GVMST22GNC Statisztika II.

3. előadás: 8. Hipotézisvizsgálat

Kóczy Á. László

Keleti Károly Gazdasági Kar – Vállalkozásmenedzsment Intézet

Hipotézisvizsgálat v becslés

Becslés

- Ismeretlen paraméter
- Közelítő értéket adunk meg

Hipotézisvizsgálat

- Feltételezett paraméter
- Állítás helyességét igazoljuk

Hipotézis

Egy v több sokaságra vonatkozó állítás.

Vonatkozhat eloszlásra, v az eloszlás egyes paramétereire.

Null- és alternatív hipotézis

Nullhipotézis (H_0) és alternatív- (v. ellen-) hipotézis (H_1):

- Kölcsönösen kizárják egymást
- A nullhipotézis rendszerint egyszerű

Egy hipotézis lehet

- Egyszerű: egyenlőség
- Összetett: több hipotézis összessége

Példák:

$$H_0 : \mu = m_0 \qquad H_1 : \mu \neq m_0$$

$$H_0 : \mu = m_0 \qquad H_1 : \mu < m_0$$

- Alapvetően a nullhipotézisről döntünk
- Az ellenhipotézis segítségével
- Pontosan 1 hipotézist fogadunk el
- (Ha a nullhipotézist elutasítjuk, az ellenhipotézist elfogadjuk)

Statisztikai próba 1/3

Statisztikai próba

Eljárás, mely során a minta alapján döntünk a nullhipotézis elfogadásáról, vagy elutasításáról.

Próbafüggvény

A mintaelemek olyan függvénye melynek valószínűségeloszlása megadható biz adatok ismeretében ha elfogadjuk a nullhipotézist.

Statisztikai próba 2/3

Példa: z-próbafüggvény

Ha

- $H_0 : \mu = m_0$
- az alapsokaság normális eloszlású
- a minta független, azonos eloszlású
- a sokaság szórása ismert, σ

$$z = \frac{\widehat{\mu} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

standard normális eloszlású.

Statisztikai próba 3/3

A próbafüggvény konkrét mintára kiszámított értéke eshet

- a $[c_a; c_f]$ elfogadási tartományba (ekkor H_0-t elfogadjuk), vagy
- a komplementer elutasítási (v kritikus) tartományba (ekkor H_0-t elutasítjuk).

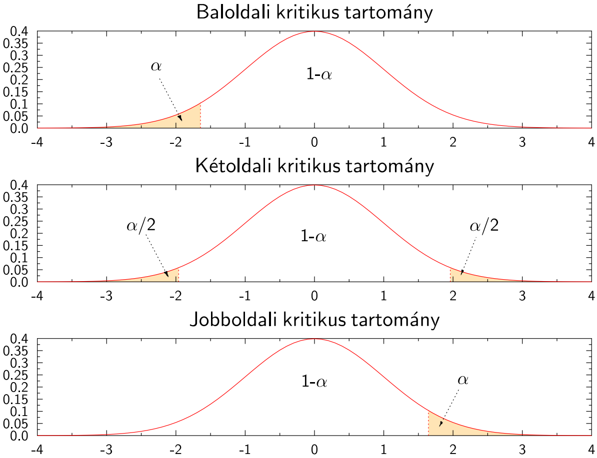
Szignifikanciaszint

A próbafüggvény kritikus tartományba esésének valószínűsége

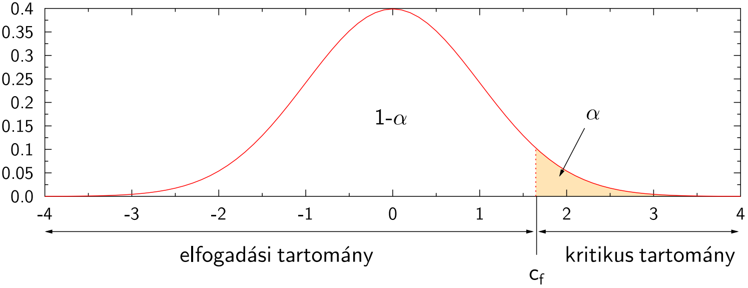
A kritikus tartomány elhelyezkedése szerint lehet

- bal oldali
- kétoldali
- jobb oldali

Kritikus tartományok és értékek



Kritikus tartományok és értékek 2



Vizsgálati hibák

A döntés valószínűségi – kockázattal jár

- Ha H_0 igaz, mégis elvetjük – ez az **elsőfajú hiba**. Valószínűsége α – a próba szignifikanciaszintje.
- Ha H_0 nem igaz mégsem vetjük el – ez a **másodfajú hiba**. Valószínűsége β.

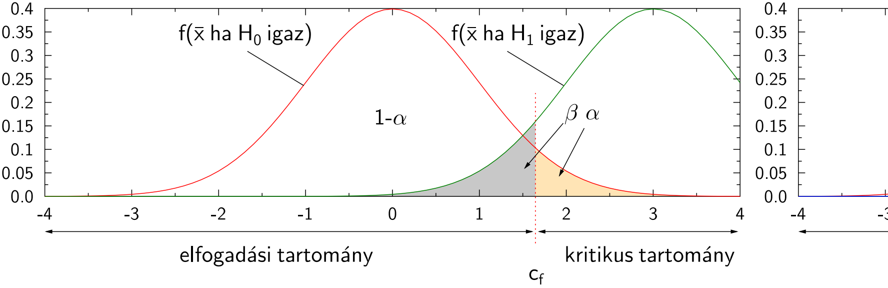
igaz hipotézis	elfogadott hipotézis: H_0	elfogadott hipotézis: H_1
H_0	helyes döntés $1-\alpha$	elsőfajú hiba α
H_1	másodfajú hiba β	helyes döntés $1-\beta$

A másodfajú hiba súlyosabb, hiszen ekkor a hibás eredmény korrigálására nincs lehetőség.

Erőfüggvény

$1-\beta$ (másodfajú hiba elkerülésének valószínűsége) az egyszerű alternatív hipotézishez tartozó ismérvértékek függvényében.

Vizsgálati hibák 2



A statisztikai hipotézisvizsgálat menete

1. A H_0 null- és H_1 alternatív hipotézis megfogalmazása.
2. A megfelelő próbafüggvény megkeresése.
3. A szignifikanciaszint megválasztása.
4. Az elfogadási és visszautasítási tartományok meghatározása.
5. Mintavétel, a mintajellemzők és ebből a próbafüggvény értékének meghatározása
6. Döntünk a H_0 és H_1 hipotézisekről.

Egymintás z-próba

$H_0 : \mu = m_0 \qquad H_1 : \mu < m_0$ vagy $H_1 : \mu > m_0$ vagy $H_1 : \mu \neq m_0$

A sokaság normális eloszlású; a σ szórás ismert.

$$z = \frac{\widehat{\mu} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \text{Konkrét mintában: } z_0 = \frac{\bar{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Az elfogadási tartomány határai a következők:

Alternatív hipotézis	$\mu < m_0$	$\mu \neq m_0$	$\mu > m_0$
Elfogadási tartomány	$[z_\alpha; \infty[$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$	$]-\infty; z_{1-\alpha}]$

Használható bármely véges szórású, nagy elemszámú független minta esetén is (becsült szórással).

Egymintás t-próba

$H_0 : \mu = m_0 \qquad H_1 : \mu < m_0$ vagy $H_1 : \mu > m_0$ vagy $H_1 : \mu \neq m_0$

A sokaság normális eloszlású; a σ szórás nem ismert.

$$t = \frac{\widehat{\mu} - m_0}{\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \qquad \text{Konkrét mintában: } t_0 = \frac{\bar{x} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Az elfogadási tartomány határai a következők:

Alternatív hipotézis	$\mu < m_0$	$\mu \neq m_0$	$\mu > m_0$
Elfogadási tartomány	$\left[t_{\alpha}^{szf}; \infty\right[$	$\left[t_{\frac{\alpha}{2}}^{szf}; t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{szf}\right]$	$\left]-\infty; t_{1-\alpha}^{szf}\right]$

Szórásra vonatkozó próba

$H_0 : \sigma = \sigma_0$ $\quad$ $H_1 : \sigma < \sigma_0$ vagy $H_1 : \sigma > \sigma_0$ vagy $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$

A sokaság normális eloszlású.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} \qquad \text{Konkrét mintában: } \chi^2 = \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma_0^2},$$

mely $szf = n - 1$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ.
Az elfogadási tartomány határai a következők:

Alternatív hipotézis	$\sigma < \sigma_0$	$\sigma \neq \sigma_0$	$\sigma > \sigma_0$
Elfogadási tartomány	$\left[\chi^2_{\alpha,szf}; \infty\right[$	$\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2},szf}; \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},szf}\right]$	$\left[0; \chi^2_{1-\alpha,szf}\right]$

Sokasági arányszámmal (valószínűséggel) kapcs próba

P meghatározott típusú egyedek előfordulásának valószínűsége. Azt vizsgáljuk, hogy ez az arány megfelel-e egy feltételezett P_0 aránynak (azaz $H_0 : P = P_0$). Legyen

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{ha megvan a tulajdonság,} \\ 0 & \text{ha nincs.} \end{cases}$$

Ekkor $M(\xi_i) = P_0$ és $D(\xi) = \sqrt{P_0(1 - P_0)}$,
illetve $\widehat{p} = \frac{\sum \xi_i}{n}$, $M(\widehat{p}) = P_0$, $D(\widehat{p}) = \sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}$. Ebből:

$$z_{P_0} = \frac{\widehat{p} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

standardizált; nagy n esetén pedig közel normális.

Kétmintás statisztikai próbák

Két sokaság összehasonlítása – a hipotézis a két ismérv összehasonlítására vonatkozik.

PI: két technológia, férfiak/nők, falu/város összehasonlítása

A két sokaságot két véletlen, független minta képviseli

Várható értékek különbségének vizsgálata

Két sokaság: μ_1, σ_1 és μ_2, σ_2; véletlen független minták.

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1 : \mu_1 < \mu_2$ vagy $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ vagy $H_1 : \mu_1 > \mu_2$

Ha mindkét sokaság normális eloszlású és a szórások ismertek:
$M(\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2) = 0$, és $D(\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2) = D(\widehat{\mu}_1) + D(\widehat{\mu}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$
(függetlenség), így

$$z = \frac{\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \qquad \text{konkrét mintára: } z_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

standard normális eloszlást követnek.
Ha a szórás nem ismert, de a minta nagy, σ helyett $\widehat{\sigma}$, ill. $\widehat{\sigma}$ helyett s használatos.

Várható értékek különbségének vizsgálata – kis minta (kétmintás t-próba)

Kis minta esetén, ha

- normális eloszlású sokaságok
- az ismeretlen szórások egyenlősége feltételezhető

Ekkor

$$t = \frac{\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\widehat{\sigma}_1^2+(n_2-1)\widehat{\sigma}_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}},$$

$$\text{ill.:}\ \ t_0 = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

$szf = n_1 + n_2 - 2$ szabadságfokú Student t-eloszlást követ.

Két sokasági arányra vonatkozó próba

$$H_0 : P_1 - P_2 = \varepsilon_0$$

Két *nagy* minta esetén a próbafüggvény:

$$z_p = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}, \text{ ill.: } z_{0(p)} = \frac{p_1 - p_2 - \varepsilon_0}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

Két sokasági szórás egyezőségére vonatkozó (F-) próba

A szórások egyezését kétmintás t-próbánál feltételezzük – itt ellenőrizzük.

- A sokaság eloszlása (jó közelítéssel) normális

$$H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$$
$$\text{A próbafüggvény:} \quad F = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$szf_1 = n_1 - 1$ és $szf_2 = n_2 - 1$ szabadságfokú F eloszlást alkot.

Táblázatból c_f olvasható ki, $F^{szf_1}_{szf_2(p)} = \frac{1}{F^{szf_2}_{szf_1(1-p)}}$

Alt. hipotézis:	$\sigma_1 < \sigma_2$	$\sigma_1 \neq \sigma_2$	$\sigma_1 < \sigma_2$
Elfogadási tart.	$\left[F^{szf_1}_{szf_2(\alpha)}; \infty\right[$	$\left[F^{szf_1}_{szf_2(\frac{\alpha}{2})}; F^{szf_1}_{szf_2(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$	$\left[0; F^{szf_1}_{szf_2(1-\alpha)}\right]$

Egyéb vizsgálatok

Eddig: paraméterek helyességét vizsgáltuk.
Most: magát az eloszlást

Illeszkedésvizsgálat

Egy valószínűségi változó eloszlására vonatkozó hipotézis vizsgálata.

1. Ha az eloszlás paramétereire is van feltételezés: tiszta illeszkedésvizsgálat.
2. Ha csak az eloszlás típusára: becsléses illeszkedésvizsgálat.

Illeszkedésvizsgálat 1

Kategóriák ismérvértéke	Előfordulási gyakoriság a mintában	Előfordulási gyakoriság a konkrét mintában	Előfordulási valószínűség
X_1	ν_1	n_1	P_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_i	ν_i	n_i	P_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_k	ν_k	n_k	P_k
Összesen	n	n	1

$H_0 : P(X_i) = P_i$ minden i-re $\quad H_1$: létezik olyan i, hogy $P(X_i) \neq P_i$

Ekkor $M(\nu_i) = nP_i$, az eltérés kifejezhető mint $\sum(\nu_i - nP_i)^2$.

Illeszkedésvizsgálat 2

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - nP_i)^2}{nP_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\nu_i - \nu_i^*)^2}{\nu_i^*},$$

ami $szf = k - b - 1$ szabadságfokú χ^2-eloszlást követ

- $b =$ becsült paraméterek száma a P_i-k meghatározásánál
- $k =$ a kategóriák száma.

H_1 esetén a próbafüggvény nagyobb $\Rightarrow$ jobb oldali kritikus tartomány.
Az elfogadási tartomány $\left[0, \chi^2_{1-\alpha(szf)}\right]$.
Konkrét minta esetén

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \nu_i^*)^2}{\nu_i^*},$$

Függetlenségvizsgálat

Függetlenségvizsgálat

Azon nullhipotézis vizsgálata, hogy két ismérv független egymástól.

Ha a teljes sokaságot ismerjük $\Rightarrow$ Statisztika I.
Itt: mintából.

$H_0 : P_{ij} = P_{i\cdot}P_{\cdot j}$ minden i, j-re $\quad$ H_1 : létezik olyan i, j, hogy $P_{ij} \neq P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(\nu_{ij} - nP_{i\cdot}P_{\cdot j})^2}{nP_{i\cdot}P_{\cdot j}} = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(\nu_{ij} - \nu_{ij}^*)^2}{\nu_{ij}^*}$$

konkrét mintára: $$= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}\frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*}$$

ami χ^2 eloszlás $s \cdot t - 1$ szabadságfokkal.
Elfogadás, ha a $[0; \chi^2_{1-\alpha(p)}]$ tartományba esik.

Varianciaanalízis

Varianciaanalízis

Több azonos szórású normális eloszlású mintát vizsgál várható érték egyezésre.

A sokaságot M részsokaságra bontjuk nominális skála alapján, ezekből mintát veszünk.

$$\xi_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

- ξ_{ij}: j-edik sokaságból jövő i-edik megfigyelés
- μ: az egész sokaság várható értéke
- β_j: sokasági hatás; a j részsokaságra jellemző konstans
- ε_{ij}: véletlen ingadozás $N(0, \sigma)$ szerint.

Varianciaanalízis 2

$H_0 : \mu_i = \mu_j$ minden i, j-re $\quad H_1$: létezik olyan i, j, hogy$\mu_i \neq \mu_j$

$\sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{n_j} (\xi_{ij} - \hat{\mu})^2$ alapján a próbafüggvény

$$F = \frac{\hat{\sigma_K^2}}{\frac{\sum_{j=1}^{M}(n_j-1)\hat{\sigma}_j^2}{n-M}}$$

ami $szf_1 = M - 1$ és $szf_2 = n - M$ szabadságfokú F-eloszlás, ha H_0 igaz.

H_1 esetén az érték nagyobb $\Rightarrow$ jobb oldali kritikus tartomány.

Összefoglalás

próba	H_0	próbafüggvény	pf. eloszl.	elfogadási tartomány
Egymintás z	$\mu = m_0$	$z = \frac{\widehat{\mu}-m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$N(0,1)$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
Egymintás t	$\mu = m_0$	$z = \frac{\widehat{\mu}-m_0}{\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}}$	$t^{(n-1)}$	$\left[t^{(n-1)}_{\frac{\alpha}{2}}; t^{(n-1)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
Szórásra v.	$\sigma = \sigma_0$	$\chi^2 = \frac{(n-1)\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2_{\alpha,(n-1)}$	$\left[\chi^2_{\frac{\alpha}{2},szf}; \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},szf}\right]$
Arány	$P = P_0$	$z_{P_0} = \frac{\widehat{p}-P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
Kétmintás z	$\mu_1 = \mu_2$	$z = \frac{\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
Kétmintás t	$\mu_1 = \mu_2$	$\frac{\widehat{\mu}_1-\widehat{\mu}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\widehat{\sigma}_1^2+(n_2-1)\widehat{\sigma}_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$	$t^{(n_1+n_2-2)}$	$\left[t^{(n_1+n_2-2)}_{\frac{\alpha}{2}}; t^{(n_1+n_2-2)}_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
2 arány v.	$P_1 - P_2 = \varepsilon_0$	$z_p = \frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2-\varepsilon_0}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}+\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}}$	$N(0,1)$	$\left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
F-próba	$\sigma_1 = \sigma_2$	$F = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$F^{n_1-1}_{n_2-1(p)}$	$\left[F^{n_1-1}_{n_2-1(\frac{\alpha}{2})}; F^{n_1-1}_{n_2-1(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$
Illeszkedés	$P(X_i) = P_i \forall i$	$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i-nP_i)^2}{nP_i}$	$\chi^2_{\alpha,(k-b-1)}$	$\left[0; \chi^2_{1-\alpha(szf)}\right]$
Függetlenség	$P_{ij} = P_{i\cdot}P_{\cdot j} \forall i,j$	$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t \frac{(v_{ij}-nP_{i\cdot}P_{\cdot j})^2}{nP_{i\cdot}P_{\cdot j}}$	$\chi^2_{\alpha,(s\cdot t-1)}$	$\left[0; \chi^2_{1-\alpha(p)}\right]$
Varianciaa.	$\mu_i = \mu_j \forall i,j$	$F = \frac{\hat{\sigma}_K^2}{\frac{\sum_{j=1}^M (n_j-1)\hat{\sigma}_j^2}{n-M}}$	$F^{M-1}_{n-M(p)}$	$\left[0; F^{M-1}_{n-M(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$

8.1. Gyakorlófeladat

A zacskóba csomagolt 1 kg-os kristálycukor tömegének ellenőrzésére 10 elemű véletlen mintát vettünk. Feltételezhető, hogy a csomagolóautomata normális eloszlással tölt.
Mérési eredmények dkg-ban:
96; 96; 97; 100; 98; 98; 96; 99; 101; 102.
A töltősúly szórásának megengedett mértéke 1 dkg.

Feladat:

(a) Ellenőrizzük, hogy a kristálycukor töltési tömege megfelel-e a szabványnak! ($\alpha = 1\%$.)

(b) Ellenőrizzük 5%-os szignifikanciaszinten azt a feltevést, hogy a csomagolási tömeg szórása meghaladja az 1 dkg-os mértéket!

8.1. Gyakorlófeladat (a)

Összefoglalás + (a) feladat

$\mu_0 = 100$, $x_i = 96; 96; 97; 100; 98; 98; 96; 99; 101; 102$ $(i = 1, \ldots, 10)$.

$$H_0 : \mu = 100 \quad H_1 : \mu \neq 100 \quad \text{Kétoldali próba}$$

$$z_0 = \frac{\bar{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{96*3+97+98*2+99+100+101+102}{10} - 100}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{-1,7}{\frac{1}{3,16}} = -5,38$$

Az elfogadási tartomány $\left[z_{\frac{\alpha}{2}}; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] = [-2,58; 2,58]$.

z_0 nem esik az elfogadási tartományba, H_0-t elvetjük.

8.1. Gyakorlófeladat (b) Egymintás szóráspróba

$H_0 : \sigma = 1 \quad H_1 : \sigma > 1$ Egyoldali próba, jobboldali kritikus tart.

$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \quad s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$

$\bar{x} = 98,3 \quad s^2 = \frac{(96-98,3)^2 \cdots (102-98,3)^2}{10-1} = \frac{42,1}{9} = 4,68$

Ebből $\chi_0^2 = \frac{42,1}{1} = 42,1$.

$\alpha = 5\%$, szf$= n - 1 = 9$, a jobbo.-i kritikus érték $\chi^2_{0,95(9)} = 16,9$.

$42,1 > 16,9$, tehát a (jobb oldali) kritikus tartományba esik. A feltevés helytelen, a szórás nagyobb.

8.13. Gyakorlófeladat

Egy marketinggel foglalkozó cég vezetője arra kiváncsi, hogy jól képzett munkatársainak ügynöki teljesítménye független-e az életkortól. Az adatokat úgy gyűjtötték, hogy egy hónap alatt hány darabot sikerült az ügynöknek eladni. A 600 elemű minta alapján:

	Eladások száma			
Kor	5-9	10-15	16-20	összesen
-30	50	80	70	200
30-40	80	90	90	260
40+	60	50	30	140
összesen	190	220	190	600

Befolyásolja-e az életkor az ügynökök munkájának eredményességét? ($\alpha = 5\%$)

8.13. Gyakorlófeladat: Függetlenségvizsgálat

H_0 : függetlenség: $P_{ij} = P_{i.}P_{.j} \forall i, j$, $H_1 : \exists i, j : P_{ij} \neq P_{i.}P_{.j}$

	Eladások száma						
Kor	5-9		10-15		16-20		összesen
-30	50	63,3	80	73,3	70	63,3	200
	-13,3	176,89	6,7	44,89	6,7	44,89	
30-40	80	82,3	90	95,3	90	82,3	260
	-2,3	5,29	-5,3	28,09	7,7	59,29	
40+	60	44,3	50	51,3	30	44,3	140
	15,7	246,49	-1,3	1,69	-14,3	204,49	
összesen	190		220		190		600

$$\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot n}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot} n_{\cdot n}}{n}} = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} \frac{\left(n_{ij} - n_{ij}^*\right)^2}{n_{ij}^*} = 812.$$

A szf száma $(s-1)(t-1)$, így a kritikus érték
$\chi^2_{1-\alpha(szf)} = \chi^2_{0{,}95(4)} = 9,49.$
Mivel $812 > 9,49$, a nullhipotézist elutasítjuk.