

Itt $Q_2^T Q_1$ ortogonális mátrixok, ezért

$$V^T V = Q_1^T Q_2 Q_2^T Q_1 = I$$

Tehát $V = D = \text{diag}(d_{ii})$, ahol $d_{ii} = \pm 1$.

Mivel $V = R_2 R_1^{-1}$ is teljesül, az állítás bizonyított. ■

3. VEKTORNORMÁK, MÁTRIXNORMÁK

3.1. VEKTORNORMÁK

Definíció :

Vektornorma :

Legyen X n - dimenziós vektortér $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ test felett.

A norma egy $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \|\underline{\mathbf{x}}\|$ leképezés a következő tulajdonságokkal:

$$\forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} :$$

$$1. \quad \|\underline{\mathbf{x}}\| \geq 0, \quad \|\underline{\mathbf{x}}\| = 0 \iff \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}},$$

$$2. \quad \|\lambda \underline{\mathbf{x}}\| = |\lambda| \|\underline{\mathbf{x}}\|,$$

$$3. \quad \|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\| \quad \triangle \text{ egyenlőtlenség.}$$

Következmény

$$(*) \quad \left| \|\underline{\mathbf{x}}\| - \|\underline{\mathbf{y}}\| \right| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}\|, \quad \forall \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in X$$

Az $(X, \|\cdot\|)$ párt normált vektortérnek nevezzük.

Leggyakoribb vektornormák :

$$\text{Euklideszi norma:} \quad \|\underline{\mathbf{x}}\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in X, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Az $1, 2, \infty$ normákat használjuk leggyakrabban.

Tétel

$\underline{x} \in X$, $\dim X = n$.

Az $\|\underline{x}\|$ vektornorma az $\underline{x}$ vektor $x_1, \dots, x_n$ koordinátáinak folytonos függvénye.

Bizonyítás

Ezt $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ - re és $\|\cdot\|_\infty$ normára bizonyítjuk.

$$\|\underline{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \underline{x} := (x_1, \dots, x_n)$$

Legyen $\underline{z} := (z_1, \dots, z_n)$ és tekintsük $\underline{x} + \underline{z}$, $\underline{x} \in X$ vektort.

$$(\star) \quad \implies \quad \left| \|\underline{x} + \underline{z}\|_\infty - \|\underline{x}\|_\infty \right| \leq \|(\underline{x} + \underline{z}) - \underline{x}\|_\infty = \|\underline{z}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$$

$$f(x_n) \rightarrow f(y), \quad \text{ha} \quad x_n \rightarrow y$$

Tehát, ha $\underline{z} \rightarrow \underline{0}$ akkor $\max_{1 \leq i \leq n} |z_i| \rightarrow 0$.

Mivel végesdimenziós vektortérben bármely két vektornorma ekvivalens egymással (lásd később), ezért tetszőleges normára a folytonosság igaz. ■

Definíció :

Az X komplex vektorteret a $\mathbb{C}$ test felett komplex Euklideszi térnek nevezzük, ha létezik X - en $(\underline{x}, \underline{y}) : X \rightarrow \mathbb{C}$ leképezés tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in X$ - re, amit az $\underline{x}, \underline{y}$ elemek skaláris szorzatának nevezzük és amelyre teljesül, hogy $\forall \underline{x}, \underline{y} \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} :$

1. $(\underline{x}, \underline{x}) \geq 0$ valós szám, $(\underline{x}, \underline{x}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{0}$,
2. $(\underline{x}, \underline{y}) = \overline{(\underline{y}, \underline{x})}$,
3. $(\lambda \underline{x}, \underline{y}) = \lambda (\underline{x}, \underline{y})$ első tényezőre nézve homogén,
4. $(\underline{x}_1 + \underline{x}_2, \underline{y}) = (\underline{x}_1, \underline{y}) + (\underline{x}_2, \underline{y})$ első tényezőre nézve disztributív.

Következmény

- a.) $(\underline{x}, \lambda \underline{y}) = \overline{\lambda} (\underline{x}, \underline{y})$,
- b.) $(\underline{x}, \underline{y}_1 + \underline{y}_2) = (\underline{x}, \underline{y}_1) + (\underline{x}, \underline{y}_2)$ második tényezőre nézve disztributív.

Konkrét példa :

Legyen $\mathbb{C}^n$ komplex vektortér $\mathbb{C}$ felett, $\underline{\mathbf{x}} := (x_1, \dots, x_n)$.

Skaláris szorzat:

$$(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) := \overline{\underline{\mathbf{x}}}^T \underline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i \quad \text{és} \quad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$$

Erre a **3.** axióma helyett $(\underline{\mathbf{x}}, \lambda \underline{\mathbf{y}}) = \lambda (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})$ érvényes.

További tulajdonságok :

Ha van skaláris szorzat, akkor X - en lehet normát definiálni:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| := \sqrt{(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}})}, \quad \text{erre teljesülnek a norma axiómái.}$$

Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz egyenlőtlenség :

$$\boxed{|\underline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| \cdot \|\underline{\mathbf{y}}\|} \quad \forall \quad \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in X$$

3.2. MÁTRIXNORMÁK**Definíció :**

Legyen $\mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} := \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ az $(n \times n)$ - es mátrixok tere. $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Az $\|A\| : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést mátrixnormának nevezzük, ha $\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ - ra teljesül, hogy:

1. $\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0 \iff A = 0$,
2. $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$ homogén,
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ $\triangle$ egyenlőtlenség,
4. $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

A mátrixokat mint leképezéseket (operátorokat) tekintjük.

Legyen $\mathbb{K}^{m \times n}$ valós vagy komplex elemű $(m \times n)$ - es mátrixok $(m \cdot n)$ - dimenziós vektortere $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett, és $(X, \|\cdot\|_x)$ n - dimenziós, $(Y, \|\cdot\|_y)$ m - dimenziós vektortér.

Egy $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ - es mátrix egy lineáris leképezést definiál X -ből Y -ba.

Tudjuk, hogy az $X \rightarrow \|A\underline{\mathbf{x}}\|_y$ leképezés folytonos függvény az $\{\underline{\mathbf{x}} \in X : \|\underline{\mathbf{x}}\|_x = 1\}$ kompakt (korlátos és zárt) halmazon. A kompaktságot itt az $\|\cdot\|_x$ norma szerint értjük.

Definíció :

$$\text{Az } \|A\| := \sup_{\underline{\mathbf{x}} \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A\underline{\mathbf{x}}\|_y}{\|\underline{\mathbf{x}}\|_x} = \max_{\|\underline{\mathbf{x}}\|_x = 1} \|A\underline{\mathbf{x}}\|_y \quad \text{véges számot}$$

vektornorma által indukált mátrixnormának vagy természetes mátrixnormának is nevezik.

$$\left(\sup \right) \frac{\|A\underline{\mathbf{x}}\|_y}{\|\underline{\mathbf{x}}\|_x} = \left(\sup \right) \left\| A \left(\frac{\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|_x} \right) \right\|_y = \left(\sup_{\|\underline{\mathbf{y}}\|_x = 1} \right) \|A\underline{\mathbf{y}}\|_y = \max_{\|\underline{\mathbf{x}}\|_x = 1} \|A\underline{\mathbf{x}}\|_y$$

Következmény

A definícióból azonnal következik, hogy:

$$(\star) \quad \|A\underline{\mathbf{x}}\|_y \leq \|A\| \cdot \|\underline{\mathbf{x}}\|_x ,$$

$$\text{EZENTŰL:} \quad X = Y, \quad \|\cdot\|_x = \|\cdot\|_y =: \|\cdot\|$$

$$\text{Így } (\star) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|A\underline{\mathbf{x}}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{\mathbf{x}}\|} \quad (\star\star)$$

Állítás

A fent definiált természetes (indukált) mátrixnorma ($A \rightarrow \|A\|$ leképezés) tényleg norma, azaz teljesülnek a mátrixnorma axiómái.

Bizonyítás

A **2.** homogenitás és a **3.** $\triangle$ egyenlőtlenség nyilvánvalóak, közvetlenül következnek a vektornorma hasonló tulajdonságaiból.

$$\text{Az } \mathbf{1.} \quad \|A\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0 \quad \text{is triviálisan teljesül, mivel:}$$

$\Rightarrow$

$$(\star\star) \quad \Rightarrow \quad \|A\underline{\mathbf{x}}\| = 0 \quad \forall \quad \underline{\mathbf{x}} \in X \text{ - re,} \quad A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad A = 0$$



A definíció alapján $\|A\mathbf{x}\| = 0 \quad \forall \quad \|\mathbf{x}\| = 1 \text{ - re} \quad \implies \quad \|A\| = 0 .$

A 4. - hez vizsgáljuk:

$$\|AB\mathbf{x}\| \stackrel{(\star\star)}{\leq} \|A\| \cdot \|B\mathbf{x}\| \stackrel{(\star\star)}{\leq} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{\implies} \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

■

Megjegyzés :

i.) Nyilván: $\|I\| = 1$

ii.) A $C := \|A\|$ az a legkisebb állandó szám, amelyre teljesül, hogy

$$\|A\mathbf{x}\| \leq C \cdot \|\mathbf{x}\| , \quad \forall \quad \mathbf{x} \in X$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha $\mathbf{x}$ az a vektor, amelyre $\|A\mathbf{x}\|$ felveszi a maximális értékét.

iii.) $\mathbb{K}^{n \times n}$ - beli mátrixokra és a természetes normára érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\text{Ugyanis:} \quad \|AB\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|B\mathbf{x}\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

Innen: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ következik, mivel $\|AB\|$ a legkisebb olyan szám, amelyre $\|AB\mathbf{x}\| \leq C \cdot \|\mathbf{x}\|$

Voltak :

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| , \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Kérdés :

A fenti vektornormák milyen mátrixnormákat definiálnak?

Definíció :

Legyen $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ az A mátrix sajátértékei.

Ekkor a $\rho(A) := \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ számot az A mátrix spektrálsugarának nevezzük.

Jelölje $\|A\|_{1,2,\infty}$ az $\|\underline{x}\|_{1,2,\infty}$ vektornormák által indukált mátrixnormákat.

A definíció alapján: $\|A\|_1 := \max_{\|\underline{x}\|=1} \|A\underline{x}\|_1 = \sup_{\underline{x} \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A\underline{x}\|_1}{\|\underline{x}\|_1}$

Tétel

Legyen $\|\cdot\|_p$ az a mátrixnorma, amelyet a $\|\cdot\|_p$ vektornorma indukál a $\mathbb{K}^{n \times n}$ mátrix-téren. Ekkor:

1. $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$, Maximum oszlop-összeg norma
2. $\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$, Maximum sor-összeg norma
3. $\|A\|_2 := \sqrt{\rho(\bar{A}^T A)}$, Spektrálnorma

Bizonyítás

1.

$$\begin{aligned} \|A\underline{x}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \left(\left| \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \right| \right) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_i| \right) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |x_i| \\ \Rightarrow \|A\|_1 &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy a k - adik oszlop olyan, amelyre teljesül, hogy:

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Tekintsük az $\underline{e}_k$ egységvektort. Ekkor:

$$\|A\underline{e}_k\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Mivel $\|\underline{e}_k\|_1 = 1 \Rightarrow \|A\|_1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \Rightarrow$ Tehát az egyenlőség fennáll!

2.

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \right| \right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

$$\Rightarrow \|A\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

Belátjuk, hogy itt egyenlőség is fennáll. Tegyük fel, hogy a k - adik sor olyan, amelyre teljesül, hogy:

$$\|A\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Legyen $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{K}^n$, amelyre $\hat{x}_j := \begin{cases} 1 & \text{ha } a_{kj} = 0 \\ \frac{\bar{a}_{kj}}{|a_{kj}|} & \text{egyébként} \end{cases}$

$$\text{Ekkor } \|\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = 1, \quad a_{kj} \cdot \bar{a}_{kj} = |a_{kj}|^2 \quad \Rightarrow \quad \|A\hat{\mathbf{x}}\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \|A\|_\infty$$

3.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(\bar{A}^T A)}$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|_2 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n \quad \|\mathbf{y}\|_2 = 1 \quad \text{és} \quad \|A\mathbf{y}\|_2 = \|A\|_2$$

$$\text{úgy, hogy: } \|A\|_2^2 = \bar{\mathbf{y}}^T \bar{A}^T A \mathbf{y}$$

$$\bar{A}^T A \text{ Hermitikus mátrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{(\bar{A}^T A)}^T = \bar{A}^T A$$

Mivel $\bar{A}^T A$ Hermitikus $\Rightarrow \exists$ az $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n$ sajátvektoroknak teljes ortonormált rendszere.

$$\|\mathbf{x}^i\|_2 = 1, \quad \left(\overline{\mathbf{x}^i}\right)^T \cdot \mathbf{x}^j = \delta_{ij}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ a nekik megfelelő sajátértékek.}$$

Vizsgáljuk :

$$0 \leq \|A\mathbf{x}^i\|_2^2 = \bar{\mathbf{x}^i}^T \bar{A}^T A \mathbf{x}^i = \left(\overline{\mathbf{x}^i}\right)^T \cdot \lambda_i \mathbf{x}^i = \lambda_i \left(\overline{\mathbf{x}^i}\right)^T \mathbf{x}^i = \lambda_i$$

$$\Rightarrow \bar{A}^T A \text{ pozitív szemidefinit}$$

Írjuk fel $\underline{\mathbf{y}}$ - t a sajátvektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{\mathbf{x}}^i$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \|\underline{\mathbf{y}}\|_2^2 = \left(\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i (\underline{\mathbf{x}}^i)^T \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{\mathbf{x}}^j \right) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$$

Vizsgáljuk :

$$\left(\bar{A}^T A \underline{\mathbf{x}}^i = \lambda_j \underline{\mathbf{x}}^j \right)$$

$$\begin{aligned} \|A\|_2^2 &= \|A\underline{\mathbf{y}}\|_2^2 = \underline{\mathbf{y}}^T \bar{A}^T A \underline{\mathbf{y}} = \left(\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i (\underline{\mathbf{x}}^i)^T \right) \cdot \left(\bar{A}^T A \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{\mathbf{x}}^j \right) = \left(\sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i (\underline{\mathbf{x}}^i)^T \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \underline{\mathbf{x}}^j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \cdot \lambda_i \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right) \quad \Rightarrow \quad \|A\|_2^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = \rho(\bar{A}^T A) \end{aligned}$$

Itt egyenlőség is állhat, legyen ugyanis $\lambda_k = \rho(\bar{A}^T A)$, azaz a legnagyobb sajátértéke $\bar{A}^T A$ - nak.

A λ_k - hoz tartozó sajátvektor legyen $\underline{\mathbf{x}}^k$, $\|\underline{\mathbf{x}}^k\|_2 = 1$.

Vizsgáljuk :

$$\|A\|_2^2 \geq \|A\underline{\mathbf{x}}^k\|_2^2 = (\underline{\mathbf{x}}^k)^T \bar{A}^T A \underline{\mathbf{x}}^k = \lambda_k \underline{\mathbf{x}}^k = \lambda_k (\underline{\mathbf{x}}^k)^T \underline{\mathbf{x}}^k = \lambda_k = \rho(\bar{A}^T A),$$

$$\Rightarrow \quad \|A\|_2^2 \geq \rho(\bar{A}^T A)$$

$$\text{Így} \quad \Rightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(\bar{A}^T A)}$$

■

Definíció :

Az $\|\cdot\|_\alpha$ és $\|\cdot\|_\beta$ vektornormákat ekvivalensnek nevezzük, ha $\exists m, M \in \mathbb{R}^+$ állandók, hogy:

$$m \|\underline{\mathbf{x}}\|_\alpha \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|_\beta \leq M \|\underline{\mathbf{x}}\|_\alpha \quad \forall \underline{\mathbf{x}} \in X \text{ - re}$$

$$\text{Nyilván} \quad \Rightarrow \quad \exists r, R \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } r \|\underline{\mathbf{x}}\|_\beta \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|_\alpha \leq R \|\underline{\mathbf{x}}\|_\beta \quad r := \frac{1}{M} \quad R := \frac{1}{m}$$

Adott végesdimenziós vektortéren tetszőleges két norma ekvivalens egymással.
 Belátva azt, hogy egy tetszőleges norma ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ normával:

$$\begin{aligned} \|\underline{z}\|_\alpha &\leq M \|\underline{z}\|_\infty \rightarrow 0 \\ \downarrow \\ 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A mátrixoknak egy adott vektorterén az összes természetes mátrixnorma ekvivalens egymással (ekvivalenciareláció).

3.2.1. Korlátok a normákra

Néha nehéz kiszámolni egy mátrix természetes normáját, így hasznos, ha a normára felső korlátot tudunk találni. Jó példa erre az $\|A\|_2$ spektrálnorma, mivel itt $\overline{A}^T A$ legnagyobb sajátértékét kellene ismernünk.

Definíció :

Az $\|A\|$ mátrixnorma illeszkedik az $\|\underline{x}\|$ vektornormához, ha $\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\| \quad \forall \quad \underline{x} \in \mathbb{K}^n$.

Természetes mátrixnormákra láttuk, hogy illeszkednek az őket indukáló vektornormákhoz:

$$\|A\underline{x}\|_{1,2,\infty} \leq \|A\|_{1,2,\infty} \|\underline{x}\|_{1,2,\infty}$$

Megjegyzés :

Az $\|A\|$ természetes mátrixnorma az egyenlőtlenségben a legkisebb azon C állandók közül, amelyekre teljesül, hogy $\|A\underline{x}\| \leq C \|\underline{x}\|$.

Definíció :

Frobenius - mátrixnorma :

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{trace}(\overline{A}^T A)} \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

Állítás

$\|A\|_F$ mátrixnorma, és illeszkedik a $\|\cdot\|_2$ vektornormához.

Bizonyítás

Valóban, ugyanis $\sqrt{\text{trace}(\overline{A}^T A)} = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ úgy tekinthető, mint egy $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

vektor $\|\cdot\|_2$ euklideszi normája, ahol $\underline{\mathbf{y}}$ komponensei a_{ij} . Így **1 - 3.** axiómák teljesülnek, továbbá:

$$\begin{aligned} \|AB\|_F^2 &= \sum_{i,k=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right|^2 \leq \sum_{i,k=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_{jk}|^2 \right) \right] = \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j,k=1}^n |b_{jk}|^2 \right) = \|A\|_F^2 \cdot \|B\|_F^2 \end{aligned}$$

Mivel:

$$\|A\underline{\mathbf{x}}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right] = \|A\|_F^2 \cdot \|\underline{\mathbf{x}}\|_2^2 \implies$$

$\implies \|A\|_F$ illeszkedik az $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2$ vektornormához. Ez egy hasznos felső korlátot ad a $\|A\|_2$ mátrixnormára. ■

Állítás

A Frobenius - mátrixnorma nem természetes (nem vektornorma által indukált) mátrixnorma.

Bizonyítás

Minden természetes mátrixnormára $\|I\| = 1$, ami nyilvánvaló, ha az

$$\|A\| := \max_{\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}} \frac{\|A\underline{\mathbf{x}}\|}{\|\underline{\mathbf{x}}\|} = \max_{\|\underline{\mathbf{x}}\|=1} \|A\underline{\mathbf{x}}\| \quad \text{definíciót az } A = I \text{ - re alkalmazzuk.}$$

DE :

$$\|I\|_F = \sqrt{n} \implies n > 1 \text{ esetén ellentmondás.} \quad \text{■}$$