Bevezetés a programozáshoz I.

Feladatok

2011. január 15.

1. Alapfogalmak

1.1. példa: Írjuk fel az $A \times B$, $A \times C$, $(A \times B) \times C$, és $A \times B \times C$ halmazok elemeit, ha $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{p, q\}$!

1.2. példa: Legyen $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}.$$

a) Mi a reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?
b) Determinisztikus-e, illetve függvény-e a reláció?
c) Mi R 0., 2. hatványa, mi R inverze?
d) Mi a $\{4, 5\}$ halmaz inverz képe, illetve ősképe?
e) Hány eleme van R értékkészlete hatványhalmazának?

1.3. példa: Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz inverz képének képe és a H halmaz között?

1.4. példa: Legyen $R \subseteq A \times B$, $P, Q \subseteq B$. Hogyan lehetne jellemezni az $R^{-1}(P \cup Q)$ és az $R^{-1}(P \cap Q)$ halmazt az $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ halmaz segítségével?

1.5. példa: Legyenek $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

$$(G \circ F)^{(-1)} = F^{(-1)} \circ G^{(-1)}?$$

1.6. példa: Legyenek $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

$$\forall Y \subseteq C : (G \odot F)^{-1}(Y) = F^{-1}(G^{-1}(Y))?$$

1.7. példa: Legyen $I = \{piros, feh\acute{e}r, z\ddot{o}ld\}$, $A_{piros} = \{a, b\}$, $A_{feh\acute{e}r} = \{1, 2, 3\}$, $A_{z\ddot{o}ld} = \{x, y\}$, $J = \{piros, z\ddot{o}ld\}$,

$$A = \underset{i \in I}{\times} A_i$$

és

$$A = \underset{j \in J}{\times} A_j.$$

a) Írjuk föl az A elemeit.

b) Írjuk föl az A egy elemének projekcióját B-re.

1.8. példa: Legyen $H = \{1, 2, 8\}$, $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{x, y\}$ és

$$C = \underset{h \in H}{\times} A_h.$$

Ekvivalens-e C az előző feladatban szereplő A-val?

1.9. példa: $W = N_1 \times N_2 \times N_3$. $\alpha \in W^{**}$, ahol $N_i = \mathbb{N}\ (i = 1, 2, 3)$. $\alpha_1 = (1, 1, 1)$. Az α sorozat további elemeit úgy kapjuk meg, hogy a pontok koordinátáit az első koordinátával kezdve ciklikusan 1-gyel növeljük. $red(pr_{N_1 \times N_3}(\alpha)) =$?

1.10. példa: Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ és $R \subseteq A \times A$. $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}$. Mi lesz R lezártja és korlátos lezártja?

1.11. példa:
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R \subseteq A \times A$. $R = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\}$. $\lceil \pi \rceil = \{1, 2, 3, 4\}$. Írjuk fel a reláció feltételre vonatkozó lezártját!

1.12. példa: Van-e olyan nem üres reláció és π feltétel, hogy a reláció lezártja üres halmaz, és a π feltételre vonatkozó lezártja azonos a relációval?

1.13. példa: $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a - 2\}, & \text{ha } a > 1; \\ \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

1. Alapfogalmak

1.1. Legalább, illetve legfeljebb hány eleme van egy m elemű és egy n elemű halmaz

– metszetének;	– egyesítésének;
– Descartes-szorzatának;	– különbségének?

1.2. Bizonyítsa be, hogy $H \subseteq A \times B$ esetén

- $(\forall (a,b),(c,d) \in H : \ (a,d) \in H) \Leftrightarrow (\exists K \subseteq A : \ \exists L \subseteq B : \ H = K \times L)$;
- ha H nem üres, akkor K és L egyértelmű.

1.3. $R \subseteq A \times B$. Mivel egyenlő $R^{-1}(B)$?

1.4. $R = \{((x,y),(x+y,y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}$ és $a+b < 5\}$ halmaz inverz képe, illetve ősképe?

1.5. $R = \{((x,y),(x+y,y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x,y),(x-y,y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}$ és $a+b < 5\}$ halmaz inverz képe, illetve ősképe?

1.6. $R = \{((x,y),(f(x,y),y)) \mid x,y \in \mathbb{N}\}$, ahol $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Mi a $H = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{N}$ és $a+b < 5\}$ halmaz ősképe, illetve inverz képe?

1.7. $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B$. Van-e valamilyen összefüggés az $R^{-1}(B \setminus Q)$ halmaz és az $A \setminus (R^{-1}(Q))$ halmaz között?

1.8. Készítsen olyan nem üres relációt, amelyre igaz, hogy értékkészlete minden valódi részhalmazának ősképe üres halmaz!

1.9. Legyen $F, G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, Y = \{1,2\}$. $F = \{(a,b) \mid \ b|a$ és $b \neq 1$ és $b \neq a\}$.
$G = \{(a,b) \mid 2|a$ és $a = 2b\}$.

$G \circ F =?$	$G \odot F =?$
$F^{(-1)} \circ G^{(-1)} =?$	$F^{-1}(G^{-1}(Y)) =?$
$(G \circ F)^{-1}(Y) =?$	$(G \circ F)^{(-1)} =?$

1.10. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(3,3),(3,5),(4,5)\}$, $f \subseteq A \times \mathbb{L}$ és $f = \{(1,i),(2,i),(3,i),(4,h),(5,i)\}$. Mi f, illetve $(f \circ R)$ igazsághalmaza és gyenge igazsághalmaza?

1.11. $R, Q \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R \odot Q)^{(-1)} = Q^{(-1)} \circ R^{(-1)}$?

1.12. $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy $\forall Y \subseteq C : \ (G \circ F)^{-1}(Y) = F^{-1}(G^{-1}(Y))$. Igaz-e az állítás, ha G vagy F függvény?

1.13. $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy $(G \odot F)^{(-1)} = F^{(-1)} \odot G^{(-1)}$. Igaz-e az állítás, ha G vagy F függvény?

1.14. Mi az összefüggés két reláció kompozíciójának értelmezési tartománya és ugyanezen két reláció szigorú értelemben vett kompozíciójának értelmezési tartománya között?

1.15. Készítsen olyan nem üres R relációt és f logikai függvényt, hogy $f \circ R$ igazsághalmaza üres legyen!

1.16. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$?

1.17. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $\forall H \subseteq A : R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$?

1.18. $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $Q = \{(a,b) \mid 2|a \text{ és } b|a \text{ és } prim(b)\}$.

a) $P = \{(a,b) \mid b|a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$

b) $P = \{(a,b) \mid b|a\}$

Adja meg a $Q^{(-1)}, Q \circ P$ és $Q \odot P$-t relációt!

1.19. $H \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, F \subseteq C \times D$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $a \in \mathcal{D}_{G \circ H} \cap \mathcal{D}_{G \odot H}$, akkor $G \circ H(a) = G \odot H(a)$.

b) $\mathcal{D}_{G \odot H} \subseteq \mathcal{D}_{G \circ H}$.

c) $(\forall a \in \mathcal{D}_H : |H(a)| = 1) \Rightarrow G \circ H = G \odot H$.

d) $\mathcal{D}_G = B \Rightarrow G \circ H = G \odot H$.

1.20. Asszociativitás: $H \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, F \subseteq C \times D$. Igazak-e:

$$\begin{aligned} (F \circ G) \circ H &= F \circ (G \circ H), \\ (F \odot G) \odot H &= F \odot (G \odot H)? \end{aligned}$$

1.21. Legyen $Q, R, S \subseteq A \times A$, és vezessük be az alábbi jelölést: ha $X \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció, akkor X komplementere:

$$\widehat{X} = \{(a,b) \in A \times A \mid (a,b) \notin X\}.$$

Igaz-e, hogy

$$Q \odot R \subseteq S \Longleftrightarrow Q^{(-1)} \odot \widehat{S} \subseteq \widehat{R}?$$

Igaz-e a fenti állítás nemszigorú kompozíció esetén?

1.22. Legyen $Q, R, S \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} R \subseteq S &\Rightarrow R \odot Q \subseteq S \odot Q, \\ R \subseteq S &\Rightarrow Q \odot R \subseteq Q \odot S? \end{aligned}$$

1.23. Legyen R és Q két reláció a természetes számok halmazán! R egy természetes számhoz rendeli önmagát és a kétszeresét, Q egy páros természetes számhoz a felét.

a) Írja fel a két relációt, és addja meg az értelmezési tartományukat!

b) Írja fel az R reláció k. hatványát ($k \geq 1$) és ennek az értelmezési tartományát!

c) Írja fel a $Q \circ R$ relációt és annak értelmezési tartományát!

d) $F = Q \odot R$. Írja fel az F relációt és az értelmezési tartományát!

1.24. $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy:

a) $\mathcal{D}_{G \odot F} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$,

b) $\mathcal{D}_{G \circ F} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$?

1.25. $P \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. $P = \{(a,b) \mid \ b|a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$. Mi lesz P lezártja és korlátos lezártja?

1.26. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $R = \{(a,b) \mid \ b|a \text{ és } b \neq 1 \text{ és } b \neq a\}$. $\lceil \pi \rceil = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : x = 2^k\}$. Írjuk fel az $R|_\pi$ relációt, lezártját és korlátos lezártját!

1.27. Adjunk példát olyan nem üres relációra, amelynek lezártja üres halmaz, és van olyan π feltétel, hogy a reláció feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya megegyezik az eredeti reláció értelmezési tartományával!

1.28. $R \subseteq A \times A$. Tegyük fel, hogy az R értelmezési tartománya egyenlő az R értelmezési tartományának R-re vonatkozó ősképével. Mit mondhatunk R lezártjáról?

1.29. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-3\}, & \text{ha } a > 2; \\ \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1. \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

1.30. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Az R reláció minden összetett számhoz a legnagyobb valódi osztóját rendeli. Legyen q

a) egy rögzített összetett természetes szám!

b) egy rögzített prímszám!

Legyen $P_q(a) = (\exists k \in \mathbb{N} : a = q^k)$! Mi lesz az R reláció P_q feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya?

1.31. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(x) = \begin{cases} \{b \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \ b = 2k+1\}, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } x \text{ páros;} \\ \{x-7\}, & \text{ha } x \geq 7 \text{ és } x \text{ páratlan;} \\ \{0\}, & \text{ha } x = 1; \\ \{7\}, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Mi lesz R lezártja és korlátos lezártja?

1.32. R legyen az 1.29. feladatban adott reláció. $\pi(k) = (k \text{ páratlan szám})$. Adja meg az $R|_\pi$ relációt, lezártját és korlátos lezártját!

1.33. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $a \in \mathcal{D}_{\overline{R}} \cap \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}}$, akkor $\overline{R}(a) = \overline{\overline{R}}(a)$.

b) $\mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} \subseteq \mathcal{D}_{\overline{R}}$.

c) Ha az A halmaz véges és $R \subseteq A \times A$, akkor $\overline{R} = \overline{\overline{R}}$.

d) Ha A megszámlálhatóan végtelen, $R \subseteq A \times A$, és

$\forall a \in A : \ (\exists n(a) \in \mathbb{N}_0 : \ |R(a)| \leq n(a)) \Rightarrow \overline{R} = \overline{\overline{R}}$.

1.34. Legyen $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(x) = \begin{cases} \{b \mid b > 0 \text{ és } b < x \text{ és } 2|b\}, & \text{ha } x \text{ páratlan;} \\ \{x-1\}, & \text{ha } x \text{ páros;} \end{cases}$$

$\pi(x) = (x$ páros természetes szám). Mi az R reláció π feltételre vonatkozó lezártja és korlátos lezártja?

1.35. Legfeljebb, illetve legalább milyen hosszú egy m és egy n hosszúságú sorozat redukáltjának konkatenációja, illetve konkatenációjának redukáltja?

1.36. Igaz-e, hogy egy α sorozat redukáltjának projekciója ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

1.37. Igaz-e, hogy egy α sorozat projekciójának redukáltja ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

1.38. Legyen $A = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$, $B = N_1 \times N_4$, ahol $N_i = \mathbb{N}$ $(i = 1..4)$.

$$\begin{aligned} \alpha \;\; = \;\; & <(1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,2,3,1),(1,2,3,4), \\ & (5,2,3,4),(5,7,3,4),(5,7,10,4),(5,7,10,14),\cdots> \end{aligned}$$

a) $pr_B(\alpha) =?$

b) $red(pr_B(\alpha)) =?$

2. A programozás alapfogalmai

2.1. példa: Legyen $A_1 = \{1,2\},\ A_2 = \{1,2\},\ A_3 = \{1,2,3,4,5\},\ A = A_1 \times A_2 \times A_3$. $F = \{((a,b,c),(d,e,f)) \mid f = a+b\}$. $F(1,1,1) =$? Hány olyan pontja van az állapottérnek, amelyekhez a feladat ugyanazt rendeli, mint az $(1,1,1)$-hez?

2.2. példa: Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}, S \subseteq A \times A^{**}$.

$$\begin{array}{lllll} S = \{ & (1,\langle 1251\rangle), & (1,\langle 14352\rangle), & (1,\langle 132\ldots\rangle), & (2,\langle 21\rangle), \\ & (2,\langle 24\rangle), & (3,\langle 333333\ldots\rangle), & (4,\langle 41514\rangle), & (4,\langle 431251\rangle), \\ & (4,\langle 41542\rangle), & (5,\langle 524\rangle), & (5,\langle 534\rangle), & (5,\langle 5234\rangle) \quad \} \end{array}$$

$F = \{(2,1)\,(2,4)\,(4,1)\,(4,2)\,(4,5)\}$.

a) Adjuk meg $p(S)$-t!

b) Megoldja-e S a feladatot?

2.3. példa: Fejezzük ki a programok uniójának programfüggvényét a programok programfüggvényeivel!

2.4. példa: Legyen F_1 és F_2 egy-egy feladat ugyanazon az állapottéren! Igaz-e, hogy ha minden program, ami megoldása F_1-nek, az megoldása F_2-nek is, és minden program, ami megoldása F_2-nek, az megoldása F_1-nek is, akkor F_1 és F_2 megegyeznek?

2.5. példa: $F_1 \subseteq F_2$. Az S program megoldja F_2-t. Igaz-e, hogy S megoldja F_1-et is?

2.6. példa: Legyenek S_1 és $S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok, $F \subseteq A \times A$ pedig feladat. Tegyük fel továbbá, hogy $S_1 \subseteq S_2$ és S_2 megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy S_1 megoldja F-et?

2. A programozás alapfogalmai

2.1. Legyen $A = \{\Omega, \Phi, \Psi, \Theta, \Gamma\}, S \subseteq A \times A^{**}$.

$$S = \{ \begin{array}{lll} (\Omega, \langle\Omega\Phi\Gamma\Omega\rangle), & (\Omega, \langle\Omega\Theta\Psi\Gamma\rangle), & (\Omega, \langle\Omega\Psi\Phi\dots\rangle), \\ (\Phi, \langle\Phi\Omega\rangle), & (\Psi, \langle\Psi\Theta\rangle), & (\Psi, \langle\Psi\Psi\Psi\Psi\Psi\Psi\dots\rangle), \\ (\Theta, \langle\Theta\Omega\Gamma\Omega\Theta\rangle), & (\Theta, \langle\Theta\Psi\Omega\Phi\Gamma\Omega\rangle), & (\Theta, \langle\Theta\Omega\Gamma\Theta\Phi\rangle), \\ (\Gamma, \langle\Gamma\Phi\Psi\rangle), & (\Gamma, \langle\Gamma\Psi\rangle), & (\Gamma, \langle\Gamma\Phi\Psi\Omega\rangle) \end{array} \}$$

$F = \{(\Phi, \Omega)\,(\Phi, \Psi)\,(\Theta, \Omega)\,(\Theta, \Phi)\,(\Theta, \Theta)\}$.

a) Adjuk meg $p(S)$-t!

b) Megoldja-e S az F feladatot?

2.2. Legyen S program, F olyan feladat, hogy S megoldása F-nek. Igaz-e, hogy

a) ha F nemdeterminisztikus, akkor S sem az?

b) ha F determinisztikus, akkor S is az?

c) ha F nemdeterminisztikus, akkor $p(S)$ sem az?

d) ha $p(S)$ determinisztikus, akkor F is az?

e) ha F determinisztikus, akkor $p(S)$ is az?

f) ha S nemdeterminisztikus, akkor $p(S)$ sem az?

2.3. Igaz-e, hogy $p(S)$ értelmezési tartománya éppen A^* őképe S-re nézve?

2.4. Mondhatjuk-e, hogy az S program megoldja az F feladatot, ha igaz a következő állítás:

$$q \in \mathcal{D}_F \Rightarrow S(q) \subseteq A^* \text{ és } p(S)(q) \subseteq F(q)?$$

2.5. Legyen $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $F_1, F_2 \subseteq A \times A$.

$F_1 = \{((u, v), (x, y)) \mid \;\; y|u\}$,

$F_2 = \{((u, v), (x, y)) \mid x = u \text{ és } y|u\}$.

Ugyanaz-e a két feladat? (Van-e valamilyen összefüggés közöttük?)

2.6. $F \subseteq A \times A$. S_1, S_2 programok A-n. Az S_1 és az S_2 is megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy az $S = (S_1 \cup S_2)$ program is megoldja az F feladatot?

2.7. Tekintsük a következő szövegesen megadott feladatot: Adott egy sakktábla és két rajta lévő bástya helyzete. Helyezzünk el a táblán egy harmadik bástyát úgy, hogy az mindkettőnek az ütésében álljon! Készítsük el a modellt: írjuk fel az állapotteret és az F relációt!

2.8. Tudjuk, hogy S megoldja F-et (az A állapottéren). Igaz-e, hogy ha $a \in A$, akkor

$$S(a) \not\subseteq A^* \text{ vagy } p(S)(a) \not\subseteq F(a) \Rightarrow a \notin \mathcal{D}_F?$$

2.9. Legyen $F \subseteq A \times A$ egy feladat és $S \subseteq A \times A^{**}$ egy program. Jelöljük FP-vel azt a relációt, amely F és $p(S)$ metszeteként áll elő. Igaz-e, hogy

a) ha $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$, akkor S megoldja F-et?

b) ha S megoldja F-et, akkor $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$?

3. Specifikáció

3.1. példa: Legyen $A = \{Bach, Bartók, Kodály, Liszt, Mozart, Vivaldi\}$, $S \subseteq A \times A^{**}$ program.

$$S = \{ \begin{array}{lll} Vivaldi & \to \langle Vivaldi, Bach\rangle, & Bach & \to \langle Bach, Mozart\rangle, \\ Bach & \to \langle Bach, Liszt, Bartók\rangle, & Mozart & \to \langle Mozart, Vivaldi\rangle, \\ Liszt & \to \langle Liszt, Bartók\rangle, & Kodály & \to \langle Kodály, Mozart\rangle, \\ Bartók & \to \langle Bartók, Bach, Liszt\rangle\} & & \end{array}$$

Legyen továbbá az $R : A \to \mathbb{L}$ állítás:
$\forall x \in A : \quad R(x) = (x \text{ magyar})$.
Mi lesz a fenti program R-hez tartozó leggyengébb előfeltétele?

3.2. példa: Legyen $H_1, H_2 : A \to \mathbb{L}$. Igaz-e, hogy ha minden $S \subseteq A \times A^{**}$ programra $lf(S, H_1) = lf(S, H_2)$, akkor $\lceil H_1 \rceil = \lceil H_2 \rceil$?

3.3. példa: Specifikáljuk a következő feladatot: $A = \mathbb{L} \times \mathbb{L}, \quad F \subseteq A \times A$,

$$F = \{((l, k), (m, n)) \mid n = k \wedge m = (l \wedge k)\}.$$

3.4. példa: Legyen $F \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A^{**}$ program, B egy tetszőleges halmaz. Legyenek továbbá $F_1 \subseteq A \times B$ és $F_2 \subseteq B \times A$ olyan relációk, hogy $F = F_2 \circ F_1$, valamint $\forall b \in B$:

$$\begin{array}{rcl} \lceil \widehat{Q}_b \rceil & = & F_1^{-1}(b), \\ \lceil R_b \rceil & = & F_2(b). \end{array}$$

Igaz-e, hogy ha $\forall b \in B : \widehat{Q}_b \Rightarrow lf(S, R_b)$, akkor S megoldja F-et?

3. Specifikáció

3.1. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, S \subseteq A \times A^{**}$.

$$\begin{array}{llllll} S = \{ & (1, \langle 1251\rangle), & (1, \langle 14352\rangle), & (1, \langle 132\ldots\rangle), & (2, \langle 21\rangle), & \\ & (2, \langle 24\rangle), & (3, \langle 333333\ldots\rangle), & (4, \langle 41514\rangle), & (4, \langle 431251\rangle), & \\ & (4, \langle 41542\rangle), & (5, \langle 524\rangle), & (5, \langle 534\rangle), & (5, \langle 5234\rangle) & \} \end{array}$$

és $\lceil R\rceil = \{1, 2, 5\}$. Írja fel az $\lceil lf(S, R)\rceil$ halmazt!

3.2. Mivel egyenlő $lf(S, Igaz)$?

3.3. Legyen A tetszőleges állapottér, $Q_i : A \to \mathbb{L} \quad (i \in \mathbb{N})$. Igaz-e, hogy ha

$$\forall i \in \mathbb{N} : \; Q_i \Rightarrow Q_{i+1},$$

akkor

$$(\exists n \in \mathbb{N} : \; lf(S, Q_n)) = lf(S, (\exists n \in \mathbb{N} : \; Q_n))?$$

3.4. Igaz-e, hogy ha $lf(S_1, R) = lf(S_2, R)$, akkor $lf(S_1 \cup S_2, R) = lf(S_1, R) \vee lf(S_2, R)$?

3.5. Igaz-e, hogy ha $\forall x, y \in A : \; x \in \lceil lf(S_1, \mathcal{P}(\{y\}))\rceil \Leftrightarrow x \in \lceil lf(S_2, \mathcal{P}(\{y\}))\rceil$, akkor $\mathcal{D}_{p(S_1)} = \mathcal{D}_{p(S_2)}$?

3.6. $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Igaz-e, hogy ha $\forall H : A \to \mathbb{L}$ esetén $lf(S_1, H) = lf(S_2, H)$, akkor S_1 ekvivalens S_2-vel?

3.7. $A = \mathbb{N}$. $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{**}$.

$$\begin{aligned} S = &\{(a, < a \cdots >) \mid a \equiv 1 \mod (4)\} \\ &\cup\{(b, < b >), (b, < b, b/2 >) \mid b \equiv 2 \mod (4)\} \\ &\cup\{(c, < c, 2c >) \mid c \equiv 3 \mod (4)\} \\ &\cup\{(d, < d, d/2 >) \mid d \equiv 0 \mod (4)\}, \end{aligned}$$

$H(x) = (x$ páros szám). $\lceil lf(S, H)\rceil =$?

3.8. Adott az $A = V \times V \times \mathbb{L}$ állapottér ($V = \{1, 2, 3\}$) és a $B = V \times V$ paramétertér, továbbá az F_1 és F_2 feladatok.

$$F_1 = \{((a_1, a_2, l), (b_1, b_2, k)) \mid k = (a_1 > a_2)\},$$

F_2 specifikációja pedig:

$$\begin{array}{ccccccc} A = & V & \times & V & \times & \mathbb{L} \\ & a_1 & & a_2 & & l \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B = & V & \times & V \\ & a_1' & & a_2' \end{array}$$

$Q : (a_1 = a_1' \wedge a_2 = a_2')$
$R : (Q \wedge l = (a_1' > a_2'))$

Azonosak-e az F_1 és F_2 feladatok?

3.9. Tekintsük az alábbi két feladatot. F_1 specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{x'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (x = x')$
$R : (Q \wedge x = |y \cdot y|)$

$$F_2 = \{((a, b), (c, d)) \mid c = a \wedge |d| \cdot d = c\}.$$

Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

3.10. Írja le szövegesen az alábbi feladatot. Legyen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{l}{\mathbb{N}_0}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n)$,
$R : (Q \wedge l = \sum\limits_{i=m}^{n} g(i))$,

ahol $g : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$,

$$g(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \forall j \in [m..n] : f(j) \leq f(i)); \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

3.11. Igaz-e a specifikáció tételének megfordítása? (Ha S megoldja F-et, akkor $\forall b \in B :\ Q_b \Rightarrow lf(S, R_b)$)

3.12. Tekintsük az alábbi feladatot:

$$A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{p}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{k'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : (k = k' \wedge 0 < k)$
$R : (Q \wedge prim(p) \wedge \forall i > 1 : prim(i) \to |k - i| \geq |k - p|)$,

ahol $prim(x) = (x$ prímszám).

Mit rendel a fent specifikált feladat az $a = (10, 1)$ és a $b = (9, 5)$ pontokhoz? Fogalmazza meg szavakban a feladatot!

3.13. $A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}} \times \underset{z}{\mathbb{N}}$

$B = \underset{x'}{\mathbb{N}} \times \underset{y'}{\mathbb{N}}$

$F_1, F_2 \subseteq A \times A$

F_1 specifikációja:

$Q : (x = x' \wedge y = y')$

$R : (x = x' \wedge y = y' \wedge x'|z \wedge y'|z \wedge \forall j \in \mathbb{N} : \; (x'|j \wedge y'|j) \rightarrow z|j)$

$F_2 = \{((a,b,c),(d,e,f)) \mid a = d$ és $b = e$ és $f|a \cdot b$ és $a|f$ és $b|f\}$

Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

3.14. Adott egy $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$F_1, F_2 \subseteq A \times A$

F_1 specifikációja:

$Q :(m = m' \wedge n = n')$

$R :(m = m' \wedge n = n' \wedge i \in [m..n] \wedge \forall j \in [m..i-1] : \; f(j) < f(i) \wedge$
$\forall j \in [i..n] : \; f(j) \leq f(i))$

F_2 specifikációja:

$Q : (m = m' \wedge n = n')$

$R : (i \in [m'..n'] \wedge \forall j \in [m'..n'] : \; f(j) \leq f(i)).$

Azonos-e a két feladat?

3.15. Specifikáljuk a következő feladatot: $A = \mathbb{N}$ és $v : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$.

$F \subseteq A \times A, F = \{(s,s') \mid s' = \sum_{k=1}^{n} v(k)\}$

3.16. Keressük meg egy természetes szám egy osztóját.

3.17. Keressük meg egy összetett természetes szám egy valódi osztóját.

3.18. Keressük meg egy természetes szám egy valódi osztóját.

3.19. Keressük meg egy természetes szám összes valódi osztóját.

3.20. Keressük meg egy természetes szám legnagyobb prímosztóját.

3.21. Állapítsuk meg, hány valódi osztója van egy természetes számnak.

3.22. Keressük az $[m..n]$ intervallumban az első olyan számot, amelyiknek van valódi osztója.

3.23. Keressük az $[m..n]$ intervallumban azt a számot, amelyiknek a legtöbb valódi osztója van, de nem osztható 6-tal.

3.24. Az $[m..n]$ intervallumban melyik számnak van a legtöbb valódi osztója?

4. Kiterjesztések

4.1. példa: $B = \{1, 2, 3\}, A = B \times \{1, 2, 3\}$. $F \subseteq B \times B$. $F = \{(1, 2), (1, 3)\}$. Mi az F kiterjesztettje B-re?

4.2. példa: Adott az $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ állapottéren az $F = \{((l, k), (m, n)) \mid n = (l \wedge k)\}$ feladat, és az $A' = \mathbb{L} \times \mathbb{L} \times V$ állapottéren ($V = \{1, 2\}$) a következő program:

$$
\begin{array}{lll}
S = \{ & (ii1, \langle ii1, ih2, hi2\rangle), & (ii2, \langle ii2, hh1, ii1\rangle), \\
& (ii2, \langle ii2, ih2, hi1, hi2\rangle), & (ih1, \langle ih1\rangle), \\
& (ih2, \langle ih2, ii1, hh1\rangle), & (hi1, \langle hi1, hh2\rangle), \\
& (hi2, \langle hi2, hi1, ih1\rangle), & (hi2, \langle hi2, hh1, hh2\rangle), \\
& (hh1, \langle hh1, ih1\rangle), & (hh2, \langle hh2\rangle) \quad \}
\end{array}
$$

Megoldja-e S az F A'-re való kiterjesztettjét?

4.3. példa: Igaz-e, hogy ha $S \subseteq B \times B$, A altere B-nek, akkor

$$\mathcal{D}_{pr_A(p(S))} = pr_A(\mathcal{D}_{p(S)})?$$

4. Kiterjesztések

4.1. $B = \mathbb{N}, A = B \times \mathbb{N}$. $F \subseteq B \times B$. $F = \{(q, r) \mid r = q + 1\}$. Mi az F kiterjesztettje A-ra?

4.2. Igaz-e, hogy ha $S \subseteq A \times A^{**}$ program, B altere A-nak, akkor S $B \times B$-ra történő projekciójának kiterjesztése A-ra azonos S-sel?

4.3. Bizonyítsuk be, hogy egy program kiterjesztettje valóban program!

4.4. $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Mondjunk példát olyan programra, amelynek egyetlen valódi altérre vett projekciója sem program. $(A_k = \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n)$.

4.5. Legyen A altere B-nek, $F \subseteq A \times A$, $F'' \subseteq B \times B$, F' az F kiterjesztettje B-re. Igaz-e, hogy

a) ha $F = pr_A(F'')$, akkor F'' az F kiterjesztettje?

b) $F' = pr_A^{(-1)}(F)$? ill. $F' = pr_A^{-1}(F)$?

4.6. Legyen $F \subseteq A \times A$, $F' \subseteq B \times B$, $F'' \subseteq C \times C$, $F''' \subseteq D \times D$, ahol $B = A \times A_1$, $C = A \times A_2$, $D = A \times A_1 \times A_2$, és legyen F', F'', F''' az F kiterjesztése rendre B-re, C-re, D-re. Igaz-e, hogy F''' az F'' kiterjesztése D-re? Adja meg az F' és az F'' közötti kapcsolatot a projekció és a kiterjesztés fogalmának segítségével!

4.7. B és C altere A-nak. $F \subseteq A \times A, F_1 \subseteq B \times B, F_2 \subseteq C \times C$. F_1 az F projekciója B-re. F az F_2 kiterjesztése A-ra. Igaz-e, hogy az F_1 feladat A-ra való kiterjesztettjének C-re vett projekciója megegyezik F_2-vel?

6. Programkonstrukciók

6.1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $\lceil\pi_1\rceil = \{1, 2, 3, 4\}$. $\lceil\pi_2\rceil = \{1, 3, 4, 5\}$.

$$\begin{array}{lllllll} S_1 = \{ & 1{\rightarrow}14 & 1{\rightarrow}12\ldots & 2{\rightarrow}2132 & 3{\rightarrow}36 & \\ & 4{\rightarrow}463 & 4{\rightarrow}451 & 5{\rightarrow}563 & 6{\rightarrow}612 & \}, \\ S_2 = \{ & 1{\rightarrow}134 & 1{\rightarrow}121 & 2{\rightarrow}2132\ldots & 3{\rightarrow}36 & \\ & 4{\rightarrow}463 & 4{\rightarrow}451\ldots & 5{\rightarrow}5632 & 6{\rightarrow}61\ldots & \}. \end{array}$$

Adja meg az $(S_1; S_2)$, $IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$, $DO(\pi_1, S_1)$ programokat és a programfüggvényeiket!

6.2. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\lceil\pi_1\rceil = \{1, 2, 3, 4\}$, $\lceil\pi_2\rceil = \{2, 3, 4\}$, $\lceil\pi_3\rceil = \{1, 4, 6\}$ és

$$\begin{array}{llllll} S_1 = \{ & 1{\rightarrow}12\ldots & 2{\rightarrow}23 & 3{\rightarrow}3456 & \\ & 4{\rightarrow}463 & 5{\rightarrow}53 & 6{\rightarrow}62 & \}, \\ S_2 = \{ & 1{\rightarrow}12 & 2{\rightarrow}24 & 3{\rightarrow}3\ldots & \\ & 4{\rightarrow}43 & 5{\rightarrow}5 & 6{\rightarrow}61 & \}, \\ S_3 = \{ & 1{\rightarrow}12 & 2{\rightarrow}2\ldots & 3{\rightarrow}31 & \\ & 4{\rightarrow}432 & 5{\rightarrow}5\ldots & 6{\rightarrow}63\ldots & \}. \end{array}$$

Mi lesz $IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2, \pi_3 : S_3)$, $\mathcal{D}_{p(IF)}$, $p(IF)$?

6.3. Legyen S_1 és S_2 egy-egy program az A állapottéren. Igaz-e, hogy $S_2 \circ \tau \circ S_1$ megegyezik $(S_1; S_2)$-vel?

6.4. $S = (S_1; S_2)$. Igaz-e, hogy

a) $\mathcal{D}_{p(S)} = \lceil lf(S_1, \mathcal{P}(\mathcal{D}_{p(S_2)}))\rceil$?

b) tetszőleges R utófeltételre: $lf((S_1; S_2), R) = lf(S_1, lf(S_2, R))$?

6.5. Van-e olyan program, amely felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

6.6. Igaz-e, hogy minden program felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

6.7. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. Igaz-e, hogy $\mathcal{D}_{p(IF)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (\lceil\pi_k\rceil \cap \mathcal{D}_{p(S_k)})$?

6.8. Legyen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ program A-n! $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Keressünk olyan π_k feltételeket és S_k programokat, hogy $\mathcal{D}_{p(IF)} = A$ és $\mathcal{D}_{p(S)} = \emptyset$!

6.9. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$. Igaz-e, hogy $p(IF)$ része $p(S)$-nek?

6.10. Igaz-e? Ha $IF = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$, akkor $\mathcal{D}_{p(IF)} = (\lceil\pi_1\rceil \cap \lceil\pi_2\rceil \cap \mathcal{D}_{p(S_1)} \cap \mathcal{D}_{p(S_2)}) \cup (\mathcal{D}_{p(S_1)} \cap (\lceil\pi_1\rceil \setminus \lceil\pi_2\rceil)) \cup (\mathcal{D}_{p(S_2)} \cap (\lceil\pi_2\rceil \setminus \lceil\pi_1\rceil))$?

6.11. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

IF

$i = 1$	$i \leq 2$
$i := 2i$	$SKIP$

Milyen sorozatokat rendel S_1, S_2, IF az állapottér egyes pontjaihoz?

6.12. $S = (S_1; S_2)$. S_1 megoldja F_1-et, és S_2 megoldja F_2-t. Megoldja-e S az

a) $F = F_2 \circ F_1$ feladatot?

b) $F = F_2 \odot F_1$ feladatot?

6.13. $S = (S_1; S_2)$. S megoldása az $(F_2 \odot F_1)$ feladatnak.
Megoldja-e S_1 az F_1-et, illetve S_2 az F_2-t?

6.14. $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1..n] :\ S_k$ megoldja az $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$ feladatot.

a) IF megoldja-e az F feladatot?

b) IF megoldja-e az F feladatot, ha $\pi_1 \vee \pi_2 \vee \dots \vee \pi_n =$ igaz?

c) IF megoldja-e az F feladatot, ha $\mathcal{D}_F \subseteq \lceil \pi_1 \vee \pi_2 \vee \dots \vee \pi_n \rceil$?

6.15. $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. IF megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy $\forall k \in [1..n] :\ S_k$ megoldja az $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$ feladatot?

6.16. $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$. $F_1, \dots, F_k \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1..n] :\ S_k$ megoldja az F_k feladatot. Megoldja-e IF az $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$ feladatot?

6.17. $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. IF megoldja az F feladatot, és $\lceil \pi_1 \rceil \cup \dots \cup \lceil \pi_n \rceil \subseteq \mathcal{D}_F$. Igaz-e, hogy $\forall k \in [1..n] :\ S_k$ megoldja az $F|_{\lceil \pi_k \rceil}$ feladatot?

6.18. $IF = (\pi_1 : S_1, \dots, \pi_n : S_n)$. $F_1, \dots, F_n \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1..n] :$ $\mathcal{D}_{F_k} \subseteq \lceil \pi_k \rceil$, és S_k megoldja az F_k feladatot. $F = F_1 \cup \dots \cup F_n$. Megoldja-e IF az F feladatot?

6.19. Igaz-e, hogy $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$ és $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_1 \wedge \pi_2 : S_1 \cup S_2, \pi_2 : S_2)$

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

6.20. Legyen $IF_{34} = (\pi_3 : S_3, \pi_4 : S_4)$, $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : IF_{34})$, $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 \wedge \pi_3 : S_3, \pi_2 \wedge \pi_4 : S_4)$! Igaz-e, hogy IF_1 és IF_2

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

6.21. $F \subseteq A \times A$ feladat. S_0 program A-n. S_0 megoldja F-et. Megoldja-e a $DO(\pi, S_0)$ program az F feladat π-re vonatkozó lezártját?

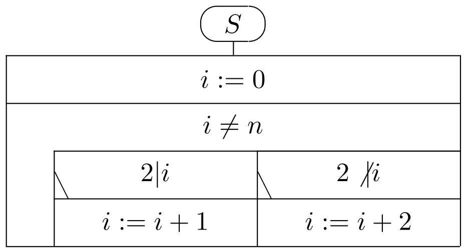
6.22. Legyen $DO = (\pi, S)$! Igaz-e, hogy

a) $p(DO) \subseteq p(S)$?

b) $p(S) \subseteq p(DO)$?

6.23. $A = \underset{i}{\mathbb{N}_0} \times \underset{n}{\mathbb{N}_0}$

$S = ((i := 0; DO(i \neq n, IF(\ 2|i :\ i := i+1,\ \ 2 \nmid i\ :\ \ i := i+2))))$



Milyen sorozatokat rendel S a $(2, 4)$, illetve a $(3, 7)$ ponthoz?

7. Levezetési szabályok

7.1. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és Q igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres a

a) $\lceil P \wedge R \rceil$ halmaz?

b) $\lceil P \wedge \neg\pi \wedge R \rceil$ halmaz?

7.2. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és $(Q \wedge \pi)$ igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres az $lf(S_0, P)$ és $lf(DO, R)$ igazsághalmazának metszete?

7.3. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele. Legyen $g = p(S_0)|_{\lceil\pi\rceil}$ és $q \in \lceil P \rceil \cap \lceil \pi \rceil$. Igaz-e, hogy

a) $\forall k \in \mathbb{N}_0 :\ g^k(q) \subseteq \lceil P \rceil$?

b) $b \in g^k(q) \cap \lceil \pi \rceil \cap \lceil P \rceil \Rightarrow t(b) \leq t(q) - k$?

c) $g|\pi = p(S_0)|\pi$?

d) $\exists k \in \mathbb{N}_0 :\ k \leq t(q)$ és $g^k(q) \subseteq \lceil \neg\pi \rceil$?

7.4. Legyen $S = (S_1; S_2)$ és Q, Q' és R olyan állítások, amelyekre
$Q \Rightarrow lf(S, R), Q' \Rightarrow lf(S_2, R), Q \Rightarrow lf(S_1, Q')$.
Lehetséges-e, hogy $\lceil Q \rceil \cap \lceil R \rceil = \emptyset$ és $\lceil Q \rceil \cap \lceil Q' \rceil \neq \emptyset$ és $\lceil Q' \rceil \cap \lceil R \rceil \neq \emptyset$? Indokolja, ha nem, és írjon rá példát, ha igen!

7.5. $A = \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{N}_0}$

$B = \underset{x'}{\mathbb{Z}} \times \underset{y'}{\mathbb{N}_0}$

$Q: \quad (x = x' \wedge y = y')$

$R: \quad (x = x' - y' \wedge y = 0)$

$S_0 = \quad \{((x, y), <(x, y), (x-1, y), (x-1, y-1)>) \mid x \in \mathbb{Z}$ és $y \in \mathbb{N}\} \cup$
$\{((x, 0), <(x, 0)>) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

$DO = \quad \{((x, y), <(x, y), (x-1, y), (x-1, y-1), (x-2, y-1),$
$(x-2, y-2), \ldots, (x-y+1, 1), (x-y, 1)(x-y, 0)>) \mid$
$x \in \mathbb{Z}$ és $y \in N_0\}$.

Megjegyzés: Az $(x, 0)$ párhoz 1 hosszúságú, az $(x, 1)$ párhoz 3 hosszúságú, az $(x, 2)$ párhoz 5 hosszúságú sorozatot rendel a program.
Tudjuk, hogy $DO = (\pi, S_0)$ valamilyen π-re. Igaz-e, hogy található olyan P állítás és $t : A \to \mathbb{Z}$ függvény, hogy a ciklus levezetési szabályának feltételei teljesülnek, és ha igen, adjon meg egy megfelelő π-t, P-t és t-t!

7.6. $A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{a}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}}$

$B = \underset{a'}{\mathbb{Z}} \times \underset{b'}{\mathbb{Z}}$

$S = (k := 5; (IF(a > b : x := a - b, a \leq b : x := b - a); i := i + 1))$
$Q : (a = a' \wedge b = b' \wedge i \in [0..1] \wedge |a - b| > 10)$
$R : (a = a' \wedge b = b' \wedge k \cdot i \leq x)$
Bizonyítsuk be, hogy $Q \Rightarrow lf(S, R)$!

8. Elemi programok

8.1. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b\}, C = A \times B$. Legyen S program A-n, $S = \{1 \to \langle 1 \rangle, 2 \to \langle 2222 \ldots \rangle, 3 \to \langle 31 \rangle\}$.

Legyen S_1 az S kiterjesztése C-re, M pedig olyan program C-n, hogy M ekvivalens S-sel A-n.

(a) Elemi program-e S?

(b) Elemi program-e S_1, és biztosan elemi program-e M?

8.2. Tekintsük az alábbi állapotteret:

$$\begin{array}{llll} A = & \mathbb{N} & \times & \mathbb{N} \\ & x & & y \end{array}$$

Mi az $(x, y) := F(x, y),\ F = (F_1, F_2),\ F_1(x, y) = y,\ F_2(x, y) = x$, azaz az $F(p, q) = \{b \in A \mid x(b) = q \wedge y(b) = p\}$ értékadás $R = (x < y)$ utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltétele?

8.3. Legyen A tetszőleges állapottér. Melyek azok a feladatok az A-n, amelyeknek megoldása a $SKIP$ program?

8.4. Legyen A tetszőleges állapottér. Melyek azok a feladatok az A-n, amelyeknek megoldása az $ABORT$ program?

10. A típus

10.1. példa: A típusértékek halmaza legyen a magyar ábécé magánhangzói: { a, á, e, é, i, í, o, ó, ö, ő, u, ú, ü, ű }. Szeretnénk tudni, hogy egy adott magánhangzónak melyik a (rövid, illetve hosszú) párja. Legyen egy olyan típusműveletünk, amely erre a kérdésre választ tud adni. Az elemi típusértékek halmaza legyen a { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 } halmaz! Adjon típusspecifikációt, és készítsen el egy olyan típust, ami megfelel a specifikációnak!

10.2. példa: Specifikálja azt a típust, melynek értékei a $[0..127]$ halmaz részhalmazai, típusműveletei pedig két részhalmaz metszetének és uniójának képzése, illetve annak megállapítása, hogy egy elem eleme-e egy részhalmaznak. Adjon meg egy típust, amely megfelel a specifikációnak! (Az elemi értékek halmaza: $\{0, 1\}$, a programokat elég a programfüggvényükkel megadni.)

10.3. példa: Legyen $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció, $\mathbb{F} = \{F\}$. Legyenek $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1)$ és $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$ típusok, melyekre: $\mathbb{S}_1 = \{S_1\}, \mathbb{S}_2 = \{S_2\}, \varrho_1 = \varrho_2, [I_1] = [I_2]$, és $S_2 \subseteq S_1$.
Igaz-e, hogy ha $\mathcal{T}_1$ megfelel $\mathcal{T}_s$-nek, akkor $\mathcal{T}_2$ is?

10. A típus

10.1. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak). A lehetséges értékek: [0..99999]. A műveletek: a következő és az előző 100000 szerinti maradékkal. Az elemi értékek a decimális számjegyek: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Mutassa meg, hogy a típus megfelel a típusspecifikációnak!

10.2. $E = \{0, 1, 2\}, T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}, \mathbb{F} = \{F\}$.

$$F = \{((a, b, c), (d, e, f)) \mid \exists k \in \mathbb{Z} : f + k \cdot 10 = a + b\}$$

Készítsen egy olyan típust, amely megfelel a specifikációnak!

10.3. Legyen $\mathcal{T}_{s1} = (H_1, I_{s1}, \mathbb{F}_1), \mathcal{T}_{s2} = (H_2, I_{s2}, \mathbb{F}_2)$ két típusspecifikáció!

1. állítás: Minden $\mathcal{T}$ típusra: $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{s1}$-nek $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{s2}$-nek.
2. állítás: $[I_{s1}] = [I_{s2}]$ és $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$.

Ekvivalens-e a két állítás?

10.4. Adott a $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ típusspecifikáció, továbbá adottak a $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1)$, $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$ típusok. Tegyük fel, hogy $[I_1] = [I_2], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$ és $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$, és $\forall \alpha \in E^* :\ \varrho_2(\alpha) \subseteq \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_s$-nek!

Igaz-e, hogy $\mathcal{T}_2$ is megfelel $\mathcal{T}_s$-nek?

10.5. Legyen $\mathcal{T}_s = (H, I_s, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció, $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1), \mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$. Legyen $[I_2] \subseteq [I_1], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$ és $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$, és $\forall \alpha \in E^* :$ $\varrho_2(\alpha) = \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_s$-nek!

Igaz-e, hogy $\mathcal{T}_2$ is megfelel $\mathcal{T}_s$-nek?

10.6. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ a következő típusspecifikáció:
$I_S = Igaz, T_2 = \mathbb{N}_0, \mathbb{F} = \{F_1, F_2\}$.
F_1 specifikációja:

$$\begin{array}{ll} A = & T \\ & x \\ B = & T \\ & x' \end{array}$$

$Q : (x = x')$

$R : (\exists z \in \mathbb{Z} :\ x'_2 = 8 \cdot z + x_2 \text{ és } 0 \leq x_2 < 8)$

F_2 specifikációja:

$$\begin{array}{llllll} A = & T & \times & T & \times & \mathbb{L} \\ & x & & y & & l \\ B = & T & \times & T & & \\ & x' & & y' & & \end{array}$$

$Q : (x = x' \wedge y = y')$

$R : (l = (x' = y') \wedge x = x' \wedge y = y')$

$\mathcal{T} = (\varrho, I, \S), E = \{0,1,2,3,4,5,6,7\},$

$\forall e \in E^* : \ \varrho(e) = \{(\mathcal{T}, \sum\limits_{i=1}^{|e|} (e_i \cdot 8^{|e|-i})\}$

a)

$$I(e) = \begin{cases} igaz, & \text{ha } |e| \geq 1 \text{ és } (e_1 = 0 \Rightarrow |e| = 1); \\ hamis & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b)

$$I(e) = \begin{cases} igaz, & \text{ha } |e| \geq 1; \\ hamis & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$S_1 \subseteq (E^*) \times (E^*)^{**}$

$$\begin{aligned} \forall e \in E^* : \ S_1(e) = \{&\alpha \in (E^*)^* \mid \ |\alpha| = |e| \text{ és} \\ &\forall i \in [1..|\alpha|] : \ |\alpha_i| = |\alpha| - i + 1 \text{ és} \\ &\forall i \in [2..|\alpha|] : \ \forall j \in [1..|\alpha_i|] : \alpha_{i_j} = \alpha_{i-1_{j+1}})\} \end{aligned}$$

$S_2 \subseteq (E^* \times E^* \times \mathbb{L}) \times (E^* \times E^* \times \mathbb{L})^{**}$
$\forall e, d \in E^* : \ \forall l \in \mathbb{L} :$

$$\begin{aligned} S_2(e,d,l) = \{&\beta \in (E^* \times E^* \times \mathbb{L}) \times (E^* \times E^* \times \mathbb{L})^{**} \mid \\ &|\beta| = \min(|e|, |d|) + 1 \text{ és} \\ &\forall i \in [2..|\beta|] : \ \beta_i = (ee, dd, ll) \text{ és} \\ &ll = (\forall j \in [1..i-1] : \ ee_j = dd_j) \text{ és} \\ &|ee| = i - 1 \text{ és } |dd| = i - 1) \text{ és} \\ &\forall j \in [1..i-1] : \ (ee_{i-j} = e_{|e|-j+1} \text{ és } dd_{i-j} = d_{|d|-j+1}))\} \end{aligned}$$

Írja le szavakkal az F_1, F_2 feladatot, a ϱ relációt és az S_1, S_2 programfüggvényét! Megfelel-e a típus a specifikációnak az a), illetve a b) esetben?

10.7. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak)! A típusértékek: a síkvektorok halmaza, a műveletek: két vektor összeadása, valamint annak eldöntése, hogy két vektor számszorosa-e egymásnak.

10.8. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak)! A típusértékek: a térvektorok halmaza, a műveletek: két vektor kivonása, valamint egy vektornak egy számmal való szorzása.

10.9. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak) a komplex számok típusára, ahol a műveletek két komplex szám összeadása és egy komplex szám képzetes részének meghatározása.

10.10. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak) a komplex számok típusára, ahol a műveletek két komplex szám összeszorzása és egy komplex szám n-dik ($n \in \mathbb{N}$) hatványának meghatározása.

10.11. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek a körlemezek halmaza, a műveletek: egy körlemez eltolása és annak eldöntése, hogy egy síkbeli pont rajta van-e a körlemezen.

10.12. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek: a gömbök halmaza, a műveletek: egy gömb eltolása és annak eldöntése, hogy egy térbeli pont benne van-e a gömbben.

10.13. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek: a négyzetek halmaza, a műveletek: egy négyzet eltolása, egy négyzet méretének megváltoztatása, egy négyzet területének kiszámítása és annak eldöntése, hogy egy síkbeli pont rajta van-e a négyzeten.

10.14. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, absztrakt típust (ami megfelel a specifikációnak). A típusértékek: a kockák halmaza, a műveletek: egy kocka eltolása, egy kocka méretének megváltoztatása, egy kocka térfogatának kiszámítása és annak eldöntése, hogy egy térbeli pont benne van-e a kockában.