

Beadható házi feladatok I.

Numerikus Módszerek II. EA+GY
programtervező informatikus BSc

Beadási határidő: 1. ZH kezdete

1. Interpolálja az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvényt a $[-1, 1]$ intervallumon a $\{-1, 1\}$, a $\{-1, 0, 1\}$, a $\{-1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 1\}$, és a $\{-1, -\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, 1\}$ alappontokon. Adjon hibabecslést!
2. Tekintsük a $\{-1, 0, 1\}$ alappontrendszert és az $\{1, x^2, x^4\}$ függvényrendszert. Igazolja, hogy általában nem létezik egy adott függvénynek a megadott függvényrendszer szerinti interpolációs polinomja.
3. Adjon meg olyan P polinomot, amely eleget tesz a $P(0) = P'(0) = 1$, $P(-1) = P(1) = 2$, $P^{(2026)}(0) = 2026!$ feltételeknek.
4. Bizonyítsa be, hogy $n \geq 2$ esetén az $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ alappontokhoz tartozó $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n$ Lagrange alappolinomokra:
 - a) $\forall x \in (x_0, x_1) : \ell_0(x) + \ell_1(x) > 1$
 - b) $\forall x \in (x_1, x_2) : 0 < \ell_0(x) + \ell_1(x) < 1$
 - c)
$$\operatorname{sgn}(\ell_0(x) \cdot \ell_n(x)) = \begin{cases} 0, & x \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \\ (-1)^n, & x < x_0 \vee x > x_n \\ (-1)^{n+1}, & x \in [x_0, x_n] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \end{cases}$$
5. Legyen f egy n -edfokú polinom. Igazolja, hogy ekkor $\forall k > n$ esetén a k -adrendű osztott differenciára $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0$.
6. Igazolja az interpoláció hibaformulája segítségével, hogy az $f(x) = x^{n+1}$ függvény $x_0, x_1, \dots, x_n$ (különböző) alappontokhoz tartozó n -edrendű osztott differenciájára:
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^n x_k.$$
7. Tegyük fel, hogy P_n az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0, x_1, \dots, x_n$ (különböző) alappontokhoz tartozó interpolációs polinomja, $x_k \neq 0$ ($k = 0, \dots, n$), és $f(0) = P_n(0) = 0$. Igazolja, hogy ekkor $f[x_0, x_1, \dots, x_n, 0] = 0$.
8. Tegyük fel, hogy az $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ pontokra felírt természetes köbös spline egyben interpolációs polinom is. Mit mondhatunk ekkor ezen pontokról?