

Alkalmazott modul: Programozás

**Programozási tételek,
rendezések**

© 2015 Giachetta Roberto
groberto@inf.elte.hu
http://people.inf.elte.hu/groberto

Programozási tételek

Algoritmusok és programozási tételek

- Az egyszerű, sorozatokra alkalmazott algoritmusokat nevezzük *programozási tételek*nek, ezek a következők:
 - összegzés, számlálás
 - lineáris keresés
 - maximum keresés, feltételes maximumkeresés
 - bináris keresés
- A programozási tételek absztrakt módon fogalmazzuk meg, majd a feladatnak megfelelő átalakításokkal alkalmazzuk
 - az absztrakt megfogalmazást egész értékű sorozatokon fogalmazzuk meg, de lehetne általánosítani

Programozási tételek

Összegzés

- Az *összegzés programozási tétele* lehetővé teszi tetszőleges sorozat (a_1, \dots, a_n) adott függvény (f) szerint vett értékének összesítését (*sum*)

$$sum = \sum_{i=1}^n f(a_i)$$

- az összegzés egy ciklusban történik, az összeget egy külön változóhoz adjuk hozzá minden lépésben, amelyet egy kezdeti értékkel inicializálunk
- általában az összegző művelet az összeadás, ekkor az összeg változó 0-ról indul
- a függvény sokszor az identitás, de lehet nagyon összetett is

Programozási tételek

Összegzés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, sum : \mathbb{Z}) \quad f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: (a_j = a'_j))$$

$$R = Q \wedge (sum = \sum_{j=1}^n f(a_j))$$

$sum := 0, i := 1$
$i \leq n$
$sum := sum + f(a_j)$
$i := i + 1$

Programozási tételek

Összegzés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
int sum; // összeg változó

... // a sorozat elemei értéket kapnak

sum = 0; // az összeget kinullázzuk
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    sum = sum + f(a);
    // f tetszőleges egész függvény
}
// az eredmény a sum változóban található
```

Programozási tételek

Összegzés

Feladat: Adjuk meg az első n természetes szám összegét.

- ehhez az összegzés tételére van szükségünk, a forrás és az eredmény típusa egész, a művelet az összegzés, a kezdőérték nulla
- az értéket nem kell külön beolvasnunk, és nem kell külön eltárolnunk, ezek adott konstansok, csupán az intervallum végét, azaz n értékét kérjük be a felhasználatól
- egy számláló ciklusra lesz szükségünk, amely elmegy 1-től az n értékéig

Programozási tételek
Összegzés

Megoldás:

```
int main() {
    int sum = 0, n; // inicializálás
    cout << "Kérem n értékét: ";
    cin >> n; // beolvasás

    for (int i = 1; i <= n; i++) // összegzés
        sum += i;

    cout << "Az első " << n << " szám összege: "
         << sum << endl; // eredmény kiírása
    return 0;
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 7

Programozási tételek
Számolás

- A *számlálás programozási tétele* lehetővé teszi, hogy tetszőleges (a_1, \dots, a_n) sorozatban megsámoljuk egy adott (logikai) felvételt (β) teljesítő elemek számát (c)

$$c = \sum_{i=1}^n 1_{\beta(a_i)}$$

- a feltétel tetszőleges logikai értékű függvény
- lényegében az összegzés egy speciális esetét végezzük, ahol vagy 1-t, vagy 0-t adunk hozzá az eddigi összeghez, függően a feltétel teljesülésétől
- ezt a végrehajtásban elágazás segítségével valósítjuk meg

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 8

Programozási tételek
Összegzés

Absztrakt leírás:

$A = (a : \mathbb{Z}^n, c : \mathbb{N}) \quad \beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{L}$

$Q = (\forall j \in [1..n]: (a_j = a'_j))$

$R = Q \wedge (c = \sum_{\beta(a_i)} 1)$

```

c := 0, i := 1
while i <= n
    if beta(a_i)
        c := c + 1
        SKIP
    i := i + 1

```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 9

Programozási tételek
Összegzés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
int c; // számláló változó

... // a sorozat elemei értéket kapnak

c = 0; // az számlálót kinullázzuk
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    if (beta(a[i])) // ha teljesül a feltétel
        c++; // növeljük a számlálót
}
// eredmény a c változóban található
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 10

Programozási tételek
Számolás

Feladat: Generáljuk 100 véletlen számot 1 és 10 között, és számoljuk meg, hány páratlan van közöttük.

- használjuk a számlálás tételét, ahol a páratlanság biztosítja a feltételt (oszthatóságot a moduló segítségével ellenőrizhetünk, 2-vel osztva 1-t ad maradékul)
- a számot 0-9 közé generáljuk, majd hozzáadunk egyet
- szükségünk lesz egy számláló ciklusra

Megoldás:

```
int main() {
    srand(time(0)); // véletlen generátor indítás
    int nums[100]; // számok tömbje

```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 11

Programozási tételek
Számolás

Megoldás:

```
for (int i = 0; i < 100; i++) // generálás
    nums[i] = rand() % 10 + 1;
    // 1 és 10 közötti szám

int c = 0; // inicializálás
for (int i = 0; i < 100; i++) // számlálás
    if (nums[i] % 2 == 1) // ha páratlan a szám
        c++;

cout << "100 véletlen számból " << c
     << " volt páratlan. " << endl; // kiírás
return 0;
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 12

Programozási tételek
Lineáris keresés

- A *lineáris keresés* programozási tétele segítségével megállapíthatjuk, hogy van-e egy sorozatban egy adott feltételt teljesítő elem, és amennyiben több van, melyik az első ilyen elem.
- a teljesüléshez szükségünk van egy logikai változóra (l), és megadhatjuk magát az értéket, vagy a helyét (ind)
- amennyiben már teljesült a feltétel, akkor nincs értelme végignézni a további értékeket, hiszen a teljesülést nem befolyásolják
- ezért a ciklust korábban is terminálhatjuk úgy, hogy a logikai változót is bevesszük a ciklusfeltételbe

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 13

Programozási tételek
Lineáris keresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, l : \mathbb{L}) \quad \beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{L}$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: a_j = a'_j)$$

$$R = Q \wedge \left(l \rightarrow \left(\begin{array}{l} l = \exists j \in [1..n]: \beta(a_j) \wedge \\ ind \in [1..n] \wedge \beta(a_{ind}) \wedge \\ \forall j \in [1..ind-1]: \neg \beta(a_j) \end{array} \right) \right)$$

$l := \perp, i := 1$
$\neg l \wedge i \leq n$
$l := \beta(a_i), ind := i$
$i := i + 1$

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 14

Programozási tételek
Lineáris keresés

Megvalósítás:

```
int a[N]; // feldolgozandó sorozat
bool l = false; // teljesülés változója
int ind; // keresett hely változója

... // a sorozat elemei értéket kapnak

for (int i = 0; i < n && !l; i++)
    // a logikai érték is bekerül a feltételbe
    {
        l = beta(a[i]) // ha teljesül a feltétel
        ind = i; // növeljük a számot
    }
// eredmény az l és ind változókban található
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 15

Programozási tételek
Lineáris keresés

Feladat: 10 napon át megmértük a hőmérsékletet, mértünk-e fagypon alatti értéket, és ha igen, hányadik napon először.

- valós értékekkel dolgozunk, ugyanakkor az érték helye egész lesz
- lineáris keresést alkalmazunk, a feltétel a negatív érték

Megoldás:

```
int main() {
    float t; // aktuális napi hőmérséklet
    bool l = false;
    int ind;
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 16

Programozási tételek
Lineáris keresés

Megoldás:

```
for (int i = 1; i <= 100 && !l; i++){
    cin >> t; // napi hőmérséklet beolvasása
    l = t < 0; // feltétel ellenőrzés
    ind = i;
}
// eredmény függvényében való kiírás
if (l) // ha teljesült
    cout << "A(z) " << ind << ". napon mértünk
        először negatív értéket. " << endl;
else // ha nem teljesült a feltétel
    cout << "Nem mértünk mínusz értéket."
        << endl;
return 0;
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 17

Programozási tételek
Maximumkeresés

- Egy sorozat (adott szempont szerinti) maximumát a *maximumkeresés* programozási tételével állapíthatjuk meg.
 - megadja a maximum értékét, illetve helyét
 - mindig összehasonlítjuk az új elemet a sorozat eddigi részének maximumával, és ha nagyobb nála, akkor ő lesz az új maximum
 - ehhez a maximum értéket kezdetben valamilyen extrémális értéktől indíthatjuk el (pl. ha csak pozitív számok vannak, akkor 0-tól), vagy rögtön ráállítjuk a sorozat első elemére, így a sorozat második elemétől indul a ciklus
 - a tétel könnyen átfogalmazható minimumra

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 18

Programozási tételek
Maximumkeresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, max : \mathbb{Z})$$

$$Q = (n \geq 1 \wedge \forall j \in [1..n]: (a_j = a'_j))$$

$$R = Q \wedge (max, ind = \max(a_j))$$

$ind := 1, max := a_1, i := 2$
$i \leq n$
$a_i > max$
$ind := i, max := a_i$ <i>SKIP</i>
$i := i + 1$

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 19

Programozási tételek
Maximumkeresés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
... // a sorozat elemei értéket kapnak

int ind = 0, max = a[0];
// maximum hely és érték változók, az első
// elemre állnak
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (max < a[i]) { // ha nagyobb elemet találunk
        ind = i; // újra beállítjuk őket
        max = a[i];
    }
}
// eredmény az ind és max változóknak található
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 20

Programozási tételek
Maximumkeresés

Feladat: Minden nap megmértük a hőmérséklet egészen addig, amíg fagypont alá nem estek. Keressük meg az addig tartó tartomány legnagyobb értékét, és hogy hányadik.

- maximumkeresést alkalmazunk
- előtesztelő ciklusban dolgozunk, amely 0-nál kisebb érték esetén megáll (számolnunk kell a napokat is, hogy megállíthassuk a maximum helyét)

Megoldás:

```
int main() {
    float t; // aktuális napi hőmérséklet
    cin >> t; // első érték beolvasása
    int ind = 1, max = t, i = 1; // inicializálás
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 21

Programozási tételek
Maximumkeresés

Megoldás:

```
cin >> t; // beolvassuk a következő értéket
while (t >= 0) {
    // amíg nem lesz negatív az érték
    i++; // növeljük a sorszámot
    if (t > max) { // új maximum
        ind = i;
        max = t;
    }
    cin >> t; // beolvassuk a következő értéket
}
cout << "A maximum: " << max << ", a(z) "
    << ind << ". napon mértünk. " << endl;
return 0;
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 22

Programozási tételek
Feltételes maximumkeresés

- A maximumkeresés tételének azon változatát, ahol csak a sorozat bizonyos elemei között keressük maximumot, *feltételes maximumkeresésnek* nevezzük
- adott egy feltétel, amelyet a sorozat minden elemére megvizsgálunk, ha az elem nem teljesíti a feltételt, akkor nem teszünk semmit
- nem állíthatjuk rögtön az első elemre a maximumot, hanem csak az első olyan elemre, amely teljesíti ezt a feltételt
- nem garantált, hogy van olyan eleme a sorozatnak, ami teljesíti a feltételt, ezért egy logikai értékkel jelezniük kell, hogy találtunk-e ilyet

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 23

Programozási tételek
Feltételes maximumkeresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, max : \mathbb{Z}, l : \mathbb{L}) \quad \beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{L}$$

$$Q = (n \geq 1 \wedge \forall j \in [1..n]: (a_j = a'_j))$$

$$R = Q \wedge (l, max, ind = \max_{\beta(a_j)}(a_j))$$

$l := \downarrow, i := 1$		
$i \leq n$		
$\beta(a_i) \wedge \neg l$	$\beta(a_i) \wedge l$	$\neg \beta(a_i)$
$l := \uparrow, ind := i,$ $max := a_i$	$a > max$ $ind := i, max := a_i$ <i>SKIP</i>	<i>SKIP</i>
$i := i + 1$		

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 24

Programozási tételek

Feltételes maximumkeresés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó sorozat
... // a sorozat elemei értéket kapnak

bool l = false;
// kezdetben nincs a feltételnek eleget tevő
// elem
for (int i = 0; i < n; i++)
{
    if (beta(a[i]) && !l){ // első ilyen elem
        l = true; // mindent be kell állítanunk
        ind = i;
        max = a[i];
    }
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás

25

Programozási tételek

Feltételes maximumkeresés

Megvalósítás:

```
if (beta(a[i]) && max < a[i]){
    // ha már volt ilyen elem, és az aktuális,
    // feltételt teljesítő elem nagyobb nála
    ind = i;
    max = a[i];
    // újra beállítjuk az indexet és
    // maximumot
}
// eredmény az l, ind és max változóban található
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás

26

Programozási tételek

Példa

Feladat: Olvassunk be 10 szót a bemenetről, és adjuk meg a legrövidebb, legalább 10 hosszú szavat.

- használjunk feltételes minimumkeresést, amelynek feltétele, hogy a szó legalább 10 hosszú
- a szavak hosszát hasonlítjuk össze, a legrövidebbet keressük

Megoldás:

```
int main(){
    string word; // beolvasandó szó
    bool l = false;
    int ind;
    string min;
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás

27

Programozási tételek

Példa

Megoldás:

```
for (int i = 1; i <= 10; i++) {
    cin >> word; // szó beolvasása
    if (word.length() >= 10 && !l){
        // hossz ellenőrzése
        l = true;
        ind = i;
        min = word;
    }
    if (word.length() >= 10 &&
        word.length() < min.length()) {
        ind = i; min = word;
    }
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás

28

Programozási tételek

Példa

Megoldás:

```
if (l){
    // találtunk legalább 10 hosszú szavat
    cout << "A legrövidebb megfelelő szó "
    << min << " volt, amelyet " << ind
    << "-ként adtunk meg." << endl;
}
else {
    // nem találtunk
    cout << "Nem volt megfelelő szó." << endl;
}

return 0;
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás

29

Programozási tételek

Bináris keresés

- Amennyiben egy értéket keresünk a bemenő sorozatban, és annak elemei növekvően (vagy csökkenően) rendezettek, lehetőségünk van *bináris (logaritmikus) keresést* használni
 - a bináris keresés nem sorrendben dolgozza fel a bemenetet, hanem felhasználja a sorozat rendezettségét
 - vegyünk egy elemet a sorozatból, ha az a keresett elem, akkor végeztünk, ha kisebb, mint a keresett, akkor csak az utána lévő tartományban lehet a keresendő elem, ha pedig nagyobb, akkor az előtte lévő tartományban
 - mindig felezzük a tartományt, és a középső elemet ellenőrizzük le, nem egyezés esetén vagy az első felét, vagy a második felét vesszük a tartománynak, és így tovább

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás

30

Programozási tételek

Bináris keresés

- Pl. keressük a 73-as elemet az alábbi sorozatban:

03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93
 ↑

itt felezünk, a 40 kisebb, mint a 73, ezért következő lépésben a tartomány második felét vizsgáljuk

03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93
 ↑

03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93
 ↑

03 10 18 21 39 40 51 73 76 81 93
 ↑

Programozási tételek

Bináris keresés

- Ez az algoritmus hatékonyabb, mint a lineáris keresés, mivel esetenként sok elemet is át tud ugrani egyszerre
- A tartományt úgy szabályozzuk, hogy mindig nyilvántartjuk annak alsó, illetve felső határát, és ezt állítjuk a középső elem függvényében
- Az algoritmus addig halad, amíg meg nem találjuk az elemet, vagy üres nem lesz a tartomány (az alsó határ nagyobb, mint a felső határ)
- Csökkenő értékekkel is megfogalmazható, csak fordítani kell a relációkon

Programozási tételek

Bináris keresés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, l : \mathbb{L}, h : \mathbb{Z})$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: a_j = a'_j \wedge \forall j \in [1..n-1]: a_j \leq a_{j+1})$$

$$R = Q \wedge \left(\begin{matrix} l = \exists j \in [1..n]: a_j = h \wedge \\ l \rightarrow (ind \in [1..n]) \wedge a_{ind} = h \end{matrix} \right)$$

$lowB := 1, highB := n, l := \perp$		
$\neg l \wedge lowB \leq highB$		
$ind := (lowB + highB) / 2$		
$a_{ind} > h$	$a_{ind} < h$	$a_{ind} = h$
$highB := ind - 1$	$lowB := ind + 1$	$l := \uparrow$

Programozási tételek

Bináris keresés

Megvalósítás:

```

int a[n]; // feldolgozandó monoton növény sorozat
int h; // keresett érték
... // a sorozat és keresett érték megadása

bool l = false;
in lowB = 0, highB = n-1; // kezdő határok
while (!l && lowB <= highB)
{
    int ind = (lowB + highB) / 2; // középre állás
    if (a[ind] < h) highB = ind - 1;
    if (a[ind] > h) lowB = ind + 1;
    if (a[ind] == h) l = true; // ha megtaláltuk
}
    
```

Rendezések

Típusai

- A rendezések feladata egy adott sorozat elemeinek növekvő, vagy csökkenő sorrendbe állítása
 - az egy elemű sorozat mindig rendezett, csak a nagyobb számúkat kell rendezni
- A rendezéseknek két típusát tartjuk nyilván:
 - összehasonlító:** az elemek összehasonlításával állapítja meg az egymáshoz viszonyított sorrendjüket, ez önmagában a sorozat ismeretével levégezhető
 - nem összehasonlító:** abszolút sorrendiséget állapít meg kategóriák, és darabszámok megállapításával, amihez az elemeken felül további információk szükségesek

Rendezések

Kiválasztásos rendezés

- A kiválasztásos rendezés kiválasztja a rendezetlen részsorozat minimális (vagy maximális) elemét, és azt a rendezett részsorozat elé (vagy mögé) helyezi
 - kicseréli azt a rendezetlen részsorozat első, vagy utolsó elemével, és növeli a rendezett részsorozat hosszát
 - a rendezetlen részsorozat kezdetben az egész sorozat, majd folyamatosan csökken
 - egy ciklussal növeljük a rendezett részsorozat hosszát, ezt elég az utolsó előtti elemig futtatni (hiszen az egy elemű sorozat mindig rendezett)
 - a kiválasztáshoz szükség van egy minimum-, vagy maximumkeresésre az adott részsorozaton

Rendezések
Kiválasztásos rendezés

• Pl.: 10 03 09 04 15 04 12
 ↑
 kiválasztjuk a 3-at a rendezetlen részsorozatból, és cserélünk

03 10 09 04 15 04 12
 ↑
 a rendezett részsorozat hossza nő

03 04 09 10 15 04 12
 03 04 04 10 15 09 12
 03 04 04 09 15 10 12
 03 04 04 09 10 15 12
 03 04 04 09 10 12 15

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 37

Rendezések
Kiválasztásos rendezés

Absztrakt leírás:

$$A = (a : \mathbb{Z}^n, ind : \mathbb{N}, l : \mathbb{L}, h : \mathbb{Z})$$

$$Q = (\forall j \in [1..n]: a_j = a'_j)$$

$$R = \left(\{a_1, \dots, a_n\} = \{a'_1, \dots, a'_n\} \wedge \forall j \in [1..n-1]: a_j \leq a_{j+1} \right)$$

$j := 1$
$j \leq n - 1$
$ind, max := minSearch(a[j .. n])$
$swap(a_{ind}, a_j)$
$j := j + 1$

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 38

Rendezések
Kiválasztásos rendezés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó monoton növény sorozat
... // a sorozat megadása

for (int j = 0; j < n - 1; j++){
    int ind = minSearch(a, j, n);
    // maximumkeresés a résztömbön

    int temp = a[ind]; // két elem cseréje
    a[ind] = a[j];
    a[j] = temp;
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 39

Rendezések
Kiválasztásos rendezés

Feladat: Olvassunk be 10 sort a bemenetről, és rendezzük őket hossz szerint növekvő sorrendbe.

- használjunk maximumkiválasztásos rendezést a sor hosszára
- mivel a sorokat többször is fel kell dolgozni, mindenképpen el kell tárolnunk őket egy tömbbe

Megoldás:

```
int main() {
    string lines[10]; // a sorok
    for (int i = 0; i < 10; i++) // beolvasás
        getline(cin, lines[i]); // soronként
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 40

Rendezések
Maximumkeresés

Megoldás:

```
for (int j = 0; j < 9; j++){ // rendezés
    int ind = j; // maximumkeresés
    for (int i = j; i < 10; i++){
        if (lines[i].length() >
            lines[ind].length()){
            ind = i;
        }
    }
    string temp = lines[ind]; // elemek cseréje
    lines[ind] = lines[j];
    lines[j] = temp;
}
return 0;
}
```

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 41

Rendezések
Buborékrendezés

- A buborékrendezés összehasonlít egy elemet a rákövetkezővel, és amennyiben rossz sorrendben vannak, megcseréli őket
- így az elemek „felbuborékolódnak” a rendezetlen részsorozat végére
- egy külső ciklus szabályozza, hogy hány rendezetlen elem van még a sorozatban (ez a második elemig halad visszafelé, hiszen az egy hosszú sorozatot már nem kell rendezni)
- a belső ciklus végighalad a rendezetlen részsorozatban az elejétől annak utolsó előtti eleméig, ellenőrzi, hogy az elemek rossz sorrendben vannak-e, és amennyiben igen, megcseréli őket

ELTE IK, Alkalmazott modul: Programozás 42

Rendezések

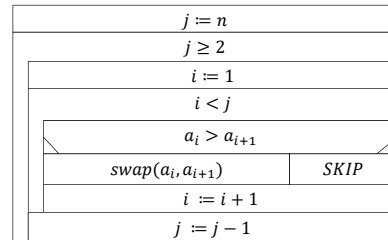
Buborékrendezés

- Pl.:
10 03 09 04 15 04 12 ← belső ciklus indul
03 10 09 04 15 04 12 ← ha rossz a sorrend, cserél
03 09 10 04 15 04 12
03 09 04 10 15 04 12
03 09 04 10 15 04 12
03 09 04 10 04 15 12
03 09 04 10 04 12 15 ← belső ciklus vége, a külső ciklus lép egyet vissza
...

Rendezések

Buborékrendezés

Absztrakt leírás:



Rendezések

Buborékrendezés

Megvalósítás:

```
int a[n]; // feldolgozandó monoton növény sorozat
... // a sorozat megadása

for (int j = n - 1; j > 0; j--){ // külső ciklus
  for (int i = 0; i < j; i++){ // belső ciklus
    if (a[i] > a[i + 1]){
      // ha rossz a sorrend
      int temp = a[i]; // két elem cseréje
      a[i] = a[i + 1];
      a[i + 1] = temp;
    }
  }
}
```