



Írta:
BLÁZSIK ZOLTÁN

GAZDASÁGI FOLYAMATOK MATEMATIKAI MODELLEZÉSE

Egyetemi tananyag



2011

COPYRIGHT: © 2011–2016, Dr. Blázsik Zoltán, Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar Számítógépes Optimalizálás Tanszék

LEKTORÁLTA: Dr. Nagy Tamás, Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Alkalmazott Matematikai Tanszék

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)

A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjeleníthető és előadható, de nem módosítható.

TÁMOGATÁS:

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzetekhez” című projekt keretében.



ISBN 978 963 279 493 8

KÉSZÜLT: a [Typotex Kiadó](#) gondozásában

FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa

AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Gerner József

KULCSSZAVAK:

projekt, mohó, gráf, matroid, lineáris, pénzügyi, folyam, döntés, tőke, kockázat, játék, programozás.

ÖSSZEFOGLALÁS:

Gazdálkodási kérdésekben forduljunk a matematika, informatika, közgazdaságtudomány modelljeihez, a megoldási módszereket, az eredményeket alkalmazzuk a felmerült gyakorlati problémákban. Bár az élet bonyolultabb feladatokat vet fel, az absztrakt, leegyszerűsített fogalmak vizsgálata segít eligazodni a komplex folyamatokban is. A természettudományok módszeréhez hasonlóan az optimalizálási problémákban is megkülönböztetjük a lényeges tényezőket, elhanyagolva a kisebb jelentőségű hatásokat. A komputer is csak úgy tud segíteni, ha érvényesen kérdezzük. A kisebb objektumok, célok helyes megtervezése, majd az összetevők szintézise elvezethet a megoldáshoz. A jegyzet bemutat jól ismert alapvető problémákat, felvet gyakorlat-közeli megoldandó feladatokat, meg is oldja őket vagy szakirodalmi hivatkozásokra utal. Mai elméleti kutatásokat is megemlít, amelyek később hatékonyabbá tehetik a számítógépes algoritmusokat.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. Gazdálkodási kérdések megfogalmazása	6
1.2. A matematikai modell	7
1.3. Optimalizálási feladatok	9
2. Egy raktározási probléma	10
3. Gráfok, utak, projektek	13
3.1. Legrövidebb utak	15
3.2. Projekt tervezés, CPM, PERT	17
4. A mohó algoritmus	22
4.1. Fontos feladatok hasonlósága	22
4.2. Matroidok	25
4.3. Mikor működik a mohó algoritmus?	27
5. Gyártási folyamatok szintézise	30
5.1. Struktúrális modell	30
5.2. A súlyozott PNS modell	35
5.3. Mennyire nehéz a folyamatszintézis?	36
6. Minimális költségű hálózati folyamatok	38
6.1. Hálózati simplex módszer	41
7. Pénzügyi tervezés	44
7.1. Érzékenység vizsgálat, árnyékár	45
7.1.1. A duális feladat gazdasági jelentése	46
8. Tőkeallokáció, portfólió összeállítás	49
8.1. Portfólió kiválasztás	50
9. Kockázatos döntések, befektetések	52
9.1. Döntési fák	53
9.2. A Markowitz-modell	55

10. Egyéni vagy közösségi érdek	57
10.1. Maximum Játékok	58
10.1.1. Nash-útválasztások létezése a maximum játékokban	58
10.1.2. Az anarchia ára a maximum játékokban	59
10.2. Összeg játékok	60
10.2.1. Egy Nash-útválasztás nélküli összeg játék	61
11. Lineáris regresszió	62
11.1. L^2 -regresszió	64
11.2. L^1 -regresszió	66
12. Ciklizálás a szimplex módszerben	69
12.1. Egy kis példa	69
12.2. A 2/6-os példák elemzése	70
13. A szimplex módszer lépésszámáról	75
13.1. A Szimplex módszer tanulmányozása	77
13.2. A totálisan unimoduláris mátrixú LP esete	80
13.3. Alkalmazás a Markov Döntési Problémára	80
14. Szakirodalom	82

1. fejezet

Bevezetés

A – Gazdasági folyamatok matematikai modellezése – tárgy a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar (SZTE TTIK) Gazdaságinformatikus szakának (MSc) egyik kurzusa. Az eddigi TTIK szakokon hasonló tantárgy oktatására korábban nem került még sor. A gazdaságban felmerült problémák megoldása előtt bizonyos tényezők fontosságának, mások elhanyagolhatóságának megállapítása szükséges. Ugyanez történik a természettudományokban is a matematikai modell felállítása előtt. A siker mértéke általában már a modellalkotásnál eldől. Megpróbálunk kapcsolatot teremteni a BSc-s alapozó tárgyak matematikai, informatikai anyaga és a gazdasági életben felmerülő konkrét, egzakt módon megfogalmazható probléma halmaz között. Az üzleti, pénzügyi világban gyakorlati oldalról közelítenek, meglévő módszereket alkalmaznak, oktatnak. A tárgy keretében igyekszünk egy-egy fejezetet szánni matematikai, informatikai modellek bemutatására, azok megoldására, algoritmizálására, a legkülönbözőbb területekről vett példákkal alátámasztva ezek hasznosságát. Rámutatunk egyes elképzelések érzékenységre a megváltozott körülményekre, bemeneti adatokra vonatkozóan.

A kurzushoz kapcsolódó jegyzetünk más szakokon, sőt egyéb intézményekben tanuló hallgatóknak, más megnevezésű tantárgyak elsajátításához is értékes segédanyag lehet. Így pl. a Budapesti Corvinus Egyetem Gazdaság-matematikai elemző szakán, a Budapesti Műszaki Főiskola környezetmérnöki szakán, a Modern Üzleti Tudományok Főiskolája Gazdasági Matematika kurzusához, a győri Széchenyi István Egyetem Logisztikai és szállítmányozási menedzser szakán, a Budapesti Gazdasági Főiskola Matematikai modellezés, a Nyíregyházi Főiskola Gazdasági Matematika című tárgyához és az Operációkutatás vagy az Ökonometria tárgyhoz számos intézményben. Érdemes külön is szólni a veszprémi Pannon Egyetemmel kialakult szoros kapcsolatról. Az ottani Közgazdasági elemző mesterszak hallgatói is használhatják majd a mi jegyzetünket, egy-egy téma más oldalról történő megközelítésére. A közös kutatási témáink és ipari alkalmazási területeink közül kiemelem a Process Network Synthesis (PNS) módszertanát. A jegyzetben külön fejezet szól a témakör elhelyezkedéséről a kombinatorikus optimalizáláson belül. A Hálózati Folyamatok Szintézise elméletét a vegyipari folyamatok vizsgálata hívta életre, de számos egyéb alkalmazása lehet. Ez is egy modell, amely sikerrel alkalmazható valós problémák vizsgálatára.

A jegyzet lehetőséget nyújt majd arra, hogy a diszkrét matematika különböző területeinek alapvető eredményeit használjuk egyes gyakorlati problémák megoldására, a kapott eredmé-

nyek összevetésére. A gráfelmélet, a folyamatok elmélete, az operációkutatás, a kombinatorikus struktúrák törvényszerűségeinek vizsgálata, a diszkrét optimalizálás mind–mind kapcsolódó diszciplína. Az új kurzus a modellek felállítására és azok alkalmazhatóságára helyezi a hangsúlyt. Bizonyos modelleket megoldó algoritmusok leírása, mintafeladatokon történő elmagyarázása is a jegyzet része. Gyakorló példák segítik a jobb megértést. A jegyzet nem teljesen azonos a szegedi kurzus anyagával. Bizonyos fejezetekhez más könyveket, jegyzeteket is használunk, másrészt olyan fejezetek is bekerültek ebbe a munkába, amelyek olvasmány jellegűek, nagyon friss kutatásokat adnak közre, vagy magyarul még nem voltak eddig elérhetőek. Az irodalomjegyzék utal majd az egyes fejezetek kimerítő tárgyalását felvállaló munkákra, de bizonyos kimaradt témákat feldolgozó művekre is, matematikai, informatikai vagy éppen közgazdasági területen. Számos esetben előfordul, hogy a komoly elméleti tudással rendelkező tudós nem tud szót érteni a gyakorlati életben vállalkozó üzletemberrel. Az egyikük megoldást tudna adni a másik által felvetett kérdésre, de nem értik egymás kifejezéseit. Az informatikus meg tudná oldani a matematikai modellt, ha a menedzser a feladatot jól megfogalmazná. A hallgatók egy része elméleti szakember lesz, nagyobb arányban azonban sikeres üzletemberré kívánnak válni. Fontos lenne, hogy beszéljék egymás nyelvét.

1.1. Gazdálkodási kérdések megfogalmazása

A gazdasági élet egy szereplőjéről feltételezhetjük, hogy saját magának jót akar. Talán nem számol azzal, hogy minden energiáját leköti majd a vállalkozása, nem lesz elég szabadideje, kevesebb figyelem jut a családjára, de az biztos, hogy sikeres céget szeretne. Mit értünk ez alatt? Azt mindenesetre, hogy közép vagy hosszú távon ő és a családja meg tudjon élni a választott tevékenységéből. Ehhez az kell, hogy nyereséges legyen, vagyis hasznot hozzon a befektetett pénz. Kell beruházás, folyamatosan költségek merülnek fel, mindezt a bevételnek fedeznie kell. Sőt elegendő nyereség szükséges ahhoz, hogy fenntartható legyen a családi béke – ami a tisztas jövedelmet illeti -, amiért dolgozik a magánvállalkozó és családja.

Zöldséges bolt

A vállalkozók szülei sokat dolgoztak a földeken, megtermelték a családnak szükséges élelmiszert, tanították a gyerekeket, de meg nem gazdagodtak. A gyermekeknek szebb jövőt szántak, ezért támogatták azok egyetemi tanulását is. A fiúk értettek a mezőgazdasághoz, viszont ki szerettek volna törni, nem a termelést hanem a kereskedést választották hivatásuknak. Korábban azt gondolták, hogy a zöldségek, gyümölcsök fogyasztói árában csak kis részt tesz ki a termelői ár, így ezt igazságtalannak is tartották. Nyitnak tehát egy zöldséges üzletet, kipróbálják a másik oldalt is, az sokkal jövedelmezőbbnek tűnik. A szüleiknek csak az időjárás kiszámíthatatlanságával kellett megküzdeni, hányszor volt a kert víz alatt, sújtotta aszály a gabonatermést.

Vajon milyen gondok merülnek fel egy zöldséges üzletben? Hogyan lesz sikeres a vállalkozás?

- Hol legyen a bolt? A hely kiválasztásakor figyelembe kell venni a helyiség méretét, az elhelyezkedését a településen belül, a rezsiköltségeket, a bérleti díját.

- Milyen árukat tartsanak az üzlethelyiségben? Néha a kevesebb több, de egyes vásárlók szeretik a bő áruválasztékot. A sokféle áru egyrészt szakértelmet, másrészt kiterjedt beszállítói hálózatot igényel.
- Kik legyenek az eladók és egyéb munkatársak? Milyen foglalkoztatási formában? Milyen lesz a munkaszervezés? Milyen nyitvatartás lenne megfelelő?
- A rendelkezésre álló induló tőkéből a legfontosabb beruházásokat meg kell valósítani. Milyen beruházásokra van szükség? Vajon melyek a legfontosabbak? Döntsünk a jól működő bolt érdekében! De ha pl. döntöttünk egy konkrét beruházás mellett, akkor annak a megvalósításának módja egy újabb komplex feladat.

A fenti kérdések így merülnek fel, de ha valakihez tanácsért fordulnánk, akkor a szakértőnek sok kérdése lenne, amelyeket a megrendelőnek meg kell válaszolnia. Természetesen a tanácsadó több hasonló helyzetben tudott már segíteni, tehát az egzaktabb problémafelvetések megfogalmazásában is lehet rá számítani.

- El kell dönteni, milyen tényezőkkel számoljunk, amikor ki akarjuk választani a bolt helyét. Legyen közel a tulajdonos lakóhelyéhez, hogy irányítási, ellenőrzési feladatait kényelmesen el tudja látni? Mindenképpen legyen legalább $150m^2$ a területe? Legyen a forgalmas belvárosban, de akkor magasabb a bérleti díja!? Melyik a fontosabb, hogyan vethető össze a két ellentétesnek tűnő szempont?
- Hány östermelővel, illetve nagykereskedővel akarunk kapcsolatba kerülni? Konkrétan a helyzet, ha ezek számát 2, 3 vagy 4-ben állapítjuk meg. Ezt betartva igyekezzünk legalább 10, de legfeljebb 16 áruval foglalkozni. Az ajánlkozó partnerek közül a fenti két elképzelésünket betartva úgy próbálunk választani, hogy a beszállítói árakat is figyelembe vesszük. De hogyan? Ezt is meg kell válaszolnunk!
- Vajon mekkora forgalomra számítunk? Ha egy forgalmas csomópont mellett van a bolt, valamint friss és szép árut kínálunk széles választék mellett, akkor mindig szükséges legalább 4 eladó egyidejű munkája a zavartalan kiszolgálás érdekében. Ha igény lesz a késői nyitvatartásra is, akkor több műszakban kell dolgozni. Hány munkatársat alkalmazzunk, milyen időbeosztással? Vannak-e további betartandó korlátozások? Tapasztaltabb munkaerőt keresünk, vagy megfelel egy kezdő is? Hogyan számoljuk a munkaerő értékét? Hogyan készítsük el a beosztást, hogy mindig legyen legalább két szakképzett pénztáros is az üzletben?
- Bizonyos bútorokat, felszerelést mindenképpen meg kell venni. A fennmaradó összeg általában nem elég arra, ami még szintén „elengedhetetlen”, ezért súlyozni kell a további beruházások fontosságát.

1.2. A matematikai modell

A vállalkozó problémáit először felvetettük, majd igyekeztünk egy kicsit pontosítani a feladatokat. Ahhoz azonban, hogy az intuíciónál mélyebben vizsgálhassuk a kérdéseket be kell

hozni a számokat, az összefüggéseket. Természetesen egyetlen bolt esetében az egyes részproblémák külön-külön pontosíthatók és megválaszolhatók lehetnek. Elegendő, ha a tulajdonos meg van elégedve a saját elképzeléseivel. Ha azonban a cég nagyobb, akkor egyre inkább azt érzi, hogy egyedül nem biztos, hogy meg tud bírkozni a feladatokkal, jobbnak látja ha szakértők segítenek a döntések meghozatalában – legalábbis tanácsadói szinten. Nagyobb volumen esetén egy látszólag kis eltérés is nagy veszteséget, vagy nyereséget jelenthet. Fontos tehát precízen megfogalmazni minden részproblémát a korrekt válasz reményében. Megéri matematikai módszereket alkalmazni. Ez a matematikai modellezéssel kezdődik, majd a számítógép célszerű alkalmazásával folytatódik. Fogalmazzunk meg konkrét eldöntendő problémákat!

1.1. Példa. *Egy helyiség címe adott egy hirdetésben. Ha az lenne a bolt, vajon oda lehet-e érni 30 percen belül a lakóhelyüinktől? (gyalogosan, kerékpárral, autóval; milyen adatokra van szükség?)*

1.2. Példa. *Eldöntöttük, hogy a bolt legyen legalább $150m^2$ -es és ne legyen magasabb a havi bérleti díja 100000 forintnál. Válasszunk ki a megfelelő ajánlatok közül egy olyat, amelyre az egy négyzetméterre jutó bérleti díj hányad minimális!*

1.3. Példa. *Paprikát, sárgarépat, hagymát, almát és körtét mindenképpen akarunk árusítani. Öt östermelő ajánlkozik, rendre (p,h) , (s,h) , (s,a,k) , (p,k) és (p,a,k) kínálattal (ahol a terméket a nevük kezdőbetűjével rövidítettük). Vajon ki tudunk-e választani közülük hármat, hogy tőlük minden terméket megkapjunk? Kettőt? Hogyan döntenénk el a hasonló kérdést, ha sok terméket akarunk forgalmazni?*

1.4. Példa. *Az eladók 8, 6 vagy 4 órát dolgoznak naponta. A teljes nyitvatartási idő 11 óra. Mindig szükséges legalább négy munkatárs egyidejű jelenléte. Ha mind a három típusú munkavállalóból hármat alkalmazunk, meg tudjuk-e oldani a folyamatos működést? Ha nyáron két órával megnő a nyitvatartási idő, akkor át tudjuk-e úgy tervezni a beosztást, hogy a feltételek továbbra is teljesüljenek?*

A fenti négy pontban olyan feladatokat fogalmaztunk meg, amelyek megoldhatósága volt a fő kérdés.

- Ha pl. ismerjük a kerékpárutak hálózatát a városban, valamint a kerékpározás legalább becsült sebességét, akkor azt kell eldöntenünk, vajon az L pontból a B pontba el lehet-e jutni a megadott időn belül?
- Ha háromszor végignézzük az üzlethelyiség ajánlatokat, akkor először kidobjuk a kis alapterületűeket, másodszor – csak a megmaradtakból – a túl drágákat, végül az eddig megmaradtak mindegyikére kiszámoljuk az egy négyzetméterre eső bérleti díjakat és mindig meghagyjuk az addigi legjobbat. A végén a kezünkben lesz a kiválasztott (kivéve, ha a két feltételnek egyik helyiség sem felelt meg).

- Ha az öt őstermelő közül minden lehetséges módon kiválasztunk hármat és az ajánlatukat uniózzuk, akkor megoldást találunk, ha valamely hármas együttvéve minden árut bevállal. Ha a 10 hármas egyike sem biztosítja a kívánt termék palettát, akkor nem tudunk hármat kiválasztani. Nemleges válasz esetén a másik kérdéssel már nem is kell foglalkoznunk, míg pozitív eredmény esetén azt is megoldhatjuk ugyanígy, csak most a párokat nézzük végig (azokból is éppen 10 van).
- Mindegyik problémára úgy tekintünk mint egy kis mintafeladatra. Amikor módszerezen megoldjuk, akkor gondoljunk arra is, vajon nagyobb méretekben működhetne-e az elgondolásunk. Az eladók beosztása esetén ha megadunk egy munkarendet, amely teljesít minden előírt feltételt, akkor az egy könnyen ellenőrizhető lehetséges megoldás. Ha azonban úgy gondoljuk, hogy egy ilyen típusú bemenetre nincs a feltételeknek megfelelő beosztás, akkor jó lenne, ha az ezt igazoló gondolatmenetet is világosan, könnyen ellenőrizhető módon le tudnánk írni.

1.3. Optimalizálási feladatok

1.5. Példa. *Tegyük fel, hogy egy szegény ország támogatást kap az úthálózatának kiépítésére. A falvak mindegyikét szeretnék köves úton elérni bármelyik másik településből. Bármely két falu között a megépítendő közvetlen út költségét kiszámítják. A támogatás megmaradt részét gyermek ételmezési programra lehetne fordítani, így a lehető leggazdaságosabban szeretnék kiválasztani azokat a településeket, amelyek között közvetlen út épülne. A terv akkor felel meg a pályázati kiírásnak, ha valóban el lehet jutni bármely faluból bármelyikbe akár közbülső településen keresztül is. Hogyan építkezzen az ország?*

1.6. Példa. *Egy város központi épületei között néhány gázvezeték ki van építve oly módon, hogy a gáz áramlásának iránya a technológiából adódóan adott bármely két összekötött egység között. A központi gázellátó az S helyen üzemel. Innen bármelyik épületbe el tud jutni a gáz. Mindegyik szakaszon ismerjük az üzemeltetési költséget. Tervezzük meg úgy a gáz áramlását, hogy mindegyik épületet el tudjuk látni, de a működő szakaszok összköltsége minimális legyen!*

2. fejezet

Egy raktározási probléma

2.1. Példa. *Tegyük fel, hogy egy logisztikai cég telephelyén egy csarnokban többféle, nagy mennyiségű terméket lehet ideiglenesen elhelyezni. A raktározási igényeknek van egy jól meghatározott időintervalluma, ebben már benne van az esetleg szükséges lerakodási, felpakolási időtartam is. Egy időben csak egyetlen raktározási igény elégíthető ki, a csarnok kapacitása és egyéb szabályozások miatt. Bármely igény teljesítése a cégnek egyedileg meghatározott hasznot hoz. Egy tervezési időszak elején adott minden igény. A cég vállalásaival minél nagyobb nyereségre kíván szert tenni. Mely feladatokat vállalja el?*

A gyakorlati feladat modellje:

2.1. Probléma. Optimális raktározás

Bemenet: n raktározási igény, (s_i, f_i, h_i) , $i = 1, \dots, n$ az $[s_i, f_i]$ időintervallummal és a h_i haszonnal definiálva.

Cél: Időbeli ütközéseket elkerülő, maximális összhasznot adó vállalás.

Világos, hogy számos, a valós életben felmerülő egyeztetési feladat vezet ehhez a matematikai modellhez, pl. a polgármester a fogadó napján mely vendégeket fogadjon (itt feltételezzük, hogy a vendégek mondják meg mikor érnek rá). Kereteljárás a feladat megoldására:

Bontsuk kisebb méretű feladatokra a problémát. Ha kiválasztunk egy (s_i, f_i, h_i) igényt, akkor ennek teljesítése maga után von két részfeladatot. Az elsőben azok az igények lesznek, amelyek f_j befejezési ideje legfeljebb s_i . A másik, az elsőtől függetlenül vizsgálható részfeladatban azok az igények lesznek, amelyek s_k kezdési ideje legalább f_i . Azok az igények már nem tudnak megvalósulni, amelyek intervalluma metszi az (s_i, f_i) szakaszt.

Egy újabb döntés egy részproblémát szintén két újabb részfeladatra bont, amelyek függetlenek a többitől. A döntésorozatot folytatva egyre több kisebb alprobléma keletkezik. Ha azok optimális megoldásait mind ismernénk, akkor az eddigi döntéseinket meghagyva a megoldás befejezése már könnyű (és optimális) lenne. Általában ha az (s_i, f_i, h_i) és (s_j, f_j, h_j) feladatokat elvállaltuk már, ezek ebben a rendben következnek, és közöttük mást még nem, akkor az általuk meghatározott $[i, j]$ részprobléma azon (s_k, f_k, h_k) raktározási igényekből áll, melyekre $f_i \leq s_k$ és $f_k \leq s_j$ egyszerre teljesül. Tegyük fel, hogy az igények indexezése igazodik a befejezési időhöz, vagyis kisebb számot kap az, amely előbb (nem később, tetszőleges egyértelműsítéssel) fejeződik be. Jelölje $Opt(i, j)$ az $[i, j]$ optimális megoldásának hasznát. Ekkor

nyilvánvalóan

$$Opt(i, j) = \min_{i \leq k \leq j} (Opt(i, k) + Opt(k, j) + h_k).$$

Ha bevezetjük a csarnok nyitását és zárását mint 0. és $(n + 1)$ -edik "igényt", mint kezdeti biztos döntéseket 0 hosszú, az igazi igényeket megelőző és követő intervallumokkal, akkor az $Opt(0, n + 1)$ meghatározása a cél. Egy számítógép így határozza meg rekurzívan az $Opt(i, j)$ -t: Az eljárással az $Opt(0, n + 1)$ gyorsan meghatározható, ha pl. előbb azokat az $Opt(i, j)$ -ket

Algorithm 1 $Opt(i, j)$ meghatározása

```

if  $i \geq j$  then
    max = 0
end if
max = 0
for  $k=i$  to  $j$  do
     $b = Opt(i, k) + Opt(k, j) + h_k$ ;
    if  $b > \text{max}$  then
        max =  $b$ 
    end if
end for
 $Opt(i, j) = \text{max}$ 

```

határozzuk meg, amikor $j - i = 1$, majd $j - i = 2$, stb. Az optimális részstruktúrák ismerete jól felhasználható. Az ismertetett módszer a *dinamikus programozás*. Tegyük most fel, hogy $h_i = 1$ mindegyik igényre (a polgármester úrnak minden lakos egyformán fontos). A cél tehát minél több igény kielégítése. Egy probléma speciális esetét vizsgálva, mindig felmerülhet, vajon adható-e egyszerűbben megérthető és/vagy gyorsabban eredményt adó eljárás?

2.1. Propozíció. *A legkorábban befejeződő (s_1, f_1, h_1) igényt egy optimális megoldás tartalmazza.*

Világos, hiszen bármely optimális megoldásban, ha az (s_i, f_i, h_i) az elsőnek befejeződő igény, akkor $f_1 \leq f_i$, tehát az (s_1, f_1, h_1) is összeegyeztethető a további kiválasztott raktározásokkal. Cseréljük ki őket!

A 2.1. észrevétel alapján az algoritmus *mohó típusú* választássá egyszerűsödik, nem szükséges az egyéb döntéseket kiértékelni! Az (s_1, f_1, h_1) igényt elfogadjuk. Amikor a csarnok újra szabaddá válik, akkor a még számításba jövő igények közül megint azt válasszuk ki, amelyik legkorábban befejeződik. Folytassuk így tovább!

Megjegyezzük, hogy nem feltétlenül jó az a fordított elképzelés, hogy amikor az előző ügyfél távozott, jöjjön az, aki legelőbb érkezett!

Ha egy körzeti orvosi rendelőre gondolt valaki, akkor persze nem ugyanerről a feladatról van szó. A betegek ellátást szeretnének kapni, de nem kötött, hogy mettől meddig kell benn lenniük a rendelőben. Tegyük fel, hogy a panaszukkal szoros összefüggésben adott az az időtartam (nem idő-intervallum) ameddig az ellátásuk tart. Azt is tételezzük fel, hogy az asszisztensnő ezt megkérdezi mindenkitől. Ha rövid a rendelési idő, nem kap ellátást mindenki. Milyen sorrendben hívja be a betegeket az orvos, ha szeretne minél több beteget ellátni? A válasz ebben

a feladatban triviális, mindig a leggyorsabban ellátható beteget hívja be előbb! A rendelőintézet működését azonban rosszul modelleztük így, természetesen nem helyes cél a mennyiség, a súlyos beteget – aki hosszabb idő alatt ellátható – nem hagyhatjuk a sor végére!

Az eredeti raktározási problémára visszatérve megállapíthatjuk, hogy a haszon függvény megváltoztatása sokkal egyszerűbbé tette a megoldási módszert is, és az algoritmus végrehajtási ideje is lecsökkent!

3. fejezet

Gráfok, utak, projektek

A diszkrét matematika talán leghasznosabb fogalma a gráf. Felsorolunk néhány alapvető definíciót.

3.1. Definíció.

- Egy $G = (V, E)$ (irányítatlan) gráf az $i \in V$ csúcsok és az irányítás nélküli $\{i, j\} \in E \subset V^2$ élek halmazával adott. Itt tehát az $\{i, j\}$ vagy $\{j, i\}$ ugyanazt az élet jelenti.
- A csúcsok $N = |V|$ számát néha a gráf *rendjének* is mondják.
- $M = |E|$ az élszám.
- Két csúcs $i, j \in V$ *szomszédos*, ha $\{i, j\} \in E$.
- Az $\{i, j\}$ él *illeszkedik* az i és j csúcsokra.
- A $d(i)$ *fokszám* az i -vel szomszédos csúcsok száma. A nulla fokú csúcsokat *izolált* csúcsoknak is mondjuk. Ha bármely i csúcsra $d(i) = k$, akkor a gráfot *k-regulárisnak* mondjuk.
 N csúcsú, $N - 1$ reguláris gráf a K_N teljes gráf.
- A $G' = (V', E')$ gráf a G *részgráfja*, ha $V' \subset V$, $E' \subset E$.
- A $G' = (V', E')$ *feszített részgráfja* G -nek, ha $V' \subset V$ és $E' = E \cap (V')^2$, vagyis E' az E minden olyan élét tartalmazza, amelynek két végpontja V' -beli.
- A $G' = (V', E')$ részgráf egy *út* a G -ben, ha $V' = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$,
 $E' = \{\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{l-1}, i_l\}\}$. Az út *hossza* $l = |E'|$. i_0 és i_l az út *végpontjai*. Az út i_0 és i_l között oda-vissza halad, azt is mondhatjuk, hogy összeköti a végpontjait. Az út minden belső pontja más-más csúcs. *Hamilton-útnak* nevezünk egy utat, ha a gráf minden csúcsát tartalmazza.
- Ha $i_0 = i_l$, vagyis az út *záródik*, akkor *körnek* hívjuk.
Hamilton-körnek nevezünk egy kört, ha a gráf minden csúcsát tartalmazza.

- Az $\{i_0, i_1\}, \{i_1, i_2\}, \dots, \{i_{l-1}, i_l\}$ élsorozat *séta*. A sétában mind a csúcsok, mind az élek ismétlődhetnek.
- Ha egy sétában az élek különbözők *vonallról* beszélünk. A vonalban a csúcsok ismétlődhetnek.
- *Zárt vonalról* beszélünk, ha a vonal kezdő és végpontja megegyezik. A zárt vonal nem biztos, hogy kör.
- Egy G gráf *összefüggő*, ha bármely i, j csúcspár között megy út. Az i, j csúcspár *távolsága* alatt a közöttük lévő legrövidebb út hosszát értjük. A G gráf *átmérője* a legtávolabbi pontok távolsága.
- A $G' = (V', E')$ részgráf *összefüggő komponense* G -nek, ha egyrészt a G összefüggő feszített részgráfja, másrészt nincs olyan él E -ben amely egy V' -beli csúcsot egy $V \setminus V'$ -beli csúccsal összekötne. Úgy is mondhatjuk, hogy a komponensek az összefüggőség ekvivalenciaosztályai.
- A G gráf *fa*, ha összefüggő és körmentes. Nyilvánvaló, hogy egy fának éppen eggyel van kevesebb éle mint csúcsa. Ha ezen utóbbi tulajdonságot feltesszük egy gráfban és mellé az összefüggőséget, akkor a körmentesség következik. Ha a körmentességet tesszük még fel, akkor az összefüggőség lesz következmény. Minden összefüggő gráfnak létezik feszítő (N csúcsú) fája. A G *erdő*, ha a komponensei fák.
- *Gyökeres fa* egy olyan fa, amelyben az egyik csúcs – gyökér – kitüntetett. *Gyökeres d -edfokú fa* egy olyan gyökeres fa, amelyben a gyökérpont foka d a többi csúcs foka vagy $d + 1$ vagy 1. Egy gyökeres d -edfokú fa *teljes*, ha minden elsőfokú pontja a gyökértől azonos távolságra van.
- A $G^C = (V, E^C)$ *komplementer gráf* élhalmaza $E^C = V^2 \setminus E = \{\{i, j\} \mid \{i, j\} \notin E\}$. A G komplementerében tehát pontosan azok a csúcspárok szomszédosak, amelyek a G -ben nem voltak azok. Egy teljes gráf komplementere az *üres* gráf.
- A $G' = (V', E')$ részgráfot *klikknek* hívjuk, ha teljes gráf. Ha üres, akkor a G *stabil* részgráfjának nevezzük.
- A $G' = (V', E')$ részgráf *párosítás* G -ben, ha minden komponensének rendje kettő, vagyis közös végpont nélküli élekből áll.
- A csúcsok $S \subset V(G)$ részhalmaza a G éleit lefoglaló csúcshalmaz, ha az $E(G)$ minden élének legalább az egyik végpontja az S eleme. Nyilvánvaló, hogy a $V(G) \setminus S$ csúcshalmaz egy stabil részgráfot feszít. Az élek $F \subset E(G)$ részhalmaza a G csúcsait lefedő élhalmaz, ha minden csúcs az F valamely élének végpontja.
- A $G = (V, E, \omega)$ *súlyozott gráf*, ha létezik egy $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$, az éleken értelmezett függvény.

- Az élek egy $M \subset E(G)$ részhalmazát *párosításnak* nevezzük, ha az élek függetlenek, tehát bármely csúcs legfeljebb egy M -beli élre illeszkedik.
- Az élek egy $C \subset E(G)$ részhalmazát *vágásnak* nevezzük, ha van egy $X \subset V(G)$ csúcshalmaz, melyre a C az összes X és $V(G) \setminus X$ közötti élt tartalmazza.

Hasonlóan definiálhatjuk az *irányított* gráfokat is. A lényeges eltéréseket hangsúlyozzák a következő definíciók:

- Ha a $D = (V, A)$ gráf élhalmaza rendezett párokból áll $(i, j) \subset V \times V$, akkor minden élnek van egy kezdőpontja és egy végpontja, tehát irányított.
- A $d_{ki}(i)$ *kifok* azon élek száma, amelyek kezdőpontja i . Ha $d_{ki}(i) = 0$, akkor az i -t nyelőnek hívjuk.
- A $d_{be}(i)$ *befok* az i -be bejövő (j, i) élek száma. Ha $d_{be}(i) = 0$, akkor az i -t forrásnak mondjuk.
- Egy *irányított út* minden éle azonos irányítású, i_0 -tól i_l -ig tehát egy $D' = (V', A')$ részgráf, melyre $V' = \{i_0, i_1, \dots, i_l\}$,
 $A' = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{l-1}, i_l)\}$.
- A $D = (V, A)$ irányított gráf *erősen összefüggő*, ha létezik i -től j -ig irányított út bármely i és j csúcsra. Egy irányított gráf *erősen összefüggő komponense* egy tovább már nem bővíthető erősen összefüggő részgráf.
- A $D = (V, A)$ irányított gráf *fenyő*, ha a tartó gráfja (az élek irányításának elhagyásával kapott irányítatlan gráf) fa , van egy kitüntetett *gyökér* pontja, melynek befoka nulla, valamint minden egyéb csúcs befoka 1. A fenyőben a gyökérből minden más csúcs egyértelmű irányított úton érhető el. A fenyők levelei azok a csúcsok, amelyek kifoka nulla.
A $D = (V, A)$ irányított gráf *fenyves*, ha a komponensei fenyők.
- A $D = (V, A, c)$ irányított gráf *hálózat*, ha létezik egy $c : A \rightarrow \mathbb{R}$, az éleken értelmezett függvény.

3.1. Legrövidebb utak

Amikor az elektronikus segédeszköz az autónkban távolságra optimalizál, akkor a szükséges földrajzi adatok birtokában meg kell, hogy tudja határozni az indulási helyünk és a célpont közötti legrövidebb utat. Tekintsük a következő feladatot!

3.1. Probléma. A legrövidebb út problémája

Bemenet: D egy irányított hálózat, $s, t \in V(D)$.

Cél: Egy legrövidebb $s - t$ út D -ben.

Vegyük észre, hogy a közlekedésben nem életszerű a negatív élhossz, azonban egy hálózatban ezt nem zárjuk ki. Ez gondot is okoz valóban, hiszen amikor útról beszélünk, akkor burkoltan arra gondolunk, hogy egy séta hosszabb mint egy olyan út, ami része a sétának. Ha azonban séta közben bejárunk egy kört, amelynek hossza negatív, akkor az összeg kisebb, mintha a körön nem mennénk végig. Ha pl. minden élhossz -1 lenne, akkor a legrövidebb $s - -t$ út egy Hamilton-út lenne s -ből t -be. Ennek megtalálása – vagy annak eldöntése létezik-e ilyen – nehéz probléma. Érdekes tehát feltenni legalább azt, hogy nincs a hálózatban negatív kör.

3.1. Propozíció. *Tegyük fel, hogy a D hálózatban nincs negatív kör. Ha a legrövidebb $s - -t$ út utolsó éle (v, t) , akkor ezen út s -től v -ig vezető része egy legrövidebb $s - -v$ út.*

Az előző 3.1. propozíció, az ún. *Bellman-elv* ugyanígy fennáll irányítatlan gráfokra, ha a súlyfüggvény nemnegatív, illetve irányított körmentes hálózatokra bármely $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ esetén. Dijkstra algoritmus felépít egy s -fenyőt, amely pontosan azokból az élekből áll, amelyek va-

Algorithm 2 Dijkstra algoritmus

Bemenet: D egy irányított hálózat, $c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ és $s \in V(D)$

1. Legyen $l(s) := 0$, $l(v) := \infty$ minden $v \in V(A) \setminus \{s\}$, $R := \emptyset$.

2. Válasszuk egy $v \in V(D) \setminus R$ csúcsot, melyre $l(v) = \min_{w \in V(D) \setminus R} l(w)$.

3. Legyen $R := R \cup \{v\}$.

for minden $(w \in V(D) \setminus R)$ melyre $(v, w) \in A(D)$ **do**

if $l(w) > l(v) + c((v, w))$ **then**

 legyen $l(w) := l(v) + c((v, w))$ és $p(w) := v$.

end if

end for

if $R \neq V(D)$ **then**

 go to 2.

end if

Kimenet A legrövidebb $s - -v$ utak, $v \in V(D)$ és ezek $l(v)$ hossza.

amely lépésben az aktuális R csúcsalmazhoz kötötték a $V(D) \setminus R$ csúcsalmaz legközelebbi csúcsát. Az algoritmus mindvégig megőrzi azt a tulajdonságot, hogy az R -ben lévő csúcsokhoz vezet egy egyértelmű irányított út az s pontból, amely a lehetséges legrövidebb D -ben. Az algoritmus a végén megadja a legolcsóbb utak s -fenyőjét. Ha csak a minimális $s - -t$ út érdekel bennünket egy konkrét t -re, akkor is érdemes az összes többi csúcsra is meghatározni a legrövidebb utakat.

3.2. Propozíció. *A Bellman-elv miatt irányított körmentes gráfokra is létezik a legolcsóbb utak s -fenyője.*

3.3. Propozíció. *A D irányított gráf pontosan akkor körmentes, ha a csúcsoknak létezik olyan számozása 1 -től N -ig, hogy él csak a nagyobb sorszámú csúcs felé mutat.*

Ha minden pontba futna él, akkor minden pontnak lenne őse, így az ősök felé lépegetve előbb utóbb egy már érintett csúcsba jutnánk, tehát kör alakulna ki. Emiatt létezik olyan csúcs,

amely forrás. Kapja ő az 1-et. Egy körmentes gráf bármely feszített részgráfja is körmentes, tehát ha az 1-et töröljük újabb forrást találunk a megmaradt csúcsok között, legyen ő a 2-es. Ezt folytatva megszámoztuk jól a csúcsokat. Persze egy irányított kört nem lehet így megszámozni, tehát az állított ekvivalencia teljesül.

A 3.3. észrevételből következik, hogy a legrövidebb utak s -fenyőjét bármely $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ élhossz függvényre fel tudjuk építeni a következőképpen: Vegyük növekvő rendben a megszámozott csúcsokat (az 1-es csúcs lesz az s). Ha már megépült az első $i - 1$ csúcsot tartalmazó s -fenyő, akkor az i , valamelyik nálánál kisebb sorszámú csúcshoz fog kapcsolódni. Nyilván kapcsolódhat éppen a j -hez, ha $l(i) = \min_{j < i, (j,i) \in A} l(j) + c(j,i)$ teljesül.

Léteznek olyan algoritmusok, amelyek a hálózat bármely két pontja között keresnek legrövidebb utat, csak a negatív hosszú köröket zárják ki és gyors futásra törekednek [29], [39].

Említettük, hogy egy Hamilton-utat vagy kört irányítatlan vagy irányított gráfban nehéz megtalálni, így szintén nehéz hálózatban is leghosszabb $s - t$ utat vagy kört találni. Az egyik legismertebb *NP-teljes* probléma éppen az *Utazó ügynök probléma* [29], [39]. Más azonban a helyzet az irányított kört nem tartalmazó hálózatokban.

3.2. Projekt tervezés, CPM, PERT

3.1. Példa. *Ha többféle munka vár valakire, igyekszik gyorsan elvégezni őket. Ha túl sok a munka kétségbeesik, egyiket sem kezdi el, mert elmaradhat egy fontosabb teendő. Tegyük fel, hogy egy koncertszervező cég a nyárra több nagy bulit szeretne összehozni (gondoljunk például a Sziget fesztiválra). Mivel tavaly rossz tapasztalatai voltak, most összeírt minden teendőt, azok végrehajtási időtartamával együtt. Nyilván előbb kell támogatót szerezni, azután tárgyalni a világsztár menedzserével. Be kell szerezni az engedélyeket, azután kibérelni a hangfalakat. A műsort kell előbb összeállítani, utána szervezni a próbákat. Az egyes tevékenységek között vannak tehát függések, ami azt jelenti, hogy egy tevékenység párra az egyik meg kell, hogy előzze a másikat vagy bármelyik elvégezhető előbb vagy később mint a másik. Természetesen az egymásutániség azt jelenti, hogy az előbbit be kell fejezni és csak azután kezdődhet a másik. Az alábbi táblázatban az elvégzendő feladatok, a szükséges előzmény feladat nevének kezdőbetűje, valamint az egyes rész munka elvégzéséhez szükséges idő napokban kifejezve. Megjegyezzük, hogy csak a közvetlen előzményeket soroltuk fel a második oszlopban. A Próbák szervezése csak a Média után jöhet, de természetesen a Támogatókat meg kell szerezni korábban, hiszen addig nem érdemes a Zenészekkel tárgyalni, nélkülük meg miről beszéljünk a Médiaival. Vegyük észre, hogy a táblázatban fel tudtuk sorolni a tevékenységeket oly módon, hogy mindig előbb írtuk fel az előzményt, mint a következményt. Reprezentáljuk a feladatot egy hálózattal. A csúcsok legyenek a tevékenységek, vezessen irányított él egy közvetlen előzményből a következménybe. Az így kapott gráfban nincs irányított kör, hiszen ha lenne, akkor a projekt végrehajthatatlan lenne. Tudjuk viszont a 3.3. észrevételből, hogy a felsorolás mindig megy. Még tartalmasabb a reprezentálás, ha mindegyik tevékenységnek megfelelő csúcsot megduplázunk! Ha pl. u egy csúcs, akkor helyette legyen u_1 és u_2 két csúcs, és vezessen irányított él u_1 -ből u_2 -be. Az u -ba befutó élek ezután fussanak be u_1 -be, míg az u -t elhagyó élek hagyják el ezután az u_2 -t. Hálózatunk úgy lesz, hogy 0 időt rendelünk az eredeti élek megfelelőihez, egy (u_1, u_2) típusúhoz pedig az u -nak megfelelő tevékenység $c(u_1, u_2)$*

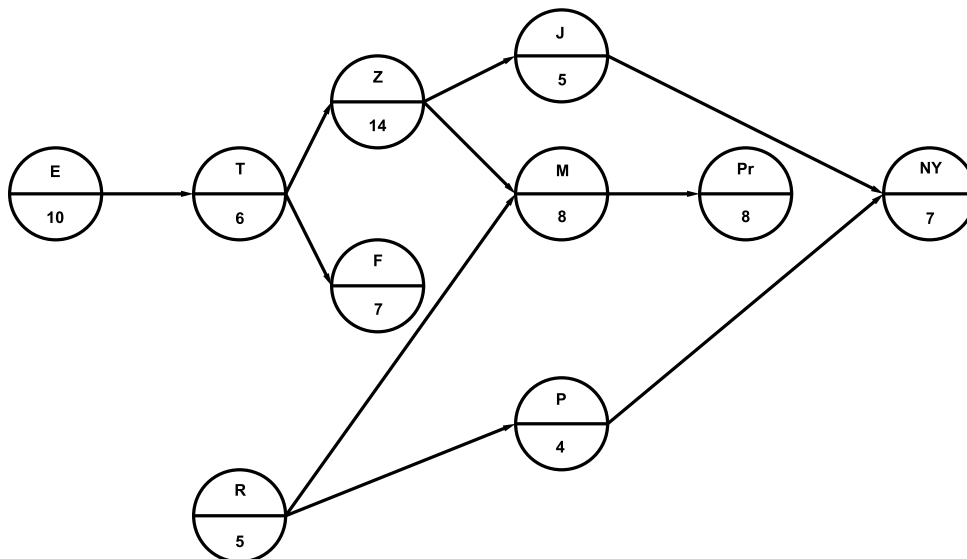
elvézési időtartamát. ($D = (V, A, c)$)

Engedélyek	-	10
Rendfenntartók	-	5
Támogatók	E	6
Felszerelés	T	7
Zenészek	T	14
Jegytervezés	Z	5
Média	R,Z	8
Plakát	R,Z	4
Próbák szervezése	M	8
Nyomda	J,P	7

A cég a teljes szervezéssel mielőbb el szeretne készülni. Vajon mikorra tud végezni?

A feladat egy projekt-menedzselési alapfeladat. Ütemoznünk kell a munkafolyamatot. A cégnek sok munkatársa van, így tudnak párhuzamosan dolgozni több szervezési részfeladaton. A nehézséget csak a „kusza” sorrendi előfeltételek okozzák. Hogyan modellezzünk?

1. Rendeljük hozzá a hálózatunk minden csúcsához egy időpontot. Pl. egy előfeltétel



3.1. ábra. Tevékenységek, időtartamok, előfeltételek

nélküli tevékenység legyen s (ilyenek kell lenni), ekkor a $t(s)$ -et gondolhatjuk nullának, a projekt kezdő pillanatának. Egyébként a nemnegatív időpontokat változóknak is tekinthetjük, amelyekre egyetlen feltételcsoport van előírva: $t(x') - t(x) \geq c(x, x')$ minden élre. Keressük a következő lineáris program optimumát:

$$\min(t(z) - t(s) : t(x') - t(x) \geq c(x, x'), (x, x') \in A)$$

A megoldás értéke megadja a *leghosszabb* ($s - -z$) út hosszát. Az egyes tevékenységek időtartama biztosított lesz a feltételeknek az (u_1, u_2) típusú élekre történő teljesülése miatt. Másrészt a 0 hosszúságú élekre vonatkozó egyenlőtlenségek meg a sorrendiséget garantálják. Nyilvánvaló, hogy a projektet annyi idő elteltével zárhatjuk le, amikor az utolsó tevékenység is befejeződik. Tehát a hálózatunkban a leghosszabb $s - -z$ utat keressük!

2. Felhasználva az első modell észrevételét elegendő meghatározni a leghosszabb $s - -z$ utat! A 3.3. proposíciót felhasználva már korábban felépítettük a legrövidebb utak s -fenyőjét. Teljesen hasonlóan a leghosszabb utak s -fenyőjét bármely $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ élhossz függvényre fel tudjuk építeni a következőképpen: Vegyük növekvő rendben a megszámozott csúcsokat (az 1-es csúcs lesz az s). Ha már megépült az első $i - 1$ csúcsot tartalmazó s -fenyő (jelölje $l'(k)$ a leghosszabb $s - -k$ út hosszát benne) akkor az i csúcshoz vezető leghosszabb utat így kapjuk meg:

$$l'(i) = \max_{j < i, (j,i) \in A} l'(j) + c(j,i)$$

Az i előtti utolsó csúcs az úton éppen az lesz, amelynél a maximum felvételük. Ezzel az éllel kötjük az eddigi fenyőhöz az i csúcsot. Amikor felépítettük a teljes leghosszabb utak s -fenyőjét, akkor a leghosszabb $s - -z$ út hossza mutatja a teljes projekt időtartamát, és az is látszik, mely tevékenységek voltak kritikusak – amelyek ezt az utat alkották.

Oldjuk meg a 3.1. példát! A táblázathoz vegyünk még hozzá két oszlopot, a negyedik az algoritmus szerint adódó legkorábbi kezdési időpontot mutatja, az ötödik pedig a tevékenység végét.

Munka	Előzmény	Idő	Kezdés	Befejezés	Tűrésh.	Mozgásh.
Engedélyek	-	10	0	10	0	0
Rendfenntartók	-	5	0	5	25	25
Támogatók	E	6	10	16	0	0
Felszerelés	T	7	16	23	23	23
Zenészek	T	14	16	30	0	0
Jegytervezés	Z	5	30	35	4	0
Média	R,Z	8	30	38	0	0
Plakát	R,Z	4	30	34	5	1
Próbák szervezése	M	8	38	46	0	0
Nyomda	J,P	7	35	42	4	4

Legkésőbb a Próbák szervezése fejeződik be! Tehát a projekt eltart legalább 46 napig, ha a fenti tervezést követik, akkor éppen addig. Egyetlen kritikus út van tehát. Visszafelé haladva a következő tevékenységek azok, amelyek haladéktalan megkezdése szükséges a sikerhez: Pr., M, Z, T, E. Vizsgáljuk meg, a többi részfeladat esetében mekkora lazaság engedhető meg! A Nyomda megszervezése optimálisan a 42. napig tart. Ha ez 4 napot csúszik, vagy esetleg 4 nappal meghosszabbodik a munka elvégzése, akkor még tartható a 46 napos

végso befejezés. Egy munka csúszásának lehetséges maximuma – miközben minden más tevékenység az eltervezett intervallumban valósul meg – a tevékenység *tűréshatára*. Ezeket az értékeket mutatja a hatodik oszlop. Egy tevékenység *mozgáshatára* az az idő, amennyivel az elkezdése eltolódhat vagy időtartama hosszabbodhat, anélkül hogy ezzel bármelyik későbbi tevékenység legkorábbi kezdési időpontja megváltozna. Pl. a Média szervezése azért kezdődhet a 30. napon, mert a Zenészek csak ekkorra írják alá a szerződésüket. Tehát a Média másik előfeltételének, a Rendfenntartók biztosításának elkezdése akár 25 nappal is csúszhat. A mozgáshatárokat a hetedik oszlop mutatja.

A példa alapján tárgyalt Kritikus út módszer (Critical Path Method, CPM) nevű hálózati modell jól alkalmazható projektek ütemezésére, ha valóban tarthatók pl. az időtartamok. A valóságban azonban előre nem belátható okok miatt a bemenet is változhat. Emiatt szükséges a projekt újratervezése. Nagy vállalati rendszerek esetében a modell számítógépes megvalósításai közül valamelyik alkalmazása célszerű. Ha előre tudható, hogy mennyire bizonytalanok a végrehajtási időtartamok, akkor a Program kiértékelési és felülvizsgáló technika (Program Evaluation and Review Technique, PERT) segítségével becsülhetők a határidők betarthatóságának valószínűségei. Itt most csak egy ötletet vizsgáljunk meg! Tegyük fel, hogy hasonló koncertet kell szervezni a cégnek a következő évben is. Áttekinthetőség miatt a főnök a következőket vette észre. Minden tevékenységet külön csoport végzett a cégnél. Így tehát voltak akik a tavalyi terv szerint későn kezdtek, míg mások hamar végeztek. Mi lenne, ha aki végzett a saját feladatával egy másik feladatba is besegítene? Az áttekinthetőség miatt a csoportokat nevezzük el a tevékenységük kezdőbetűjével. Azt találja, hogy P segíthetne Ny-nek, M Pr.-nek, Z P-nek, F M-nek, T Z-nek, R F-nek és E T-nek, ha a tavalyi időpontokból indul ki. Emiatt tehát meg tudna feleződni minden olyan tevékenység időtartama, amelyet végző csoportnak segít egy „korábban végzett” csoport. A tavalyi kritikus úton lévő tevékenységek közül csak az E-nek nem segítünk, így a főnök úgy kalkulál, hogy a befejezési idő $10 + \frac{46-10}{2} = 28$ lesz. Íme a módosított bemeneti táblázat:

Engedélyek	-	10	0	10
Rendfenntartók	-	5	0	5
Támogatók	E	3	10	13
Felszerelés	T	3,5	13	16,5
Zenészek	T	7	13	20
Jegytervezés	Z	5	20	25
Média	R,Z	4	20	24
Plakát	R,Z	2	20	22
Próbák szervezése	M	4	24	28
Nyomda	J,P	3,5	25	28,5

A negyedik és ötödik oszlopban állnak a tevékenységek legkorábbi lehetséges kezdési időpontjaik és befejezési idejük. Látható, hogy a Nyomda megszervezésének vége eltart egészen a 28,5-edik napig. Nem lett elég tehát a 28 nap. Másrészt most a kritikus úton visszafelé

haladva rendre a következők vannak: Ny, J, Z, T, E. A két utolsó tevékenység tehát megvalósult! Ha végignézzük az elképzelt csoport fúziók éppen meg tudtak valósulni, de ez is csak véletlen, hiszen lemaradhat egy tevékenység, ha az egyik előzményét végző csoportnak éppen nem jutott segítség! Szerencsénk volt ebben. Nem könnyű tehát ránézésre végeredményt hirdetni, a projekt tervezés nem is olyan egyszerű!

4. fejezet

A mohó algoritmus

A korábban tárgyalt raktározási probléma speciális esetére vonatkozó eljárásról azt mondtuk, hogy egy mohó típusú algoritmus. Ebben a fejezetben egy jól definiált *mohó algoritmusról* lesz szó, amelynek elmélete egy igen szép diszkrét matematikai diszciplinát eredményezett. Fogalmazzunk meg általános matematikai problémákat, amelyek gyakorlati kérdések modellezésével álltak elő.

4.1. Fontos feladatok hasonlósága

4.1. Probléma. Minimális súlyú feszítő fa

Bemenet: G egy irányítatlan súlyozott gráf.

Cél: G egy minimális összsúlyú feszítő fája.

4.2. Probléma. Maximális súlyú erdő

Bemenet: G egy irányítatlan súlyozott gráf.

Cél: G egy maximális összsúlyú erdő részgráfja.

4.3. Probléma. Minimális súlyú fenyő

Bemenet: D egy irányított hálózat.

Cél: D egy minimális összsúlyú fenyője.

4.4. Probléma. Maximális súlyú fenyves

Bemenet: D egy irányított hálózat.

Cél: D egy maximális összsúlyú fenyves részgráfja.

4.5. Probléma. Minimális súlyú gyökeres fenyő

Bemenet: D egy irányított hálózat és egy $s \in V(D)$ gyökérpont (amelyből elérhető minden csúcs).

Cél: D egy minimális összsúlyú s -fenyője.

Az 1.5 gyakorlati példa matematikai megfogalmazása a 4.1. probléma, míg az 1.6. gázellátási feladat azonos az 4.3. problémával.

4.1. Propozíció. A 4.1. és 4.2. problémák ekvivalensek.

Bizonyítás Ha az $\omega(e)$ függvény nemnegatív, akkor a maximális súlyú erdő lehet egy feszítőfa. Ha az $\omega(e)$ értékeknél veszünk egy nagyobb K számot és áttérünk az $\omega'(e) = K - \omega(e)$ súlyfüggvényre, akkor ha ezzel megoldjuk az 4.1. feladatot megkaphatjuk ugyanazt az optimális megoldást, mivel a feszítő fák mindegyikének $N - 1$ éle van. Másrészt ha néhány élsúly negatív, akkor ezen éleket biztosan nem választjuk be a 4.2. probléma optimális megoldásába. Ha a nemnegatív hosszú élek helyett az ellentett hosszát vesszük majd az eredetileg negatív hosszú élekkel összefüggővé tesszük a gráfot, akkor ha megoldjuk a 4.1. feladatot és elhagyjuk belőle az eredetileg negatív súlyú éleket, akkor megkapjuk a 4.2. probléma optimális megoldását. ■

4.2. Propozíció. A 4.3. , 4.4. és 4.5. problémák ekvivalensek.

Vajon hogyan oldhatók meg a problémák? Az 4.1. problémára mondhatná valaki azt, hogy két dologra kell vigyázni. Az egyik, hogy annyi élt ki kell választani, hogy a részgráf összefüggő legyen. Másrészt pedig nem szabad létrehozni kört. Egy logikusnak tűnő gondolkozás lenne, ha valaki sorban venné az éleket a súlyuk szerint nemcsökkenő rendezés szerint és mindig megépítene egy élt, ha az nem hoz létre kört az addig megépített élekhez hozzávéve. Az algoritmus megáll, amikor az élek elfogytak. Ha $N - 1$ élet sikerült beválasztani akkor feszítő fát kapunk. Ha nem, akkor a gráf nem volt összefüggő, tehát nincs megoldás. De vajon minimális lesz-e a feszítő fa, ha kapunk egyet?

Milyen eredménnyel járunk, ha kiindulunk egy i csúcsból, majd hozzávesszük azt a j csúcsot, melyre az $\{\omega(e) : e = \{i, j\}\}$ minimális. Minden lépésben az addig kialakult összefüggő gráfhoz minimális súllyal illeszkedő külső pontot kötünk be. Ezt egészen addig tesszük, amíg be nem húztunk $N - 1$ élt. Mivel nem hozhattunk létre kört, és már menet közben is mindig összefüggő volt a részgráf, a végén feszítő fát kaptunk. Vajon optimális lesz-e? Mi lett volna, ha egy másik csúcsból indulunk?

Legyen $D = (V, A)$ egy irányított gráf, $s \in V$ a kijelölt gyökérpont. A D egy s -fenyőjére úgy tekinthetünk, mint egy irányított feszítő fára, melyben ki van tüntetve egy s pont, amelynek a befoka nulla és minden más csúcshoz egyértelmű út vezet s -ből. Minden más csúcs befoka a fenyőben 1, valamint nem tartalmaz kört. Nyilvánvaló, hogy ha a D bármely pontja elérhető s -ből, akkor tartalmaz s -fenyőt.

Az 1.6. példa matematikailag precíz megfogalmazása a 4.5. probléma. Az irányítatlan gráfok feszítő fa problémájának 4.1. megoldására egy-két elképzelést már megfogalmaztunk, nemsokára kiderül mennyire helytállóak. Próbálkozzunk a 4.5., minimális költségű gyökeres fenyő problémával hasonlóan! Kiindulva az s csúcsból mint fenyőből kössük hozzá a legolcsóbb, belőle kivezető éllel annak végpontját. Ezt iteráljuk, mindig bővítjük az addig már részben megépített s -fenyőt a belőle a többi csúcs halmazába átvezető legolcsóbb éllel és annak végpontjával. Végül kapunk egy s -fenyőjét D -nek, de sajnos nem biztos, hogy a legolcsóbbat! Tekintsük ugyanis a $V = \{x, y, s\}$, $A = \{(y, x), (s, x), (s, y)\}$ irányított gráfot, melynek éleihez rendelt költség rendre 1, 2, 3. Erre a hálózatra a fenti mohó algoritmus 5 = 2 + 3 értékű s -fenyőt ad, pedig az optimális 4 értékű. A *mohó* szót még nem matematikai értelemben használtuk. Az alábbi egy mohó-típusú algoritmus, amely megoldást ad a 4.5. problémára.

Válasszunk ki minden $v \in V \setminus \{s\}$ csúchhoz tetszőlegesen egy minimális bejövő élt. Jelölje B^* a kiválasztott élhalmazt. Mivel bármely B s -fenyőnek szintén megvan az a tulajdonsága, hogy minden s -től különböző csúcsba éppen egy él vezet, így $c(B^*) \leq c(B)$. Ha V, B^* nem tartalmaz kört, akkor már meg is találtuk a minimális s fenyőt. Tegyük fel, hogy a B^* létrehoz kört. Módosítsuk most az élek súlyát! Legyen $\alpha(v) := \min\{c((a, v)) : (a, v) \in A\}$, valamint legyen $c'(u, v) := c(u, v) - \alpha(v)$. Könnyen látható, hogy a következők teljesülnek:

$$c'(a) \geq 0, a \in A; \quad (1)$$

$$\alpha'(v) := \min\{c'(a) : (a, v) \in A\} = 0, v \in A \setminus \{s\}; \quad (2)$$

$$c'(a) = 0, a \in B^*; \quad (3)$$

A következő lemma állítja, hogy az új súlyokkal kapott hálózat egyenértékű az eredetivel a feladat szempontjából.

4.3. Propozíció. *Egy s -fenyő egyszerre optimális a c és a módosított c' költségfüggvénnyel.*

Bizonyítás Ha B egy s -fenyő D -ben, akkor

$$c(B) - c'(B) = \sum_{a \in B} [c(a) - c'(a)] = \sum_{v \in V \setminus \{r\}} \alpha(v).$$

Tehát állandó a két összköltség különbsége, vagyis ugyanott lesznek az optimumok. ■

Az igazi ötlet az, hogy összehúzzhatjuk a (V, B^*) egy körét egy nagy csúcsba és folytathatjuk a keresést a redukált gráfban.

4.4. Propozíció. *Ha a $D = (V, A), c : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ irányított hálózatban van s -fenyő és a C egy csupa 0 költségű élekből álló, s -et nem tartalmazó kör, akkor van egy olyan optimális s -fenyő, amely a C -be pontosan egyszer lép be.*

Bizonyítás Természetesen minden s -fenyő egyszer eléri a C -t. Tegyük fel, hogy B egy optimális s -fenyő élhalmaza és van legalább kettő éle, amely belép a C -be. Megmutatjuk, hogy ekkor lehet találni egy szintén optimális B' -t, melynek kevesebb éle lép be C -be. Tegyük fel, hogy a és a' rendre a v és az u csúcsnál éri el a C kört úgy, hogy az u nincs rajta az egyértelmű $s - v$ úton. Jelölje $A(C)$ a C -beli élek halmazát, és legyen $A' = (B \setminus \{a'\}) \cup A(C)$. Ekkor a $D' = (V, A')$ mindegyik csúcsa elérhető s -ből. Tudjuk tehát, hogy D' -ben van s -fenyő, mondjuk a B' , valamint a költségére

$$c(B') \leq c(A') = c(B) - c(a') \leq c(B),$$

mivel a $c(a')$ nemnegatív és a C élei pedig 0 költségűek. Tehát a B' legalább olyan minimális, viszont nem tartalmazza az a' -t, tehát kevesebb él megy belőle a körhöz, mint a B -ből. ■

A 4.4. lemma tehát éppen azt jelenti, hogy az olyan kört, amelyben minden él hossza nulla egy nagy csúcsnak képzelhetjük el, tehát összehúzzhatjuk.

A fenti megállapítások szerint tehát a minimális s -fenyőt megkapjuk, ha egymás után redukáljuk a költségfüggvényeket a megadott módon, majd a származtatott hálózatban vagy találunk s -fenyőt, vagy zérus kört. Az utóbbi esetben összehúzzuk ezt. Az eljárást addig folytatjuk, amíg nem lesz egy s -fenyőnk. Ekkor óvatosan, a keletkezés sorrendjét megfordítva kibontjuk a nagy csúcst, a körből a szükséges éllel kiegészítjük az s -fenyőt a bővebb hálózat s -fenyőjévé. Egészen addig folytatjuk a felfújási procedúrát, amíg meg nem kapjuk az eredeti hálózat optimális s -fenyőjét.

Az ismertett mohó-típusú algoritmus egy tetszőleges fenyőben, egy olyan s csúchoz, amelyből minden más csúcs elérhető megtalálja a minimális költségű s -fenyőt.

4.2. Matroidok

Eléggé általános kombinatorikus optimalizálási kérdéseket lehet megfogalmazni a következő keretben. Adott egy (S, I) halmazrendszer, melyben S egy véges alaphalmaz, míg az I a 2^S hatványhalmaz egy részhalmaza, vagyis az S bizonyos részhalmazainak egy rendszere. Legyen adva még egy $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény is. Keressük meg az I legolcsóbb (vagy legdrágább) elemét! A továbbiakban itt arra az esetre szorítkozunk, amikor az S alaphalmaz elemeinek költségéből egy részhalmaz súlyát az elemek súlyának összegeként kapjuk meg. Tegyük fel tehát, hogy $X \subseteq S$ esetén $c(X) = \sum_{e \in X} c(e)$ fennáll (jelölésben $c(e)$ -t használunk $c(\{e\})$ helyett). Bevezetünk egy nagyon egyszerűnek tűnő, de mégis alapvetővé vált fogalmat. A témakör fontos alapműveiből bővebben tájékozódhatunk [40, 42, 49].

4.1. Definíció. Az (S, I) halmazrendszer függetlenségi rendszer, ha nemüres és leszálló, vagyis teljesülnek az alábbiak:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \emptyset \in I \\ (ii) \quad & \text{ha } I \in I \text{ és } J \subseteq I, \text{ akkor } J \in I \end{aligned} \tag{4.1}$$

Egy $I \subseteq S$ részhalmaz *független*, ha $I \in I$ és *függő* egyébként. Egy $B \subseteq S$ részhalmazt *bázisnak* nevezünk, ha a tartalmazásra nézve maximális független halmaz, vagyis $B \in I$ és nem létezik $A \in I$, melyre $B \subset A \subseteq S$. Általánosabban egy $S' \subseteq S$ halmazra a $B \subseteq S'$ halmazt az S' bázisának hívunk, ha $B \in I$ és nem létezik $A \in I$, melyre $B \subset A \subseteq S'$. A tartalmazásra nézve minimális függő részhalmazokat *köröknek* nevezzük.

4.2. Definíció. Egy $U \subseteq S$ részhalmaz rangját a következő rangfüggvény adja meg:

$$r(U) := \max\{|X| \mid X \subseteq U, X \in I\}.$$

Az U lezártja $\sigma(U) := \{y \in S : r(U \cup \{y\}) = r(U)\}$.

Tekintsük a következő problémákat:

4.6. Probléma. Maximális súlyú független halmaz

Bemenet: (S, I) függetlenségi rendszer és a $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény.

Cél: $X \in I$, melyre $c(X) := \sum_{e \in X} c(e)$ a legnagyobb.

4.7. Probléma. Minimális súlyú bázis

Bemenet: (S, I) függetlenségi rendszer és a $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ költségfüggvény.

Cél: B bázis, melyre $c(B)$ a legkisebb.

Ezekben a problémákban első olvasás után nem világos mi is a feladat. Egy független halmaz költségét adottnak tekinthetjük, de ha csak az alaphalmaz elemeinek adottak a költségei, akkor is egyszerű az összegzéseket elvégezni. A probléma abban van, hogy a független halmazok nincsenek felsorolva, általában valamilyen tulajdonságuk adott csak. Azt azonban feltételezhetjük, hogy van egy ún. *orákulum (jóshely)*, amely az S egy részhalmazáról el tudja dönteni, hogy eleme-e az I -nek. Egy komplex eljárás műveleti igényébe az orákulum válaszána idejét bele kell számolni. Az általános 4.6. probléma körébe tartozik a 4.2. és 4.4. probléma, valamint például a következő alapvető feladat is:

4.8. Probléma. Maximális súlyú párosítás

Bemenet: (G, E) irányítatlan gráf, $\omega : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény.

Cél: Párosítás, melyben az élek összszúlya a legnagyobb.

Az (S, I) függetlenségi rendszernek rendre: $E(G)$, G erdői; $A(D)$, D fenyvesei; $E(G)$, G párosításai; felelnek meg. Nyilvánvaló, hogy egy erdő éleiből ha elhagyunk szintén erdőt kapunk, egy fenyvesből ha irányított éleket törölünk továbbra is fenyvest kapunk, egy párosításból néhány élt elhagyva szintén párosítás marad. Nyilván ide tartozik a következő probléma is:

4.9. Probléma. Maximális súlyú stabil csúcshalmaz

Bemenet: (G, E) irányítatlan gráf, $\omega' : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény.

Cél: Olyan üres $G' \subseteq V(G)$ részgráf, melyben a csúcsok összszúlya a legnagyobb.

Hasonlóan a 4.7. problémakörbe tartozik a 3.1. és 4.1. probléma. Az (S, I) függetlenségi rendszernek rendre: $A(D)$, $I = \{I \subseteq A(s - -t)\}$ valamely $s - -t$ útra; $E(G)$, G erdői; felelnek meg. A 4.9. problémában a $V(G)$ csúcshalmazon a független részhalmazok a stabil részgráfok csúcshalmazai.

4.3. Definíció. Az (S, I) matroid, ha S egy véges halmaz, I az S részhalmazainak egy nemüres rendszere és teljesülnek a következők:

- $$\begin{aligned} (i) & \text{ Ha } I \in I \text{ és } J \subseteq I, \text{ akkor } J \in I \\ (ii) & \text{ Ha } I, J \in I \text{ és } |I| < |J|, \text{ akkor } I \cup \{z\} \in I \text{ valamely } z \in J \setminus I. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Vegyük észre, hogy a 4.3. definíció a függetlenségi rendszer fogalmát szűkíti az ún. (ii) tulajdonsággal.

A 4.1. és 4.2. probléma mint függetlenségi rendszerekre vonatkozó probléma kielégíti (ii)-t, a többi problémában azonban a függetlenségi rendszer nem matroid. Mindkét esetben az erdőket mint független halmazokat kell vizsgálni. Tegyük fel, az állítással ellentétben, hogy az X erdőben több él van mint az Y -ban, valamint bármely $x \in X, x = (u, v)$ élre az $Y \cup \{x\}$ már függő halmaz, ami az erdő esetében azt jelenti, hogy az x behúzásával kör keletkezett.

Ez annyit tesz, hogy az u és v csúcsok már az Y erdőben is azonos komponensben voltak. Ez azt jelenti, hogy az X mindegyik komponense az Y valamelyik komponensének részhalmaza. Tehát legfeljebb annyi csúcsa lehet egy ilyen X komponensnek, mint az őt tartalmazó Y komponensnek. Ebből következően az X -nek legalább annyi komponense van mint az Y -nak. Másrészt viszont ismert, hogy egy erdő minden fájában eggyel kevesebb él van mint csúcs, vagyis az X éleinek száma plusz a komponenseinek száma $|V(G)|$, ugyanannyi mint az Y esetében, tehát $|X| \leq |Y|$. Ez ellentmondás. Az (S, I) , melyre $S = E(G)$, ahol G irányítatlan gráf és $I = \{F \subseteq E(G)\}$, ahol az F egy erdő élhalmaza az ún. *kör matroid*. Ha egy matroid olyan, hogy valamely gráf esetén annak körmatroidjával lényegében azonos, akkor azt *grafikus matroidnak* mondják. Nagyon fontos a névadó példa: $(S$ egy A mátrix bizonyos oszlopvektorainak halmaza, I a kiválasztott oszlopvektorok lineárisan független részhalmaza). Ezt *vektor matroidnak* nevezik. Vannak olyan matroidok, amelyek nem reprezentálhatók mint vektor matroidok. Bármely rögzített k egészre (S, I) , triviálisan matroid, ha $I = \{F \subseteq S : |F| \leq k\}$. A matroidok definiálhatók a bázisaikra vonatkozó tulajdonságokkal is.

4.2.1. Tétel ([42]). *Legyen S egy halmaz, \mathcal{B} az S részhalmazaiknak egy nemüres együttese. Ekkor a következők ekvivalensek:*

- (i) \mathcal{B} egy matroid bázisainak összessége;
- (ii) Ha $B, B' \in \mathcal{B}$ és $x \in B' \setminus B$, akkor $B' \setminus \{x\} \cup \{y\} \in \mathcal{B}$ valamely $y \in B \setminus B'$ esetén;

A (4.2.1). tételben a (ii) az ún. kicserélési tulajdonság. Nagyon hasznos a rangfüggvénnyel történő axiomatizálás is.

4.2.2. Tétel.

- (a) r az (S, I) matroid rangfüggvénye, $I = \{F \subseteq S : r(F) = |F|\}$
- (b) bármely $X, Y \subseteq S$

- (i) $r(X) \leq |X|$
- (ii) Ha $X \subseteq Y$, akkor $r(X) \leq r(Y)$
- (iii) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

(c) Minden $X \subseteq S$ és $x, y \in S$ esetén

- (i)' $r(\emptyset) = 0$
- (ii)' $r(X) \leq r(X \cup \{y\}) \leq r(X) + 1$
- (iii)' Ha $r(X \cup \{x\}) = r(X \cup \{y\}) = r(X)$, ekkor $r(X \cup \{x, y\}) = r(X)$.

4.3. Mikor működik a mohó algoritmus?

A 4.6. problémában feltehetjük, hogy minden elem nemnegatív súlyú, hiszen egy negatív súlyú elem nem lehet az optimumban, mert ha egy ilyet elhagyunk, akkor is független halmazt kapunk. Tétélezzük fel, hogy egy orákulum „megsúgja” bármely részhalmaZRól, hogy

Algorithm 3 Válasszuk be a legjobbat!

Bemenet: (S, I) függetlenségi rendszer és a $c : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ költségfüggvény.

1. Rendezzük az $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ elemeit nemnövekvő sorrendbe,

$$c(s_1) \geq \dots \geq c(s_n)$$

2. Legyen $F := \emptyset$.

for $i := 1$ **to** n **do**

if $F \cup \{s_i\} \in I$ **then**

 legyen $F := F \cup \{s_i\}$.

end if

end for

Kimenet: A legsúlyosabb $F \in I$ halmaz.

az független-e. Tekintsük a következő mohó algoritmust:

A következő algoritmusban az orákulumnak azt kell megmondani, hogy egy $F \subseteq S$ halmaz tartalmaz-e bázist!

Algorithm 4 Dobjuk ki a legrosszabbat!

Bemenet: (S, I) függetlenségi rendszer és a $c : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ költségfüggvény.

1. Rendezzük az $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ elemeit nemcsökkenő sorrendbe,

$$c(s_1) \leq \dots \leq c(s_n)$$

2. Legyen $F := S$.

for $i := 1$ **to** n **do**

if $F \setminus \{s_i\}$ tartalmaz bázist **then**

 legyen $F := F \setminus \{s_i\}$.

end if

end for

Kimenet: A legnehezebb $F \in I$ halmaz, amely tartalmaz bázist.

Természetesen a fenti két alap algoritmusban a kimenet csak akkor optimális független halmaz, ha jól működik az eljárás és valóban megadja azt. A [41] könyvben „matroidnak” definiálják az olyan függetlenségi rendszert, amelyre a 3. – válasszuk be a legjobbat – algoritmus jól működik. Valóban ez egy lehetséges ekvivalens definíció.

4.3.1. Tétel. ([49] [33], [39], [41]) Minden matroidra jól működik a 3. algoritmus, ill. megfordítva, ha egy függetlenségi rendszerre minden nemnegatív súlyfüggvénnyel jól működik a 3. algoritmus, akkor teljesül a (4.3) definíció (ii). része is.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a $c : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ súlyfüggvényre a mohó algoritmus (a 3. algoritmus) az $X = \{a_1, \dots, a_n\}; c(a_1) \geq c(a_2) \geq \dots \geq c(a_n)$ halmazt találta, éppen ilyen sorrendben. Tegyük fel indirekt, hogy van ennél jobb, legyen ez $Y = \{b_1, \dots, b_m\}; c(b_1) \geq c(b_2) \geq \dots \geq c(b_m)$. $n \geq m$, mert ellenkező esetben a mohó algoritmus a (2) tulajdonság alapján további elemet választhatott volna még be, akár az Y elemei közül is. Emiatt van olyan k index,

amelyre $b_k > a_k$. Legyen $A = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_k\}$. A (4.3) (ii) része szerint $A, B \in I$, valamint B -nek több eleme van, így van olyan $b_j \in B$, melyre még $A \cup b_j$ is független. De akkor $c(b_j) \geq c(b_k) > c(a_k)$, így a mohó algoritmus b_j -t választotta volna! A mohó algoritmus tehát matroidra jól működik!

Megfordítva is indirekt tegyük fel, hogy bár az (S, I) függetlenségi rendszerben a mohó algoritmus minden $c : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ súlyfüggvényre jól dolgozik, de nem igaz a (4.3) tulajdonság (ii) része. Léteznek tehát olyan $X, Y \in I$ halmazok, melyekre $|X| > |Y|$ és egyik $x \in X \setminus Y$ elemre sem lesz $Y \cup \{x\} \in I$. Definiáljunk egy c' súlyfüggvényt! Legyen $q = \frac{|Y \setminus X|}{|X \setminus Y|}$.

$$c'(e) = \begin{cases} 1, & \text{ha } e \in Y, \\ q + \frac{1-q}{2}, & \text{ha } e \in X \setminus Y, \text{ és} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A mohó algoritmus most az Y -ból vesz elemet, hiszen azok a legnagyobb súlyúak, így ki is választja az egész Y -t. Az indirekt feltevés szerint az $X \setminus Y$ halmazból már nem tud hozzávenni, vagyis $|Y|$ lesz a megoldás összsúlya. Az $|X|$ összsúlya $|X \cap Y| + |X \setminus Y| \times \left(\frac{|Y \setminus X|}{|X \setminus Y|}\right)$ -nál, vagyis $|X|$ -nél nagyobb, hiszen $q < 1$. A mohó algoritmus tehát most nem ad jó megoldást, ellentmondásra jutottunk. ■

A 4.3.1. tétel szerint, figyelembe véve azt a tényt, hogy az erdők matroid tulajdonságot mutatnak a 4.2. problémára, a 4.6. probléma 3. algoritmussal történő megoldása működik.

A vele ekvivalens 4.1. problémára *Kruskal algoritmus*a teljesen hasonló. Az éleket súlyuk szerint nemcsökkenő sorrendbe állítjuk és sorban beveszünk egy élt akkor, ha nem alkot kört a korábban már kiválasztott élekkel.

*Prim algoritmus*a kiindul egy csúcsból. Összekötjük egy olyan másik csúccsal, amelybe a legolcsóbb él fut. Ha van tehát egy fánk, akkor mindig egy olyan minimális élt választunk, amely az eddigi fa egy csúcsát összeköti egy fán kívüli ponttal. Így mindig összefüggő lesz a kiválasztott élek által feszített részgráf és kör nem keletkezik. Megállunk, ha nincs megfelelő él. Ha van feszítő fája a gráfnak, akkor a végeredmény egy feszítő fa, ami biztos, hogy optimális lesz!

A két fenti algoritmust már korábban megfogalmaztuk, most már tudjuk, hogy ezek jól működnek. Mindkettőben vettünk bizonyos éleket és később már nem változtattunk a korábbi döntésünkön. A 4. algoritmushoz hasonló szintén jól működik a minimális feszítő fákra. Ebben rendre töröljük a legdrágább éleket, kivéve ha az él *híd*, vagyis elhagyva megszűnne az összefüggőség. A Kruskal és Prim algoritmusok közös általánosítása a következő: Színezzük ki a gráf éleit két színnel!

Kék színezés: Vegyünk egy vágást, amelyben nincs még kék él. Színezzük kékre a legkisebb súlyú, még ki nem színezett élt a vágás élei közül!

Piros színezés: Vegyünk egy kört, amelyben nincs még piros él. Színezzük pirosra a legnagyobb súlyú, még ki nem színezett élt a kör élei közül!

Megmutatható, hogy valamelyik színnel mindig tudjuk folytatni a színezést, és a végén a kék élek pontosan egy feszítő fát adnak.

5. fejezet

Gyártási folyamatok szintézise

A nagy szoftverek kisebb részekből állnak. A kisebb részek is úgy épülnek fel, hogy még kisebb programrészeket használnak fel. Egy-egy programrészeiről tudjuk, hogy mely adathalmazt és objektum összességet használja és ezekből milyen adatokat állít elő. A tervezésnek talán a legfontosabb része az egyes komponensek összerakása.

Amíg egy győgszert előállítanak számos összetevőjét külön-külön létre kell hozni. Vannak a természetben előforduló alapanyagok, bizonyos technológiai folyamatok, ezeket és korábban megalkotott szintetikus anyagokat felhasználva egy vagy több újabb mesterséges anyagot produkálnak.

A komplex tudás, a szakértelem úgy jön létre, hogy alapképességekből és megszerzett ismeretekből újabb, összetettebb tárgyi tudáselemek keletkeznek. Ezeket kutatással kombinálva még mélyebb, speciálisabb ismeretanyagra tehetünk szert.

5.1. Struktúrális modell

Mindegyik említett és szóba nem hozott szintézis közös vizsgálatára alkalmas lehet a **Folyamatszintézis** (Process Network Synthesis, PNS) modell. Jelölje $\varphi'(H)$ egy tetszőleges H halmaz összes nemüres részalmazát. Legyenek M és $O \subseteq \varphi'(M) \times \varphi'(M)$ véges, nemüres és diszjunkt halmazok. Az M elemei az anyagok, míg az O elemei a műveleti egységek, melyek segítségével bizonyos bemenő anyagokból nyerünk előírt módon egy kimeneti anyagalmazt. Hogy mi megy végbe a műveleti egységekben, azzal nem foglalkozunk, figyelmen kívül hagyjuk azt is, miként kezdett a rendszer működni. Bármely $u \in O$ műveleti egységre $u = (\alpha, \beta)$, ahol az α a bemeneti (nem üres) anyagalmaz, β pedig a kimeneti (nem üres) anyagalmaz. Azt fogjuk mondani, hogy az u műveleti egység az α anyagalmazból a β anyagalmazt gyártja. A gép tehát azonosítható azzal, hogy milyen anyagalmazból mit gyárt.

5.1. Definíció. Az (M, O) párhoz egyértelműen hozzárendelhető egy gráf, amit a **folyamat gráfjának** nevezünk: $PG(M, O) = (M \cup O, A_1 \cup A_2)$, ahol az élhalmaz kétféle típusú élből áll,

$$A_1 = \{(X, Y) : Y = (\alpha, \beta) \in O \text{ és } X \in \alpha\},$$

$$A_2 = \{(Y, X) : Y = (\alpha, \beta) \in O \text{ és } X \in \beta\}.$$

5.2. Definíció. Egy (V', E') gráf egy $PG(M, O)$ folyamat gráf **részgráfja**, ha:

- $V' = M' \cup O'$, $M' \subseteq M$, $O' \subseteq O$
- $O' \subseteq \Phi'(M') \times \Phi'(M')$
- $E' = A'_1 \cup A'_2$, ahol

$$A'_1 = \{(X, Y) : Y = (\alpha, \beta) \in O' \text{ és } X \in \alpha\},$$

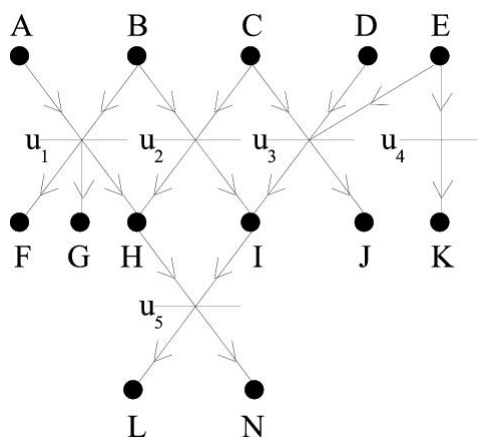
$$A'_2 = \{(Y, X) : Y = (\alpha, \beta) \in O' \text{ és } X \in \beta\}.$$

5.1. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy adott (M, O) pár és a hozzá rendelt folyamat gráf kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást. Ezért a továbbiakban az (M, O) párokat azonosítani fogjuk a hozzájuk rendelt folyamat gráfokkal.

Egy $X \in M$ anyag **forrás** (M, O) -ban, ha nem létezik (Y, X) él a folyamat gráfban. Ha léteznek X_1, X_2, \dots, X_n csúcsok a gráfban, melyekre $(X_1, X_2), \dots, (X_{n-1}, X_n)$ élek az (M, O) folyamat gráfban, akkor az ezen csúcsok által meghatározott **utat** $[X_1, X_n]$ -el fogjuk jelölni.

Legyen most $P \subseteq M$ és $R \subseteq M$ az **előállítandó anyagok** és a **felhasználható nyersanyagok** egymástól diszjunkt halmaza.

Az $M=(P, R, O)$ hármast a tekintett PNS-probléma **strukturális modelljének** nevezzük.



5.1. ábra

5.1. Példa. Legyen $M=(P, R, O)$, melyben

- $P = \{L, N\}$,
- $R = \{A, B, C, D, E\}$,
- $O = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, ahol

- $u_1 = (\{A, B\}, \{F, G, H\})$,
- $u_2 = (\{B, C\}, \{H, I\})$,
- $u_3 = (\{C, D, E\}, \{I, J\})$,
- $u_4 = (\{E\}, \{K\})$, és
- $u_5 = (\{H, I\}, \{L, N\})$.

Ekkor $M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, N\}$ és az (M, O) folyamat gráfot a 5.1. ábra szemlélteti.

5.3. Definíció. Legyen adott egy $\mathbf{M} = (P, R, O)$ strukturális modell és legyen $o \subseteq O$ műveleti egységek egy halmaza. Ekkor egy (m, o) részgráfot az \mathbf{M} strukturális modell egy **lehetséges megoldás struktúrájának** nevezünk, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

- (A1) $P \subseteq m$,
- (A2) $\forall X \in m, X \in R \Leftrightarrow \nexists (Y, X)$ él (m, o) – ban,
- (A3) $\forall Y_0 \in o, \exists [Y_0, Y_n]$ út, amelyre $Y_n \in P$,
- (A4) $\forall X \in m, \exists (\alpha, \beta) \in o$ úgy, hogy $X \in \alpha \cup \beta$.

Jelölje $S(\mathbf{M})$ az \mathbf{M} strukturális modell lehetséges megoldás struktúráinak halmazát. Egy lehetséges megoldás struktúrákat tehát úgy képzelhetünk el, mint a folyamat gráfjának egy olyan részhálózatát, melyben:

- szerepelnek az előállítandó anyagok,
- nyersanyagokat nem gyártunk, és minden nem nyersanyagot gyártja valamelyik műveleti egységünk,
- csak olyan műveleti egységet működtetünk, amely legalább közvetve részt vesz valamelyik előállítandó anyag gyártásában, illetve
- nincs izolált anyagi pont a részgráfban.

5.2. Megjegyzés. Az M és O halmazok végeessége miatt $S(\mathbf{M})$ is véges halmaz.

5.3. Megjegyzés. Általános esetben az (A1) – (A4) feltételeket teljesítő lehetséges megoldás struktúrák halmaza üres halmaz is lehet: az 5.1. példában, ha $B \notin R$ lenne (azaz nem lenne nyersanyag), akkor $S(\mathbf{M}) = \emptyset$ -t kapnánk.

Nyilvánvaló, hogy két megoldás struktúra egyesítése is megoldás struktúra.

5.4. Definíció. Legyen $\mathbf{M} = (P, R, O)$ egy PNS probléma strukturális modellje. \mathbf{M} **maximális struktúrája** alatt a

$$\mu(\mathbf{M}) = \bigcup_{(m,o) \in S(\mathbf{M})} (m,o)$$

megoldás struktúrákat értjük. Ha $S(\mathbf{M}) = \emptyset$, akkor $\mu(\mathbf{M}) = \emptyset$ és $\mu(\mathbf{M})$ -et **degeneráltnak** nevezük.

5.4. Megjegyzés. $S(\mathbf{M}) \neq \emptyset$ akkor és csakis akkor, ha $\mu(\mathbf{M}) \neq \emptyset$.

5.5. Definíció. Legyen $o \subseteq O$ műveleti egységek egy halmaza. Definíáljuk a mat^{in} , mat^{out} , és mat függvényeket a következőképpen:

$$mat^{in}(o) : \varphi'(O) \rightarrow \varphi'(M), mat^{in}(o) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in o} \alpha,$$

$$mat^{out}(o) : \varphi'(O) \rightarrow \varphi'(M), mat^{out}(o) = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in o} \beta,$$

$$mat(o) : \varphi'(O) \rightarrow \varphi'(M), mat(o) = mat^{in}(o) \cup mat^{out}(o).$$

Szemléletesen a műveleti egységek egy o halmazához tartozó input anyagok, illetve output anyagok egyesítéséről van szó. Egy (m, o) lehetséges megoldás struktúra egyértelműen meghatározott az o műveleti egység halmazzal.

Legyen $\mathbf{M} = (P, R, O)$ egy PNS probléma strukturális modellje.

Maximális struktúra generáló algoritmus (MSG)

Az algoritmus két fő részből áll. Az első redukciós részben töröljük azokat a műveleti egységeket, melyek vagy nyersanyagot is termelnek, vagy valamely nyersanyagtól különböző, egyetlen műveleti egység által sem termelt bemeneti anyag hiányában nem tudnának működni. Ha közben azt tapasztaljuk, hogy valamely célterméket egyetlen megmaradt műveleti egységünk sem gyártja, ez azt jelenti, hogy nincs lehetséges megoldás struktúra, azaz $S(\mathbf{M}) = \emptyset$, de akkor maximális struktúra sincs, így az algoritmust megállíthatjuk.

A második részben a rendelkezésre álló műveleti egységekből felépítjük azt a hálózatot, mely kizárólag hasznos anyagokat termelő műveleti egységeket tartalmaz. Először kiindulunk abból, hogy a céltermékeket le kell gyártani. Ehhez minden olyan műveleti egység hasznos lehet, mely célterméket gyárt, tehát ezeket bevesszük a hálózatba. De a hálózatba bevett műveleti egységek bemeneti anyagait is le kellene gyártani, tehát bevesszük az azokat gyártó műveleti egységeket is, és így tovább. Természetesen általános esetben megtörténhet, hogy a céltermékek gyártása az ily módon meghatározott műveleti egységek akár több különböző valódi részalmazával is legyárthatók, most az volt a cél, hogy összegyűjtsük azokat a műveleti egységeket, melyek részt vehetnek valamely lehetséges megoldás struktúrában.

Az algoritmus eldönti vajon van-e lehetséges megoldás, és amennyiben létezik lehetséges megoldás struktúra, az eredményeképpen kapott hálózat azokat és csakis azokat a műveleti egységeket és anyagokat tartalmazza, amelyek részt vehetnek valamely lehetséges megoldás struktúrában, így a modell maximális struktúráját szolgáltatja. Lényeges továbbá az is, hogy az algoritmus polinomiális idő alatt oldja meg ezt a feladatot ([21]).

1. Redukció

Inicializálás

- 1.1. Legyen $O_0 = O \setminus \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in O \ \& \ \beta \cap R \neq \emptyset\}$ és $M_0 = \text{mat}(O_0)$.
- 1.2. Ha $P \not\subseteq M_0$, akkor nem létezik **M**-re maximális struktúra és az algoritmus véget ér. Egyébként folytassuk az eljárást a következő lépéssel.
- 1.3. Legyen $T_0 = \{X : X \in M_0 \setminus R \ \& \ ((\alpha, \beta) \in O_0 \longrightarrow X \notin \beta)\}$.
- 1.4. Legyen $r = 0$.

Iteráció

- 1.5. Ha $T_r = \emptyset$, akkor folytassuk az eljárást a 2.1. lépéssel.
- 1.6. Válasszunk egy $X \in T_r$ anyagot.
- 1.7. Legyen $O_X = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in O_r \ \& \ X \in \alpha\}$.
- 1.8. Legyen $O_{r+1} = O_r \setminus O_X$ és $M_{r+1} = \text{mat}(O_{r+1})$.
- 1.9. Ha $P \not\subseteq M_{r+1}$, akkor nem létezik **M**-re maximális struktúra és az algoritmus véget ér. Egyébként folytassuk az eljárást a soron következő lépéssel.
- 1.10. Határozzuk meg a

$$T'_r = \{Y : Y \in \text{mat}^{\text{out}}(O_X) \ \& \ Y \notin \text{mat}^{\text{out}}(O_{r+1}) \ \& \ Y \in \text{mat}^{\text{in}}(O_{r+1})\}$$

halmazt.

- 1.11. Legyen $T_{r+1} = (T_r \cap M_{r+1}) \cup T'_r$.
- 1.12. Növeljük eggyel az r iterációs számot.
- 1.13. Kezdjünk egy új iterációt az 1.5. lépéssel.

2. Építés

Inicializálás

- 2.1. Legyen $W_0 = P$, $m_0 = \emptyset$, $o_0 = \emptyset$ és $s = 0$.

Iteráció

- 2.2. Ha $W_s = \emptyset$, akkor vége az eljárásnak, kaptunk egy megoldás struktúrát **M**-re.
Ha $\bar{m} = \text{mat}(o_s)$, akkor (\bar{m}, o_s) az **M** maximális struktúrája.
Ha $W_s \neq \emptyset$, akkor folytassuk az eljárást a következő lépéssel.

- 2.3. Válasszunk egy teszöleges X anyagot W_s -ből.
- 2.4. Legyen $m_{s+1} = m_s \cup \{X\}$.
- 2.5. Alkossuk meg az $O_X^* = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in O_r \ \& \ X \in \beta\}$ halmazt.
- 2.6. Legyen $o_{s+1} = o_s \cup O_X^*$.
- 2.7. $W_{s+1} = (W_s \cup \text{mat}^{in}(O_X^*)) \setminus (R \cup m_{s+1})$.
- 2.8. Növeljük eggyel az s iterációs számot.
- 2.9. Kezdjük egy új iterációt a 2.2. lépéssel.

5.2. A súlyozott PNS modell

Legyen $\mathbf{M} = (P, R, O)$ egy PNS probléma strukturális modellje. Gyakorlati szempontból természetes igény, hogy szeretnénk meghatározni azt a lehetséges megoldás struktúrát, amely valamilyen szempontból a leggazdaságosabban állítja elő a céltermékeket. Definiálunk tehát a lehetséges megoldás struktúrák halmazán egy költségfüggvényt és keresünk egy legkisebb költségű lehetséges megoldást. Legyen $z : S(\mathbf{M}) \rightarrow R_+$ egy ilyen költségfüggvény. Akkor a megoldandó feladat:

$$(PNS-1) \quad \min\{z((m, o)) : (m, o) \in S(\mathbf{M})\}.$$

Egy megoldás struktúra költségfüggvényét többféleképpen definiálhatjuk. Mi most ennek egy egyszerű és természetes definícióját fogjuk adni.

Legyen $w : O \rightarrow R_+$ egy költségfüggvény a műveleti egységeken. Egy lehetséges megoldás struktúra költségét a benne levő műveleti egységek összköltségeként fogjuk definiálni. Így a PNS probléma azon változatát vizsgáljuk, amikor a feladat egy olyan lehetséges megoldás struktúra meghatározása, melyre a benne működő műveleti egységek súlya minimális, vagyis

$$(PNS-2) \quad \min\{\sum_{u \in o} w(u) : (m, o) \in S(\mathbf{M})\}.$$

Az a kérdés, hogy meg tudjuk-e oldani ezt a feladatot, ha igen hogyan, és milyen hatékonysággal?

Mivel az M és O halmazok végeessége miatt a lehetséges megoldás struktúrák száma is véges, továbbá adott lehetséges megoldás struktúra fentiekben definiált költségének kiszámítása is véges idő alatt elvégezhető, ezért nyilván a legkisebb költségű lehetséges megoldás struktúra meghatározása is véges időben megoldható feladat. Például egy lehetőség, hogy felsoroljuk a strukturális modellben szereplő O halmaz összes részhalmazát, mindegyikről megvizsgáljuk, hogy lehetséges megoldás struktúra-e, és a lehetséges megoldás struktúrák közül kiválasztjuk a legkisebb költségűt. Csak a maximális struktúra részhalmazával érdemes foglalkozni, de még ezek felsorolása is nagyon sok, az O műveleti egység halmaz számosságának függvényében exponenciális számú részhalmaz megvizsgálását igényli.

5.3. Mennyire nehéz a folyamatszintézis?

A probléma nehézségéről kiderült [5], [24], hogy még az egyszerűbb (PNS-2) optimalizálási probléma is olyan nehéz mint az ún. *Halmazlefedési feladat* l. pl. [29], amely az univerzálisan nehéz kombinatorikus optimalizálási problémák közé tartozik. Nincs tehát egy jól működő pl. mohó algoritmus, amellyel hatékonyan meg tudnánk oldani ezt a fontos feladatokat felölelő modellt! Speciális strukturális szerkezetű vagy célfüggvénnyel rendelkező PNS osztályokra adhatunk korlátokat a megoldások számára vagy akár megoldhatjuk hatékonyan is, ha az osztály túl speciális [6], [8]. Heurisztikus megoldásokkal is lehet használható eredményt kapni, így ezek kutatása is egy fontos területe a nehezen megoldható modellel kapcsolatos vizsgálatoknak [7], [9], [10].

Információ szerzése:

A klasszikus NP-teljes halmazlefedési feladat számos fontos gyakorlati problémában megjelenik. Az információgyűjtés az egyik legismertebb példa. Ha azonban nem könyvekből, vagy dokumentumokból szerezzük be a számunkra szükséges adatokat, hanem élő személyektől, akkor jogos feltételezni, hogy partnereinket is érdekli néhány dolog. Tegyük fel, hogy bárki ismereteit csak akkor osztja meg velünk – bizonyos juttatás fejében -, ha cserébe ő is meg fogja kapni mindazt, amit tudni szeretne. Emiatt egy informátor csoportot vagyunk kénytelenek megszervezni – pl. vizsgák idején a kollégiumban -, akik együtt nemcsak a mi igényünket képesek biztosítani, hanem a csoport minden egyes tagját is. Hogyan kerülhetne ez nekünk a legkevesebbe, ha minden résztvevőt mi fizetünk?

A fenti feladatot a következőképpen is megfogalmazhatjuk.

Adott a $H = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ halmaz, a tételek listája. R és P a H két részhalmaza. Az R halmaz tartalmazza azon tételeket, amelyeket már valamilyen módon megszereztünk (például kidolgoztuk őket), míg a P halmaz tartalmazza a megszerezni kívánt tételeket. Feltesszük, hogy $P \cap R = \emptyset$.

Adottak a $G_i = (A_i, B_i)$ párok ($1 \leq i \leq N$), ahol N a tételeket kidolgozó és azokat „áruba bocsátó” diákok száma. A_i tartalmazza, hogy mely tételeket kell odaadnunk a B_i halmazban megkapott tételekért cserébe még az s_i fizetésen felül. $A_i \subseteq H$ -nak, $B_i \subseteq H$ -nak, ($1 \leq i \leq N$).

Cél:

1. Keresendő az $\{1, \dots, N\}$ olyan I részhalmaza, melyre teljesül, hogy az $R \cup (\cup B_i : i \in I)$ halmaz tartalmazza a $P \cup (\cup A_i : i \in I)$ halmazt. Nevezzünk egy ilyen I halmazt lehetséges megoldásnak.
2. Keresendő olyan, az 1. pontban leírt I lehetséges megoldás, amely optimális, egy az s_i értékek – mint változók – függvénye szerint. Esetünkben a $\sum (s_i : i \in I)$ legyen minimális.

Ez a probléma a halmazlefedési probléma általánosítása, hiszen azt kapjuk, ha $R = \emptyset, A_i = \emptyset$ ($1 \leq i \leq N$), $P = H$

A speciális esetben egy lehetséges megoldás meghatározása könnyű, hiszen az összes G_i -t kiválasztva (ha a feladat megoldható) megoldást kapunk. Az általánosításban egy lehetséges

megoldás meghatározása sem könnyű, hiszen túl sok G_i -t kiválasztva az A_i igények kielégítése gondot okozhat.

A PNS probléma mint optimalizálási feladat a bemutatott csak gépköltséges esetben is és ennek általánosításai esetében is a 2. fejezetben bemutatott dinamikus programozás módszeréhez hasonló *Korlátozás és szétválasztás* kereteljárás segítségével oldható meg [23], [28], [29].

6. fejezet

Minimális költségű hálózati folyamok

Egy ideiglenesen megemelkedő átmenő forgalom egy város közlekedésében káoszt okozhat. Az utak egyirányúsításával igyekeznek segíteni, az autók mozgását a beavatkozás megkönnyítheti céljaik gyorsabb elérésében. A nyári hőségben tapasztalható, hogy a vízszolgáltatás nem megfelelő, kisebb a nyomás, tiltják a locsolást, nem tudják az igényeket kiszolgálni a létező vízvezeték hálózatok. A gyakorlatban számos hasonló jelenség figyelhető meg, ezekben közös, hogy egy hálózaton kell optimalizálni (lásd az 1.6. példát). Az óriási témát éppen csak érintjük.

Legyen $D = (V, A)$ egy n csúcú és m élű hálózat. Minden $(i, j) \in A$ élhez tartozik egy c_{ij} költség, valamint egy l_{ij} alsó és egy u_{ij} felső korlát. A csúcsokhoz is tartozik egy-egy $b(i)$ szám, amelyekre fennáll a $\sum_{i=1}^n b(i) = 0$ megmaradási egyenlet.

A legkisebb költségű folyam probléma matematikai modellje a következő:

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x_{ji} = b(i) \text{ minden } i \in N - re, \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}, \text{ minden } (i, j) \in A - ra, \end{aligned} \quad (6.1)$$

Az élekhez rendelt x_{ij} értékeket mint az éleken egységnyi idő alatt átfolyó mennyiségeket tekinthetjük, amelyekre az első feltételrendszer előírja, hogy bármely csúcsba amennyivel több a kifolyó össz mennyiség mint a befolyó az éppen az i csúcs adaléka, ha a $b(i)$ pozitív, vagy igénye, ha a $b(i)$ negatív. Egy élen folyó mennyiség alulról és felülről is korlátozva lehet, ha $l_{ij} = 0$ akkor csak annyit kötünk ki, hogy nemnegatív legyen. Egy egységnyi mennyiség átengedésének az éltől függő egységköltsége a c_{ij} , ezért a célfüggvény az egész áramlás összköltsége. Speciális eseteket vizsgáltak előbb, ha $l_{ij} = 0$, $u_{ij} = \infty$ és csak két csúcs, az s forrás és a t nyelő esetén nem nulla $b(i)$, $b(s) > 0$, $b(t) < 0$ és $c_{s,j} = -1$ egyébként $c_{ij} = 0$, akkor a klasszikus folyamproblémánál vagyunk, amikor a hálózat maximális áteresztő képessége a kérdés. Az optimum értéke ennek az ellentettje. A klasszikus folyamprobléma megoldható a számos könyvben [28] tárgyalt Ford-Fulkerson címkézési eljárással.

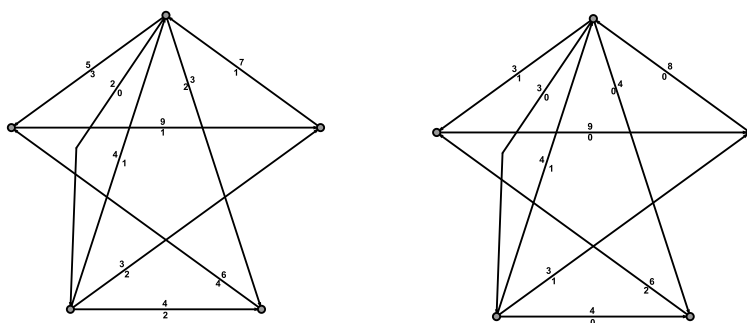
Tárgyaljuk meg vázlatosan a legkisebb költségű folyam probléma – a 6.1 modell – egy lehetséges megoldási módszerét! Először tekintsünk egy példát!

A bemenetet három mátrix és egy vektor jelenti. C a költségmátrix, L és U az alsó és felső korlátokat tartalmazó mátrix. A b vektor a csúcsokhoz tartozó adalékokat vagy igényeket tartalmazza.

$$C = \begin{bmatrix} - & 4 & 3 & 4 & - \\ - & - & - & - & 6 \\ - & - & - & 7 & - \\ 2 & 3 & - & - & 5 \\ - & - & 9 & - & - \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} - & 2 & 2 & 1 & - \\ - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & 1 & - \\ 0 & 2 & - & - & 3 \\ - & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} - & 0 & 1 & 1 & - \\ - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & 0 & - \\ 0 & 0 & - & - & 1 \\ - & - & 0 & - & - \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} - & 4 & 3 & 4 & - \\ - & - & - & - & 6 \\ - & - & - & 8 & - \\ 3 & 4 & - & - & 3 \\ - & - & 9 & - & - \end{bmatrix}$$

Az első ábrán az irányított élek fölé írtuk a C mátrix megfelelő értékét, míg alá az X_0 -ban álló értéket. A csúcsok közül a bal alsó az első és a számozás pozitív forgásirány szerint történt. A második ábrán hasonlóképpen az L és az U mátrix elemei láthatók.



Bár a hálózat csak 5 csúcsot tartalmaz mégsem látjuk meg azonnal mi az optimális megoldás. Egy lehetséges megoldás észrevétele sem megy gyorsan. Nyilvánvaló, hogy szükséges az $U \geq L$ feltétel, de a csúcsok igényei, adalékai miatt vannak más szükséges feltételek is. Az L alsó korlát mátrixot a tárgyalás egyszerűsítése végett azonosan 0-nak is tekinthetnénk, egy alkalmas transzformációval elérhetnénk azt a bemeneti formát, amely transzformált feladatot megoldva az eredetinek megkapnánk a megoldását. Most induljunk ki egy a 6.1 modell feltételeit kielégítő lehetséges X_0 folyamból!

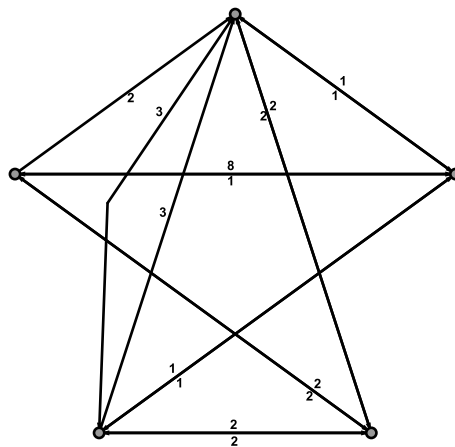
A hálózathoz tartozó X lehetséges folyamhoz vezessük be minden $(i, j) \in A$ élre a megmaradt (vagy még felhasználható) kapacitást, amely $R_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$ és a hozzá tartozó költség a c_{ij} . Ha $(j, i) \in A$, akkor a maradék kapacitása (i, j) -nek $r_{ij} = x_{ji} - l_{ji}$ és a hozzá tartozó költség $c_{ij} = -c_{ji}$.

Ez azért hasznos, mert így látjuk, hogy egy $(i, j) \in A$ élre van-e lehetőségünk az élen folyó mennyiséget növelni, illetve csökkenteni. Ha egy igazi él már felülről telített, vagyis elérte a felső korlátját, akkor a rajta folyó mennyiséget növelni nem tudjuk. Ha az alsó korlát van, akkor csökkenteni nem tudjuk. Előfordulhat, hogy mindkét irányú változtatás lehetséges. Változtatni akkor érdemes egy élen, ha a változtatás költség csökkenést eredményez,

tehát ha az él költsége pozitív, akkor csökkenteni, ha negatív, akkor növelni érdemes. Természetesen egyetlen élen nem lehet úgy változtatni a rajta folyó mennyiséget, hogy a feltételek megmaradjanak. Ha egyidőben több élen változtatunk, akkor az összköltség csökkentése a kívánatos.

A maradék kapacitás:

$$R(i, j) = \begin{bmatrix} - & 2 & 1 & 3 & - \\ - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & 7 & - \\ 3 & 2 & - & - & 0 \\ - & - & 8 & - & - \end{bmatrix} \quad r(i, j) = \begin{bmatrix} - & 2 & 1 & 0 & - \\ - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & 1 & - \\ 0 & 2 & - & - & 2 \\ - & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$



Az ábrán együtt látható a kétféle maradék kapacitás. Az irányított él fölött a lehetséges növelés, alatta a lehetséges csökkentés mértéke áll. Ha lerajzoljuk azt a segédgráfot, amelyben pontosan azok az irányított élek vannak, amelyekeken lehet az irányításnak megfelelően növelni a folyam értékét az élen, akkor ez segít olyan irányított kört találni, amely minden élén lehetséges a növelés. Ha az $R(i, j)$ mátrixban pozitív érték áll, akkor behúzzuk az élt. Ezeken szabad növelni. Az $r(i, j)$ mátrixban a pozitív értékek alapján szintén behúzzunk éleket. Ezek jelentése az, hogy az él irányításának megfelelően csökkentésre van lehetőség. A ábrán látható, hogy az $1 - 2 - -4 - -3 - -1$ hurkon csökkenthetünk, legyen $x_{12}^1 = x_{12}^0 + 1$, $x_{42}^1 = x_{42}^0 - 1$, $x_{34}^1 = x_{34}^0 - 1$, $x_{13}^1 = x_{13}^0 - 1$. A célfüggvény értékének változása $c_{12} - c_{42} - c_{34} - c_{13} = 4 - 3 - 8 - 3 = -10$, tehát csökkent. Ennek egyedüli okozója az előjeles költségértékek eredőjének negatív volta, vagyis a negatív költségű kör léte. Az x_{ij} értékek változtatásának azonos mértékén az előjel nem múlik. A lehető legtöbbet változtattunk, mert már így is $x_{34}^1 = 0$ lett.

$$X^1 = \begin{bmatrix} - & 3 & 1 & 1 & - \\ - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & 0 & - \\ 0 & 1 & - & - & 3 \\ - & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

A maradék kapacitások:

$$R(i, j) = \begin{bmatrix} - & 1 & 2 & 3 & - \\ - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & 8 & - \\ 3 & 3 & - & - & 0 \\ - & - & 8 & - & - \end{bmatrix} \quad r(i, j) = \begin{bmatrix} - & 3 & 0 & 0 & - \\ - & - & - & - & 2 \\ - & - & - & 0 & - \\ 0 & 1 & - & - & 2 \\ - & - & 1 & - & - \end{bmatrix}$$

Az utóbbi két szabad kapacitásokat megmutató mátrix alapján látható, hogy a $2 - -1 - -3 - -5 - -2$ hurokban három élen csökkentjük az értéket és egyen növelünk. Így $x_{12}^2 = x_{12}^1 - 1$, $x_{13}^2 = x_{13}^1 + 1$, $x_{53}^2 = x_{53}^1 - 1$, $x_{25}^2 = x_{25}^1 - 1$. Eszerint a változás $-c_{12} + c_{13} - c_{53} - c_{25} = -4 + 3 - 9 - 5 = -15$. Most sem lehetett volna nagyobb mennyiséggel csökkenteni, mert az $x_{53}^2 = 0$ lett. Az új folyam

$$X^2 = \begin{bmatrix} - & 2 & 2 & 1 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & 0 & - \\ 0 & 1 & - & - & 3 \\ - & - & 0 & - & - \end{bmatrix}$$

$$R(i, j) = \begin{bmatrix} - & 2 & 1 & 3 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & 8 & - \\ 3 & 3 & - & - & 0 \\ - & - & 9 & - & - \end{bmatrix} \quad r(i, j) = \begin{bmatrix} - & 2 & 1 & 0 & - \\ - & - & - & - & 1 \\ - & - & - & 0 & - \\ 0 & 1 & - & - & 2 \\ - & - & 0 & - & - \end{bmatrix}$$

Most hiába keresünk, nem találunk negatív kört. Előfordulhatott volna ez már eddig is!? Hogyan találhatunk negatív költségű hurkot? Miből derül ki, ha ilyen nincs? Ha nincs, akkor vajon lehet-e más módon találni egy kisebb költségű folyamatot? Már a legelején is felmerült egy kérdés, hogyan találunk egy kiinduló folyamatot? Ezekre a jogos és fontos kérdésekre még nem adtunk választ. A következő rész és a hivatkozott művek segítenek.

6.1. Hálózati szimplex módszer

Legelőször is nyilvánvaló, hogy a 6.1 modell lineáris feltételrendszer mellett egy lineáris cél-függvény minimumát keresi, tehát egy lineáris programozási feladat, melyben minden élhez tartozik egy változó. A változókra megszokott egyszerű nemnegativitási feltétel érdekében az alsó korlátoktól könnyű megszabadulni az optimalizálás során. Képzeld el, hogy az L-ben előírt minimális mennyiség minden élen folyik. A példában $x_{13} = 1 + x'_{13}$, $x_{14} = 1 + x'_{14}$, $x_{25} = 2 + x'_{25}$ és $x_{45} = 1 + x'_{45}$ helyettesítéssel az x'_{ij} -kre a nemnegativitási feltétel elegendő. A célfüggvényt $3 + 4 + 2 \times 6 + 5 = 24$ értékkel növeli a változók cseréje az alsó korlátok miatt. Cseréljük tehát ki ezt a négy változót a vesszővel ellátott új változókra! Az egyensúlyi feltételekben a konstansok megjelennek, ha azonos alakot szeretnénk, akkor a $b' = (3, -2, -1, 3, -3)$ vektorral érdemes dolgozni. Szükséges az $u_{13} = 1 + u'_{13}$, $u_{14} = 1 + u'_{14}$

$u_{25} = 2 + u'_{25}$ és $u_{45} = 1 + u'_{45}$ módosítás is. Ha a módosított 6.2 feladatot megoldjuk a cél-függvény értékéhez hozzá kell majd adni 24-et.

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x') = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x'_{ij} \\ \text{feltéve, hogy} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in A\}} x'_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in A\}} x'_{ji} = b'(i) \text{ minden } i \in N - re, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$0 \leq x'_{ij} \leq u'_{ij}, \text{ minden } (i, j) \in A - ra,$$

$$U' = \begin{bmatrix} - & 4 & 2 & 3 & - \\ - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & 8 & - \\ 3 & 4 & - & - & 2 \\ - & - & 9 & - & - \end{bmatrix}$$

A fenti mátrix a módosított felső korlátokat tartalmazza. De először hagyjuk figyelmen kívül a felső korlátokat is!

Az együtthatómátrix csak nullákat, illetve az i . csúcsba bejövő éleknél -1 -et, a kimenőknél 1 -et tartalmaz. Egy ilyen feladatot szimplex módszerrel meg tudunk oldani. A speciális alak miatt viszont nem nehéz belátni, hogy az együtthatómátrix *totálisan unimoduláris*, vagyis bármely négyzetes részmátrixának determinánsa 1 , 0 vagy -1 , amiből következik a később felírt 13.3 összefüggésből, hogy bármely bázismegoldásban a változók egész értékűek lesznek, feltéve hogy minden bemeneti érték egész szám. Azonban mégsem úgy oldjuk meg, mint egy általános LP-t. Vegyük észre, hogy az összefüggő gráfra felírt egyensúlyi feltételek nem függetlenek egymástól, ha $n - 1$ feltétel teljesül, akkor már az n . is teljesül. Az összefüggőséget éppen $n - 1$ alkalmasan megválasztott él tudja biztosítani, egy feszítő fa élei. Induljunk ki tehát pl. a $T = [(1,2)(1,3)(4,1)(2,5)]$ élek által feszített fából. Meghatározható egy lehetséges megoldás, ha egy levél típusú csúcsból indulunk el $x'_{41} = 3$, $x'_{25} = 3$, $x'_{13} = 1$ és $x'_{12} = 5$ az összes többi élen ne folyjon semmi. Ez egy lehetséges bázismegoldás. Az új bázis változók 0 cél-függvényegyütthatóval kell, hogy szerepeljenek. Ha pl. az első feltételt hagyjuk el az $(y_2, \dots, y_n) = c_B V B^{-1}$ ún. *szimplex szorzó* vektorral fennáll, hogy az új, ún. *redukált költségvektor* általános együtthatója $\hat{c}_{ij} = y_i - y_j - c_{ij}$ lesz. Abból, hogy ezeknek teljesülni kell, számoljunk ki a T feszítő fához minden csúcshoz egy olyan y_i értéket, amellyel fennáll, hogy minden T-beli élre a redukált költség együttható 0 . Az 5. csúcshoz mint levélhez a 0 tartozzon, ahhoz viszonyítunk, így $(y_1, \dots, y_5) = (10, 6, 7, 12, 0)$. A bázison kívüli (i, j) élekre is számítsuk ki az $y_i - y_j - c_{ij}$ értékeket! $\hat{c}_{14} = -2$, $\hat{c}_{34} = -12$, $\hat{c}_{42} = 3$, $\hat{c}_{45} = 7$, $\hat{c}_{53} = -16$. Vajon optimális-e az x_0 lehetséges megoldás? Ha nem, akkor hogyan történjen egy bázisváltoztatás? Ha egy élt be akarunk venni a bázisba, akkor a T feszítő fához hozzávéve kialakul pontosan egy kör a tartó gráfban (tehát az irányítást figyelmen kívül hagyva). Ebben a körben kíséreljünk meg egy változtatást a folyamaton, betartva az egyensúlyi feltételeket továbbra is. Ezt úgy lehet megtenni, ha θ mennyiséget indítunk az új él irányításának megfelelő irányba és a többi élen, ha az előre mutat szintén ennyit emelünk, míg a vissza mutató éleken ennyit csökkentünk. A θ nem lehet nagyobb a legkisebb vissza mutató élen folyó aktuális mennyiségnél, hiszen biztosítanunk kell a változtatás után is a változók nemnegativitását. A kiválasztásban

segítenek a \hat{c}_{ij} értékek. Csak akkor javít a leírt változtatás a célfüggvény értékén, ha a redukált költsége a bázis jelölt élnek pozitív. A példában ez a (4,2) élre teljesül. Kialakul a $4 - -2 - -1 - -4$ hurok, a maximális javítási lehetőség $\theta = 3$. A célfüggvény értékének változása $3(3 - 4 - 2) = -9$. Mivel a (4,1) élén már nem folyik semmi az x_{41} kikerül a bázisból, tudjuk, hogy az új T is feszítő fa marad. Tehát az új folyam $x_{42}^1 = 3$, $x_{25}^1 = 3$, $x_{13}^1 = 1$ és $x_{12}^1 = 2$ lesz, míg az új *potenciál* értékek – így is szokás mondani a csúcsokhoz rendelt y_i számokat – $(10, 6, 7, 9, 0)$. A nem bázisbeli élekre $\hat{c}_{14} = -3$, $\hat{c}_{34} = -9$, $\hat{c}_{41} = -3$, $\hat{c}_{45} = 4$, $\hat{c}_{53} = -16$. Most csak a (4,5) felel meg, csak neki pozitív a redukált költsége. Kialakul a $4 - -5 - -2 - -4$ hurok, 3 egységgel változtatunk a kör élein, tehát $x_{42}^2 = 0$, $x_{25}^2 = 0$, $x_{13}^2 = 1$, $x_{45}^2 = 3$ és $x_{12}^2 = 2$ lesz, vagyis az az érdekes helyzet állt elő, hogy akár a (4,2) akár a (2,5) kihagyható a bázisból! Ez egy degenerált helyzet, mert ha a bázisban van olyan amely zérus, akkor azt csökkenteni már nem lehet, tehát olyan élet nem „érdemes” majd a bázishoz cserére ajánlani, amelyre a zérus értékű változót még csökkenteni kellene. Ekkor tehát a báziscserével nem javul a célfüggvény értéke. Ugyanezt a jelenséget hívják a lineáris programozás elméletében is degenerációnak. Legyen az új $T = [(1,2)(1,3)(4,2)(4,5)]$ a potenciálok $(7, 3, 4, 6, 0)$. A nem bázisbeli élekre $\hat{c}_{14} = -3$, $\hat{c}_{34} = -9$, $\hat{c}_{41} = -3$, $\hat{c}_{25} = -9$, $\hat{c}_{53} = -13$. Az X^2 folyam tehát optimális, mivel csak pozitív redukált költséggel rendelkező változó becserélésével tudnánk javítani.

A megoldásban a felső korlátokat nem figyeltük. Egyetlen él, a (4,5) nem teljesíti a felső korlátot. Kihhasználva a példa kis méretét most keressük meg a legkisebb költségű (előjeles összeg) olyan hurkot, amelyben az x_{45}^2 csökkenthető. Ez az $5 - -4 - -2 - -5$, elég 1 egységnyi csökkentés, ezzel négyvel nagyobb lett az érték, de most már minden feltétel teljesül. A nem nulla változók az optimális megoldásban: $x_{42}^2 = 1$, $x_{25}^2 = 1$, $x_{13}^2 = 1$, $x_{45}^2 = 2$ és $x_{12}^2 = 2$. Ha most még az alsó korlátok miatti transzformáció inverzét is elvégezzük, akkor az eredeti feladat megoldását is megkapjuk.

$$X^2 = \begin{bmatrix} - & 2 & 2 & 1 & - \\ - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & 0 & - \\ 0 & 1 & - & - & 3 \\ - & - & 0 & - & - \end{bmatrix}$$

Ez megegyezik azzal az eredménnyel, amit még nem a hálózati szimplex módszerét követve korábban kaptunk, ellenőrzésként az LP megoldásaként is az X^2 -t kapjuk.

Az eljárás nagyon fontos, mivel sokkal hatékonyabb, mint egyéb módszerek a 6.1 modell megoldására. Maga a modell általánosítása a *szállítási feladatnak* és így a *hőzárrendelési feladatnak* is. A hálózati szimplex módszer megalkotásában számos magyar tudós közreműködött, König Dénes [15], Egerváry Jenő [13], [14], Gallai Tibor, Lovász László [37] [36], [34], Frank András [51], Tardos Éva [45].

7. fejezet

Pénzügyi tervezés

Tegyük fel, hogy van egy jól működő virágüzletünk. A fő profilja, az alkalmi csokrok, koszorúk elkészítése megrendelésre. A 7.1 táblázat jobboldali oszlopa mutatja, hogy a régóta együttműködő beszállítók naponta hány szál virágot tudnak hozni az egyes fajtákból. A középső három oszlopban látható, hogy az egyes virágkötészeti termékekhez hány szál virágot szokás felhasználni ebben az üzletben. Az alsó sorban állnak az árak (1000 forintban). A frekvenciánál helyen lévő kedvelt bolt maximális haszonnal dolgozik. A „sokéves tapasztalat kialakította”, hogyan tudják a rendelkezésre álló virágokból a maximális bevételt eredményező számú termékeket előállítani, minden elkészített csokor vagy koszorú el szokott fogyni, legfeljebb néhány szál virág marad ki. Számítsuk ki mi is, hogyan működik a bolt! Jelölje (x_1, x_2, x_3) az egyes termékek naponta eladott (= elkészített) darabszámát!

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3, \\ \text{feltéve, hogy } \quad & 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 60, \\ & 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 80, \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 30, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Szimplex algoritmussal megoldjuk a fenti feladatot.

	x_1	x_2	x_3		x_1	y_2	x_3		y_3	y_2	x_3			
y_1	3	1	4	60	y_1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{140}{3}$	y_1	-8	$\frac{5}{2}$	-15	20
y_2	2	6	2	80	x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{40}{3}$	x_2	-1	$\frac{1}{2}$	-2	10
y_3	1	2	3	30	y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{10}{3}$	x_1	3	-1	7	10
	-2	-4	-3			$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$\frac{160}{3}$		2	0	3	60

	Esküvői csokor	Sírcsokor	Ballagási csokor	Napi mennyiség
Rózsa	3	1	4	60
Liliom	2	6	2	80
Szegfű	1	2	3	30
Termék ár	2	4	3	

7.1. táblázat. Csokrok

Bizony az jött ki, hogy ballagási csokrot egyáltalán nem érdemes készíteni, talán magyarázhatjuk azzal, hogy hozzá 9 szál virág kell, ráadásul kevés liliom van benne, pedig abból áll rendelkezésre a legtöbb! Mind esküvői, mind sírcsokrot 10-et szoktak tehát készíteni. Bár a liliom és szegfű teljesen elfogy, mindig ki szokott maradni 20 szál rózsza. Természetesen érdemes lenne megtárgyalni a tapasztalatokat a rózsza beszállítójával – aki fix összegért szállít naponta 60 szál rózsát. Ha csak 40-et kér a bolt, akkor a bevétel azonos marad. Ha a beszállító kevesebb pénzt kérne 40-ért, akkor az üzletnek már biztosan megérné. Gondolkozzunk el azon, megváltozik-e a kapott optimális helyzet – az, hogy ballagási csokrot nem érdemes készíteni – ha kicsit változik valamelyik felső korlát az egyes virágfajtákra. Az máris világos, hogy a rózsára vonatkozó 60-as korlátot ha 40-ig csökkentjük, akkor bár több bevételünk nem lehet, de az, hogy 10 sírcsokrot és 10 esküvői csokrot készítsünk továbbra is mindig lehetséges. Az utolsó szimplex táblában, amint azt a lineáris programozás dualitás elméletéből tudjuk [11], [28] a feladat duálisának optimális megoldásai láthatók a célfüggvényegyütthetők sorában. Pl. az alsó sor első eleme a 2 – az y_3 oszlopában – kifejezi, hogy ha a harmadik kényszerben, a szegfűre vonatkozó feltételben a felső korlátot 1-gyel megemeljük, akkor a módosított feladat optimális megoldásának értéke éppen 2-vel lehet jobb. Ez a kijelentés azonban csak akkor igaz, ha a bázis ettől a „kis módosítástól” nem változik meg, vagyis esetünkben az x_1, x_2, y_1 marad bázisváltó.

7.1. Érzékenység vizsgálat, árnyékár

7.1. Definíció. *Az i -edik korlátozó feltételhez tartozó árnyékár az az érték, amennyivel az optimális z érték javul (maximumfeladatnál nő, minimumfeladatnál csökken), amikor a b_i -t 1-gyel növeljük és ez a változtatás nem eredményez más optimális bázismegoldást.*

A 7.1. példában tehát növeljük a szegfűre vonatkozó 30-as korlátot! Ha 31 lesz, akkor $(x_1, x_2, x_3) = (13, 9, 0)$ bizonyul optimális megoldásnak. Itt a célfüggvény értéke 62 lesz, ami megfelel annak, hogy ennek a feltételnek az árnyékára 2. Figyeljük meg, hogy a bázis nem változott meg. Emeljük még további 1-gyel a harmadik feltételt. Ekkor $(16, 8, 0)$ az optimális megoldás és az értéke 64, további 2-vel emelkedett. Ha azonban 33-ra emeljük a szegfűk lehetséges maximális számát, akkor a sorozatban „szabályosan” következő $(19, 7, 0)$ már nem megoldás, nem is jön ki a szimplex algoritmust végrehajtva! Most ennek az az oka, hogy a rózsák felhasznált számára vonatkozó korlát is „elkezdett számítani”, eddig tartott a tartalék ennél a korlátnál. 33 esetén már (x_1, x_2, x_3) lesz a bázis, tehát megváltozott!

Nagyon fontos megjegyezni, hogy a 7.1. példában véletlenül éppen egésznek adódott az optimális megoldás, sőt a két módosított feladatban szintén így alakult. A fenti definíció és az azzal kapcsolatos észrevételek mind a folytonos lineáris programozásra vonatkoznak. Ha az optimumok nem egész értékek lettek volna, akkor mint az elkészült esküvői csokrok, vagy sírcsokrok száma értelmezhetetlenek lettek volna. Ha egy hasonló problémában nincs ilyen szerencsénk, akkor egészértékű lineáris programozási feladatot kell megoldanunk. Térjünk még vissza az előző okfejtésre és tegyük fel azt a kérdést, vajon mennyit ér meg a virágüzlet tulajdonosának plusz egy szegfű beszerzése naponta? Ha 30 helyett 31 az új korlát, akkor lehetőség van 2 egység további nyereségre. Ha éppen ennyit fizetünk a plusz egy szál virágért,

akkor nullszaldós a változtatás. Ez az érték azonban az első és második plusz szádra még igaz, de a továbbiakra már nem! Másrészt a szegfűn kívül a másik két virágfajta árnyékára 0.

7.1.1. A duális feladat gazdasági jelentése

A virágüzletet egy hónapig nem a megszokott tulajdonos fogja üzemeltetni, a család kirándulni megy. Addig egy vállalkozó átveszi a boltot. Vajon mennyiért adja el a tulajdonos a beszállítók által hozott virágok szálaikat? Az most mindegy, neki milyen áron adják el a termelők, nyilvánvalóan nyomott áron, a haszon éppen ebből van! A tulajdonos azonban pontosan tudja, hogy milyen csokrok, koszorúk készülnek, azok hány virágot tartalmaznak az egyes fajtákból. A vállalkozó olyan egységárakban mer csak gondolkodni – félve attól, hogy a tulajdonos nem adja el a virág-forrásait -, hogy a tulajdonos szokásos termékeit készítve annak a haszna legyen meg. Jelölje y_1, y_2, y_3 rendre a rózsá, lilium, szegfű szálának árait. Ha az alábbi feltételeket kielégítő, de minimális összárát ígér, akkor nem mondhat nemet a tulajdonos, hiszen nem tudja megindokolni miért ne adná, ő sem tudna több bevételt produkálni! Vagy igen?

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad w &= 60y_1 + 80y_2 + 30y_3, \\ \text{feltéve, hogy} \quad 3y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2, \\ y_1 + 6y_2 + 2y_3 &\geq 4, \\ 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\geq 3, \\ y_j &\geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{7.2}$$

A 7.2. feladat a 7.1. feladat duálisa! A lineáris programozás dualitási tételét és annak következményeit, alkalmazhatóságát nagyon fontos átismételni [28], [11], [12]. Ennek változói tehát a virágok szálaiknak árai. A gyenge dualitási tétel szerint a vállalkozó által felírt 7.2 feladat optimális megoldásának értéke valóban nem kisebb, mint a tulajdonos maximális bevétele! Ezért az ajánlatot el fogja tudni fogadni! Másrészt a dualitási tétel szerint a vállalkozó által megfogalmazott 7.2. feladat optimuma éppen egyenlő a 7.1. feladat optimumával. Az utóbbi optimális megoldása éppen egészen adódott, így el tudta ezt érni a vállalkozó, éppen a megoldásból adódó számú csokrokat készítve el. Bár az talán nem jelentene gondot az egységárakra is egészen adódnak, ha megoldjuk a 7.2. feladatot. Vajon hogyan tud rájönni a vállalkozó arra, mely csokorból hányat készítsen? Természetesen akár úgy, ahogy a tulajdonos, megoldja a 7.1. feladatot. De ha már úgyis megoldotta a 7.2. feladatot, akkor szükségtelen mást is tennie, hiszen annak utolsó táblájában a célfüggvényegyütthatók sorából kiolvasható, hogy 10 esküvői és 10 sírcsokorral tudja elérni az optimális 60 ezer forintos bevételt! Igen ám, de megoldva a 7.2. feladatot ő a duális szimplex algoritmusnak egy más változatát választotta, amivel nem ez jött ki, hanem az, hogy 18 esküvői és 6 sírcsokrot érdemes készítenie, amivel a 60 ezres bevételt kapja. Ellenőrizzük csak, $18(3,2,1) + 6(1,6,2) = (60,72,30)$ valóban lehetséges megoldás, ennél a rózsák és a szegfűk fogynak el teljesen és 8 szál liliumszál marad meg!

Amikor a nyári szabadság letelik és a tulajdonos újra visszaveszi a boltot a vállalkozót kikerdezi a tapasztalatairól. Megdöbben, amikor megtudja, hogy ő más termékszerkezettel érte el ugyanazt a maximális bevételt! Lehetséges ilyen, hogy az optimum nem egyértelmű? Ezt

egyikük sem gondolta volna, hiszen gazdaságinformatikus gyermekeik megoldották a kapott feladataikat és ezeket az egyetlen megoldásokat adták, mint most kiderült más és más! A leányt és a fiút is bevonva a megbeszélésbe ők meglepődnek, hogy másfél éve csoporttársak és most kiderült, hogy az édesapák is ismerik egymást, sőt! Most már együttgondolkodva próbálják meg felidézni mit is tanultak operációkutatásból az optimális megoldások számáról? Arra mindketten határozottan emlékeznek, hogy két optimális bázismegoldás *konvex lineáris kombinációja* is optimális megoldás. Ez azt jelenti, hogy $0 \leq s \leq 1$ esetén az $s(10, 10, 0) + (1 - s)(18, 6, 0) = (18 - 8s, 6 + 4s, 0)$ is optimális megoldás lesz. Ez végtelen sok, de mivel itt csokrok számáról van szó, számunkra csak az egész megoldások, vagyis $(10, 10, 0)$, $(12, 9, 0)$, $(14, 8, 0)$, $(16, 7, 0)$, $(18, 6, 0)$ értelmesek. Ezek elérik a 60 ezres bevételt és rendre $(20, 0, 0)$, $(15, 2, 0)$, $(10, 4, 0)$, $(5, 6, 0)$, $(0, 8, 0)$ szál virág marad a rózsából, liliomból, szegfűből. Mindketten örülnek a választási lehetőségeknek. Figyelembe véve a keresletet el tudják dönteni, hogy egy-egy napon melyik optimális megoldást választják. Bár a végén mindig minden elfogy, nem mindegy mikorra! Az informatikus hallgatókat azonban foglalkoztatja a probléma! Felvetik azt a kérdést, vajon van-e olyan bázismegoldás, amikor ballagási csokrot is lehet készíteni? Nos megpróbálják a bázisváltozók között marasztalni az x_3 -at, de ez nem sikerül, ballagási csokrot nem készíthetünk. A szegfű tehát mindig elfogy egy optimális megoldásnál, ez a virág kurrens ebben a helyzetben, ennek az árnyékára pozitív, éppen 2. Korábban, amikor még csak egy optimális megoldásból indultunk ki, megvizsgáltuk, milyen hatása van, ha a 30-as korlátot emeljük. Kiderült, hogy 31-re létezik a $(13, 9, 0)$ optimális megoldás 62 értékkel. Most, hogy további négy optimális megoldást is találtunk az alapesetben vajon lesz-e több megoldásunk a 31-es szegfű korlát mellett is? Nos igen, de csak kettő további, $(17, 7, 0)$ és $(15, 8, 0)$. Ha pedig 32-ra visszük fel a korlátot, akkor már nincs további megoldás, marad csak az egyetlen $(16, 8, 0)$. Természetesen 33-ra pedig az újabb megoldások sem segítenek ki bennünket, nem lesz megoldás.

7.1. Példa. *Vizsgáljuk most meg a szituációt egy alapvetően más kiindulási helyzetből. A beszállító minden virágfajtából azonos számú szálát szeretne eladni, mert el szeretné adni a kevésbé kapós virágot is. Ezért a bolttól azt kéri, hogy fizessen megállapodás szerint egy adott összeget minden 3 különböző szál virágért. A bolt döntheti el, hogy hány hármast rendel. A beszállító megfigyeli a csokrok árait és úgy találja, hogy egy esküvői csokorba tett szál virág $\frac{2000}{6}$ forintot ér, a ballagási $\frac{3000}{9}$ -et, a temetői pedig $\frac{4000}{9}$ forintot ér. Úgy ítéli meg a bolt hajlandó megadni 400 forintot is egy szál virágért, pontosabban a három különböző szálért 1200 forintot. Vajon igaza van-e? Tud-e nyereséges lenni a virágüzlet ilyen magas termelői ár mellett? Mennyi virágot rendeljen a bolt? Tudnánk-e segíteni a vállalkozónak a döntésben? Jelöljük az x_4 változóval a megrendelt hármások számát, hiszen az üzlet optimális működéséhez ezt is ismeretlennek kell vennünk!*

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad z &= 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 1,2x_4, \\ \text{feltéve, hogy} \quad 3x_1 + x_2 + 4x_3 &\leq x_4, \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\leq x_4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq x_4, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1 \dots 4. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Próbáljuk megoldani szimplex algoritmussal!

	x_1	x_2	x_3	x_4	
y_1	3	1	4	-1	0
y_2	2	6	2	-1	0
y_3	1	2	3	-1	0
	-2	-4	-3	$\frac{6}{5}$	

Igen ám, csak hogy látható, hogy a jobboldalon csupa 0 áll! Mit tehetnénk? Ha egy összeg 3 szál virágért kedvező, vagyis egy bizonyos d darabszám mellett nyereséges tud lenni a tulajdonos, akkor ha ezt a darabszámot k -szorozza, akkor a nyeresége is legalább k -szoros lesz, hiszen amilyen stratégiával nyereséget ért el d darabbal azt alkalmazhatja k -szor. Ebből következik, hogy ha 3 szál virág ára kedvező, akkor a megrendelésének csak a napi eladhatóság fog határt szabni, míg ha kedvezőtlen, akkor egyáltalán nem szabad elfogadni az árat! Az világos, hogy $d = 10$ esetén mindegyik fajta csokorból éppen egyet-egyét kötve 9 ezer forint bevételünk lesz. Megéri tehát az üzlet, ha 3 szál ára kisebb mint $\frac{9}{10}$ ezer forint! Tehát 900 forintos ajánlatot akár el is fogadhatnánk, de akkor még hol a nyereség, csak a nullszaldó látszik egyelőre! De nem ennyi az ajánlat! Mit lehetne mondani az 1200 forintos ajánlatra, egyáltalán milyen összeg fogadható el? Mehetünk-e 900 fölé? Jelölje a az ajánlott árat a 3 szál virágért!

	x_1	x_2	x_3	
y_1	3	1	4	d
y_2	2	6	2	d
y_3	1	2	3	d
	-2	-4	-3	$-ad$

	x_1	y_2	x_3	
y_1	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{5}{6}d$
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}d$
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}d$
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$(\frac{2}{3} - a)d$

	x_1	y_2	y_1	
x_3	$\frac{8}{11}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{5}{22}d$
x_2	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}d$
y_3	$-\frac{15}{11}$	$-\frac{5}{22}$	$-\frac{7}{11}$	$\frac{3}{22}d$
	$\frac{6}{11}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{5}{11}$	$(\frac{23}{22} - a)d$

Ebből pontosan látszik, hogy a határ $a = \frac{23}{22}$! Az optimális megoldásunk $(0, \frac{1}{11}d, \frac{3}{22}d)$. Ha pedig $d = 22k$, akkor a megoldás egész vektor is lesz, $(0, 2k, 3k)$. A nyereség pedig $(23 - 22a)k$ lesz. A tulajdonosnak tehát három dologra kell ügyelnie. Rendeljen mindig 22-vel osztható számú virág hármast, ügyeljen arra, hogy el tudja a termékeket adni, és próbálja minél olcsóbban beszerezni a virágokat!

8. fejezet

Tőkeallokáció, portfólió összeállítás

Mit kezdünk a pénzünkkel? Hogyan érdemes takarékoskodni? Tegyük fel, hogy pontosan ismerünk néhány lehetőséget, nem veszünk el az apróbetűs, de fontos részletekben! A következőkben tegyük fel azt is, hogy csak átlátható és biztos, tehát a véletlentől nem függő lehetőségekkel foglalkozunk.

8.1. Példa. *A Magyar Államkincstár a nála elhelyezett összegekre évi nettó 5% kamatot fizet az év végén, nem számol fel egyéb költségeket. A reklámokból tudjuk, hogy a HA bank 2 éves időtartamú konstrukciót ajánl, évi 6%-ot ígér, de minden év elején 4000 forint számlavezetési díjat kér. A VA bank 4 évben gondolkodik, évi 7%-ot ígér, de egyszeri 15000 forintos számlanyitási illetéket számít fel a tranzakció elején. Mibe fektessük a pénzünket, ha biztosak vagyunk abban, hogy 4 évig nem kell hozzányúlnunk a megtakarításhoz?*

Jelölje M a befektetni kívánt összeget! Ha az Államkincstárban tartjuk M forintunkat, akkor 4 év múlva $M(1 + 0,05)^4$ forintot kapunk. Ha a HA bankra voksoltunk az elején, akkor a végén $M(1 + 0,06)^4$ üti markunk, de közben az évek elején rendre $(M + 4000)$, 4000 , 4000 , 4000 forintot befizettünk. A VA bank a kezdet kezdetén felvett $(M + 15000)$ forintot, a végén ad $M(1 + 0,07)^4$ -t. A legtöbben azt nézik meg, hogy mennyivel lesz több pénzük a végén. Ezek a számok rendre $M(1,05^4 - 1)$, $M(1,06^4 - 1) - 16000$, $M(1,07^4 - 1) - 15000$. Ez a gondolkodás azonban helytelen, hiszen bár a végén azonos időpontban fizetnek a bankok, de a befizetéseink nem egyszerre történnek a három esetben. Az M a 0. időpontban egyformán befektetésre kerül, de a további kisebb összegek vagy nincsenek (Magyar Államkincstár), vagy eltérő időpontokban kell befizetnünk őket. Mivel kamatot fizet minden pénzintézet, így inflációs időszakban élünk. A pénzünk értéke romlik az idő előrehaladtával. A 0. időpontban minden forint többet ér, mint 1 vagy több év múlva. Azért is tartjuk a pénzünk bankban, hogy kivédjük az értékvesztést amennyire lehet. Szokás emiatt egy befektetés – egy banki ajánlat elfogadása az – hozamát kiszámítani a 0. időpontbeli forintban. Az államkincstár ajánlatát vehetjük viszonyítási alapnak, ez a kamat mutatja a pénzünk romlását. Úgy is tekinthetjük tehát, hogy 1, 0. időpontbeli forint egyenértékű $1,05$ egy éves forinttal. Másként mondva ugyanazt, 1 egyéves forint értéke a 0. időpontbeli forintban kifejezve $\frac{1}{1,05}$. *Diszkontálásnak* nevezzük a pénz mindenkor értékének kifejezését a 0. időpontbeli forintban. Két esztendő múlva ez $\frac{1}{1,05^2}$, k év múlva pedig $\frac{1}{1,05^k}$ lesz. A 8.1. táblázat mutatja a befektetések *nettó jelenértékét (NPV)*, vagyis azt az összeget, amivel több pénzünk lesz a befektetés végén a 0. időpontbeli forintban számolva.

	HA bank	VA bank	M. Á.
Képlet	$M\left(\frac{1,06^4}{1,05} - 1\right) - 4000\frac{1,05^4 - 1}{1,05^4 - 1,05^3}$	$M\left(\frac{1,07^4}{1,05} - 1\right) - 15000$	0
M=2691,67	-14789	-14789	0
M=191338,73	-7499	0	0
M=385401,67	0	15214	0

8.1. táblázat. NPV

Vajon miért éppen ezeket az értékeket szerepeltettük a 8.1 táblázatban? A legkisebb – igen kicsi – érték megmutatja, hogy a két kereskedelmi ajánlat éppen itt egyenértékű, mindkét esetben 14789 forintot elvesztünk. Ennél még kisebb összegre a VA bank okozza a legnagyobb veszteséget. Mindenki tudja, hogy kis összeget fix költség nélküli konstrukcióba érdemes befektetni, tehát esetünkben az Államkincstárban. A közel kétszázézes összegnél a VA bank van olyan jó, mint a Kincstár. A HA bank még mindig csak a saját zsebét duzzasztaná. Veszteséges számunkra a HA bank egészen 385402 forintig, de ekkor sem választjuk, mert a VA bank már 2692 forinttól jobb mint a HA. Ha a HA piacon akar maradni más konstrukciót kell kidolgoznia, figyelve a konkurrenciára is! Tehát az egyetlen helyes döntés a megtakarító állampolgár részéről az, ha 191339 forintig az Államkincstárba teszi a pénzét, nagyobb összeget pedig érdemes a VA bankban elhelyeznie.

Az egyszerű kalkuláció, amikor csak a pénzügyi mozgást nézzük meg és nem vesszük figyelembe még a pénzügyi romlást is itt is más értékhatárokat ad, de fokozottabb az eltérés magasabb kamatláb esetén, tehát egy inflációs időszakban.

8.2. Példa. *Előfordul, hogy egy bank azzal különb a többtől, hogy előre fizet kamatot! Nos az előzőek szerint ez nem kis dolog! Tételezzük fel, hogy az irányadó kamatláb, amihez képest diszkontálunk p százalék, a bank pedig r százalék kamatot fizet. Feltesszük továbbá azt is, hogy nincs járulékos költség. Ekkor ha az ügyfél be akar fektetni M összeget, máris visszkap $M\frac{r}{100}$ -at, vagyis csak $M\left(1 - \frac{r}{100}\right)$ forintot hagy a bankban. Egy év után M -et kap vissza. Az NPV tehát $M\left(\frac{1}{1+\frac{p}{100}} - \left(1 - \frac{r}{100}\right)\right)$. Természetesen ez pozitív, ha az r legalább akkora mint p , sőt még egy kicsivel kisebb értékre is. Ha $p=10$, akkor $r=9$ még rosszabb, de $p=11$ -re $r=10$ már jobb!*

8.1. Portfólió kiválasztás

A banki ajánlatok többsége előre meghatározott módon kezeli a befektetők pénzét. Ha minden feltételt ismerünk, akkor biztosak lehetünk a döntésünk következményeiben. Vannak azonban olyan lehetőségek, amelyek kockázatosak, emiatt óvatosabbnak kell lennünk, ezért bizonyos feltételeket betartunk. 1 millió forintunkat szeretnénk kamatoztatni. A banki kamat évi 5%, az ingatlan részvény 14%-ot ígér, míg ha magánszemélynek adnánk kölcsön, akkor 25%-ot kapnánk az év végén. Óvatosságból betartjuk a következőket:

- Legalább annyi pénzt teszünk bankba, mint a két bizonytalanabb befektetésbe együttvéve.

- Magán kölcsönbe legfeljebb a pénz 20%-át tesszük.
- Akkor sem akarunk tőkét veszíteni, ha a két kockázatos befektetés egyáltalán nem fizet kamatot, és a magán kölcsön esetében csak a pénz 85%-át kapjuk vissza.

Jelölje rendre x_1, x_2, x_3 a bankba, részvénybe, kölcsönbe fektetett pénzünket millió forintban. Ekkor a problémánk a következő:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 1.05x_1 + 1.14x_2 + 1.25x_3, \\ \text{feltéve, hogy } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 0, \\ x_3 &\leq 0.2, \\ -1.05x_1 - x_2 - 0.85x_3 &\leq -1, \\ x_j &\geq 0, \quad j = 1 \dots 3. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Megoldva a feladatot, bankba 600000, részvénybe és kölcsönbe pedig 2-200000 forintot érdemes befektetni, ha minden a legkedvezőbb módon alakul, akkor 108000 forint a hozam. Ebben a példában feltételeztük, hogy a pénz értékvesztése elhanyagolható.

Előfordulhat az ellenkező eset is, nemhogy nincs befektetni való pénzünk, hanem áthidaló kölcsönt kell felvennünk azért, hogy közüzemi számláinkat időben ki tudjuk fizetni!

8.3. Példa.

	Jövedelem	Kiadás
január	2	8
február	1	6
március	3	2
április	6	4
május	9	5
június	7	2

A 8.3. példa mutatja, hogy a féléves összes bevétel 1 egységgel (pl. 10000 forint) több, mégis kölcsönre van szükség, a késés elkerülése miatt. Felvehetünk egy fix összeget most egyszerre, amit 6 hó elteltével 20%-os kamattal kell visszafizetnünk, a másik ajánlat a havi kölcsönfelvétel, havonta 5%-os kamatért. Vajon melyiket válasszuk? Tegyük fel, hogy fizetni elsején kell, míg a jövedelmünk a hó utolsó napján érkezik. Ha a hat havi kölcsönt választanánk, akkor milyen összeget vegyünk fel? Ha x összeget veszünk fel, akkor minden hónap első napjának estéjén számoljuk ki mennyi forintunk van! Ezek rendre $x - 8, x - 12, x - 13, x - 14, x - 13, x - 6$. Egyik szám sem lehet negatív, tehát 14-et kell kölcsönkérnünk, a végén $\frac{14}{5}$ -del többet fizetünk vissza. Havi áthidaló kölcsönökkel rendre 8, 4, 1, 1 egységre van szükségünk de törleszteni később tudunk, 1-et 4 hó elteltével, 7-et 5 hó múlva, 4-et 5 hó múlva, 1-et 4, 1-et 3 hó múlva. Így összesen $4+35+20+4+3=66$ havi kamatot, vagyis $\frac{66}{20}$ egységet fizetünk, ami egy kicsit több mint az első ajánlat. Az egyszerűség kedvéért ebben a példában is feltettük, hogy nincs inflációs időszak.

Vajon melyik ajánlat jobb, ha fizetni is éppen akkor kell, amikor mi is hozzájutunk a bevételünkhöz?

9. fejezet

Kockázatos döntések, befektetések

Az előző pontban a kockázatos döntések hatását azzal igyekeztük tompítani, hogy extra korlátozásokkal bebiztosítottuk magunkat. Természetesen ezek miatt nem is értük el a 25%-os hozamot, amire magánkölcsön esetén lehetőségünk lett volna. De az is előfordulhatott volna, hogy a kölcsön ellenére is csődbe megy a jó ismerősünk, így csak az összeg 85%-át kaptuk volna vissza, ami viszont 15%-os veszteség. A nem biztos befektetésekhez legalább valószínűségeket érdemes rendelni, különben csak a „megérzésünkre” hagyatkozhatunk. A továbbiakban feltételezzük, hogy a valószínűségszámítás alapfogalmait mindenki ismeri.

Térjünk vissza a virágáros bolthoz, de azóta már kész csokrokat rendel a tulajdonos. Esküvői csokrot 1500 forintért, sírcsokrot 2500 forintért kap meg, ő viszont továbbra is 2000 és 4000 forintért árulja őket. Megtapasztalja, hogy nem mindig fogy el mindegyik megvásárolt csokor. 20-24 szokott elfogyni, ezért a vállalkozó néha (10,10), (10,11), (11,11), (11,12), (12,12) csokrot rendel rendre a két típusúból. Tegyük fel, hogy azonos valószínűséggel maradnak meg a különböző csokrok. A 9.1. táblázatban állnak az eredő hozamok. A vásárlói igényekhez az oszlopok, a vállalkozói döntésekhez a sorok tartoznak. Vajon melyik döntés a legkedvezőbb a vállalkozó számára? Vegyük észre, hogy ez a kérdés nem egzakt. Az óvatos ember az ún. *maximin* mutató alapján dönt, vagyis a saját döntésének legkedvezőtlenebb következményét nézi meg és úgy dönt, hogy ez a legjobb legyen. Mivel a boltban az nem rosszabb, ha többen akarnak vásárolni, így minden sor monoton nemcsökkenő. A legkisebb haszon a (10, 10) esetben maximális, 20 lesz, így eszerint aki óvatos ezt választja. Aki hamar meg szeretne gazdagodni, a legnagyobb haszont célozza meg! A *maximax* kritérium a táblázat legnagyobb eleme szerint választ stratégiát. Ez nyilván akkor lesz, ha a legtöbb csokor

	20	21	22	23	24
(10, 10)	20	20	20	20	20
(10, 11)	19.5	21.5	21.5	21.5	21.5
(11, 11)	18	20	22	22	22
(11, 12)	17.5	19.5	21.5	23.5	23.5
(12, 12)	16	18	20	22	24

9.1. táblázat

	20	21	22	23	24
(10,10)	0	1.5	2	3.5	4
(10,11)	0.5	0	0.5	2	2.5
(11,11)	2	1.5	0	1.5	2
(11,12)	2.5	2	0.5	0	0.5
(12,12)	4	3.5	2	1.5	0

9.2. táblázat

eladására számítunk és van is annyi a boltban, ekkor éppen 24 a hozam. Utólag már kár siratni egy elmulasztott lehetőséget, de mégis érdemes kiszámítani az egyes oszlopokra, vajon mennyivel lett kisebb a hasznunk ahhoz képest ami a legjobb esetben lehetett volna. Az alábbi 9.2. táblázat az *elmulasztott nyereségeket* mutatja.

Ezt a táblázatot felhasználva egészen „logikus” ha megnézzük minden döntésünkre mennyi a legnagyobb, bosszankodásra okot adó érték, majd ezek közül a legkisebb határozza meg a stratégiánkat. Itt a sormaximumok: (4, 2,5, 2, 2,5, 4), tehát a 2 a legkisebb, vagyis a (11,11) a középút.

A talán leginkább szokásos mutató a *várható érték*, amely a lehetséges hozamoknak a vásárlói szokások valószínűségeivel súlyozott összege. Ha a 20-24 kimenetek egyformán $\frac{1}{5}$ valószínűségűek, akkor az egyszerű átlagot kapjuk. Ez a (10,11) és (11,12) választásnál maximális, egyaránt 21,1. Megjegyezzük, hogy az ismert mutatók mind más-más stratégiát hoztak ki legjobbnak.

9.1. Döntési fák

Sokszor előfordul, hogy döntések sorozatát kell meghoznunk. Mindegyik döntési szituációban tudjuk előre, hogy az egyes választási lehetőségek után milyen helyzetbe kerülünk. A döntések sorozatát meg szeretnénk előre úgy tervezni, hogy a várható haszon maximális legyen.

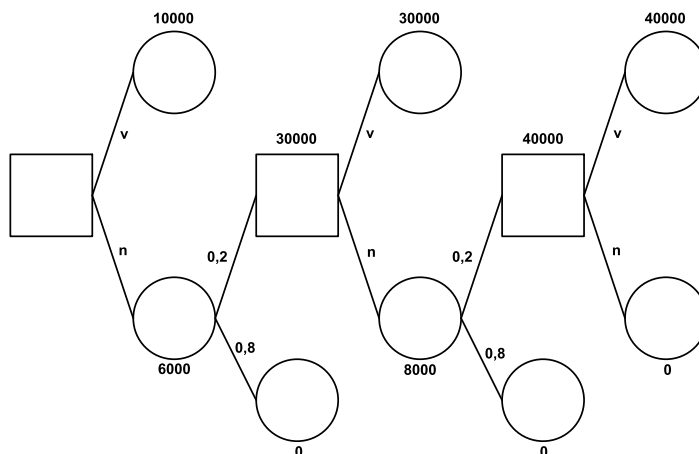
9.1. Példa. *A – Feltehetek még egy kérdést? – televíziós játékban legfeljebb 3 kérdést kaphatunk. Ha az első, könnyű kérdésre helyesen válaszolunk, akkor nyertünk 100000 forintot, de csak akkor, ha befejezzük a játékot. Ha továbbmegyünk, akkor még további 300000 forintot nyerhetünk, ha a közepes kérdésre helyes választ adunk. De megpróbálhatjuk a nehéz kérdést is megválaszolni, ekkor nyerhetünk még 500000 forintot! A játékos sok korábbi, a televízióban nézett hasonló játék alatt maga is tét nélkül játszott otthon, így azt találta, hogy a könnyű kérdéseket 80%-ban, a közepeseket 60%-ban, a nehezeket 40%-ban tudja megválaszolni. Amikor kiderült, hogy élesben játszhat, előre eldöntötte, hogy ha sikerül hány fordulót vállal! A várható nyeresémet számolta ki az egyes esetekben. Ha csak a könnyű kérdést vállalja, akkor várhatóan $0,8 \times 100000 + 0,2 \times 0 = 80000$ forintot nyer. Ha még a közepeset is, akkor csak akkor nyer, ha mindkét kérdésre helyesen válaszolt, így a várható nyereséme $0,8 \times 0,6 \times 400000 = 192000$ forint, hiszen az a négy (igazából három) eset, amikor legalább az egyik kérdésre nem tud válaszolni nem hoz nyeresémet. Ha megpróbálja végigjátszani a*

vetéledőt, akkor várható nyeresége $0,8 \times 0,6 \times 0,4 \times 900000 = 172800$ forint. Így elhatározta, hogy két kérdés után ki fog szállni. Vajon hogyan döntött volna egy olyan játékos jelölt, aki rendre $0,9$, $0,5$, $0,3$ valószínűséggel tudja a kérdéseket?

Természetesen a játékos aszerint döntött, ami alapján ha sokszor játszhatna átlagosan a legtöbbet nyerné. Kalkulációját egy bináris fa segítségével ábrázolta, az élekre valószínűségeket írt, a csúcsokhoz a nyereményeket. De egy játékos ritkán kerül be többször egy televíziós játékba, így a játék hevében másként is dönthet!

Játékosunk külön-külön is elképzelte magát az egyes szituációkban! Tegyük fel, hogy túljutott két kérdésen. Vajon milyen valószínűséggel döntsön a továbbjátszás mellett? Tegyük fel, hogy q eséllyel vállalja a nehéz kérdést. Ekkor a várható nyeresége $400000 \times (1 - q) + 900000 \times 0,4 \times q = 400000 - 400000q$, tehát jobb, ha nem játszik tovább. A hasonló megfontolás 1 jó válasz után a következő. Ha p valószínűséggel továbbjátszom, akkor ha jól válaszolok úgymegálllok, tehát a várható nyeresémem $400000 \times 0,6 \times p + 100000 \times (1 - p) = 100000 + 140000p$, érdemes tehát mindig továbbjátszani. Természetesen a várható nyeresemény mindig nagyobb lesz, ha egy fordulón túljutok. Az első forduló előtt nyilván újra a $0,8 \times 240000 = 192000$ forint várható nyeresemény adódik, ha csak két fordulót tervezünk.

9.2. Példa. A vásárlási döntés halasztása gyakran a haszon elmaradását eredményezi, másrészt viszont előfordulhat, hogy valamit a kereslet gyér volta miatt később leértékelnek és ugyanazt olcsóbban vehetjük meg. Tegyük fel most azt a nem igazán gyakori esetet, amikor előre tudjuk egy divatos egyedi ékszer elkelésének napi valószínűségét, valamint az akciós árának alakulását. Az ékszer értéke 100000 Ft. Az akció három napig tart. Az első napon meg tudjuk venni 90000 forintért, a másodikon 70000 Ft az ára a harmadikon 60000 Ft. Annak az esélye, hogy elkel minden napon 80% . Meddig várjunk, megvegyük-e és ha igen melyik napra tervezzük a vásárlást?



A döntési fa alapján ha a 3. napig várunk, akkor a várható haszon $40000 \times 0,2 \times 0,2 = 1600$, hiszen az értékkülönbség már 40000 Ft, de csak 4% annak az esélye, hogy még megvan

az ékszer. Ha a második napon érdeklődünk, akkor $30000 \times 0,2 = 6000$ a várható nyereség az üzleten, míg ha már az első napon megvesszük, akkor biztosan sikerül és 10000 forinttal gazdagabbak leszünk. Ha a kereslet eltérő lesz és így a napi elkelésnek megváltozik a valószínűsége, miközben minden egyéb változatlan, akkor a döntési fát elemezve arra jutunk, hogy az első nap meg kell venni, ha ez az esély $\frac{2}{3}$ fölött van, a második napot érdemes választani, ha az esély $\frac{1}{4}$ és $\frac{2}{3}$ között van, míg nyugodtan várjuk meg a harmadik napot, ha $\frac{1}{4}$ -nél kisebb az esélye annak, hogy megveszik. Bonyolultabb esetekben a döntési fák segítségével abban van, hogy visszafelé haladva értékeljük a döntéseinket és azt választjuk ki amelyik a legjobb és elkönnyeljük ez milyen hasznot hoz. Ezt az ismeretet felhasználva az eggyel korábbi helyes döntést ugyanígy találjuk meg és nyilvántartjuk. Így haladva a kiinduló állapotban tudni fogjuk mi az optimális cselekvés és az milyen eredményt ad.

9.2. A Markowitz-modell

Visszatérünk a portfólió kiválasztásának problémájához és egy fokkal általánosabban és alaposabban megfogalmazzuk a feladatot. Harry Markowitz 1990-ben közgazdasági Nobel-díjat kapott elméletéért, amellyel kezelni igyekezett a befektetések maximális hozamának és alacsony kockázatának egyidejű, egymással általában ellentétes érvényesítésének optimalizálását. A magasabb kockázatú befektetések nagyobb hozamot ígérnek, valamint a kisebb kockázatúak alacsonyabb hozammal kecsegtetnek. Tegyük fel, hogy n befektetési lehetőségünk van, amelyek R_1, \dots, R_n hozamot ígérnek, ezen értékeket valószínűségi változónak tekinthetjük. A portfólió egy x_1, \dots, x_n szám n -es, melyek nemnegatívok, összegük 1 és a jelentésük az, hogy a pénzünk éppen x_j szeresét fektetjük a j -edik befektetésbe. Így tehát a hozam és annak várható értéke

$$R = \sum_{j=1}^n x_j R_j \quad \mathbb{E}R = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{E}R_j.$$

Markowitz a kockázat mértékének a hozam *szórásnégyzetét* tekintette, vagyis a

$$\text{Var}(R) = \mathbb{E}(R - \mathbb{E}R)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n x_j (R_j - \mathbb{E}R_j)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n x_j \tilde{R}_j\right)^2$$

mennyiséget, ahol $\tilde{R}_j = R_j - \mathbb{E}R_j$. A portfólió optimalizálás Markowitz modellje szerint a

$$\min \quad -\sum_{j=1}^n x_j \mathbb{E}R_j + \mu \mathbb{E}(\sum_{j=1}^n x_j \tilde{R}_j)^2, \quad (9.1)$$

$$\text{feltéve, hogy } \sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

feladatot kell megoldani. Bár sikerült egy célfüggvényt felírni, mégis a két részt csak összeadással és a $\mu \geq 0$ arányszámmal kötjük össze. Ezen tényező azt fejezi ki, hogy mennyire fontos a biztonság. Ha a μ nagy, akkor igyekezni kell a második tagot minél kisebbé tenni, míg ha közel van a zérushoz, akkor kevésbé vagyunk érzékenyek a kockázatra és a hozam maximalizálására törekszünk inkább. A *diverzifikációval* vagyis a „sok lábon állással” csökkenteni lehet a kockázatot, míg a hozamot megpróbáljuk magas szinten tartani. Igazán óvatosak akkor vagyunk, ha sikerül találni ellentétesen mozgó hozamú befektetéseket! Ha negatív

korrelációban van pl. két befektetés, tehát amikor az egyik p százalékot hoz, addig a másik q százalékot visz, illetve amikor az egyik q százalékot visz, akkor a másik p -t hoz, akkor ha $p \geq q$ és megfelezzük a pénzünk mindig a két befektetés között, akkor minden időszakban lesz $\frac{p-q}{2}$ százalék biztos hozamunk. Ennek az óvatoskodó módszernek az a baja, hogy nehéz ilyen befektetéspárokat találni bizonyossággal. Természetesen a két befektetésnél bonyolultabb konstrukció is eredményezhet igazi biztonságot.

Vegyük észre, hogy a 9.1 nem lineáris modell, a célfüggvényben a változók négyzetei, illetve szorzatai is benne vannak. Az ilyen problémát *kvadrátikus programozásnak* nevezzük, pontosabban a

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{feltéve, hogy} \quad & Ax \geq b, x \geq 0 \end{aligned} \tag{9.2}$$

alakú problémákat, ahol a Q mátrixról feltehető, hogy szimmetrikus [17], [28], [47]. Éppen csak érintettük a véletlentől függő döntések témakörét. A fogalmakat és a matematikai módszereket is jobban megismerhetjük kiváló operációkutatási és pénzügyi témájú könyvekből [48].

10. fejezet

Egyéni vagy közösségi érdek

A játékelmélet olyan szép és komoly matematikai, közgazdasági diszciplína, hogy ebben a keretben nem vághatunk bele. Azonban érzékeltetjük egy különlegesen szép és egészen új, gráfon történő játék bemutatásával és vizsgálatával a különböző, esetleg egymás ellenében elérendő célok összeegyeztethetőségét. Vajon az egyéni érdek egybeesik-e a közösség érdekével? A fejezet a [4] munka nyomán készült és nem képezi a tananyag részét. Egy *útválasztási játék* egy hármast $\mathcal{R} = (\mathbf{N}, G, \mathcal{P})$, ahol $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ a játékosok halmaza, $G = (V, E)$ pedig egy gráf V csúcs- és E élhalmazzal, valamint a gráf néhány útja $\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \mathcal{P}_i$, ahol \mathcal{P}_i az i játékos számára rendelkezésre álló G -beli utak halmaza. Minden \mathcal{P}_i -beli út G -ben ugyanazzal az $u_i \in V$ kezdőponttal és $v_i \in V$ végponttal rendelkezik. Mindegyik \mathcal{P}_i -beli út egy az i játékos számára rendelkezésre álló *tiszta stratégia*. A *tiszta stratégia profil* $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_N]$ megadja az N játékos által kiválasztott utak N -esét, ahol $p_i \in \mathcal{P}_i$. Egy ilyen tiszta stratégia profilra úgy tekintünk, mint a játékosok egy *útválasztására*. Egy véges hálózatban az útválasztási játék egy véges játék.

Tetszőleges \mathbf{p} útválasztásra és $e \in E$ élre, a $C_e(\mathbf{p})$ *él-torlódás* azon \mathbf{p} -beli utak számát jelenti, amelyekben az e él előfordul. Egy p útra a $C_p(\mathbf{p})$ *út-torlódás* a legnagyobb él-torlódás a p -beli élekre nézve, vagyis $C_p(\mathbf{p}) = \max_{e \in p} C_e(\mathbf{p})$. Használni fogjuk a $C_i(\mathbf{p}) = C_{p_i}(\mathbf{p})$ rövidített jelölést az i játékos útjára. A *hálózati-torlódás* a legnagyobb él-torlódás az összes élre nézve, vagyis $C(\mathbf{p}) = \max_{e \in E} C_e(\mathbf{p})$. A p út hossza alatt most a benne lévő élek számát értjük, jelölése $|p|$. $|p_i|$ helyett használjuk még a $D_{p_i}(\mathbf{p})$ vagy $D_i(\mathbf{p})$ jelölést is. A *leghosszabb út hosszát* \mathcal{P} -ben jelölje: $L(\mathcal{P}) = \max_{p \in \mathcal{P}} |p|$. $D(\mathbf{p})$ a \mathbf{p} útválasztásban lévő leghosszabb út hosszát jelöli, tehát $D(\mathbf{p}) = \max_{p \in \mathcal{P}} |p|$. Amikor a szövegkörnyezetből egyértelmű mely \mathbf{p} és \mathcal{R} -ről van szó az egyszerűbb $C_e, C_p, C_i, C, L, D_p, D_i, D$ jelöléseket alkalmazzuk.

Az R játékokra és \mathbf{p} útválasztásra, a *közösségi költség* (vagy *teljes költség*) a \mathbf{p} egy függvénye, amit $SC(\mathbf{p})$ jelöl. A $pc_i(\mathbf{p})$ *egyéni vagy magán költség* szintén a \mathbf{p} útválasztás függvénye. Jelölje \mathbf{p}_{-i} a \mathbf{p}_{-i} -t kivéve megmaradó utakat $\{p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_N\}$, így a $(p_i; \mathbf{p}_{-i})$ akár a \mathbf{p} egy másik jelölése is lehetne, amelyben kitüntetett szerepet adtunk a p_i útnak. Az i -edik játékosnál optimális a \mathbf{p} , ha $pc_i(\mathbf{p}) \leq pc_i(p'_i; \mathbf{p}_{-i})$ bármely $p'_i \in \mathcal{P}_i$ útra. Ez a tulajdonság azt jelenti tehát, hogy ő nem tud önmaga számára kedvezőbb utat kiválasztani, ha a többi játékos nem változtatja meg az útját. A \mathbf{p} útválasztás Nash egyensúlyban van (vagyis \mathbf{p} egy *Nash-útválasztás*), ha mindegyik játékosnál optimális a \mathbf{p} . A Nash-útválasztások meghatározzák a stabil, önző kimeneteket. A \mathbf{p}^* egy optimális tiszta stratégia profil, ha a legkisebb a közösségi

költsége az összes lehetséges tiszta stratégia profil közül, tehát bármely \mathbf{p} -re, $SC(\mathbf{p}^*) \leq SC(\mathbf{p})$.

A Nash-útválasztások jóságát jellemzi az *anarchia ára* (*PoA*) (néha együttműködési viszonynak is mondjuk) és a *stabilitás ára* (*PoS*). Jelölje \mathbf{P} a Nash-útválasztások halmazát és legyen SC^* a közösségi költsége az optimális \mathbf{p}^* útválasztásnak. Ekkor

$$PoS = \inf_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} \frac{SC(\mathbf{p})}{SC^*}, \quad PoA = \sup_{\mathbf{p} \in \mathbf{P}} \frac{SC(\mathbf{p})}{SC^*}.$$

10.1. Maximum Játékok

Legyen $\mathcal{R} = (\mathbf{N}, G, \mathcal{P})$ egy útválasztási játék, amelyben a fenti jelölésekkel a \mathbf{p} útválasztás közösségi költségét definiálja az $SC(\mathbf{p}) = \max(C(\mathbf{p}), D(\mathbf{p}))$ mennyiség, tehát a leghosszabb út hosszának és a hálózati-torlódásnak a maximuma. Az egyéni költségfüggvény pedig legyen $pc_i(\mathbf{p}) = \max(C_i(\mathbf{p}), D_i(\mathbf{p}))$. Az ilyen útválasztási játékokat *maximum játékoknak* nevezzük. Először megmutatjuk, hogy a maximum játékoknak van Nash-útválasztásuk és a stabilitás ára 1, majd korlátot adunk az anarchia árára.

10.1.1. Nash-útválasztások létezése a maximum játékokban

Megmutatjuk, hogy a maximum játékoknak vannak Nash-útválasztásai. Először az útválasztásokat lexikografikusan rendezzük. Ezután belátjuk, hogy egy játékos mohó lépései a rendezésben előbbi útválasztáshoz vezetnek. Ebből az következik, hogy vagy eljutunk a sorban legkisebb útválasztásig vagy egy olyan helyzethez, amelyben egyik játékos sem tud helyzetén javítani. Mindkét esetben egy Nash-útválasztáshoz jutunk.

Legyen $\mathcal{R} = (\mathbf{N}, G, \mathcal{P})$ egy maximum játék. Legyen továbbá $r = \max(N, L)$. Bármely \mathbf{p} útválasztásra definiáljuk az $M(\mathbf{p}) = [m_1(\mathbf{p}), \dots, m_r(\mathbf{p})]$ *útválasztási vektort*, amelyben $m_i(\mathbf{p}) = a_i(\mathbf{p}) + b_i(\mathbf{p})$, ahol $a_i(\mathbf{p})$ az i út-torlódással rendelkező utak számát, $b_i(\mathbf{p})$ az i hosszú utak számát jelenti. Nyilván $SC(\mathbf{p}) = k$ esetén $m_k \neq 0$, valamint $m'_k = 0$, ha $k' > k$.

Rendezzük az útválasztásokat a következőképpen: Legyenek \mathbf{p} és \mathbf{p}' útválasztások $M(\mathbf{p}) = [m_1, \dots, m_r]$ és $M(\mathbf{p}') = [m'_1, \dots, m'_r]$ vektorokkal. $M(\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}')$, ha $m_i = m'_i$ minden $1 \leq i \leq r$ -re. $M(\mathbf{p}) < M(\mathbf{p}')$, ha létezik olyan j , $1 \leq j \leq r$, melyre $m_k = m'_k$ minden $k > j$ -re de $m_j < m'_j$. A \mathbf{p} és \mathbf{p}' útválasztásokat a hozzájuk tartozó útválasztási vektorok alapján rendezzük tehát $\mathbf{p} \leq \mathbf{p}'$ akkor és csak akkor, ha $M(\mathbf{p}) \leq M(\mathbf{p}')$. Természetesen bármely \mathbf{p} és \mathbf{p}' útválasztásra vagy $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ vagy $\mathbf{p} < \mathbf{p}'$ teljesül, a rendezés teljes.

Egy tetszőleges \mathbf{p} útválasztásra, ha az nem Nash-útválasztás, akkor van legalább egy olyan i szereplő, akinél nem optimális a \mathbf{p} . Ekkor van egy *mohó lépése* i -nek, amellyel számára kedvezőbb lesz az egyéni költsége, ha pl. p_i -t kicseréli p'_i -re. Korábban bevezetett jelöléssel tehát $\mathbf{p} = (p_i; \mathbf{p}_{-i})$ -t a $\mathbf{p}' = (p'_i; \mathbf{p}'_{-i})$ -re változtatva $pc_i(\mathbf{p}') < pc_i(\mathbf{p})$ lesz. Mások választásai természetesen megmaradnak, tehát $(\mathbf{p}_{-i} = \mathbf{p}'_{-i})$. A következőkben megmutatjuk, hogy egy mohó lépéssel a sorban előbbi útválasztást kapunk.

10.1.1. Lemma. *Ha bármely játékos megváltoztatja az útját és az útválasztás profil \mathbf{p} -ről \mathbf{p}' -re változik, akkor $\mathbf{p}' < \mathbf{p}$ lesz.*

Bizonyítás Legyen $pc_i(\mathbf{p}) = \max(C_i(\mathbf{p}), D_i(\mathbf{p})) = k_1^{\max}$ és $\min(C_i(\mathbf{p}), D_i(\mathbf{p})) = k_1^{\min}$ (nyilvánvalóan, $k_1^{\max} \geq k_1^{\min}$). Hasonlóan $pc_i(\mathbf{p}') = \max(C_i(\mathbf{p}'), D_i(\mathbf{p}')) = k_2^{\max}$ és $\min(C_i(\mathbf{p}'), D_i(\mathbf{p}')) = k_2^{\min}$ (nyilvánvalóan, $k_2^{\max} \geq k_2^{\min}$).

Miután az i résztvevő csökkenteni tudja költségét a \mathbf{p}' -re váltva, $k_2^{\max} < k_1^{\max}$. Tekintsük az $M(\mathbf{p}) = [m_1, \dots, m_r]$ és $M(\mathbf{p}') = [m'_1, \dots, m'_r]$ vektorokat. Ugyanaz a két vektor, kivéve esetleg a k_1^{\max} , k_1^{\min} , k_2^{\max} , k_2^{\min} értékeket, amelyek a p_i és p'_i különbözőségéből adódnak. Fennáll az $m_{k_1^{\max}} > m'_{k_1^{\max}}$ reláció, mivel az útszere miatt $m_{k_1^{\max}} = a_{k_1^{\max}} + b_{k_1^{\max}}$ legalább eggyel csökken, hiszen vagy $a_{k_1^{\max}}$ csökken eggyel (ha az új út torlódása kisebb) vagy a $b_{k_1^{\max}}$ (ha az új út rövidebb). Mivel $k_2^{\max} < k_1^{\max}$, $M(\mathbf{p}) > M(\mathbf{p}')$ amiből következik, hogy $\mathbf{p} > \mathbf{p}'$ lesz a rendezésben. ■

Mivel csak véges sok útválasztás lehet, a 10.1.1 lemmából következik, hogy egy tetszőleges kezdőállapotból indulva minden javító lépés egy Nash-útvonalválasztás felé visz, amelyben mindegyik játékosnak optimuma van. Mivel az útvonalválasztások teljesen rendezettek, így mondjuk \mathbf{p}_{\min} a minimális, $\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p}$. Nyilván a minimális elem szintén egy Nash-útvonalválasztás. A \mathbf{p}_{\min} ugyancsak optimális a közösségi költség tekintetében, hiszen ha a \mathbf{p}' kisebb közösségi költségű lenne, akkor a rendezésben is a \mathbf{p}_{\min} elé került volna. Ezért a stabilitás ára 1.

10.1.2. Tétel (Stabilitás a maximum játékokban). *Egy \mathcal{R} maximum játékban, a játékosok legjobb reakciói egy Nash-útválasztáshoz vezetnek, és a stabilitás ára, $PoS = 1$.*

10.1.2. Az anarchia ára a maximum játékokban

Korlátot keresünk az anarchia árára maximum játékokban. Az $\mathcal{R} = (\mathbf{N}, G, \mathcal{P})$ maximum játékban a G gráfnak n csúcsa van. A 10.1.2 tétel alapján van legalább egy Nash-útválasztás, pl. \mathbf{p} . Legyen $C = C(\mathbf{p})$ és $D = D(\mathbf{p})$. Legyen \mathbf{p}^* a legkisebb közösségi költségű útválasztás. Továbbá $C^* = C(\mathbf{p}^*)$ és $D^* = D(\mathbf{p}^*)$. Mindegyik $i \in \mathbf{N}$ játékosra van egy $p_i \in \mathbf{p}$ és egy $p_i^* \in \mathbf{p}^*$ „optimális” út, amit a rendelkezésre állók közül ő választott ki.

Mindegyik $e \in G$ élre, jelölje $\Pi_e(\mathbf{p})$ azon játékosok halmazát, akik olyan utat választottak \mathbf{p} -ben, amelyeknek éle az e . Továbbá a H halmaz azokat az $e \in G$ éleket tartalmazza, melyekre $C_e(\mathbf{p}) \geq D + 2$. Vegyünk egy $e \in H$ élt és legyen $i \in \Pi_e(\mathbf{p})$ egy olyan játékos, akinek a p_i útja a \mathbf{p} útválasztásban használja e -t. Az $f(e, i)$ halmaz azon $e' \in p_i^*$ éleket tartalmazza, amelyekre $C_{e'}(\mathbf{p}) \geq C_e(\mathbf{p}) - 1$ teljesül. $|f(e, i)| \geq 1$, mivel a \mathbf{p} -ben az i játékos jobban szereti p_i -t p_i^* -nál, tehát van legalább egy olyan $e' \in p_i^*$ él, amire $C_{e'}(\mathbf{p}) \geq C_e(\mathbf{p}) - 1 > D$. Legyen $f(e) = \cup_{i \in \Pi_e(\mathbf{p})} f(e, i)$. Tetszőleges $X \subseteq H$ élhalmazra, legyen $f(X) = \cup_{e \in X} f(e)$.

10.1.3. Lemma. *Legyen Z azon e éleket tartalmazó halmaz, amelyeknek a torlódására $C_e(\mathbf{p}) \geq C - 2 \lg n$. Ha $C \geq D + 2 \lg n + 2$, akkor van egy $X \subseteq Z$ halmaz, melyre $|f(X)| \leq 2|X|$.*

Bizonyítás Rekurzívan konstruálunk egy halmaz sorozatot $E_0, \dots, E_{2 \lg n}$, melyre $E_i = E_{i-1} \cup f(E_{i-1})$ fennáll és az E_0 tartalmazza az összes e élt, amelynek a torlódására $C_e(\mathbf{p}) = C$. A konstruálás módjából következik, hogy bármely $e \in E_j$ -re, $C_e(\mathbf{p}) \geq C - j$ teljesül, minden $0 \leq j \leq 2 \lg n$ esetén. $E_j \subseteq Z$ igaz lesz minden $0 \leq j \leq 2 \lg n$ -re, valamint $Z \subseteq H$ teljesül.

Most már igazolni tudjuk, hogy van olyan j , amelyre $0 \leq j \leq 2 \lg n$ és $|f(E_j)| \leq 2|E_j|$ fennáll. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben ilyen j nincs, tehát bármely j , $0 \leq j \leq 2 \lg n$

esetén fennállna a $|f(E_j)| > 2|E_j|$ egyenlőtlenség. Ekkor viszont könnyű látni, hogy $|E_k| > 2|E_{k-1}|$ teljesül minden $1 \leq k \leq 2\lg n$ -ra. Tudjuk, hogy $|E_0| \geq 1$, ezért $|E_{2\lg n}| > 2^{2\lg n} = n^2$ ($\lg n = \log_2 n$). Ez azonban ellentmondás, hiszen G -nek nincs n^2 -nél több éle. ■

10.1.4. Lemma. *Ha $C \geq D + 2\lg n + 2$, akkor $C < 2LC^* + 2\lg n$.*

Bizonyítás A 10.1.3 lemma alapján van egy $X \subset Z$ halmaz, melyre $|f(X)| \leq 2|X|$. Minden $e \in Z$ élre teljesül, hogy $C_e(\mathbf{p}) \geq C - 2\lg n$. Legyen $M = \sum_{e \in X} C_e(\mathbf{p}) \geq |X|(C - 2\lg n)$, ahol M jelöli az X -beli élek teljes előfordulását a Π -beli játékosok által használt utakban együttvéve. Ahol $\Pi = \bigcup_{e \in X} \Pi_e(\mathbf{p})$, vagyis, Π azon résztvevők halmaza, akiknek a \mathbf{p} útválasztásban lévő útjuk tartalmaz X -beli élt. A \mathbf{p} útválasztásban az X éleire a torlódást csak a Π -beli játékosok okozzák. Az utak hossza legfeljebb L , így mindegyik Π -beli játékos legfeljebb L élt használ X -ből. Tehát $M \leq L \cdot |\Pi|$. Ennek következtében $|X|(C - 2\lg n) \leq L \cdot |\Pi|$, amiből $C \leq (L \cdot |\Pi|)/|X| + 2\lg n$.

Az $f(X)$ definíciójából, az optimális \mathbf{p}^* útválasztásban minden Π -beli játékos kell hogy használjon legalább egy élt az $f(X)$ -ből. Így tehát a \mathbf{p}^* -beli azon éleket, amelyek benne vannak $f(X)$ -ben is összesen legalább $|\Pi|$ -szer fel kell használni. Van tehát olyan $e \in f(X)$ él, melyre $C_e(\mathbf{p}^*) \geq |\Pi|/|f(X)|$. Így tehát $C^* \geq |\Pi|/|f(X)|$. Mivel $|f(X)| \leq 2|X|$ kapjuk, hogy $|\Pi| \leq 2C^* \cdot |X|$. A fentiek szerint tehát: $C \leq 2LC^* + 2\lg n$. ■

10.1.5. Tétel (Az anarchia ára a maximum játékokban). *Tetszőleges \mathcal{R} maximumjátékban $PoA = O(L + \log n)$.*

Bizonyítás Tegyük fel, hogy \mathbf{p} a legrosszabb Nash-útválasztás a közösségi költségét tekintve. Ekkor $PoA = SC(\mathbf{p})/SC(\mathbf{p}^*)$. Ha $C \geq D + 2\lg n + 2$, akkor $SC(\mathbf{p}) = C$. A 10.1.4 tétel szerint, $PoA \leq C/\max(C^*, D^*) \leq (2LC^* + 2\lg n)/C^* \leq 2L + 2\lg n$. Ha $C < D + 2\lg n + 2$, akkor $SC(\mathbf{p}) < D + 2\lg n + 2$; tehát $PoA \leq L + 2\lg n + 2$. Mindkét esetben $PoA = O(L + \log n)$. ■

Másrészt viszont megadunk egy maximum játékot, amely mutatja, hogy a 10.1.5. tétel éles. Tekintsük ugyanis az egyszerű n csúcsú és n élű kört. A kör mentén haladva minden élnek lesz egy baloldali csúcsa és egy jobboldali. Mindegyik e_i élhez tartozik egy i játékos, akinek az útválasztási stratégiai játékban a kezdőpontja éppen az e_i él bal végpontja, a végpontja pedig a jobb végpontja. A résztvevők rendelkezésére két út áll, p_i amely éppen az e_i él, és p'_i amely az a másik lehetséges út, amely a kezdőponttól a végpontig, a gyűrűt az ellenkező irányban járja végig. A $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ nyilván egy Nash-útválasztás 1 közösségi költséggel. Másrészt viszont a $\mathbf{p}' = [p'_1, p'_2, \dots, p'_n]$ úgyszintén egy Nash-útválasztás $n - 1$ költséggel. Tehát itt az anarchia ára $O(n) = O(L)$.

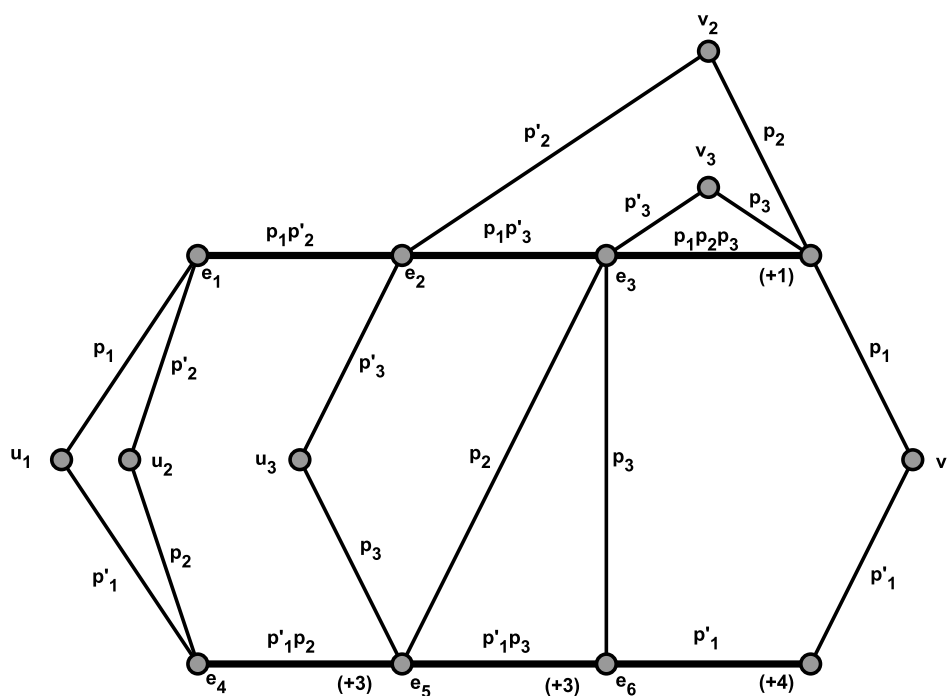
10.2. Összeg játékok

Legyen most $R = (\mathbf{N}, G, \mathcal{P})$ egy olyan útválasztási játék, melyben \mathbf{p} profilhoz a közösségi költséget $SC(\mathbf{p}) = C(\mathbf{p}) + D(\mathbf{p})$, a magán költséget $pc_i(\mathbf{p}) = C_i(\mathbf{p}) + D_i(\mathbf{p})$ formula adja meg. Az ilyen játékot hívjuk *összeg játéknak*. Először megmutatjuk, hogy ilyen játék esetén előfordulhat, hogy nincs is Nash-útválasztás.

10.2.1. Egy Nash-útválasztás nélküli összeg játék

10.2.1. Tétel. Van olyan $\mathcal{R} = (\mathbf{N}, G, \mathcal{P})$ összeg játék, amelynek nincs Nash-útválasztása.

Bizonyítás A G vázlatos képe látható az alábbi ábrán. Hét játékosunk van, $\mathbf{N} = \{1, \dots, 7\}$. Az 1, 2 és 3 aktívabb játékos két út közül választhat, $\mathcal{P}_1 = \{p_1, p'_1\}$, $\mathcal{P}_2 = \{p_2, p'_2\}$ és $\mathcal{P}_3 = \{p_3, p'_3\}$. Ez a három résztvevő $i = 1, 2, 3$ az u_i kezdő- és v_i célponttal rendelkezik. A vízszintesen látható hat megvastagított e_1, \dots, e_6 él kitüntetett, ezek lesznek azok, amelyeken a torlódás nagyobb lesz mint 1. A vékonyabb vonallal megrajzolt vonalak az egyes utak részei, amelyekről feltesszük, hogy éleiken a torlódás 1, valamint a hosszuk olyan, hogy $|p'_1| = |p_1| - 2$, $|p'_2| = |p_2| + 3$ és $|p'_3| = |p_3| + 3$ teljesül.



A 4, 5, 6 és 7 játékosok passzívabbak, mert nekik csak egy lehetséges útjuk van, ezt választhatják. A szerepük a példában csak annyi, hogy hozzájárulnak a kitüntetett e_3, e_4, e_5, e_6 él torlódásához a kívánt mértékben. Az ábra nem mutatja útjaikat, amelyek azonban olyanok, hogy együttesen rendre 1-gyel növelik az e_3 , 3-mal az e_4 és e_5 , valamint 4-gyel az e_6 torlódását. Az ábrán az él mellett áll a négy passzív játékos útja által okozott növekmény a torlódásban. Mivel a három aktívabb játékosnak két-két útja van, így összesen 8 útválasztás lehetséges. Egyesével beláthatjuk, hogy egyik útválasztás sem Nash-útválasztás. A három aktív játékos által választott utak sorrendben már meghatározzák az útválasztást. Az egyes utak hosszát a feltételeknek megfelelően választva kiderül, hogy az 1 játékos lokálisan nincs optimális helyzetben a $[p_1, p_2, p_3]$ és $[p'_1, p'_2, p'_3]$, a 2 aktív résztvevő a $[p'_1, p_2, p_3]$, $[p_1, p'_2, p'_3]$, $[p_1, p'_2, p_3]$, és $[p'_1, p_2, p'_3]$ útválasztásoknál javíthat. A 3 játékos pedig a $[p'_1, p'_2, p_3]$ és $[p_1, p_2, p'_3]$ útválasztásoknál cserélne szívesen utat. Pl. a legutolsó esetben a 3 játékos magán költség jelenleg $|p'_3| + |p'_3| + 1 = |p_3| + 3 + |p_3| + 3 + 1 = 2|p_3| + 7$, míg ha utat cserél, akkor $|p_3| + |p_3| + 3 + 1 = 2|p_3| + 4$, amivel javítana, csökkentené a költségét. ■

11. fejezet

Lineáris regresszió

A lineáris programozást alkalmazni lehet egy, a gazdasági életben is oly fontos szerepet játszó statisztikai módszerben is. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll sok adat, legyenek ezek a $b_i, i = 1, \dots, m$ értékek. Ha ezek jelentése a félévi jegyek az indexben, akkor a kollégiumok a bentlakás lehetőségét eldönthetik pl. az egyszerű

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_i$$

átlag alapján is. Ha az így számított érték eléri pl. a 4-et, akkor megfelelőnek ítélik a teljesítményt. Ha az ösztöndíj meghatározásánál is a jegyeket szeretnék figyelembe venni, akkor megtehetik ezt más mérőszám alapján is, pl. a c_i kreditekkel súlyozott átlagot is vehetik,

$$x' = \frac{\sum_{i=1}^m b_i \times c_i}{\sum_{i=1}^m c_i}.$$

Az oktató osztályozási szokásait mérhetjük a

$$\hat{x} = b_{\frac{m+1}{2}}$$

mediánnal (az egyszerűség miatt tegyük fel, hogy m páratlan). Ha pl. ez a mérőszám a csoportban 1, akkor ebből háromféle statisztikai következtetésre juthatunk. Az oktató szigorú, vagy a csoport többsége nem akar vagy nem képes a kurzus követelményének megfelelni, esetleg mindkettő (bármilyen jellemzést írhatunk, hiszen nem egzakt fogalmakat használunk). Arra is gondolhatnánk, hogy a felfelé vagy lefelé kiugró eredmények hatását mérséklendő, számoljuk inkább ki azt a számot, amelytől a statisztikai minta elemei együttesen négyzetesen a legkevésbé térnek el.

$$\bar{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m (x - b_i)^2.$$

Nem véletlen azonban a jelölés megegyezősege, ez az érték valóban az egyszerű átlaggal egyenlő. Geometriai képünk lehet erről a következő. Vetítsük le az \mathbb{R}^m -ben merőlegesen a $b = (b_1, \dots, b_m)$ pontot arra az egyenesre, amelyen a csupa azonos koordinátájú pontok vannak.

A vetületi pont lesz az $(\hat{x}, \dots, \hat{x})$. Valóban, ha vesszük a jobboldalt, mint $f(x)$ függvényt az

$$f'(x) = \sum_{i=1}^m 2(x - b_i) = 0$$

egyenlet megoldása nyilván az

$$x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_i = \bar{x}$$

érték, az átlag. A második derivált negatív, tehát ez valóban minimumhely. Még érdekesebb a mediánra vonatkozó ekvivalens definíció. Ha az abszolút értékek összegének minimumát keressük az éppen a mediánál vétetik fel.

$$\hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^m |x - b_i|$$

Vegyük most is a jobboldali függvényt

$$g(x) = \sum_{i=1}^m |x - b_i|$$

Bár ez a konvex töröttvonal függvény folytonos, éppen az adatpontokban megtörik, nem differenciálható, de egyéb pontokban igen, így az adatpontokat kivéve teljesül

$$g'(x) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn}(x - b_i).$$

Páratlan sok (-1) -et vagy 1 -et adunk össze, nyilván az összeg éppen a mediánál vált előjelet, tehát itt van a minimum. Elképzelhetjük az adatsorozat megközelítését oly módon is, hogy az adatokat eleve $b_i = x + \varepsilon_i$ összegként fogjuk fel, az x a várható rész, míg az ε_i az ingadozás. Legjobb mérésenként felfogni, az x az elméleti érték, az ε_i egy-egy mérés hibája. Tegyük fel, hogy a b mennyiség az elméleti modell szerint n féle összetevőtől lineárisan függ.

$$b = \sum_{j=1}^n a_j x_j + \varepsilon$$

Szokás az összefüggést lineáris regressziós modellnek hívni. Gondolhatunk a példa kedvéért a testsúlyra, amely függ az életmód megannyi jellemzőjétől (itt feltételezzük, hogy ez lineáris függés). Sok mérés készült el a jellemzőkről különböző embereknél. Így tehát az összefüggést felírva az ε_i konstans számolható.

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

felírható mindegyik mérésre. A b testsúly vektort, a mérési adatok A mátrixát használva röviden így írhatjuk fel.

$$b = Ax + \varepsilon$$

A regresszió analízis célja az ismeretlen x vektort úgy megválasztani, hogy valamilyen értelemben az ε vektor minimális legyen. Pl. az abszolútértékek összegét véve a mediánt közelítjük.

11.1. L^2 -regresszió

A szokásos euklideszi hossz szerint mérünk.

$$\|y\|_2 = \left(\sum_i y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Keressük tehát a b és A mérési eredményekből képzett ε eltérésvektor euklideszi hosszának minimumát, ahol az x vektor a változó.

$$\bar{x} = \arg \min_x \|b - Ax\|_2^2$$

Az egyszerűség kedvéért az L^2 norma négyzetét vizsgáljuk, mint az x függvényét.

$$f(x) = \|b - Ax\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right)^2$$

Ebben a többdimenziós esetben is kiegészít a többváltozós analízis. Mindenesetre a minimumhelyen fenn kell állnia a parciális deriváltakra:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m 2 \cdot \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j \right) (-a_{ik}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Átrendezve

$$\sum_{i=1}^m a_{ik}b_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ik}a_{ij}\bar{x}_j, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Mátrix és vektor rövidítéssel

$$A^T b = A^T A \bar{x}$$

Feltéve, hogy $A^T A$ invertálható, ki is fejezhetjük a minimumot adó vektort

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

Abban a legegyszerűbb esetben, amikor egyetlen mennyiségtől függ lineárisan egy másik érték, a

$$b = ax_1 + x_2$$

összefüggésben az egyenes meredekségét és a tengelymetszetét keressük, sok mérést felhasználva a fenti *legkisebb négyzetes becsléssel*. A tárgyalt általános esetben ez úgy illik bele, ha bevezetünk még egy olyan mérendő adatot a_2 -t, amelyet fixnek, pl. 1-nek tekintünk.

$$b = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Ha azonban megismételjük a levezetést és újra használjuk az \bar{a} és \bar{b} jelölést a mérési adatok átlagára, akkor megkapjuk külön, hogy

$$x_2 = \bar{b} - \bar{a} \times x_1$$

és

$$x_1 = \frac{\sum_{i=1}^m a_i \times (b_i - \bar{b})}{\sum_{i=1}^m a_i \times (a_i - \bar{a})} = \frac{\sum_{i=1}^m (a_i - \bar{a}) \times (b_i - \bar{b})}{\sum_{i=1}^m (a_i - \bar{a})^2},$$

felhasználva az utolsó átalakításban az alapösszefüggést is.

11.1. Példa.

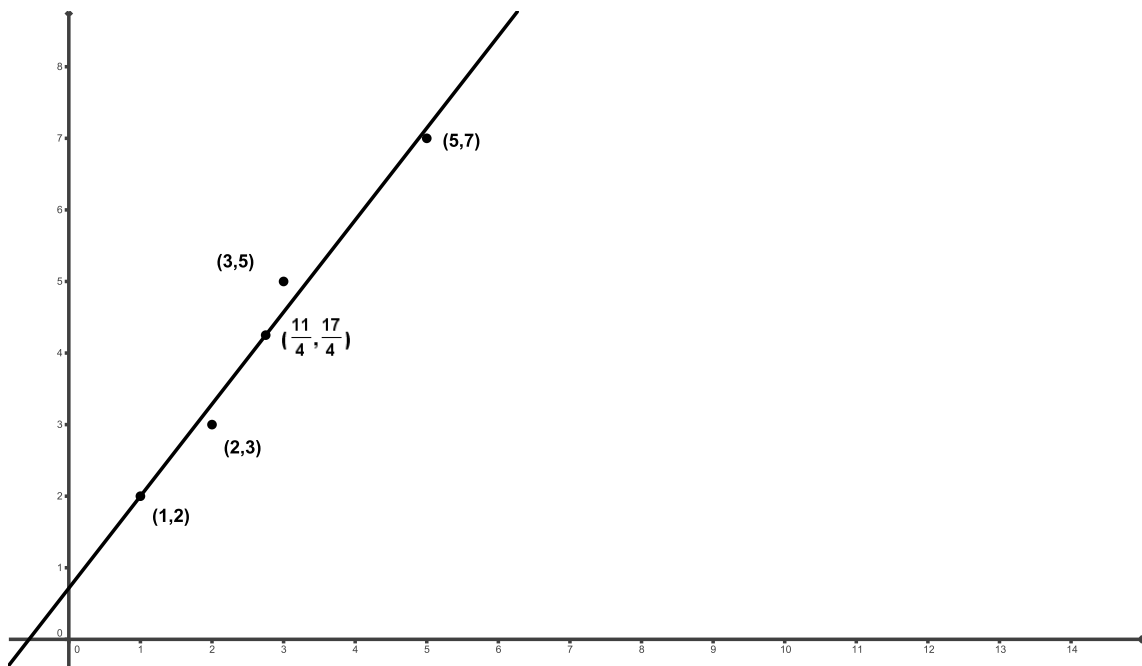
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 11 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Az optimális együtthatókra

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -11 & 39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$



Az x_2 a közelítő egyenes és a függőleges tengely metszetének második koordinátája, míg az x_1 az egyenes meredeksége. Ellenőrizhető az is, hogy a kapott egyenes átmegy az (\bar{a}, \bar{b})

$= (\frac{11}{4}, \frac{17}{4})$, a mérési adatok átlagának megfelelő ponton. A négy pont közül egyen átmegegy, a többin nem. Teljesül továbbá, hogy az egyenes fölötti pontok függőleges távolságainak összege az egyenestől megegyezik az egyenes alatti pontok függőleges távolságösszegével. Mindkét tulajdonság jellemző a síkbeli lineáris regresszióra, ezek minden esetben teljesülnek.

11.2. L^1 -regresszió

A legkisebb négyzetek közelítéssel szemben az ε vektor mérhető a koordináták abszolútértékeinek összegével, tehát az eltérések abszolútértékeinek összegének minimumát keressük, az x vektorokra vonatkozóan.

$$\tilde{x} = \arg \min_x \|b - Ax\|_1$$

A \tilde{x} egy minimális vektor. Ennek meghatározása az analízis eszközével sem fejezhető ki olyan egyszerűen, mint az L^2 -regresszió esetében. Feladatunk tehát, hogy

$$\text{minimalizáljuk a } \sum_i \left| b_i - \sum_j a_{ij}x_j \right| \text{ kifejezést.}$$

Bevezetünk nemnegatív t_i technikai változókat.

$$\begin{aligned} & \min \sum_i t_i \\ & \text{feltéve, hogy: } t_i - |b_i - \sum_j a_{ij}x_j| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Segítségükkel meg tudunk szabadulni a kellemetlen abszolútértéktől, ha a következő lineáris programozási problémát írjuk fel.

$$\begin{aligned} & \min \sum_i t_i \\ & \text{feltéve, hogy: } -t_i \leq b_i - \sum_j a_{ij}x_j \leq t_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

11.2. Példa. Ha az 11.1 példát vesszük, akkor a 11.2 LP duális szimplex algoritmussal oldható meg. Az eljárás felidézése és a gyakorlás végett nemcsak a tábláját, hanem a megoldás menetét is leírjuk.

	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	
y_1	1	1	-1	0	0	0	2
y_2	2	1	0	-1	0	0	3
y_3	3	1	0	0	-1	0	5
y_4	5	1	0	0	0	-1	7
y_5	-1	-1	-1	0	0	0	-2
y_6	-2	-1	0	-1	0	0	-3
y_7	-3	-1	0	0	-1	0	-5
y_8	-5	-1	0	0	0	-1	-7
	0	0	1	1	1	1	

	y_8	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	
y_1	1	4	-1	0	0	-1	3
y_2	2	4	0	-1	0	-1	3
y_3	3	4	0	0	-1	-1	3
y_4	1	0	0	0	0	-2	0
y_5	-1	-4	-1	0	0	1	3
y_6	-2	-4	0	-1	0	1	3
y_7	-3	-4	0	0	-1	1	3
x_1	5	5	0	0	0	1	3
	0	0	1	1	1	1	0

	y_7	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	
y_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_2	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{3}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
y_3	1	0	0	0	-2	0	0
y_4	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$
y_5	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
y_6	$-\frac{3}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
y_8	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
x_1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{3}{3}$
	0	0	1	1	1	1	0
	y_7	y_4	t_1	t_2	y_1	t_4	
t_3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_2	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
y_3	-1	-1	1	0	-1	1	1
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
y_5	0	0	-2	0	1	0	0
y_6	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	-1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_8	0	1	0	0	0	-2	0
x_1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	y_7	y_4	t_1	y_5	y_2	t_4	
t_3	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_1	0	0	-2	1	0	0	0
y_3	-1	-1	-1	1	0	1	1
x_2	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
t_2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_8	0	1	0	0	0	-2	0
x_1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$

A legutolsó táblából leolvasható a bázismegoldás. Ebből számunkra az $x_1 = \frac{5}{4}$ és $x_2 = \frac{3}{4}$ a fontos. A kapott $b = x_1 \times a + x_2$ egyenes átmegy két ponton is a négyből, és az abszolútértékek összege $\frac{3}{4}$. Itt a közelítő egyenesnek nem szükségképpen kell átmennie az (\bar{a}, \bar{b}) átlagokból kapott ponton és most sem megy át.

A következő gyakorló feladatot oldjuk meg, mind az L^2 mind az L^1 közelítést alkalmazva!

11.3. Példa.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

A kétféle távolságfogalommal kapott közelítő egyenesek jóságát nehéz egymással összehasonlítani. Figyeljük meg azonban, hogy az L^1 -regresszió esetében ha megváltoztatjuk a b

vektor negyedik komponensét 8-ról 9-re, akkor az újabb LP optimális megoldásában ugyanaz az \tilde{x} vektor lesz az optimális, tehát a közelítő egyenes ugyanaz marad. Hasonlóan, ha az eredeti 11.3 példában az a_{13} értéket 1-ről 2-re megváltoztatjuk, szintén megmarad a közelítő egyenes. Azt gondolhattuk volna, hogy bármilyen kis változás a mérésekben megváltoztatja az x vektort, tehát a lineáris összefüggést a mennyiségek között. Ez az észrevétel megcáfolja ezt, tehát az L^1 -regresszió nem annyira *érzékeny*. (lásd a lineáris programozás érzékenységvizsgálatára utaló egyéb megjegyzéseket.)

12. fejezet

Ciklizálás a szimplex módszerben

A szimplex módszer lépésszámának becslése mellett egy másik érdekesség a ciklizálási lehetőség elemzése. Előfordulhat, hogy egy-egy bázisváltoztatásnál a célfüggvény értéke az újabb bázismegoldáson nem lesz jobb. Emiatt nem is működik az a végesség bizonyítási gondolat, miszerint a bázismegoldások (a lehetséges megoldáshalmaz csúcspontjai) száma véges, így előbb, utóbb eljutunk az optimális megoldáshoz. Nyilvánvaló, hogy azonos bázis esetén a bázismegoldás azonos és a célfüggvény értéke adott, tehát ha mindig javulna az érték, akkor nem érhetnénk vissza egy korábban érintett bázishoz. Régóta ismert azonban Beale példája [3], [28] a degenerációra, mely ciklizáláshoz vezet. Az eset ritka, igazán széles problémaosztályokat korábban nem definiáltak, számítógépes kísérletek sem mutatják ennek gyakori előfordulását. Bár legrosszabb eset szempontjából hatékonyabb eljárások léteznek, mégsem pártoltak el a szimplex módszertől, éppen azért, mert nem jellemző rá sem a ciklizálás, sem a túl hosszú futási idő. Egyéb változtatásokkal is, de csak a generáló elem kiválasztási szabályát kissé módosítva is több módon el lehet érni, hogy elvileg se fordulhasson elő ciklizálás [2], [28], [16, 18, 50]. Így foglalkozunk a nehezebb feladattal, a [30], [52] munkák alapján konstruáljunk ciklizáló feladatot!

12.1. Egy kis példa

Megoldunk egy 4 változós, két feltétellel rendelkező lineáris programozási feladatot, mindig a legnegatívabb célfüggvényegyüttható oszlopában választva generáló elemet. Ha a bázisból kikerülő változó meghatározásában egyértelműsíteni kell, akkor a nagyobb generálóelemet választjuk, a numerikus stabilitással alátámasztva a döntést.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2.3x_1 + 2.15x_2 - 13.55x_3 - 0.4x_4, \\ \text{feltéve, hogy } & 0.4x_1 + 0.2x_2 - 1.4x_3 - 0.2x_4 \leq 0, \\ & -7.8x_1 - 1.4x_2 + 7.8x_3 + 0.4x_4 \leq 0, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Bevezetve az x_5 és x_6 különbségváltozókat, a $T^{(1)}$ részletesebb táblázatos formában írjuk fel a feladatot. Kezdetben is megoldás az azonosan zérus vektor, és később is ez marad. Először

x_1 kerül be a bázisba, csak az x_5 kerülhet onnan ki. Ez a bázisváltás eredményezi a $T^{(2)}$ táblát. A második iterációban az x_2 lép be és x_6 kerül ki, így kaptuk a $T^{(3)}$ -at.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	z	
0.4	0.2	-1.4	-0.2	1.0		= 0	
-7.8	-1.4	7.8	0.4		1.0	= 0	$T^{(1)}$
-2.3	-2.15	13.55	0.4			1.0 = 0	
1.0	0.5	-3.5	-0.5	2.5		= 0	
	2.5	-19.5	-3.5	19.5	1.0	= 0	$T^{(2)}$
	-1.0	5.5	-0.75	5.75		1.0 = 0	
1.0		0.4	0.2	-1.4	-0.2	= 0	
	1.0	-7.8	-1.4	7.8	0.4	= 0	$T^{(3)}$
		-2.3	-2.15	13.55	0.4	1.0 = 0	

Észrevehető, hogy a $T^{(3)}$ ugyanolyan mint $T^{(1)}$ csak az x változók oszlopai tolódtak el kettővel. Ez azt jelenti, hogy további négy lépés végrehajtása után a $T^{(1)}$ pontosan azonossá válik a hat lépéssel későbbi táblázattal. Csak két együttható tábla van, $T^{(3)}$ és $T^{(5)}$ megegyezik a $T^{(1)}$ -gyel csak a változók kerültek mindig két oszloppal jobbra ciklikusan, valamint $T^{(4)}$ és $T^{(6)}$ szintén egyforma, nem tekintve az eltolódást. Az ilyen tulajdonságú példákat nevezük 2/6-körös feladatoknak. Megjegyezzük, hogy Beale eredeti példája 6/6-körös volt, hat különböző együtthatótáblázat után tért vissza az eredeti.

12.2. A 2/6-os példák elemzése

Álljon a 3×6 -os $M^{(1)}$ mátrix a $T^{(1)}$ -beli x oszlopaiból,

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} A & B & I \\ a & b & 0 \end{bmatrix},$$

ahol A , B és I 2×2 kis mátrixok a feltételekből, az a , b és 0 pedig 1×2 blokkok a cél-függvény sorából. Ahhoz, hogy az első lépésben az (1,1), a másodikban a (2,2) pozícióban legyenek a generáló elemek szükséges, hogy A nemelfajuló legyen. A báziscserék után a $T^{(3)}$ táblát kapjuk, melyben az x -hez tartozó a következő alakot ölti

$$M^{(3)} = \begin{bmatrix} I & A^{-1}B & A^{-1} \\ 0 & b - aA^{-1}B & -aA^{-1} \end{bmatrix}.$$

Ahhoz, hogy előálljon két lépés után az első mátrix szükséges, hogy $A = A^{-1}B$ és $B = A^{-1}$, együtt teljesüljön, ami éppen akkor lehetséges, ha $A^3 = I$. Ebből adódik, hogy az A λ sajátértékeire teljesül

$$\lambda^3 = 1 \iff (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda - 1) = 0. \quad (12.2)$$

Egy 2×2 A valós mátrixnak vagy van 2 valós sajátértéke vagy egy komplex konjugált pár.

(12.2)-ből következik, hogy ha az A -nak valós sajátértékei vannak, akkor mindkettőnek 1-nek kell lenni, így a 2×2 -es $A^2 + A + I$ mátrix polinomnak van két valós sajátértéke a háromból, tehát nem elfajuló. Mivel $(A - I)(A^2 + A + I) = A^3 - I = 0$, ebben az esetben következik, hogy $A = I$. Ekkor viszont $a = b = 0$, ami nem érdekes, hiszen minden célfüggvény együttható nulla. A másik lehetőség az, hogy az A -nak van két komplex konjugált sajátérték párja, tehát (12.2) szerint ki kell elégítenie a

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0. \quad (12.3)$$

egyenletet. A karakterisztikus egyenlet az A -ra

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) = 0. \quad (12.4)$$

Annak érdekében, hogy az (12.3) és (12.4) egyenletrendszernek két megoldása legyen λ -ra és így a 2/6-kör tulajdonság megmaradjon kívánjuk meg, hogy teljesüljön $A_{11} + A_{22} = -1$ és $A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 1$. Ezekből

$$-A_{21}A_{12} = 1 + A_{11} + A_{11}^2 \quad (12.5)$$

következik. Megfordítva, ha egy 2×2 mátrixra $A_{11} + A_{22} = -1$ és (12.5) is fennáll, teljesül a (12.3) karakterisztikus egyenlet, emiatt, $A^2 + A + I = 0$, amiből következik az $A^3 = I$ összefüggés is. A célfüggvény is megismétlődik 2 lépés után, ez pontosan akkor történhet meg, ha $b - aA^{-1}B = a$ és $b = -aA^{-1}$, vagy ami ezzel ekvivalens $a(A^2 + A + I) = 0$, amely minden a -ra igaz lesz, mivel $A^2 + A + I = 0$. Nincs tehát semmi megszorítás a -ra, így az általánosság megszorítása nélkül felírhatjuk az

$$a = [-1, \mu]$$

formában, ahol a μ tetszőleges lehet. Azt kaptuk tehát, hogy van egy három paraméteres 2/6-kör típusú példa családuknak hiszen a μ , A_{11} és A_{12} megválasztható.

Bármely a -ra, a b vektorra áll a

$$b = -aA^{-1}. \quad (12.6)$$

képlet. Mivel A valós és $A^3 = I$, $\det(A) = 1$. Tehát a

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} -(A_{11} + 1) & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix},$$

$$b = [-(A_{11} + 1) + \mu A_{21}, -A_{12} - \mu A_{11}],$$

valamint az általános formában igaz, hogy $M^{(1)}$ és $M^{(2)}$ -vel a 2/6-kör példákban valóban az 12.1. táblában előírtak lesznek a generáló elemek. Összegezzük a számolások eredményét a 12.1. propozícióban:

12.1. Propozíció. *Tegyük fel, hogy a célfüggvény együtthatók sora nem 0 és a 2/6-kör megadott generálóelem pozíciókkal kialakul. Ekkor az $M^{(1)}$ formában megadott feladat pontosan akkor mutatja a két lépés utáni megadott ismétlődést, ha az együtthatók a 12.1. táblázatban megadott módon vannak definiálva, továbbá A_{11} , A_{21} és A_{12} között fennáll még (12.5) is.*

12.1. táblázat. Az együtthatók általános értékei két lépés után a 2/6-kör példákban

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$M^{(1)} =$	A_{11}	A_{12}	$-(A_{11} + 1)$	$-A_{12}$	1	
	A_{21}	$-(A_{11} + 1)$	$-A_{21}$	A_{11}		1
	-1	μ	$-(A_{11} + 1) + \mu A_{21}$	$-A_{12} - \mu A_{11}$		
$M^{(2)} =$	1	$\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$-(1 + \frac{1}{A_{11}})$	$-\frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\frac{1}{A_{11}}$	
		$\frac{1}{A_{11}}$	$\frac{A_{21}}{A_{11}}$	$-(1 + \frac{1}{A_{11}})$	$-\frac{A_{21}}{A_{11}}$	1
		$\mu + \frac{A_{12}}{A_{11}}$	$\mu A_{21} - (2 + A_{11} + \frac{1}{A_{11}})$	$-A_{12}(1 + \frac{1}{A_{11}}) - \mu A_{11}$	$\frac{1}{A_{11}}$	

Most felírjuk azokat az összefüggéseket, amelyeknek azért kell teljesülnie, hogy valóban a szimplex módszernek megfelelő módon történjenek a lépések. Az (1,1) helyen lesz a generálóelem $M^{(1)}$ -ben, tehát

$$A_{11} > 0. \quad (12.7)$$

(12.5) és (12.7) alapján A_{21} és A_{12} nem nulla és az előjelük más. Ha A_{21} pozitív, az A_{12} , így tehát az $\frac{A_{12}}{A_{11}}$ negatív, tehát $M_{12}^{(2)}$ negatív és $M_{22}^{(2)}$ pozitív, hasonlóan, mint ahogy a numerikus példa is mutatja, valamint egy oszloppal minden jobbra tolódik, miközben megcserélődik az első két sor. Emiatt nem csorbul az általánosság, ha feltesszük, hogy

$$A_{21} < 0, \quad (12.8)$$

$$A_{12} > 0. \quad (12.9)$$

Következik, hogy csak az első sorban áll pozitív elem az $M^{(1)}$ első oszlopában, valamint mindkét sorban pozitív elem áll az $M^{(2)}$ második oszlopában. Tehát az első iterációban egyértelmű a generálóelem, míg a második lépésben két lehetőség is van a második oszlopban. Közülük a nagyobbat választjuk, tehát jó ha fennáll

$$\frac{1}{A_{11}} > \frac{A_{12}}{A_{11}} \iff A_{12} < 1 \quad (12.10)$$

is. Ezzel beláttuk a következőt:

12.2. Propozíció. *Ha a 12.1. Propozíciófeltételei teljesülnek és a generálóelemeket a 2/6-kör példákra előírt rendben választjuk, akkor pontosan akkor maradnak meg ezek a választások rendre a páratlan ill. páros iterációkra, ha még $0 < A_{11}$ és $0 < A_{12} < 1$ is teljesül.*

Ellenőriznünk kell még azt is, hogy valóban az $M^{(1)}$ első oszlopában kelljen generálóelemet választani a legnegatívabb szabály szerint.

$$-1 < \mu, \quad (12.11)$$

$$-1 < -(A_{11} + 1) + \mu A_{21} \iff \mu < \frac{A_{11}}{A_{21}}. \quad (12.12)$$

A (12.7) és (12.8) alapján μ negatív. Abból, hogy az első oszlopot választjuk a negyedik helyett kapjuk, hogy a

$$-1 < -A_{12} - \mu A_{11} \iff \mu < \frac{1 - A_{12}}{A_{11}}$$

egyenlőtlenségnek teljesülnie kell, de ez szerencsére mindig igaz, mert a korlát pozitív (12.7) és (12.10) alapján.

$M^{(2)}$ -ben az 5. oszlopban a célfüggvény együttható pozitív, így nem jön számításba. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a második oszlopot válasszuk a harmadik és negyedik helyett

$$\mu < -\frac{A_{12}}{A_{11}}, \quad (12.13)$$

$$\mu < -\frac{(2 + A_{11} + \frac{1}{A_{11}} + \frac{A_{12}}{A_{11}})}{1 - A_{21}}, \quad (12.14)$$

$$\mu < -\frac{A_{12}(1 + \frac{2}{A_{11}})}{A_{11} + 1}. \quad (12.15)$$

Összevetve a (12.13) és (12.15) egyenlőtlenséget látható, hogy (12.13) elhagyható, ha fennáll

$$\begin{aligned} -\frac{A_{12}(1 + \frac{2}{A_{11}})}{A_{11} + 1} &< -\frac{A_{12}}{A_{11}} \\ \iff -A_{12}A_{11} - 2A_{12} &< -A_{11}A_{12} - A_{12} \iff -A_{12} < 0, \end{aligned}$$

amely viszont igaz (12.9) szerint. További számolás mutatja, hogy (12.14) és (12.15), valamint (12.8) és (12.5) felhasználásával, (12.14) sem releváns, ha

$$\begin{aligned} -\frac{A_{12}(1 + \frac{2}{A_{11}})}{A_{11} + 1} &< -\frac{(2 + A_{11} + \frac{1}{A_{11}} + \frac{A_{12}}{A_{11}})}{1 - A_{21}} \\ \iff A_{12}(A_{11} + 2)(1 - A_{21}) &> (A_{11} + 1)(2A_{11} + A_{11}^2 + 1 + A_{12}) \\ \iff A_{12}(A_{11} + 2 - A_{21}(A_{11} + 2) - A_{11} - 1) &> (A_{11} + 1)^3 \\ \iff -A_{12}A_{21}(A_{11} + 2) + A_{12} &> (A_{11} + 1)^3 \\ \iff (1 + A_{11} + A_{11}^2)(A_{11} + 2) + A_{12} &> (A_{11} + 1)^3 \\ \iff (A_{11} + 1)^3 + 1 + A_{12} &> (A_{11} + 1)^3 \iff 1 + A_{12} > 0, \end{aligned}$$

amely szintén igaz (12.9) szerint. A (12.12) és (12.13) összehasonlítva, és felhasználva még (12.8)-et és (12.5)-et, látható, hogy (12.12) következik, ha

$$-\frac{A_{12}}{A_{11}} < \frac{A_{11}}{A_{21}} \iff -A_{12}A_{21} > A_{11}^2 \iff A_{11}^2 + A_{11} + 1 > A_{11}^2,$$

amely viszont (12.7) alapján lesz igaz.

Megmutattuk, hogy (12.12), (12.13) és (12.14) redundáns, tehát (12.15) a legélesebb felső korlát. Ebből és (12.11)-ből adódik, hogy a μ -nek benne kell lenni egy intervallumban:

$$-1 < \mu < -\frac{A_{12}(A_{11} + 2)}{A_{11}(A_{11} + 1)}, \quad (12.16)$$

amely akkor valódi intervallum, ha

$$-1 < -\frac{A_{12}(A_{11} + 2)}{A_{11}(A_{11} + 1)} \iff A_{12} < A_{11} \left(\frac{A_{11} + 1}{A_{11} + 2} \right). \quad (12.17)$$

A (12.16) baloldali egyenlőtlenségének sérülése esetén a második oszlopot választanánk az első helyett $M^{(1)}$ -ben, ha pedig a jobb oldal nem teljesülne, akkor a negyedik oszlopot választanánk a második helyett az $M^{(2)}$ -ben, míg ha valahol egyenlőség állna fenn, akkor nem lenne egyértelmű a választás. Összegezve, megállapítható az alábbi:

12.3. Propozíció. *Ha a legnegatívabb célfüggvényegyüttható oszlopában választunk generálóelemet és a sorkiválasztásnál a nagyobb értékű lehetséges elemet választjuk, akkor a 2/6-kör típusú feladat pontosan akkor ciklizál, ha teljesülnek a 12.1. és 12.2. propozíciók, továbbá fennáll (12.16) is (amelyből (12.17) már következik).*

13. fejezet

A szimplex módszer lépésszámáról

A Markov Döntési folyamatokban az egyes döntések meghozásához egy-egy optimalizálásra van szükség. Fontos ebben a speciális esetben megbecsülni, felülről korlátozni a lépések számát. Ezért a lineáris programozás legismertebb eljárásával kapcsolatban – mintegy függeléként – ebben a részben a lehetséges bázismegoldások számát, ezzel együtt az iterációk számára adunk felső korlátot a [31], [53], [55] munkák nyomán.

Az alábbi standard lineáris programozási feladatot tekintjük:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ \text{feltéve, hogy} \quad & Ax = b, x \geq 0, \end{aligned} \tag{13.1}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ és $c \in \mathbb{R}^n$ adottak, és $x \in \mathbb{R}^n$ a változó vektor. A (13.1)-hez tartozó duális probléma:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y, \\ \text{feltéve, hogy} \quad & A^T y + s = c, s \geq 0, \end{aligned} \tag{13.2}$$

ahol $y \in \mathbb{R}^m$ és $s \in \mathbb{R}^n$ a változók.

Tegyük fel, hogy $r(A) = m$, a primál problémának van optimális megoldása és adott egy kezdeti x^0 bázismegoldás. Legyen x^* egy optimális bázismegoldása a primál, és (y^*, s^*) pedig optimális megoldása a duál feladatnak, és z^* legyen a közös optimum érték.

Legyen adott az indexeknek egy részhalmaza $B \subset \{1, 2, \dots, n\}$, vágjuk szét az A mátrixot, a c vektort és a változó x vektort a B -nek, és az $N = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$ -nek megfelelő részekre:

$$A = [A_B, A_N], c = \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}.$$

Definiáljuk a bázisok halmazát:

$$\mathcal{B} = \{B \subset \{1, 2, \dots, n\} \mid |B| = m, \det(A_B) \neq 0\}.$$

Ekkor a primál feladat bázismegoldásait $B \in \mathcal{B}$ -re és $N = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B$ -re ilyen alakban írhatjuk fel:

$$x_B = A_B^{-1} b \geq 0, x_N = 0. \tag{13.3}$$

13.1. táblázat. Jelölések

x^*	: egy optimális bázismegoldása (13.1)-nek
(y^*, s^*)	: egy optimális megoldása (13.2)-nek
z^*	: az (13.1) optimum értéke
x^t	: a szimplex módszer t -edik iteráltjának bázismegoldása
B^t	: az x^t -hez tartozó indexek halmaza
N^t	: az x^t -hez tartozó nembázis indexek halmaza
\bar{c}_{N^t}	: a t -edik redukált költségvektor
Δ^t	: $-\min_{j \in N^t} \bar{c}_j$
j_{MN}^t	: a legnegatívabb választási szabály által kapott index a t -edik lépésben

Legyen δ és γ a bázismegoldások pozitív komponensei közül a legkisebb és a legnagyobb. Vagyis minden \hat{x} bázismegoldásra és tetszőleges $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re, ha $\hat{x}_j \neq 0$, akkor fennáll, hogy

$$\delta \leq \hat{x}_j \leq \gamma. \quad (13.4)$$

Megjegyezzük, hogy ezek az értékek csak A -tól és b -től függenek, c -től nem.

Legyen $B^t \in \mathcal{B}$ a szimplex módszer t -edik iterációjának bázisa és legyen $N^t = \{1, 2, \dots, n\} \setminus B^t$. A primál probléma ekkor a következő alakban írható [28]:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_{B^t}^T A_{B^t}^{-1} b + (c_{N^t} - A_{N^t}^T (A_{B^t}^{-1})^T c_{B^t})^T x_{N^t}, \\ \text{feltéve, hogy} \quad & x_{B^t} = A_{B^t}^{-1} b - A_{B^t}^{-1} A_{N^t} x_{N^t}, \\ & x_{B^t} \geq 0, x_{N^t} \geq 0. \end{aligned}$$

A $\bar{c}_{N^t} = c_{N^t} - A_{N^t}^T (A_{B^t}^{-1})^T c_{B^t}$ új célfüggvény együttható vektort redukált költségvektornak hívjuk. Amikor $\bar{c}_{N^t} \geq 0$, akkor az aktuális bázismegoldás optimális. Egyébként keressük meg a következő generáló elemet. Ekkor válasszunk egy nembázis változót (belépő változó) és növeljük a változót, amíg az egyik bázismegoldás (a kilépő) 0-vá válik. Ekkor pedig cseréljük meg ezt a két változót. Számos szabály lehet a bázisváltás módjának megválasztására [50], [2], [28]. Pl. a legnegatívabb célfüggvény együttható oszlopában keressük a generáló elemet, vagy a legjobb javítást akarjuk elérni vagy egyszerűen csak a legkisebb indexű megfelelő együtthatót választjuk. Ha az elsődleges szabály nem dönt egyértelműen, akkor el kell dönteni a holtversenyt, válasszuk pl. azt a nembázis változót, amelyre a legkisebb lesz a redukált költség. Hogy precízzé tegyük, válasszuk ki a következő indexet:

$$j_{MN}^t = \arg \min_{j \in N^t} \bar{c}_j.$$

Legyen $\Delta^t = -\bar{c}_{j_{MN}^t}$.

A legjobb javítás szabálya szerint pedig azt a változót vigyük be a bázisba, melyre a következő célfüggvény értéke a legkisebb lesz. Az alkalmazott jelöléseket mutatja a 13.1. táblázat.

13.1. A Szimplex módszer tanulmányozása

Az általánosabb vizsgálatokat Ye [55] munkája motiválta, ahol megmutatta, hogy a szimplex módszer erősen polinomiális a Markov Döntési Problémában, az LP problémák egy speciális osztályában. Érdekes az ő eredményeit az általános LP problémák esetében is általánosítani és így kapunk egy felső korlátot a különböző bázismegoldások számára, amiket a szimplex módszer szolgáltat.

A következő lemmában kapunk egy alsó korlátot a szimplex módszer minden egyes iterációjának optimális értékére.

13.1.1. Lemma. *Legyen z^* az optimum értéke a primál problémának és x^t legyen a legnegatívabb célfüggvényegyütthatók által meghatározott szimplex módszer t -edik iteráltjának bázismegoldása. Ekkor:*

$$z^* \geq c^T x^t - \Delta^t m\gamma. \quad (13.5)$$

Bizonyítás Legyen x^* egy optimális bázismegoldása a primál problémának. Ekkor

$$\begin{aligned} z^* &= c^T x^* \\ &= c_{B^t}^T A_{B^t}^{-1} b + \bar{c}_{N^t}^T x_{N^t}^* \\ &\geq c^T x^t - \Delta^t e^T x_{N^t}^* \\ &\geq c^T x^t - \Delta^t m\gamma, \end{aligned}$$

ahol a második egyenlőtlenség következik abból, hogy x^* -nak legfeljebb m pozitív eleme van és minden elem felülről korlátozható γ -val. Így a (13.5) egyenlőtlenséget kapjuk. ■

Ezután mutatunk egy konstans tényező felső becslését a célfüggvény érték és az optimális érték közötti eltérésnek minden egyes iterációban. Az eredmény nagyon érdekes, hiszen a csökkentés mértéke $(1 - \frac{\delta}{m\gamma})$ egyáltalán nem függ a c vektortól.

13.1.2. Tétel. *Legyen az x^t és x^{t+1} a t -edik és a $(t+1)$ -edik iterációban előálló bázismegoldás. Ha $x^{t+1} \neq x^t$, akkor*

$$c^T x^{t+1} - z^* \leq (1 - \frac{\delta}{m\gamma})(c^T x^t - z^*). \quad (13.6)$$

Bizonyítás Legyen $x_{j_{MN}}^t$ a t -edik iterációban belépő változó. Ha $x_{j_{MN}}^{t+1} = 0$, akkor kapjuk, hogy $x^{t+1} = x^t$, ami ellentmondás. Tehát $x_{j_{MN}}^{t+1} \neq 0$, és ekkor $x_{j_{MN}}^{t+1} \geq \delta$ a (13.4) alapján. Ekkor

$$\begin{aligned} c^T x^t - c^T x^{t+1} &= \Delta^t x_{j_{MN}}^{t+1} \\ &\geq \Delta^t \delta \\ &\geq \frac{\delta}{m\gamma}(c^T x^t - z^*), \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség (13.5)-ből következik. A kívánt egyenlőtlenség könnyen jön a fenti egyenlőtlenségből. ■

Mivel ha a generáló elem kiválasztásának szabályát a legnagyobb csökkentés szabályára változtatjuk, akkor legalább annival csökken mindig az aktuális célfüggvényérték, így igaz az alábbi.

13.1.3. Következmény. Legyen x^t és x^{t+1} a t -edik és a $(t+1)$ -edik iterációban előálló bázisváltozók a legnagyobb csökkentés szabálya szerint. Ha $x^{t+1} \neq x^t$, akkor szintén adódik (13.6).

A 13.1.2 tételből és a 13.1.3 Következményből könnyen kaphatunk egy felső korlátot a különböző bázismegoldások darabszámára, amiket a szimplex módszer szolgáltat.

13.1.4. Következmény. Legyen \bar{x} egy második legjobb értékű bázismegoldása a(13.1) feladatnak (tehát legjobb az optimális bázismegoldásokat leszámítva). Ha a szimplex módszert a legnegatívabb, vagy legnagyobb csökkentés elve szerint alkalmazzuk a(13.1) feladatra az x^0 induló alapmegoldásból, akkor legfeljebb

$$\left[m \frac{\gamma}{\delta} \log \left(\frac{c^T x^0 - z^*}{c^T \bar{x} - z^*} \right) \right]$$

különböző bázismegoldással találkozhatunk.

Bizonyítás Legyen x^t a szimplex módszer t -edik iterációjának bázismegoldása és legyen \tilde{t} az eddig az iterációig megjelent különböző bázismegoldások száma. Ekkor

$$c^T x^t - z^* \leq \left(1 - \frac{\delta}{m\gamma} \right)^{\tilde{t}} (c^T x^0 - z^*)$$

adódik (13.6)-ból. Ha \tilde{t} nem kisebb, mint a következményben szereplő szám, akkor egyszerűen kapjuk, hogy

$$c^T x^t - z^* < c^T \bar{x} - z^*.$$

Mivel \bar{x} a második legjobb bázismegoldása (13.1)-nek, x^t az előző egyenlőtlenség szerint csak optimumhely lehet. ■

Megjegyezzük, hogy a következményben szereplő korlát függ a célfüggvénytől. A sikeres diszkusszióhoz, mutatunk egy újabb korlátot, ami már független a célfüggvénytől.

A következő Lemma azt állítja, hogyha a jelenlegi megoldás nem optimális, akkor létezik olyan bázisváltozó, amely változásának arányát felülről lehet becsülni az aktuális célfüggvényérték és az optimumérték különbségéből képzett hányados egy konstansszorosával.

13.1.5. Lemma. Legyen x^t a t -edik iteráció bázismegoldása. Ha x^t nem optimális, akkor létezik $\bar{j} \in B^t$, hogy $x_{\bar{j}}^t > 0$ és

$$s_{\bar{j}}^* \geq \frac{1}{m x_{\bar{j}}^t} (c^T x^t - z^*),$$

ahol s^* egy optimális különbségváltozó vektora (13.2)-nek. Ekkor minden k esetén a k -edik iterált x^k -ra teljesül:

$$x_{\bar{j}}^k \leq \frac{m(c^T x^k - z^*)}{c^T x^t - z^*} x_{\bar{j}}^t.$$

Bizonyítás Mivel

$$c^T x^t - z^* = (x^t)^T s^* = \sum_{j \in B^t} x_j^t s_j^*,$$

létezik $\bar{j} \in B^t$, ami kielégíti az

$$s_{\bar{j}}^* x_{\bar{j}}^t \geq \frac{1}{m} (c^T x^t - z^*),$$

egyenlőtlenséget, vagy $x_{\bar{j}}^t > 0$ és

$$s_{\bar{j}}^* \geq \frac{1}{m x_{\bar{j}}^t} (c^T x^t - z^*).$$

Továbbá, minden k -ra a k -adik iterált x^k teljesíti a következőt

$$c^T x^k - z^* = (x^k)^T s^* = \sum_{j=1}^n x_j^k s_j^* \geq x_{\bar{j}}^k s_{\bar{j}}^*,$$

ahonnan adódik, hogy

$$x_{\bar{j}}^k \leq \frac{c^T x^k - z^*}{s_{\bar{j}}^*} \leq \frac{m(c^T x^k - z^*)}{c^T x^t - z^*} x_{\bar{j}}^t.$$

■

13.1.6. Lemma. *Legyen x^t a simplex módszer t -edik iterációjának bázismegoldása. Tegyük fel, hogy x^t nem optimális megoldás. Ekkor létezik $\bar{j} \in B^t$, amire fennáll az alábbi két feltétel:*

1. $x_{\bar{j}}^t > 0$.
2. *Ha a simplex módszer $\lceil m \frac{\gamma}{\delta} \log(m \frac{\gamma}{\delta}) \rceil$ különböző bázismegoldást szolgáltat a t -edik iterációt követően, akkor $x_{\bar{j}}^k$ 0-vá válik és az is marad az algoritmus végéig.*

Bizonyítás Minden $k \geq t + 1$ esetén legyen \tilde{k} a t -edik és a k -adik iteráció között előálló különböző bázismegoldások száma. Ekkor a 13.1.2 tételből és a 13.1.5 Lemma szerint létezik $\bar{j} \in B_t$, amire

$$x_{\bar{j}}^k \leq m \left(1 - \frac{\delta}{m\gamma}\right)^{\tilde{k}} x_{\bar{j}}^t \leq m\gamma \left(1 - \frac{\delta}{m\gamma}\right)^{\tilde{k}}$$

teljesül. A második egyenlőtlenség a (13.4)-ből jön. Így aztán ha $\tilde{k} > m \frac{\gamma}{\delta} \log(m \frac{\gamma}{\delta})$, akkor kapjuk, hogy $x_{\bar{j}}^k < \delta$, amiből pedig $x_{\bar{j}}^k = 0$ adódik δ definíciója alapján. ■

A 13.1.6 Lemmában leírt esemény legfeljebb egyszer következhet be minden egyes változó esetén. Innen adódik a következő eredmény:

13.1.7. Tétel. *Amikor alkalmazzuk a simplex módszert (mint eddig is vagy a legnegatívabb vagy a legnagyobb csökkentés szabállyal) (13.1)-re és kapunk optimális megoldást, legfeljebb $n \lceil m \frac{\gamma}{\delta} \log(m \frac{\gamma}{\delta}) \rceil$ különböző bázismegoldás fordulhat elő.*

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény akkor is igaz, ha a szimplex módszer ciklizál, vagyis nem talál optimális megoldást.

Ha a primál probléma nem degenerált, akkor minden t -re kapjuk, hogy $x^{t+1} \neq x^t$. Ez a megfigyelés vezet a szimplex módszer iterációi számának becsléséhez.

13.1.8. Következmény. *Ha a primál feladat nem degenerált, akkor a szimplex módszer legfeljebb $n \lceil m^{\frac{\gamma}{\delta}} \log(m^{\frac{\gamma}{\delta}}) \rceil$ lépésben talál egy optimális megoldást.*

13.2. A totálisan unimoduláris mátrixú LP esete

Tegyük fel, hogy a (13.1) feladatban szereplő A mátrix totálisan unimoduláris, valamint a b egy egész vektor. Egy A mátrixot akkor nevezünk totálisan unimodulárisnak, ha minden nem szinguláris négyzetes részmatrixának determinánsa 1 vagy -1. Ekkor a bázismegoldások egész vektorok, tehát $\delta \geq 1$. Keressünk korlátot γ -ra! Legyen $(x_B, 0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ egy lehetséges bázismegoldása (13.1)-nek. Ekkor $x_B = A_B^{-1}b$. Mivel az A totálisan unimoduláris, az A_B^{-1} összes eleme 1 vagy 0. Ebből következik, hogy minden $j \in B$ esetén $x_j \leq \|b\|_1$, amiből következik, $\gamma \leq \|b\|_1$. A 13.1.8. tétel szerint kapjuk a következőt.

13.2.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy (13.1)-ben A totálisan unimoduláris és a b egész. Ha a szimplex módszerrel megoldjuk (13.1)-et, akkor legfeljebb $n \lceil m \|b\|_1 \log(m \|b\|_1) \rceil$ különböző bázismegoldással találkozunk.*

13.3. Alkalmazás a Markov Döntési Problémára

A Markov Döntési Folyamatok a hosszú távú sztochasztikus dinamikus programozási feladatokat jelentik. Egy állapottérben ha hozunk egy döntést, akkor egy újabb állapotba kerülünk és mindezért az átmenetért jár egy bizonyos *jutalom*. Minden következő állapotnak adott egy átmeneti valószínűsége. A fő kérdés az, hogy hosszú távon milyen stratégiával döntsünk az előálló helyzetekben. A régmúlttól már nem függ semmi, mindig csak az adott helyzettől. Az összjutalom akár végtelen is lehetne, ezért diszkontálnak (pl. θ -szoros pénzromlást feltételeznek). Ha állandó stratégiát követünk, vagyis az időponttól nem függőt, akkor az optimális stratégia meghatározásának egyik módszere lineáris programozás alkalmazása, erre utal az alábbi rövid megállapítás az (MDP)-ről. Erről a gazdaságban nagyon fontos területről bővebben tájékozódhatunk pl. a [27], [43], [48] könyvekből. A Markov Döntési Probléma (MDP), melyben kétféle akciót engedünk meg a következő

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^T x_1 + c_2^T x_2, \\ \text{feltéve, hogy} \quad & (E_1 - \theta P_1)x_1 + (E_2 - \theta P_2)x_2 = e, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{13.7}$$

ahol E_i $m \times k$ méretű mátrix, amelynek i -edik sora csupa 1, egyébként 0, a P_1 és P_2 $m \times k$ méretű oszlop sztochasztikus mátrixok, θ a diszkontráta, és e a csupa 1-ből álló vektor. MDP(13.7) rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1. MDP(13.7) nem degenerált.
2. A bázismegoldások összes pozitív változóinak értéke legalább egy, tehát $\delta \geq 1$.
3. A bázisváltozók pozitív komponenseinek maximuma legfeljebb $\frac{m}{1-\theta}$, tehát, $\gamma \leq \frac{m}{1-\theta}$.

Alkalmazva a 13.1.8. Következmenyt kapunk egy Y_e [55] eredményéhez hasonló.

13.3.1. Következmeny. Az MDP (13.7)-ot simplex módszerrel megoldva legfeljebb $n \lceil \frac{m^2}{1-\theta} \log \frac{m^2}{1-\theta} \rceil$ lépésben optimális megoldást kapunk, ahol $n = 2m$.

14. fejezet

Szakirodalom

Hasznos oktatási anyagok találhatóak:

<http://www.cs.elte.hu/lovasz/>
<http://www.cs.elte.hu/opres/index2.html>
<http://compalg.inf.elte.hu/tony/Oktatas/>
<http://www.cs.bme.hu/recski/oktatas/index.html>
<http://www.math.bme.hu/hujter/ok.htm>
<http://www.inf.u-szeged.hu/pluhar/>
<http://www.inf.u-szeged.hu/cimreh/okt.htm>
<http://www.inf.u-szeged.hu/csendes/>
<http://www.inf.u-szeged.hu/pszabo/konyvek.htm>
<http://www.tygotex.hu/konyv/>

Irodalomjegyzék

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, (Addison-Wesley, Reading (MA) 1974).
- [2] M. L. Balinski and R. E. Gomory. A mutual primal-dual simplex method. In R. L. Graves and P. Wolfe, editors, *Recent Advances in Mathematical programming*. McGraw-Hill, New York, 1963.
- [3] E. M. L. Beale. Cycling in the dual simplex algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2:269–75, 1955.
- [4] C. Busch, R. Kannan *Bicriteria Optimization in Routing Games* CoRR abs 0801.4851: (2008)
- [5] Blázsik, Z., B. Imreh, A note on connection between PNS and set covering problems, *Acta Cybernetica*, **12**, 1996, 309-312.
- [6] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Explicit bound for the number of feasible solutions of special PNS-problem classes, *Pure Mathematics and Applications*, **9**, 1998, 17-27.
- [7] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács, On a well-solvable class of the PNS problem, *Novi Sad Journal of Mathematics*, **3**, 2000, 21-30.
- [8] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács, On Bottleneck and k-sum version of the Process Network Synthesis Problem, *Novi Sad Journal of Mathematics* **3**, 2000, 11-19.
- [9] Blázsik, Z., Cs. Holló, Cs. Imreh, Z. Kovács, Heuristics for the Process Network Synthesis Problem, *New Trends in Equilibrium Systems, Mátraháza Optimization Days*, Kluwer Academic Publishers, 2000, 1-16.
- [10] Blázsik, Z., K. Keserű, Z. Kovács, Heuristics for simplified Process Network Synthesis problems with a Blossom-type Algorithm for the edge covering problem, *Optimization Theory: Recent Developments from Matrahaza*, (eds.: F. Giannessi, P. Pardalos, T. Rapcsák), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001, 19-31.
- [11] Chvátal, Linear programming. A Series of Books in the Mathematical Sciences. *W. H. Freeman and Company*, New York, 1983.

- [12] G. B. Dantzig: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [13] J. Egerváry, *Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól* Matematikai és Fizikai Lapok, **38**, 16-28 (1931)
- [14] J. Egerváry, *Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására* A Matematikai Kutató Intézet közleményei, IV./1. 15-28 (1958)
- [15] D. König, *Graphok és matrixok* Matematikai és Fizikai Lapok, **38** 116-119 (1931)
- [16] R. Fletcher. Degeneracy in the presence of roundoff errors. *Linear Algebra and its Applications*, 106:149–183, 1988.
- [17] R. Fletcher. Resolving degeneracy in quadratic programming. *Annals of Operations Research: degeneracy in optimization problem*, 47:307–334, 1993.
- [18] R. Fletcher and J. A. J. Hall. Towards reliable linear programming. In G. A. Watson and D. F. Griffiths, editors, *Pitman Research Notes in Mathematics Series 228*, pages 89–104. Longman Scientific and Technical, 1990.
- [19] Floudas, C. A., I. E. Grossmann, Algorithmic Approaches to Process Synthesis: Logic and Global Optimization, AiChE Symposium Series No. 304, **91** (Eds: L. T. Biegler and M. F. Doherty), (1995), 198-221.
- [20] J. J. H. Forrest and J. A. Tomlin. Implementing the simplex method for the Optimization Subroutine Library. *IBM Systems Journal*, 31(1):11–25, 1995.
- [21] Friedler, F., K. Tarján, Y. W. Huang, and L. T. Fan, Graph-Theoretic Approach to Process Synthesis: Polynomial Algorithm for maximal structure generation, *Computer chem. Engng.* **17**, 1993, 924-942.
- [22] Friedler, F., J. B. Varga, and L. T. Fan, Decision-Mappings: A Tool for Consistent and Complete Decisions in Process Synthesis, *Chem. Eng. Sci.*, **50** (11), 1995, 1755-1768.
- [23] Friedler, F., J.B. Varga, E. Fehér, and L.T. Fan, Combinatorially Accelerated Branch-and-Bound Method for Solving the MIP Model of Process Network Synthesis, International Conference on State of the Art in Global Optimization: Computational Methods and Applications, Princeton, 1995.
- [24] Friedler, F., J. Fülöp, B. Imreh, On the reformulation of some classes of PNS-problems as set covering problems, *Acta Cybernetica*, **13**, 1998, 329-337.
- [25] P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders, and M. H. Wright. A practical anti-cycling procedure for linearly constrained optimization. *Math. Prog.*, 45:437–474, 1989.
- [26] D. Goldfarb and J. K. Reid. A practical steepest-edge simplex algorithm. *Math. Prog.*, 12:361–371, 1977.

- [27] R. Howard, *Dynamic programming and Markov processes* Cambridge, Mass.:MIT Press, 1960
- [28] Bajalinov, E., Imreh B., *Operációkutatás*, POLYGON Kiadó, Szeged, 2001.
- [29] B. Imreh, Cs. Imreh *Kombinatorikus optimalizálás* Novadat, Győr, 2005.
- [30] Hall JAJ, McKinnon KIM, *The simplex examples where the simplex method cycles and conditions where EXPAND fails to prevent cycling* Mathematical Programming 2004; 100 (1): 133-50.
- [31] T. Kitahara, S. Mizuno, *A bound for the number of different basic solutions generated by the simplex method for an LP with bounded variables*, Technical paper.
- [32] V. Klee and G. J. Minty "How good is the simplex algorithm?" In Shisha, Oved. *Inequalities III* (Proceedings of the Third Symposium on Inequalities held at the University of California, Los Angeles, Calif., September, dedicated to the memory of Theodore S. Motzkin). New York-London: Academic Press. pp. 159-175. MR332165, 1972.
- [33] E. L. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, (Holt, Rinehard and Winston, New York 1976).
- [34] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1979. A magyar nyelvű változat: *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex kiadó, 1999.
- [35] R. L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, *Handbook of Combinatorics*, (Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1995).
- [36] L. Lovász and M. D. Plummer, *Matching Theory*, (Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1986).
- [37] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, *Geometric algorithms and combinatorial optimization* Springer, Berlin, 1988
- [38] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, (John Wiley & Sons, New York 1998).
- [39] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization – Theory and Algorithms*, (Springer, Heidelberg 2000).
- [40] J. Oxley, *Matroid theory*, Oxford University Press, New York, NY, USA, 1992.
- [41] Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid, *Rendszeroptimalizálás*, Typotex; 2004
- [42] A. Schrijver, *Combinatorial optimization: Polyhedra and efficiency*, Springer, 2003.
- [43] Cs. Szepesvary, *Algorithms for Reinforcement Learning (Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning)* Morgan & Claypool Publishers, 2010.

- [44] T. H. Cormen, S. Clifford, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest, *Introduction to Algorithms*, (MIT Press, Cambridge (USA) 2001).
- [45] J.B. Orlin, S.A. Plotkin, and E. Tardos, *Polynomial Dual Network Simplex Algorithms*, *Mathematical Programming* 60, 255-276, 1993
- [46] R. Sedgewick, *Algorithms in C*, (Addison-Wesley, Reading (MA) 1990).
- [47] Robert J. Vanderbei: *Linear programming: Foundations and extensions*, Kluwer Academic Publishers Boston/London/Dordrecht, 1997.
- [48] Wayne L. Winston: *Operációkutatás – Módszerek és alkalmazások 1-2*. Aula Kiadó Kft.,2003
- [49] D. Welsh, *Matroid theory*, Academic Press, Inc., 1976.
- [50] P. Wolfe. A technique for resolving degeneracy in linear programming. *SIAM Journal Appl. Math.*, 11:205–211, 1963.
- [51] Andras Frank, *Connections in Combinatorial Optimization* Oxford University Press, 2011.
- [52] Peter Zörnig, *Systematic construction of examples for cycling in the simplex method* *Computers & Operations Research* 33 (2006) 2247-2262
- [53] Y. Ye, *A new complexity result on solving the Markov decision problem* *Mathematics of Operations Research*, **30**:3 (2005), 733-749.
- [54] Y. Ye, *The simplex method is strongly polynomial for the Markov decision problem with a fixed discount rate* Technical paper
- [55] Y. Ye, *The Simplex Method is Strongly Polynomial for the Markov Decision Problem with a Fixed Discount Rate*