}$$

$$\|A\|_2 = \max_{i=1}^n \left( l_i(A^* A) \right)^{1/2} \quad \text{”spektrálnorma”,}$$

ahol  $l_i(A^* A)$  az  $A^* A$  mátrix  $i$ . sajátértékét jelöli.

**Bizonyítás.** Csak az 1-es normára bizonyítjuk, a többit lásd a Dringó László: Numerikus analízis jegyzetben.

$$\begin{aligned} \|A\underline{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(A\underline{x})_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \\ &= \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}| \cdot \|\underline{x}\|_1 \end{aligned}$$

Tehát  $\underline{x} \neq \underline{0}$ -ra  $\frac{\|A\underline{x}\|_1}{\|\underline{x}\|_1} \leq \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$ .

Mutassuk meg, hogy van olyan vektor, melyre felveszi a szuprérum értékét, vagyis az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Vizsgáljuk meg az  $\underline{e}_p$  egységvektorra az

egyenlőtlenséget.  $(\underline{e}_p)_i = \delta_{ip}$  Kronecker szimbólum, ahol a  $p$  indexre  $\sum_{i=1}^n |a_{ip}| = \max_{k=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ik}|$ .

Ekkor  $\|\underline{e}_p\|_1 = 1$ ,  $\|A\underline{e}_p\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ip}| = \|A\|_1$ .

Ezzel a tétel 1-es normára vonatkozó részét bebizonyítottuk.

**2.6. Definíció.** Az  $\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$  mennyiséget Frobenius normának nevezzük.

**2.15. Tétel.** A 2.6. definícióban felírt mennyiség kielégíti a mátrix normára tett feltételeket.

**2.7. Definíció.** A  $r(A) = \max_{i=1}^n |l_i(A)|$  mennyiséget az  $A$  mátrix spektrálsugarának nevezzük.

**2.8. Következmény.**  $\|A\|_2 = (r(A^*A))^{1/2}$

## Kidolgozott példák.

**1. Példa.** Indukált mátrixnorma esetén  $\|I\| = 1$ . **Ui:**  $\|I\| = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|I\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = 1$ .

**2. Példa.**  $\|A\|_F$  nem indukált mátrixnorma. **Ui:**  $\|I\|_F = \sqrt{n}$ .

**3. Példa.**  $A^*A$  önadjungált (szimmetrikus) mátrix, melynek sajátértékei nemnegatívak.

**Megoldás.**  $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ , tehát  $A^*A$  sajátértékei valósak.

Legyen az  $\underline{v} \neq \underline{0}$  az  $A^*A$  mátrix  $l$  sajátértékéhez tartozó sajátvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} A^*A\underline{v} &= l\underline{v} \\ \underline{v}^* A^*A\underline{v} &= l\underline{v}^* \underline{v} \\ \frac{(\underline{A\underline{v}})^*(\underline{A\underline{v}})}{\underline{v}^* \underline{v}} &= l \end{aligned}$$

Ahonnán  $(\underline{A\underline{v}})^*(\underline{A\underline{v}}) \geq 0$  és  $\underline{v}^* \underline{v} > 0$  miatt  $l \geq 0$  következik.

**4. Példa.** Legyen  $l$  az  $A$  mátrix egy sajátértéke. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára  $|l| \leq \|A\|$ .

**Megoldás.** Legyen az  $\underline{v} \neq \underline{0}$  az  $A$  mátrix  $l$  sajátértékéhez tartozó sajátvektor. Ekkor

$$\begin{aligned} A\underline{v} &= l\underline{v} \\ A\underline{v\underline{v}^*} &= l\underline{v\underline{v}^*} \\ \|A\| \cdot \|\underline{v\underline{v}^*}\| &\geq \|A\underline{v\underline{v}^*}\| = |l| \cdot \|\underline{v\underline{v}^*}\|. \end{aligned}$$

Mivel  $\underline{v\underline{v}^*} \neq \underline{0}$ ,  $\|\underline{v\underline{v}^*}\| \neq 0$ , így  $|l| \leq \|A\|$ .

**2.9. Következmény.**  $r(A) \leq \|A\|$  bármely mátrixnormára.

**5. Példa.** Bizonyítsuk be, hogy ha  $A$  normális mátrix ( $A^*A = AA^*$ ), akkor

$$\|A\|_2 = \max_{i=1}^n |l_i(A)| = r(A).$$

**Megoldás.** Ha  $A$  normális mátrix, akkor  $\exists Q$  unitér (ortogonális) mátrix, melyre

$$Q^*AQ = D = \text{diag}(l_i(A)).$$

$$A = QDQ^* \text{ és } A^*A = (QDQ^*)^*(QDQ^*) = QD^*DQ^*.$$

Tehát  $A^*A$  és  $D^*D$  hasonló mátrixok, a sajátértékeik megegyeznek,

$$l_i(A^*A) = l_i(D^*D) = |l_i(A)|^2. \text{ Így } r(A^*A) = r(A)^2.$$

**6. Példa.** A Frobenius normára igazak a következő állítások. Tetszőleges  $\forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ -re

- a)  $\|A^*\|_F = \|A\|_F$
- b)  $\|A\|_F^2 = \text{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^n (A^* A)_{ii}$
- c)  $Q$  unitér(ortogonális) mátrixra  $\|Q\|_F = \sqrt{n}$  és  

$$\|QA\|_F = \|A\|_F = \|AQ\|_F,$$
- d)  $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n l_i(A^* A)$
- e)  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$  ( $\|A\|_2$  és a  $\|A\|_F$  mátrixnorma ekvivalens.)
- f)  $\|A\|_2$  vektornorma és a  $\|A\|_F$  mátrixnorma illeszkedik, azaz  

$$\|A\underline{x}\|_2 \leq \|A\|_F \cdot \|\underline{x}\|_2, \forall A \in \mathbb{K}^{n \times n}, \forall \underline{x} \in \mathbb{K}^n.$$

**Megoldás.**

a) Triviális  $A^*$  definíciójából.

b)  $(A^* A)_{ii} = \sum_{j=1}^n \overline{a_{ji}} \cdot a_{ji} = \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^2$ , innen  $\text{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^2 = \|A\|_F^2$ .

c)  $\|Q\|_F^2 = \text{tr}(Q^* Q) = \text{tr}(I) = n$ .

A b) állítást felhasználva  $\|QA\|_F^2 = \text{tr}((QA)^* (QA)) = \text{tr}(A^* Q^* QA) = \text{tr}(A^* A) = \|A\|_F^2$ .

Ezt az eredményt és a)-t felhasználva kapjuk, hogy

$$\|AQ\|_F = \|(AQ)^*\|_F = \|Q^* A^*\|_F = \|A^*\|_F = \|A\|_F.$$

d)  $A^* A$  önadjungált (szimmetrikus), ezért  $\exists Q$  unitér (ortogonális) mátrix, melyre  $Q^* A^* A Q = D$ , azaz  $(AQ)^* (AQ) = D$ , ahol  $d_{ii} = l_i(A^* A)$ .

Az a) és a c) állítás második részét felhasználva

$$\text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n l_i(A^* A) = \text{tr}((AQ)^* (AQ)) = \|AQ\|_F^2 = \|A\|_F^2.$$

e)  $\|A\|_2^2 = \max_{i=1}^n l_i(A^* A) \leq \sum_{i=1}^n l_i(A^* A) = \|A\|_F^2 \leq n \cdot \max_{i=1}^n l_i(A^* A) = n \cdot \|A\|_2^2$ ,

ahol felhasználtuk a sajátértékek (3. példában bizonyított) nemnegativitását.

**7. Példa.** A 2-es normára igazak a következő állítások.

Ha  $Q$  unitér(ortogonális) mátrix és  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  tetszőleges mátrix, akkor

- a)  $\|Q\underline{x}\|_2 = \|\underline{x}\|_2$
- b)  $\|Q\|_2 = 1$
- c)  $\|QA\|_2 = \|A\|_2 = \|AQ\|_2$ .

**Megoldás.**

a)  $(Q\underline{x})^* (Q\underline{x}) = \underline{x}^* \underline{x}$ .

b)  $\|Q\|_2 = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|Q\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = 1$ .

$$\text{c) } \|QA\|_2 = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|QA\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \|A\|_2.$$

$$\text{Továbbá } \|AQ\|_2 = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|AQ\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \sup_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|AQ\underline{x}\|_2}{\|Q\underline{x}\|_2} = \sup_{\underline{y} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{y}\|_2}{\|\underline{y}\|_2} = \|A\|_2, \text{ mivel } \underline{x} \neq \underline{0} \Leftrightarrow \underline{y} \neq \underline{0}.$$