

Beadható házi feladatok II.

Numerikus Módszerek II. EA+GY
programtervező informatikus BSc

Beadási határidő: 2. ZH kezdete

1. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, és legyen $B := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & A \\ A^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$. Milyen összefüggés van B sajátértékei és A szinguláris értékei között?
2. Bizonyítsa be, hogy ha az $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixra $\text{rang}(A) = 1$, akkor
 - a) Az A mátrix 2-es és Frobenius normájára: $\|A\|_2 = \|A\|_F$
 - b) Az A mátrix általánosított inverze: $A^+ = \frac{A^T}{\|A\|_2^2}$
3. Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szinguláris, $b \in \mathbb{R}^n$, és tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása. Adjon képletet az egyenletrendszer összes megoldásának meghatározására, és igazolja az állítását.
4. Bizonyítsa be szinguláris felbontás segítségével, hogy az alábbi G Gauss-szűrő mátrix szeparábilis, azaz felírható $G = x \cdot y^T$ ($x, y \in \mathbb{R}^3$) alakban, viszont az L Laplace-szűrő mátrix nem.

$$G = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Mutassa meg, hogy a legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő egyenes illesztésének problémája eltolás-, de nem elforgatásinvariáns. (Azaz ha az eredeti pontokat eltoljuk a koordinátarendszerben, akkor az eltolt pontokra illesztett egyenes megkapható az eredeti pontokra illesztett egyenes eltolásával. Ugyanez viszont általában nem mondható el, ha az eredeti pontokat adott középpont körül elforgatjuk.)
6. Tekintsük a $4x - 2y - z = 1$ egyenletű síkot, és
 - a) Tükrözze az $(5, 1, 4)$ pontot a síkra, és határozza meg a pont tükörképét.
 - b) Tükrözze a $\{(3 - t, 4t - 1, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ egyenletű egyenest a síkra, és határozza meg az egyenes tükörképének az egyenletét.
7. Milyen kvadratúra formulát kapunk az $\int_0^1 f(x)dx$ integrál közelítésére az f függvény n -edfokú, 0 körüli Taylor-polinomja segítségével? Adjon hibabecslést! Hányadik fokig pontos a kapott formula?
8. Jelölje E_m az érintő, T_m a trapéz, S_m pedig a Simpson-szabályt. Igazolja, hogy

$$S_m = \frac{4T_{2m} - T_m}{3} = \frac{2E_m + T_m}{3}.$$