Denkinger Géza

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI GYAKORLATOK

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

TARTALOMJEGYZÉK

ELŐSZÓ

Ez a könyv a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem I. év 2. félévében oktatott valószínűségszámítási tananyagához készült. Így érthető, hogy elsősorban gazdasági jellegű feladatok kaptak benne nagyobb helyet. Ezenkívül sok olyan feladatot is tartalmaz, amely a tananyag apróbb „finomságainak" észrevételét kívánja elősegíteni, továbbá olyanokat is, amelyek a begyakorlást és az anyag rögzítését szolgálják. A feladatok többségének részletes megoldása is szerepel a könyvben – ez elsősorban az esti és levelező úton tanulók munkáját könnyíti meg –, de arra is alkalmas, hogy önálló megoldások ellenőrzésekor újabb összefüggésekre, más módszerekre is felhívja a figyelmet.

A feladatok megoldásához előismeretként csak az első félévben oktatott analízis tananyagot feltételezzük — a középiskolai tananyagon kívül.

A könyv a feladatokat az egyes fejezetekben, ill. témakörökben nagyjából nehézségi sorrendben tartalmazza. Így a feladatok megoldása során sokszor célszerű az előző feladatokra is visszatekinteni, hátha kapunk belőle ötletet a többi feladat megoldásához. A numerikus „végeredmények" kiszámítására — hacsak lehet — használjuk a könyv végén közölt táblázatokat is.

Remélem, hogy a könyvben alkalmazott módszer hatékonyan elősegíti a valószínűségszámítási tananyag elsajátítását.

Végül köszönetet mondok a könyv lektorainak, Bikics Istvánné dr. egyetemi docensnek és dr. Matits Ágnes egyetemi tanársegédnek, akik már a könyv megírása során is segítségemre voltak hasznos észrevételeikkel és tanácsaikkal. Köszönetemet fejezem ki Moldoványi Gyula szerkesztőnek és az Egyetemi Nyomda dolgozóinak, akik a könyv áttekinthetőségének és magas nyomdatechnikai követelményeinek megvalósításával járultak hozzá a könyv használhatóbbá tételéhez.

Budapest, 1977. szeptember *Dr. Denkinger Géza*

I. KOMBINATORIKA

1. Permutációk, kombinációk, variációk

1. Írjuk fel a lexikografikus elrendezés szabályai szerint az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek 3, 5, 4, 6, 1, 2 permutációja után következő tíz permutációt.

2. Az 1, 2, 3, 4, 5 elemeknek hány olyan permutációja van, amelynek harmadik jegye 1-es? Írjuk fel őket.

3. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számjegyekből készíthető nyolcjegyű számok közül hány kezdődik 125-tel?

4. Hány olyan permutációja van az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 elemeknek, amelyben az első három helyet a 6, 7, 8 elemek foglalják el valamilyen sorrendben, s az utolsó helyen az 5-ös áll?

5. Hány ötjegyű páratlan szám készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből?

6. A 0, 1, 2, 3, 4 számjegyekből hány ötjegyű szám készíthető? Ezek között hány olyan szám van, amelyben a 0 a második helyen szerepel?

7. Hányféleképpen lehet 8 gépre 8 munkást elosztani, ha az első gépre csak két munkás jöhet számításba?

8. Hányféleképpen lehet egy kerek asztal körül 20 embert elhelyezni, ha közülük kettő okvetlenül egymás mellé akar kerülni?

9. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett 3 férfi és 4 nő úgy, hogy a férfiak és nők felváltva következzenek egymás után?

10. Hányféleképpen foglalhat helyet egymás mellett 4 férfi és 4 nő úgy, hogy a férfiak és nők felváltva következzenek egymás után?

11. Egy dobozban 20 darab gépalkatrész van. Ezek között 5 selejtes. Hányféleképpen vehetjük ki egyenként mind a 20 darab alkatrészt úgy, hogy a selejteseket utoljára vesszük ki?

12. Adott a síkon n pont. Ezek között nincs három olyan, amely egy egyenesre esne. Valamelyik pontból kiindulva, az egyes pontokat egyenes szakaszokkal összekötve, zárt n-szögeket rajzolunk. Hány különböző n-szöget kaphatunk?

13. Határozzuk meg az 1, 2, 2, 3, 3, 3 elemek permutációinak számát. Ezek között hány olyan van, amelyben az első helyen a 2 számjegy áll?

14. Az 1-es és 2-es számjegyek felhasználásával hány olyan nyolcjegyű számot készíthetünk, amelyben az 1-esek száma egyenlő a 2-esek számával?

15. A *KOMBINATORIKA* szó betűinek hány permutációja van?

16. Az 1, 1, 2, 2, 3, 3 számjegyekből hány olyan hatjegyű szám készíthető, amely 12-vel kezdődik?

17. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből úgy készítünk tízjegyű számokat, hogy minden számjegyet kétszer felhasználunk. Ezek közül hány kezdődik 135-tel?

18. Hány hatjegyű, páros szám alkotható a 2, 2, 3, 5, 6, 6 számjegyekből?

19. Hányféle sorrendben húzhatunk ki egy dobozból 5 fehér és 4 fekete golyót, ha csak azokat a húzásokat tekintjük különbözőknek, amelyekben a színek más sorrendben következnek?

20. Hány ötjegyű szám készíthető a 0, 1, 1, 3, 3 számjegyekből? Írjuk fel őket.

21. Hány nyolcjegyű szám készíthető a 0, 0, 0, 3, 3, 3, 4, 4 számjegyekből?

22. Mutassuk meg, hogy

$$(n!)^2=(n-1)![(n+1)!-n!].$$

23. Igazoljuk, hogy ha $k\geqq 1$ és egész szám, akkor fennáll a

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot k!}$$

egyenlőség.

24. Mutassuk meg, hogy minden $n\geqq 1$ egész számra igaz az

$$n!=(n-1)(n-1)!+(n-2)(n-2)!+\ldots+1\cdot 1!+1$$

egyenlőség.

25. Legyen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy tetszőleges permutációja. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i-i)=(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$$

szorzat páros szám, ha az n páratlan.

26. Írjuk fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemek összes negyedosztályú kombinációit.

27. Adott a térben 10 pont, ezek között nincs három olyan, mely egy egyenesre esne. Hány egyenest határoznak meg az egyes pontpárok?

28. Hány átlója van egy konvex n-szögnek?

29. Hány pontban metszi egymást a síkban fekvő n egyenes, feltéve, hogy csak két-két egyenes metszi egymást egy pontban, és az egyenesek között

a) nincsenek párhuzamosak;

b) az egyenesek között k számú párhuzamos $(2\leqq k<n)$;

c) ha $n-1$ egyenes párhuzamos?

30. Egy pályázatra 10 pályamunka érkezett, és 6 egyenlő díj van. Hányféleképpen lehet a díjakat kiadni, ha a díjak felezése vagy más megosztása tilos?

31. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 elemeknek hány negyedosztályú kombinációja nem tartalmazza az 1, 2, 3 elemek mindegyikét?

32. A vakok részére szerkesztett írás a következőképpen készül. Kartonpapírra előrenyomott téglalaphálózat egyes téglalapjaiba lyukakat szúrnak. A lyukak száma 1-től 6-ig terjedhet, mégpedig minden téglalapban, egymás alatti 3-szor 2 hely megfelelő pontjain való kiszúrással. Az így kapott jeleket a vakok ujjaikkal kitapintva „olvassák". Hányféle jel készülhet így?

33. Egy gyár 4 férfi és 4 női munkást akar felvenni. A felvételre 5 férfi és 8 nő jelentkezett. Hányféleképpen választhatják ki a felveendő munkásokat?

34. Egy dobozban 1-től 20-ig számozott, 20 darab gépalkatrész van. Hányféleképpen vehetünk ki öt alkatrészt úgy, hogy közöttük legyen három meghatározott sorszámú alkatrész?

35. 100 csavar közül, amelyek között 10 db selejtes, kiválasztunk 5-öt.

a) Hányféleképpen lehetséges ez?

b) Hány olyan eset van, melyben a kiválasztottak mind hibátlan csavarok?

c) Hány olyan választás létezik, melyben 3 csavar jó és 2 selejtes?

36. 100 láda őszibarackból 75 láda *A* minőségű, 25 láda *B* minőségű. Hányféleképpen vehetünk olyan 12 ládás mintát, hogy e mintában a *B* minőségű áru a 30%-ot ne haladja meg?

37. Tizenkét tanuló három csónakot bérel. Az egyik csónak 3 üléses, a másik 4, a harmadik pedig 5 üléses.

a) Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?

b) Hányféleképpen foglalhatnak helyet, ha két tanuló feltétlenül egy csónakba akar kerülni?

38. Hány olyan négyjegyű, különböző számjegyekből álló szám van, amelyben két páros és két páratlan jegy szerepel?

39. Hány olyan hatjegyű szám van, melynek jegyei mind különbözők, s amelyben négy páratlan számjegy szerepel?

40. Hányféleképpen olvasható ki a következő táblázatból a *KÖZGAZDÁSZ* szó ha a táblázat bal felső betűjéből indulunk, és az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

K Ö Z G A Z
Ö Z G A Z D
Z G A Z D Á
G A Z D Á S
A Z D Á S Z

41. Egy adott munkára a műhely dolgozói közül 4-et választanak ki. Az összes választási lehetőségek száma 4845. Hány dolgozó van a műhelyben?

42. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

a) $\binom{x+1}{4}+\binom{x}{4}=\binom{x}{2}2!;$

b) $\binom{2x+3}{2x-2}=4!\binom{2x+2}{3}.$

43. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$4\binom{19}{x}=19\binom{17}{x}.$$

44. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak a társaságban?

45. Három egyszínű kockával dobva három számjegyből álló „dobáshármast" kapunk. Hányféle eredmény adódhat?

46. 5 doboz mindegyikében 12 darab, 1-től 12-ig számozott gépalkatrész van. Hányféleképpen vehetünk ki minden dobozból egy-egy alkatrészt, ha a kivett alkatrészek sorrendjére nem vagyunk tekintettel?

47. n pénzérmét dobunk fel egyszerre. Hányféle fej-írás kombináció jöhet létre, ha az egyes érméket nem tudjuk egymástól megkülönböztetni?

48. Állapítsuk meg, hogy a hatványozás és az összevonások után hány tagú lesz a következő kifejezés:

$$(x-2y+3z)^6.$$

49. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

$$a)\ \frac{V_n^5+V_n^4}{V_n^2}; \qquad b)\ \frac{V_n^{k+2}+V_n^{k+1}}{V_n^k}.$$

50. Hány háromjegyű számot készíthetünk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, ha minden szám csak egymástól különböző számjegyeket tartalmazhat?

51. Hány háromjegyű szám készíthető a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből? (Mindegyiket csak egyszer használhatjuk föl.)

52. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelyben a számjegyek nem ismétlődhetnek?

53. 20 munkásból 15-öt kell futószalag mellé állítani. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a futószalaghoz állítás sorrendjét is figyelembe vesszük a lehetőségek összeszámolásakor?

54. 10 munkahely mindegyikére kell küldenünk egy szakmunkást és vele egy segédmunkást. Hányféleképpen lehetséges ez, ha a vállalat 10 szakmunkással és 12 segédmunkással rendelkezik?

55. Hányféleképpen ültethetünk egy padra 5 fiú és 4 lány közül öt személyt úgy, hogy két fiú vagy két lány ne kerüljön egymás mellé?

56. Egy dobozból, amelyben 8 piros és bizonyos számú fehér, számozott golyó van, egymás után, visszatevés nélkül 1280-féleképpen húzható ki három golyó úgy, hogy két piros vagy két fehér golyó ne következzék egymás után. Hány fehér golyó van a dobozban?

57. Lehetséges-e, hogy n elem permutációinak száma egyenlő ugyanezen elemek valahányad osztályú ismétlés nélküli variációinak számával?

58. Írjuk fel az 1, 2 elemek összes negyedosztályú ismétléses variációit.

59. Hány olyan harmadosztályú ismétléses variáció készíthető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával, melynek első jegye 1-es? Írjuk fel őket.

60. Az 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával, ismétlődést is megengedve, hány kétjegyű, hány háromjegyű, hány hatjegyű számot állíthatunk elő?

61. Hány ötjegyű szám írható fel a 0, 1, 2 számjegyek felhasználásával? (Mindegyik számjegy akárhányszor szerepelhet.)

62. Csupa páros számjegyből hány négyjegyű szám állítható elő?

63. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyikben négy páros és egy páratlan számjegy szerepel?

64. Pontból és vonásból (· és –) hány, legfeljebb négyelemű jel állítható össze? (Miért kell a Morse-féle jelrendszerben a számokat 5 jellel írni?)

65. A 32 lapú kártyacsomagból egymás után kihúzunk négy lapot. Hányféleképpen lehetséges ez? Hányféleképpen húzhatunk négy lapot úgy, hogy a már kihúzottat a húzás után visszatesszük?

66. Magyarországon az autórendszám készítéséhez 25 betűt és 10 számjegyet használnak. Egy rendszámtáblán 2 betű, majd 4 számjegy szerepel. Hány autót lehet így megkülönböztetni?

67. Az *ABCDEF* elemeknek hány olyan negyedosztályú ismétléses variációja van, amely az *A* és a *B* elemet egyaránt tartalmazza?

68. Hány olyan $n \geqq 3$ jegyű szám van, amely csak az 1, 2, 3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

69. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával hány olyan négyjegyű szám írható fel, amelyben két különböző páros és két különböző páratlan számjegy szerepel?

70. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan négyjegyű szám írható fel, amelyek mindegyike három különböző jegyet tartalmaz?

71. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek felhasználásával hány olyan négyjegyű szám írható fel, amely két különböző páros és két különböző páratlan számjegyet tartalmaz?

72. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemekből alkotható négyjegyű számok között hányban fordul elő az 1-es és a 2-es szám, ha minden számjegyet legfeljebb egyszer használhatunk az egyes négyjegyű számok felírásához.

73. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány olyan háromjegyű számot állíthatunk elő, amelyben minden számjegy különböző? Ezek közül hány kezdődik 12-vel? Hány olyan szám van köztük, amelyben az első helyen 4-es és az utolsó helyen 1-es áll?

74. Az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből hány négyjegyű számot állíthatunk elő

a) egy számjegy felhasználásával;

b) két különböző számjegy felhasználásával;

c) három különböző számjegy felhasználásával;

d) négy különböző számjegy felhasználásával?

75. Az *ABCDEF* elemeknek hány olyan negyedosztályú variációja van, amelyik az *A* és *B* elemek közül legalább az egyiket tartalmazza?

76. Hányféleképpen oszthatunk ki 32 kártyát négy játékos között úgy, hogy minden játékos 8 kártyát kapjon?

77. Egy szervizüzem 12 dolgozója közül 4 munkahelyre kell kiküldeni két-két dolgozót. Hányféleképpen lehetséges ez?

78. Hány olyan nyolcjegyű szám létezik, amelyben csak két számjegy szerepel?

79. Egy üzemben n dolgozót jutalmaznak meg úgy, hogy mindegyiknek egy-egy terméket ajándékoznak a gyárban készített 10-féle termék közül. Hányféleképpen lehet a dolgozókat megjutalmazni? (Minden termékből van annyi, hogy akár minden dolgozó ugyanolyan terméket kapjon.)

80. Mekkora az 1 és 2 számjegyekkel felírható ötjegyű számok összege?

81. Mekkora az 1, 2, ..., n számjegyek $(1 \leqq n \leqq 9)$ permutációi által alkotott n-jegyű számok összege?

82. Hányféleképpen osztható szét 5000 Ft jutalom három dolgozó között, ha 1000 Ft-nál kevesebbet egyik sem kaphat, és mindegyik jutalom százasokra kerekített összeg?

83. Hányféleképpen készíthetünk az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz elemeiből $2n$ elemű, egymástól különböző monoton sorozatokat?

2. A binomiális tétel. A binomiális együtthatók tulajdonságai

84. A binomiális tétel felhasználásával alakítsuk polinommá az

$$(x^2-2)^6$$

kifejezést.

85. Végezzük el a következő hatványozásokat a binomiális tétel segítségével:

a) $(2a+3b)^5$; *b)* $(a-\sqrt{a})^4$;

c) $\left(x-\dfrac{x}{2y}\right)^6$; *d)* $(1\pm\sqrt{3})^5$.

86. Számítsuk ki az $1{,}02^{10}$ és $0{,}98^{10}$ hatványokat négy tizedesjegynyi pontossággal.

87. Alakítsuk polinommá a következő kifejezést:

$$f(p, q)=\frac{1}{2}\left[(q+p)^n+(q-p)^n\right].$$

88. Számítsuk ki $(x+y+z)^8$ kifejtésében az $x^2y^3z^3$ együtthatóját.

89. Az $(1+\sqrt{2})^n$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének harmadik tagja 110. Mekkora a kifejtés utolsó előtti tagja?

90. Számítsuk ki a

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^n$$

hatványkitevőjét, ha a harmadik tagban $\sqrt{x^5}$ szerepel.

91. Határozzuk meg, van-e állandó tagja az

$$\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$$

hatvány binomiális tétel szerinti kifejtésének, ha ebben az ötödik tag együtthatója háromszorosa a negyedik tag együtthatójának.

92. Állapítsuk meg, milyen n mellett van konstans tagja az

$$\left(\frac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^n$$

kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének.

93. Az

$$\left(\sqrt[5]{3x^4}+\frac{1}{\sqrt[4]{5x^3}}\right)^n$$

binom kifejtésének 17. tagja állandó. Mekkora a kitevő?

94. Az $(1+x)^n$ hatvány kifejtésében a 10. és 11. tag hányadosa $\frac{1}{2}$. Az ötödik tag a negyedik tag 11-szerese. Mekkora az x és az n?

95. Az $(a+b)^n$ kifejtésében a második, harmadik és negyedik tag együtthatója számtani sorozatot alkot. Mekkora az n kitevő?

96. Igazoljuk, hogy $\binom{p}{k}$ mindig osztható p-vel, ha $0<k<p$, és a p prímszám.

97. Legyen p prímszám és n tetszőleges pozitív egész szám. Bizonyítsuk be n szerinti teljes indukcióval, hogy az

$$n^p-n$$

szám mindig osztható p-vel. (Ez az ún. kis Fermat-tétel.)

98. Határozzuk meg a következő összegeket:

a) $3\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+\ldots+3^n\binom{n}{n}=S_1;$

b) $\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{1}+\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n}{2}-\ldots+1=S_2;$

c) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^{n-2k}=S_3.$

99. Bizonyítsuk be az

$$(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$$

azonosság felhasználásával az

$$\binom{m+n}{k}=\binom{m}{0}\binom{n}{k}+\binom{m}{1}\binom{n}{k-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{k-2}+\ldots+\binom{m}{k}\binom{n}{0}$$

egyenlőséget, majd igazoljuk, hogy

$$\binom{2n}{n}=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2.$$

100. Bizonyítsuk be a binomiális együtthatók következő tulajdonságait:

a) $$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots;$$

b) $$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1};$$

c) $$\binom{n}{0}\binom{n}{k}-\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}-\ldots+(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}=0.$$

101. Állítsunk elő az $y=(1+x)^n$ függvény differenciálhányadosai segítségével képletet a következő összegekre:

a) $$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}\binom{n}{k};$$

b) $$\sum_{k=l}^{n}\binom{k}{l}\binom{n}{k}.$$

102. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}=\binom{m+n}{n};$$

b) $$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-2}+\ldots+\binom{n-k-1}{0};$$

c) $$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}+\ldots+\binom{k-1}{k-1};$$

d) $$\binom{m-1}{k-1}=\binom{m}{k}-\binom{m}{k+1}+\binom{m}{k+2}-\ldots+(-1)^{m-k}\binom{m}{m}.$$

103. Mutassuk meg, hogy fennáll a következő egyenlőség:

$$\sum_{i=0}^{N}\binom{n+i}{k}=\binom{N+n+1}{k+1}-\binom{n}{k+1},$$

majd ezt felhasználva számítsuk ki a következő összeget:

$$S=\sum_{k=0}^{N}(k+1)(k+2)\ldots(k+n).$$

104. Igazoljuk a következő egyenlőséget:

$$\sum_{j=n}^{N}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\binom{N}{j}=\begin{cases}1, & \text{ha} \quad n=N,\\ 0, & \text{ha} \quad n\neq N.\end{cases}$$

105. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra a következő kifejezést:

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}-2\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k-1}.$$

106. Igazoljuk, hogy $a>0$, $b>0$ esetén fennáll a
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lg a^{n-k}b^{k}=\lg (ab)^{n2^{n-1}}$$
egyenlőség.

107. Egy gépalkatrészt úgy készítenek el, hogy megfelelő nagyságú lemezdarabokba meghatározott méretű csavarmenetet vágnak, majd a lemez egyik oldalát sík felületűvé csiszolják. Az alkatrész hibás lehet a menet hibás elkészítése miatt, és akkor is, ha a csiszolt felület nem „tökéletesen" sík (azaz: a felületen levő egyenetlenségek nincsenek megfelelő tűréshatárokon belül).

Egy alkalommal 1000 db ilyen alkatrészt vizsgáltak meg. Az olyan alkatrészek száma, amelyekben a menet nem felelt meg az előírásoknak: 56 db volt. Az olyanok száma, amelyeknek csiszolása nem volt megfelelő: 104. Végül azok száma, amelyeken a menet is, csiszolás is hibás volt: 20 db.

Hány olyan alkatrész volt a halmazban, amely mindkét követelménynek megfelelt?

108. Legyen egy halmaz elemeinek száma n. Legyenek adottak különféle tulajdonságok, amelyeknek a halmaz elemei közül egyesek eleget tesznek. A tulajdonságokat jelöljük sorban az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ szimbólumokkal. Azoknak az elemeknek a számát, amelyek az A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ tulajdonságnak eleget tesznek, jelöljük n_i-vel. Azok számát, amelyek az A_i és A_j tulajdonságoknak egyszerre eleget tesznek, jelöljük n_{ij}-vel. Hasonlóképpen, n_{ijl} jelölje azoknak az elemeknek a számát, amelyek az A_i, A_j és A_l tulajdonságok mindegyikével rendelkeznek, és így tovább, végül $n_{12\ldots k}$ jelölje azok számát, melyek a felsorolt tulajdonságok mindegyikének eleget tesznek.

Bizonyítsuk be, hogy az olyan elemek N_k száma, amelyek az adott tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek:
$$N_k=n-\sum_{1\leq i\leq k} n_i+\sum_{1\leq i<j\leq k} n_{ij}-\sum_{1\leq i<j<l\leq k} n_{ijl}+\ldots\pm n_{12\ldots k}.$$

109. Az előző feladat feltételei mellett tegyük még fel, hogy az A_i tulajdonsággal rendelkező elemek n_i száma minden i-re ugyanakkora, tehát minden i-re: $n_i=m_1$. Hasonlóképpen az A_i és A_j tulajdonságokkal rendelkező elemek száma minden i-re és j-re $(i\neq j)$ szintén egyenlő, mégpedig $n_{ij}=m_2$, és így tovább. Végül legyen $n_{12\ldots k}=m_k$. Írjuk fel azt a képletet, amely e feltételek mellett megadja azoknak az elemeknek a számát, melyek az $A_1, A_1, \ldots, A_k$ tulajdonságokkal nem rendelkeznek.

110. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:
$$n!=n^n-\binom{n}{1}(n-1)^n+\binom{n}{2}(n-2)^n-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^n.$$

111. Legyen p prímszám. Bizonyítsuk be a 110. és 97. feladatban adott tételek felhasználásával, hogy
$$(p-1)!+1$$
mindig osztható p-vel. (Ez az ún. Wilson-tétel.)

112. Az

$$y=x(1+x)^n(1+2x)^n$$

szorzatot az x hatványai szerint rendezve, x^3 együtthatójául 203 adódik. Hányadfokú az adott függvény?

113. Az

$$y=(1+x)^n+x(1+x)^{n-1}+x^2(1+x)^{n-2}$$

polinom kifejtésében az összevonások elvégzése után x^3 együtthatója 83. Hányadfokú a polinom?

114. Az

$$y=(2+x)^n-506{,}5(1+2x)^{n+1}$$

polinom x hatványai szerint rendezett alakjában az x együtthatója -892. Mekkora az n?

115. Legyen $i=\sqrt{-1}$, és tekintsük az $(1+i)^{4n}$ hatványt. Igazoljuk ennek a binomiális tétel szerinti kifejtésével a következő egyenlőségeket:

a) $$1-\binom{4n}{2}+\binom{4n}{4}-\binom{4n}{6}+\ldots+\binom{4n}{4n}=(-1)^n4^n;$$

b) $$\binom{4n}{1}-\binom{4n}{3}+\binom{4n}{5}-\ldots-\binom{4n}{4n-1}=0.$$

116. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket:

a) $$1-\binom{8n}{2}+\binom{8n}{4}-\binom{8n}{6}+\ldots+\binom{8n}{8n}=16^n;$$

b) $$\binom{8n}{1}-\binom{8n}{3}+\binom{8n}{5}-\ldots-\binom{8n}{8n-1}=0.$$

117. Legyen a z komplex szám trigonometrikus alakja

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Igazoljuk a z^n kiszámításával, hogy fennállnak a következő egyenlőségek:

a) $$\cos n\varphi=\binom{n}{0}\cos^n\varphi-\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi+\binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots;$$

b) $$\sin n\varphi=\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi-\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi+\binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi+\ldots.$$

II. ESEMÉNYALGEBRA

118. Jelentse A azt az eseményt, hogy 10 kockadobásból egyszer sem kaptunk 6-ost. Mit jelent az $\bar{A}$?

119. Legyen A az az esemény, hogy egy játékkockával dobva páros számot dobunk, B az, hogy 4-nél kevesebbet dobunk, és C hogy 2-nél többet dobunk. Mit jelent az

$$[A-(B\cap C)]\cup[(A-B)-C]$$

esemény?

120. Igazoljuk, hogy a H eseménytér minden A és B eseményére igazak a következő egyenlőségek:

a) $A-B=\bar{B}-\bar{A}$;

b) $\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(\bar{A}\cap\bar{B})}=\overline{\overline{(A\cap\bar{B})}\cap\overline{(\bar{A}\cap B)}}$.

121. Milyen kapcsolatban állnak az A, B és C események, ha

$$A\cap B\cap C=A?$$

122. Milyen kapcsolat van az A és B események között, ha fennáll az

$$(A\cup B)-B=A$$

összefüggés?

123. Milyen feltétel mellett teljesül a következő egyenlőség:

$$A\cup(B\cap\bar{A})=B?$$

124. Bizonyítsuk be, hogy az

$$A\cap B=A$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $A\subset B$.

125. Mutassuk meg, hogy ha az A, B és C tetszőleges események, akkor az

$$A\cap B\cap C \quad \text{és} \quad \overline{A\cup(\bar{B}\cup\bar{C})}$$

események egymást kizárják.

126. Igazoljuk, hogy ha $A \cap C = \emptyset$, akkor az

$$A-B, \quad A \cap B, \quad B-A-C, \quad B \cap C \quad \text{és} \quad C-B$$

események egymást páronként kizárják.

127. Igazoljuk, hogy az

$$\bar{A}, \quad A-B \quad \text{és} \quad A \cap B$$

események teljes rendszert alkotnak.

128. Mutassuk meg, hogy bármely A és B mellett az

$$A \cap B, \quad A \cap \bar{B}, \quad \bar{A} \cap B \quad \text{és} \quad \bar{A} \cap \bar{B}$$

események teljes rendszert alkotnak.

129. Bizonyítsuk be, hogy

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B),$$

és itt a jobb oldali összeadandók egymást páronként kizáró események.

130. Igazoljuk, hogy tetszőleges A és B eseményekre igaz az

$$(A \cup B) \cap A = A$$

egyenlőség.

131. Igazoljuk az előző feladatban szereplő összefüggés felhasználásával, hogy tetszőleges A, B és C eseményekre igaz a következő, ún. második disztributív törvény:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

132. Hozzuk egyszerűbb alakra az

$$(A \cup B) \cap (C \cup B)$$

kifejezést, ha $A \subset B$ és $B \subset C$.

133. Egy medencét két csapon keresztül lehet megtölteni. Az A esemény jelentse azt, hogy az első csapon át folyik a víz, a B pedig azt, hogy a második csapon át folyik. Fogalmazzuk meg szavakban a következő eseményeket:

a) $\bar{B}$;

b) $A \cup B$;

c) $A \cap B$;

d) $\bar{A} \cap B$;

e) $\bar{A} \cup \bar{B}$;

f) $A \cup \bar{B}$;

g) $A-B$;

h) $(A-B) \cup (B-A)$;

i) $\overline{A \cup B}$;

j) $\overline{A \cap B}$.

134. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép egy éven belül elromlik ($i = 1, 2, 3$). Fejezzük ki az A_i eseményekkel a következőket:

a) csak az első romlik el;

b) mindhárom elromlik;

c) egyik sem romlik el;

d) az első és második nem romlik el;

e) az első és második elromlik, a harmadik nem;

f) csak egy gép romlik el;

g) legfeljebb egy gép romlik el;

h) legfeljebb két gép romlik el;

i) legalább egy gép elromlik.

135. Bizonyítsuk be a következő összefüggéseket:

a) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$;

b) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$;

c) $(A-B)-C=A-(B\cup C)$;

d) $(A-B)-C=(A-C)-(B-C)$;

e) $(A-B)\cup C=[(A\cup C)-B]\cup(B\cap C)$;

f) $(A-B)\cap(C-D)=(A\cap C)-(B\cup D)$;

g) $A-\{A-[B-(B-C)]\}=A\cap B\cap C$;

h) $(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

136. Bizonyítsuk be, hogy

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n.$$

Fogalmazzuk meg szavakban is ezt az egyenlőséget.

137. Igazoljuk, hogy

$$\overline{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_n.$$

138. Legyenek A_1, A_2, ..., A_n tetszőleges, egymást páronként kizáró események. Milyen eseményt jelent a következő kifejezés:

$$B=\bigcup_{k=1}^{n}(\bar{A}_1\cap\ldots\cap\bar{A}_{k-1}\cap A_k\cap\bar{A}_{k+1}\cap\ldots\cap\bar{A}_n)?$$

III. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

1. A klasszikus képlettel megoldható feladatok

139. Egy kockát feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) 6-ost dobunk;

b) páros számot dobunk;

c) 5-nél nem dobunk nagyobbat;

d) legfeljebb 4-et dobunk;

e) legalább 4-et dobunk?

140. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?

141. Dobjunk fel egy kockát kétszer egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két dobás eredményeinek összege 7?

142. Három kockát dobunk fel egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 10?

143. Két kockával dobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) legalább az egyik kockán 6-ost dobunk;

b) két egyenlő számot dobunk;

c) két különböző számot dobunk;

d) a két dobott szám összege 7 és az egyik dobás eredménye 6-os?

144. Egy kockát hatszor egymás után feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike szerepelni fog;

b) az első dobás eredménye 6-os, a többi pedig ettől különböző;

c) az első két dobás eredménye 6-os, a többi pedig a 6-tól is és egymás közt is különböző;

d) két dobás eredménye 6-os, a többi pedig ettől különböző?

145. Tíz különböző minőségű tárgyat egymás mellé helyezünk. Ha bármelyik sorrend egyenlő valószínűséggel fordulhat elő, mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) a legjobb a sor első helyére és ugyanakkor a legrosszabb a sor utolsó helyére kerül;

b) a legjobb és a legrosszabb egymás mellé kerül?

146. Valaki négy számjegyet ír le találomra egymás mellé. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az 1978-as számot írja le?

147. Az *ABDEPSTU* betűket találomra egymás mellé írva, mennyi annak a valószínűsége, hogy éppen *BUDAPEST*-et kapjuk?

148. Az *AAAEIMMTTK* betűket találomra egymás mellé írva, mennyi annak a valószínűsége, hogy a *MATEMATIKA* szót írjuk le?

149. Egy gyerek, aki még nem ismeri a betűket, olyan kockákkal játszik, amelyekre az *AABIIKKMNOORT* betűk vannak festve (a kocka minden lapján ugyanaz a betű áll). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kockákat sorba rakva épp a *KOMBINATORIKA* szót rakja ki? (Vegyük figyelembe, hogy ehhez az is szükséges, hogy a betűk a megfelelő helyzetben szerepeljenek!)

150. Tíz darab egyforintost feldobunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindegyiken írást vagy mindegyiken címert dobunk?

151. Egy dobozban n golyó van, az $1, 2, \ldots, n$ számokkal megjelölve. Egyenként kihúzzuk az összes golyót. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) minden alkalommal (az elsőt kivéve) nagyobb sorszámú golyót húzunk mint az előző volt;

b) a k-val jelzett golyót éppen k-adiknak húzzuk ki?

152. Egy kör alakú asztal mellett tízen vacsoráznak, 5 férfi és 5 nő. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két nő nem kerül egymás mellé, ha a helyeket találomra osztják szét?

153. *a)* Egy kerek asztalhoz n különböző magasságú ember ül le. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerül, ha minden sorrend egyformán valószínű?

b) Ha n különböző magasságú ember egy vonalban sorba áll, és minden sorrend egyenlően valószínű, mennyi annak a valószínűsége, hogy a legmagasabb és a legalacsonyabb egymás mellé kerül?

154. Egy urnában 6 golyó van, 4 fehér és 2 piros. A golyók számozottak, az 5-ös és 6-os számú piros. Két golyót húzunk ki egymás után. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) mindkettő fehér lesz;

b) mindkettő egyező színű;

c) legalább az egyik golyó fehér lesz?

155. Egy dobozban 6 hibátlan és 4 selejtes termék van összekeverve. Ha egymás után vesszük ki mind a tíz terméket, mennyi annak a valószínűsége, hogy a selejtes darabokat utoljára vesszük ki?

156. A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot találomra kihúzunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a piros ász is a négy lap között lesz?

157. A 32 lapos kártyacsomagból 5 lapot húzunk ki egymás után, visszatevés nélkül.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a harmadik húzás eredménye piros lap lesz?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első és utolsó húzás eredménye piros lap?

158. Adott egy N elemű alkatrészhalmaz, amelyben a selejtesek száma s. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk egy n elemű mintát. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye selejtes húzás ($i=1, 2, \ldots, n$).

a) Számítsuk ki a $P(A_i)$ valószínűségeket.

b) Számítsuk ki a $P(A_i \cap A_j)$ valószínűségeket ($i \neq j$; $i, j=1, 2, \ldots, n$).

c) Jelentse $i_1, i_2, \ldots, i_k$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek egy tetszőleges k-ad osztályú kombinációját. Határozzuk meg a

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

valószínűséget.

159. A 32 lapos kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e hat lap között mind a négy szín előfordul?

160. Egy dobozban 15 papírlap van 1-től 15-ig megszámozva. Találomra kiveszünk 5 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott legkisebb szám nagyobb 6-nál?

161. Egy szervízüzem 10 olyan szerelővel rendelkezik, aki a szükséges javításokat a javítandó egység helyszínén végzi el. Egy javítás egy napig tart. Az egyik napon 14 hibabejelentés érkezik. Ha a szerelők elosztása véletlenszerű (mindenhová csak egy szerelőt küldenek), mennyi annak a valószínűsége, hogy a másodikként és harmadikként bejelentett helyre aznap nem mennek el? (Az természetesen mindegy, hogy melyik helyre melyik szerelő megy.)

162. Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van. Annak valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, az fehér vagy fekete golyó lesz: $\frac{3}{5}$; hogy piros vagy fekete színű lesz: $\frac{2}{3}$. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?

163. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen 0,9-nél?

164. Egy iskola 16 tagú sakk-köréből találomra két egyenlő létszámú csapatot alakítunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két legjobb játékos egy csapatba kerül?

165. Két sakkcsapat körmérkőzést rendezett. Mindkét csapat 2-nél több játékossal rendelkezett. Mindenki mindenkivel játszott egy játszmát. A mérkőzés során 136 játszmára került sor.

A mérkőzésre való felkészülés során házi versenyt is rendezett mindkét csapat, ez esetben is mindenki egy játszmát játszott minden saját csapatbeli játékossal. A két csapatban így összesen 66 játszmára került sor.

A mérkőzések befejezése utáni banketten, amin minden játékos részt vett, véletlenszerűen két játékossal beszélgetett egy riporter. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét játékos a nagyobb létszámú csapat tagja volt?

166. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy lottószelvényt kitöltve k találatot ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$) érünk el?

167. 20 darab 40 wattos és 30 darab 60 wattos égőből egymás után kiveszünk két darabot anélkül, hogy az elsőt visszatennénk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) mindkettő 40 wattos lesz;

b) egyik sem lesz 40 wattos;

c) csak az egyik lesz 40 wattos?

168. Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy a mintavételt visszatevéssel végezzük.

169. 40 munkadarabból, amelyek között 8 darab selejtes, találomra kiveszünk négyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) két jót és két selejtest húzunk ki;

b) a minta legfeljebb három selejtest tartalmaz?

Oldjuk meg a feladatot visszatevés nélküli és visszatevéses mintavétel feltételezésével.

170. Egy dobozban 50 darab 8 mm-es és 50 darab 6 mm-es anyáscsavar van. Találomra kiveszünk 20 csavart, visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között több lesz a 6 mm-es csavar, mint a 8 mm-es?

171. Egy alkatrészhalmazból, amelyben p a selejtarány, visszatevéssel veszünk ki egy n elemű mintát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában páros lesz a selejtesek száma?

172. Egy dobozban 20 darab törékeny tárgy van elcsomagolva. A tárgyak közül 5 darabnak az értéke egyenként 100 Ft, 4 darabé 200 Ft, 7 darabé 500 Ft és 4 darabé egyenként 1000 Ft. Valaki leejti a csomagot, és így négy tárgyat összetör. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az összetört darabok értékeinek összege 1000 Ft lesz?

173. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 10 kockával dobva pontosan öt 6-ost dobunk?

174. Egy dobozban 10 darab alkatrész van. Találomra kiveszünk néhányat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kivett alkatrészek száma páros?

175. 9 golyót helyezünk el véletlenszerűen 4 dobozba. Mekkora annak a valószínűsége, hogy minden dobozba legalább két golyó kerül?

176. Egy dobozban N darab, 1-től N-ig számozott golyó van. Visszatevés nélkül kiveszünk n számú golyót, majd azokat nagyság szerint sorba rendezzük. Legyen S egy tetszőleges $[1, N]$ intervallumba eső egész szám. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a nagyság szerint növekvő sorba rendezett mintában a k-adik éppen S-sel egyenlő?

2. Geometriai valószínűségek

177. Az A és B helységet 5 km hosszú telefonvezeték köti össze. A vezeték valahol meghibásodik. A meghibásodás valószínűsége egyenletes eloszlású az egész vonalon. Mekkora a valószínűsége, hogy a hiba A-tól 3 km-nél távolabb következett be?

178. Az egységnyi oldalhosszúságú, négyzet alakú céltáblára egy $\frac{1}{2}$ egységnyi sugarú kört rajzolunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a találat ezen a körön kívül éri a céltáblát, ha a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán?

179. Valaki arra ébred (reggel 8 órakor), hogy órája megállt. Előző este 10 órakor az óra még járt. Mekkora a valószínűsége, hogy az óra éjfél és 1|2 3 óra között állt meg, ha feltételezzük, hogy a megállás valószínűsége egyenletes eloszlású a 10 órától reggel 8 óráig terjedő intervallumon?

180. A (0, 3) intervallumon véletlenszerűen elhelyezünk egy pontot. Annak valószínűsége, hogy ez a 2-nek r sugarú környezetébe esik: $\frac{1}{5}$. Mekkora az r?

181. Egy rádióállomás minden órában pontos időt közöl. Valaki találomra megnézi az óráját, de az áll. Bekapcsolja a rádiót. Mekkora annak a valószínűsége, hogy legfeljebb 10 percet kell várnia az időjelzésre? (Tegyük fel, hogy az óranézés időpontja a nap folyamán egyenletes eloszlású.)

182. Egységsugarú, kör alakú céltáblára lövünk. A találat valószínűsége a céltáblán egyenletes eloszlású. A céltáblát koncentrikus körökkel 10 részre akarjuk osztani úgy, hogy minden részbe egyenlő valószínűséggel essen a találat. Mekkorák legyenek a körsugarak?

183. Úticélunkat két villamossal, az a és b jelűvel tudjuk elérni. Az a jelű villamos 5 percenként közlekedik, a b jelű 12 percenként. Az első villamos mindkét viszonylatban reggel 5 órakor indul. Reggel 7 és 1|2 8 között véletlenszerűen érkezünk a megállóba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a megállóban nem kell 2 percnél többet várakoznunk?

184. A [0, 1] intervallumon véletlenszerűen felveszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint az O pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

185. Véletlenszerűen felírunk két, 1-nél kisebb, pozitív számot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy

a) összegük kisebb 1-nél;

b) szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-nél;

c) összegük kisebb 1-nél, és szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-nél?

186. A (0, 1) intervallumon találomra felveszünk egy pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e pontnak az intervallum végpontjaitól mért távolságnégyzetösszege a távolság-négyzetösszeg minimumát α-nál nagyobb pontossággal megközelíti? (Egyenletes eloszlást feltételezünk.)

187. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk két pontot. E pontok az adott szakaszt három részre osztják. Mekkora annak a valószínűsége, hogy e szakaszokból háromszög rajzolható?

188. Ketten megbeszélik, hogy délután 5 és 6 óra között meghatározott helyen találkoznak. Megállapodnak abban, hogy aki korábban érkezik, az 20 percet vár, aztán elmegy. Mekkora valószínűséggel találkoznak, ha mindkettő véletlenszerűen érkezik 5 és 6 óra között?

189. Egy üzembe a munkanap során két tehergépkocsi érkezik. Az érkezés időpontja a nap folyamán egyenletes eloszlású. A rakodási idő mindkét gépkocsi esetében $\frac{1}{3}$ munkanap. Rakodás után a kész kocsi rögtön elmegy. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két gépkocsi az üzemben találkozik?

190. Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága α-nál kisebb $(1 \leqq \alpha < \sqrt{2})$?

191. A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen elhelyezünk két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezeknek az O ponttól mért távolságuk négyzetösszege a^2-nél nagyobb lesz?

192. Válasszunk véletlenszerűen egy pontot a $(0, 1)$ szakaszon, és egyet a $(0, a)$ szakaszon. A kiválasztott pontok legyenek P_1 és P_2. Mennyi a valószínűsége, hogy az $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ és egy egységnyi hosszúságú szakaszból háromszög alkotható? Írjuk fel a valószínűséget az a függvényében, ha az a végigfutja az $a > 0$ értékeket.

193. A $(0, a)$ és $(0, b)$ szakaszokon, ahol $a \geqq 1$, és $b \geqq a+1$, találomra választunk egy-egy pontot, legyenek ezek az O ponttól x, ill. y távolságra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból háromszög alkotható?

194. Válasszunk három pontot találomra a $(0, a)$ szakaszon. Legyen ezeknek az O ponttól mért távolsága x, y és z. Mennyi a valószínűsége, hogy a $P(x, y, z)$ pont a térbeli, derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjától nem lesz a egységnél távolabb?

3. Valószínűségszámítási tételek és ezek alkalmazásai

195. Bizonyítsuk be az alábbi állítások helyességét:
Ha a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes rendszert alkotnak, az A pedig egy tetszőleges esemény, akkor

a) $P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$;

b) $P(A)=P(A \cap B_1)+P(A \cap B_2)+\ldots+P(A \cap B_n)$.

196. Bizonyítsuk be a következő tételeket:

a) $P(A \cap B)=1-P(\bar{A} \cup \bar{B})$;

b) $P(A \cup B)=1-P(\bar{A} \cap \bar{B})$;

c) $P(A \cap \bar{B})=P(A)-P(A \cap B)$;

d) $P(A \cup B)=P(A)+P(B \cap \bar{A})$.

197. Felhasználva a 129. feladatban adott összefüggést, bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A és B eseményekre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

198. Legyen A és B két tetszőleges esemény. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenségeket:

a) $P(A \cap B) \leqq P(A) + P(B)$;

b) $P(A \cap B) \geqq P(A) + P(B) - 1$.

199. Igazoljuk, hogy ha $P(A) \geqq 0{,}6$ és $P(B) \geqq 0{,}9$, akkor $P(A \cap B) \geqq 0{,}5$.

200. Írjuk fel a Poincaré-tételt $n=3$ eseményre, és igazoljuk.

201. Egy műhelyben három gép dolgozik. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép elromlik egy éven belül ($i=1, 2, 3$). Fejezzük ki az ismert S_k szimbólumokkal annak valószínűségét, hogy pontosan egy gép romlik el egy éven belül. (Lásd a 134. feladatot.)

202. Legyenek adva az A_1, A_2, A_3, A_4 és A_5 események. Igazoljuk a Jordan-tételként ismert képlet felhasználása nélkül: annak valószínűsége, hogy az adott események közül csak kettő következik be:

$$P_2 = S_2 - \binom{3}{2} S_3 + \binom{4}{2} S_4 - \binom{5}{2} S_5.$$

203. Legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események. Igazoljuk a Jordan-tétel felhasználásával: annak valószínűsége, hogy ezek közül legalább k esemény bekövetkezik:

$$Q_k = \sum_{m=k}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m-1}{k-1} S_m.$$

204. Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik kockán 6-ost dobunk?

205. A 32 lapos magyar kártyából találomra kihúzunk egy lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lap piros vagy ász lesz?

206. Egy 32 lapos kártyacsomagból 6 lapot kihúzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik ász lesz? (Oldjuk meg a feladatot visszatevés nélküli és visszatevéses mintavétel feltételezésével.)

207. Egy sötét szobában 5 pár kesztyű van. Találomra kiveszünk közülük ötöt. Mekkora a valószínűsége, hogy lesz közöttük jobbkezes is meg balkezes is?

208. 1000 termék közül 50 selejtes. Találomra kiválasztunk közülük 10-et. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott darabok között lesz selejtes? Oldjuk meg a feladatot visszatevéses és visszatevés nélküli esetre is.

209. Egy urnában 5 lapot helyeztünk el az 1, 2, 3, 4, 5 sorszámmal ellátva. Egymás után kihúzzuk mind az öt lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyiket annyiadiknak húzzuk ki, amennyi a sorszáma?

210. Egy n házaspárból álló társaság táncol. Az összes párokra való oszlás egyenlően valószínű. Mennyi annak valószínűsége, hogy egy bizonyos pillanatban senki sem táncol a feleségével?

211. Egy urnában 1-től n-ig számozott, n darab lapot helyeztünk el. Legyen az n törzstényezős felbontása:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Az urnából véletlenszerűen kihúzunk egy lapot. Számítsuk ki, mennyi annak a valószínűsége, hogy n-hez relatív prímet húzunk (azaz olyan számot, melynek az n pozitív egész osztói közül csak az 1 osztója), és az eredmény felhasználásával igazoljuk a

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Euler-féle képletet. [Itt $\varphi(n)$ jelenti az n-hez relatív prím számok számát.]

212. 100 alkatrész között 10 selejtes van. Véletlenszerűen kiveszünk 2 alkatrészt, visszatevés nélkül. Mekkora a valószínűsége, hogy a kihúzott alkatrészek között csak 1 lesz selejtes? Oldjuk meg a feladatot a Jordan-tétel felhasználásával is.

213. A 32 lapos kártyacsomagból visszatevés nélkül, egymás után 5 lapot húzunk ki. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között két ász lesz? Oldjuk meg e feladatot a Jordan-tétel felhasználásával is.

214. Egy N elemű alkatrészhalmazban s a selejtesek száma. Visszatevés nélkül veszünk ebből egy n elemű mintát. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy e mintában k lesz a selejtesek száma, először a Jordan-tétel, majd a visszatevés nélküli mintavételre vonatkozó képlet segítségével, végül az eredmények felhasználásával igazoljuk a binomiális együtthatókra vonatkozó

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{a}{j} \binom{b-j}{m-j} = \binom{b-a}{m} \qquad (b \geqq a)$$

összefüggést.

215. Egy áruházban, ahol televíziókészülékeket is árulnak, n féle készülék kapható. Egyik napon N ember vásárolt televíziókészüléket, minden ember egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy k fajtából egyet sem adtak el [$\max(0, n-N) < k < n$]. (Feltételezzük, hogy minden fajta készülékből volt annyi raktáron, hogy a felmerülő igényeket kielégíthették.)

216. Egy urnában n darab, 1-től n-ig számozott papírlap van. Egymás után kihúzzuk mind az n lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy k számú olyan lapot húzunk, amelynek száma a húzás sorszámával megegyezik? (Tegyük fel, hogy minden húzássorrend egyenlő valószínűséggel következik be.)

4. Feltételes valószínűségek, a teljes valószínűség tétele és Bayes tétele

217. Mutassuk meg, hogy ha $P(B)>0$, akkor érvényesek a következő összefüggések:

a) $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$;

b) $P(A_1 \cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1 \cap A_2|B)$.

218. Legyen $P(B)>0$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$P(A|B)=\begin{cases} \dfrac{P(A)}{P(B)}, & \text{ha} \quad A \subset B, \\ 1, & \text{ha} \quad B \subset A. \end{cases}$$

219. Ismertek a következő valószínűségek: $P(A|B)=0{,}7$; $P(A|\bar{B})=0{,}3$ és $P(B|A)=$ $=0{,}6$. Mivel egyenlő a $P(A)$?

220. Adjunk konkrét példákat olyan A és B eseményekre, amelyekre a

$$P(A|B)=1-P(A|B)$$

egyenlőség nem teljesül, és olyanokra is, amelyekre teljesül.

221. Legyen $P(A)=\dfrac{1}{4}$, $P(A|B)=\dfrac{1}{4}$ és $P(B|A)=\dfrac{1}{2}$. Számítsuk ki a $P(A \cup B)$ és $P(\bar{A}|\bar{B})$ valószínűségeket.

222. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(A)=0{,}7$ és $P(B)=0{,}8$, akkor $P(A|B)\geqq 0{,}625$.

223. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(A \cap B|C)=P(A|B \cap C)\,P(B|C),$$

hacsak $P(B \cap C)\neq 0$.

224. Tegyük fel, hogy a H eseménytérben teljesülnek a klasszikus képlet alkalmazhatóságának feltételei. Legyenek A és B a H eseménytér tetszőleges eseményei, és legyen $P(B)>0$. Tegyük fel, hogy a B esemény m elemi esemény összegére bontható, és az A elemi események összegére bontásában k számú olyan elemi esemény van, amely B felbontásában is szerepel. Bizonyítsuk be, hogy ez esetben fennáll a következő összefüggés:

$$P(A|B)=\frac{k}{m}.$$

225. Egy kockát kétszer feldobnak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7 lesz?
Elvégzik az első dobást. Eredményül páros szám adódott (ezt közölték velünk). Mekkora a valószínűsége ezek után annak, hogy a két dobás összege 7 lesz?

226. Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?

227. Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

228. Valamely termék egy üzemben három különböző technológiával készíthető. Az azonos technológiával készült termékeket „első”, ill. „másodosztályú” minősítéssel osztályozzák. Egy napi termelés alapján állították össze a következő táblázatot:

	1. techn.	2. techn.	3. techn.	Összesen
I. oszt.	300	310	315	925
II. oszt.	220	190	175	585
Összesen	520	500	490	1510

E táblázatban pl. a második sorban álló 190-es szám azt jelenti, hogy az 500 darab 2. technológiával készített termék közül 190 darab másodosztályú. Hasonló jelentésű a többi szám is. Az utolsó oszlopban, ill. sorban a megfelelő összesített értékeket tüntettük fel.

A napi termelt mennyiséget egy helyen összegyűjtik. Bármelyiket egyenlő valószínűséggel vehetjük ki a halmazból. Az A_i jelentse azt az eseményt, hogy a kihúzott termék az i-edik technológiával készült ($i=1, 2, 3$). A B_k esemény pedig jelentse azt, hogy a termék k-ad osztályú minősítést kapott ($k=1, 2$).

Határozzuk meg a következő valószínűségeket:

a) $P(A_1)$; *b)* $P(B_2)$; *c)* $P(A_1 \cap B_2)$;

d) $P(A_1 \cup B_2)$; *e)* $P(A_1|B_2)$; *f)* $P(B_2|A_1)$;

g) $P(\bar{A}_1|\bar{B}_2)$; *h)* $P(A_1|B_1 \cup B_2)$; *i)* $P(A_1 \cup A_3|B_1)$;

j) $P(A_1|B_1 \cap B_2)$; *k)* $P(B_1 \cup B_2|A_1)$; *l)* $P(B_1|A_1 \cup A_2)$.

229. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jutott ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következőnek sem jutott?

230. Ha l_0 számú újszülött közül l_k számú éri meg a k-adik életévét ($k=1, 2, \ldots$), akkor

a) mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott ember megéri 50. életévét;

b) mennyi a valószínűsége, hogy egy 50 évet megért ember a 60. évét is megéri?

231. N csavar között s selejtes van. Visszatevés nélkül, véletlenszerűen kihúzunk $4n$ csavart ($4n<s$), és a kihúzás sorrendjében megvizsgáljuk őket. Az első $2n$ csavar jónak bizonyult. Mennyi a valószínűsége, hogy a teljes $4n$ elemű mintában n selejtes lesz?

232. Egy urnában, ismeretlen összetételben, fehér és fekete golyók vannak. Visszatevés nélkül húztak ki n golyót, s ebből k lett fehér és $n-k$ fekete. Mennyi a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye fehér golyó volt?

233. Valakit keresünk az egyetemen. A keresett személy egyforma valószínűséggel lehet adott 5 terem valamelyikében, és annak valószínűsége, hogy az 5 terem valamelyikében egyáltalán jelen van: p. Már 4 termet megnéztünk, és a keresett személyt nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik teremben megtaláljuk?

234. Annak valószínűsége, hogy egy adott üzembe az esedékes nyersanyagszállítmány 8 és 12 óra között megérkezik: 0,8. A szállítmány 11 óráig nem érkezett meg. Mennyi a valószínűsége, hogy 11 és 12 között még megérkezik? Feltételezzük, hogy a megérkezés időpontja egyenletes eloszlású a (8, 12) intervallumban.

235. A $(0, a)$ intervallumon találomra kiválasztottak két pontot. Tudjuk, hogy a két pont távolsága kisebb, mint az intervallum hosszának harmadrésze. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont az adott intervallum első felére esik?

236. Egy üzembe 7 és 17 óra között két nyersanyagszállítmány érkezett. Tudjuk, hogy a két szállítmány beérkezése között 1 óránál kevesebb idő telt el, de nem tudjuk az egyes beérkezések időpontját. Ez utóbbiakról feltételezzük, hogy ezek a (7, 17) intervallumon egyenletes eloszlásúak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyik szállítmány délelőtt érkezett, a másik pedig délután?

237. Egy 32 lapos kártyacsomagból négy lapot húzunk ki egymás után, visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy az első kettő király, a harmadik felső, a negyedik pedig ász?

Oldjuk meg e feladatot úgy is, hogy visszatevéses mintavételt feltételezünk.

238. Valamilyen vegyszerrel szúnyogirtást végeztek. Azt tapasztalták, hogy az első permetezésnél a szúnyogok 80%-a elpusztult, az életben maradottakban azonban annyi ellenálló képesség fejlődött ki, hogy a második permetezés során már csak a szúnyogok 40%-a pusztult el. A harmadik irtás során a szúnyogok 20%-a pusztult már csak el.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy szúnyog három irtószer-alkalmazást túlél?

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy szúnyog még két irtószer-alkalmazást túlél, feltéve, hogy az elsőt túlélte?

239. N számú munkadarab között s selejtes. Három munkadarabot húzunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott darabok között legalább az egyik selejtes lesz?

240. Igazoljuk a következő összefüggést:

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B}),$$

hacsak $0<P(B)<1$ fennáll.

241. Két doboz mindegyikében 100 darab csavar van. Az első dobozban 10 db selejtes, a másodikban 6. Találomra kiveszünk egy csavart valamelyik dobozból.

(A dobozok közül egyenlő valószínűséggel választunk.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kivett csavar jó?

242. Két urnában golyók vannak. Az egyikben 5 fehér és 4 piros, a másikban 5 piros és 7 fehér. Az egyik urnából kiveszünk két golyót. Feltételezve, hogy a két urna közül egyenlő valószínűséggel választunk,

a) mennyi a valószínűsége, hogy mindkét golyó fehér színű lesz;

b) mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott két golyó közül legalább az egyik fehér lesz?

243. Egy egyetemi évfolyamon végzett felmérésből tudjuk, hogy a női hallgatók 60%-a, a férfi hallgatók 40%-a dohányzik. Valaki így okoskodik: „Ha egy személyt véletlenszerűen kiválasztunk, az a személy vagy nő, vagy férfi. A két esemény egymást kizárja. Annak valószínűsége tehát, hogy a kiválasztott személy dohányzik, egyenlő a 0,6 és 0,4 valószínűségek összegével, tehát 1-gyel." Hol a hiba?

244. Egy üzemben 10 gépen gyártanak egyforma alkatrészeket, mindegyiken egyenlő számút. Az első két gép együttvéve 3% selejtet termel; a következő öt gépnél együttvéve 1,5% a selejt, s végül a többi gépnél együttvéve 1%. A kész darabokat egy helyen gyűjtik. Ha mindegyik alkatrészt egyenlő valószínűséggel vehetjük ki a kész alkatrészek közül, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy darabot kivéve, az selejtes lesz?

245. Egy gép átlagban munkaidejének $\frac{1}{3}$-ában az I. jelű, $\frac{1}{6}$-ában a II. jelű és többi idejében a III. jelű alkatrészen dolgozik. Az I. jelű alkatrész kidolgozása közben az erre fordított idő 10%-ában áll a gép. A II. jelű alkatrész kidolgozása közben végig dolgozik, a III. jelű kidolgozásakor a munkaidő 25%-ában áll. Mennyi a valószínűsége, hogy egy találomra kiválasztott időpontban áll a gép?

246. 100 darab kész műszer között előfordulhat 0, 1, 2, 3 vagy 4 szépséghibás. Ezek előfordulásának valószínűsége rendre: $\frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}$ és $\frac{1}{12}$. Feltételezve, hogy bármelyik műszert egyenlő valószínűséggel vehetjük meg, mennyi annak a valószínűsége, hogy hibátlan műszert veszünk?

247. Bizonyos fajta búzavetőmag összetételének vizsgálatakor megállapították, hogy az négyféle magot tartalmaz, mégpedig 96%-a az I-es fajtából, 1%-a a II-esből, 2%-a a III-asból és 1%-a a IV-esből tevődik össze. Annak valószínűsége, hogy egy I-es fajta szemből legalább 50 szemet tartalmazó kalász fejlődik, 0,5. Ugyanez a valószínűség a többi fajtánál sorban a következő: 0,15, 0,2 és 0,05. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott magból legalább 50 szemet termő kalász lesz?

248. *n* doboz mindegyikében 600 db golyó van. Az elsőben 2 golyó piros, és a többi dobozban mindig 5-tel több a piros golyók száma, mint az előzőben volt. Az utolsó dobozban csak 3 golyó nem piros.

a) Az $\frac{n}{12}$-ik dobozból egy golyót kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy ez piros lesz?

b) Valamelyik (egyenlő valószínűséggel kiválasztott) dobozból egy golyót kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy ez piros lesz?

249. Két doboz mindegyikében N darab csavar van. Az első dobozban s_1 a selejtesek száma, a másodikban s_2. Az egyik dobozból kiveszünk egy csavart. Mekkora a valószínűsége, hogy ez selejtes lesz, ha az első dobozból p valószínűséggel húzunk?

Öntsük össze a két doboz tartalmát. Húzzunk ki ezután egy csavart. Mennyi a valószínűsége, hogy e húzás eredménye selejtes csavar lesz? Egyezik-e ez a valószínűség az előzővel? A p valószínűség milyen értéke esetén áll fenn az egyenlőség?

250. Adott m számú doboz, ezek mindegyikében N darab csavar van. Az első dobozban s_1 a selejtesek száma, a másodikban s_2 és így tovább, az m-edikben s_m. Az egyik dobozból kihúzunk egy csavart. Ha egyenlő valószínűséggel választhatunk a dobozok közül, mennyi annak a valószínűsége, hogy selejtest húzunk ki?

Öntsük össze a dobozok tartalmát, s ezután húzzunk ki egy csavart. Mekkora a valószínűsége, hogy selejtest húzunk? Egyezik-e ez a valószínűség az előzővel?

251. Egy üzemben három csavargyártó gép működik. E gépek a termelés 25, 35, ill. 40%-át szolgáltatják. Az első gép 5% selejttel dolgozik, a második gép 4%-kal, a harmadik pedig 2%-kal. A napi termelésből kiválasztunk egy csavart, és azt hibásnak találjuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezt a csavart

a) az első gép gyártotta;

b) a második vagy harmadik gép gyártotta?

252. Egy gépesített ügyintézéssel rendelkező irodában három gép dolgozik párhuzamosan, azonos típusú ügyiratok intézésén. Az első gép naponta 10 aktával végez, a második napi 15, a harmadik pedig napi 25 aktával. Hibásan kezelt ügyirat naponta átlagosan 0,3; 0,9, ill. 0,5 darab található az egyes gépek munkájában. Az összesített napi mennyiségből találomra kiveszünk egy példányt, s azt rossznak találjuk. Mekkora a valószínűsége, hogy azt az első gép készítette?

253. Egy üzemben kétféle technológiával gyártanak egy termékfajtát. Egyrészt hagyományos módon, az így készült termékek 60%-a I. osztályú, 40%-a II. osztályú. Másrészt automata gépsoron, így 90% lesz I. osztályú, 10% II. osztályú. A termékek 50%-a készül a hagyományos technológiával az automata gépsor korlátozott kapacitása miatt.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék I. osztályú?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a találomra megvizsgált termék az automata gépsoron készült, ha II. osztályú minősítést kapott?

254. Egy gyárban két gép egyforma csavarokat gyárt. Az első gép naponta n_1 doboz csavart készít, a második napi n_2 doboz csavart. A csavarok száma minden dobozban egyenlő. Az első gép átlagosan p_1% selejtet termel, a második gép p_2%-ot. A két gép egynapi termeléséből kiveszünk egy dobozt és abból egy csavart. A vizsgálat során kiderül, hogy a csavar selejtes. Mennyi a valószínűsége, hogy azt az első gép gyártotta? (A csavarokat teljesen egyforma dobozokba csomagolják.)

255. Valamilyen alkatrész gyártásával egy üzemben négy gép foglalkozik. Az első gép naponta 200 alkatrészt gyárt, a második 320-at, a harmadik 270-et, a negyedik 210-et. Az egyes gépeknél a selejtgyártás valószínűsége rendre: 2%, 5%, 3% és 1%. A kész alkatrészeket egy helyen gyűjtik. A gépek egy napi termeléséből kiveszünk egy alkatrészt, megvizsgáljuk, és jónak találjuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy azt a negyedik gép gyártotta?

256. n doboz mindegyikében n számú golyó van, az i-edikben i db piros ($i=1$, $2, \ldots, n$), a többi fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból kihúzunk egy golyót. Ez piros lett. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a golyót az utolsó két doboz valamelyikéből húztuk?

257. Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 75% valószínűséggel első osztályú. A kikerült termékeket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek: 0,02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek: 0,05. Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely e vizsgálaton első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

258. Egy N darab elemet tartalmazó halmazból visszatevéssel veszünk ki egy n elemű mintát. A mintában k selejt adódott. Mennyi a valószínűsége, hogy az adott halmazban s a selejtesek száma? (Tegyük fel, hogy az adott halmazban minden összetétel egyenlő valószínűséggel fordulhat elő.)

5. Független események valószínűsége

259. Legyenek az A, B és C események függetlenek. Igazoljuk, hogy ekkor

$$P(A|B\cap C)=P(A|B)=P(A|C)=P(A);$$
$$P(B|A\cap C)=P(B|A)=P(B|C)=P(B);$$
$$P(C|A\cap B)=P(C|A)=P(C|B)=P(C).$$

260. Az A, B és C események páronként függetlenek, és pozitív valószínűségűek. Alkothatnak-e teljes eseményrendszert?

261. Legyenek az A_1, A_2, $\ldots$, A_n események függetlenek, és legyen $P(A_i)=p_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$). Igazoljuk, hogy

$$P(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

262. Bizonyítsuk be, hogy ha az A és B események függetlenek, és A bekövetkezése a B bekövetkezését maga után vonja, akkor $P(B)=1$, vagy $P(A)=0$.

263. Oldjuk meg a 221. feladatot az események függetlenségéről tanultak alkalmazásával is.

264. Egy pénzdarabot egymás után 5-ször feldobva, mind az ötször írást dobtunk. Mennyi a valószínűsége, hogy hatodszor is írást dobunk?

265. Két csomag magyar kártyát helyezünk egymás mellé, és mindkettőből kihúzunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkét lap piros lesz?

266. Két gépen készítenek azonos átmérőjű rézhuzalt. Szakítószilárdsági vizsgálatokkal megállapították, hogy az egyik gépen készült huzal 0,90 valószínűséggel bír el egy adott terhelést, a másik gépen készült huzal pedig 0,95 valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy a kétféle huzalból egy-egy mintát véve, mindkettő kibírja az adott terhelést?

267. Egy kockát és két pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockán 6-ost, az egyik pénzen írást s a másikon fejet dobunk?

268. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két kockával n-szer egymás után dobva, mind az n-szer mindkét kockán egyenlő számokat dobunk?

269. Mekkora a valószínűsége, hogy két kockával négyszer egymás után dobva, legalább egyszer 10 lesz a dobott számok összege?

270. Egy dobozban 2 selejtes és 4 jó csavar van. Visszatevés nélkül veszünk ki négy csavart. Jelentse A azt az eseményt, hogy az első kihúzott csavar jó. A B esemény jelentse azt, hogy az utolsónak kihúzott csavar jó. Állapítsuk meg, független-e ez a két esemény.

Oldjuk meg a feladatot annak feltételezésével is, hogy a csavarokat visszatevéssel húzzák ki.

271. Egy urnában 4 egyforma papírlap található. Mindegyikre három számjegy van írva egymás mellé, mégpedig az elsőre: 0 0 0, a másodikra 0 1 1, a harmadikra 1 0 1, és a negyedikre 1 1 0. Húzzunk ki egy lapot. Feltételezzük, hogy mindegyik papírlap egyenlő valószínűséggel húzható. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy olyan lapot húztunk, amelynek i-edik jegye 1-es ($i=1, 2, 3$). Mutassuk meg, hogy az A_i események páronként függetlenek, együttesen azonban nem.

272. Egy dobozban 1-től 8-ig számozott, 8 db papírlap van. Véletlenszerűen kiveszünk egy lapot. Az A, B és C események jelentése legyen:

A: a kivett lapon páros szám áll;

B: 4-nél nem nagyobb szám áll;

C: a kihúzott szám 2, vagy 5-nél nagyobb.

Igazoljuk, hogy

$$P(A \cap B \cap C)=P(A)P(B)P(C),$$

és az adott események mégsem függetlenek.

273. Egy helységet két úton lehet megközelíteni. Két gépkocsi indul el, egyik az első úton, a másik a másikon. Annak valószínűsége, hogy az első úton induló gépkocsi időben célhoz ér: 0,80; hogy a másikon induló nem késik: 0,85. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább az egyik gépkocsi időben célhoz ér?

274. Egy üzemben két gépsor dolgozik egymástól függetlenül. A tapasztalatok alapján az egyik gépsor hetenként 0,20, a másik 0,15 valószínűséggel esik ki a termelésből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább az egyik kiesik a hét folyamán?

275. Annak valószínűsége, hogy egy gép egy meghatározott napon működik: 0,95. Mekkora annak valószínűsége, hogy a gép két napon keresztül működik, és a harmadik napon megáll? (Feltételezzük: annak valószínűsége, hogy a gép valamelyik napon működik-e vagy sem, független attól, hogy más napokon működött-e vagy sem.)

276. Egy munkás három gépen dolgozik. Annak valószínűsége, hogy 1 óra leforgása alatt a gépekkel leállás miatt nem kell külön is foglalkozni, az egyes gépeknél 0,9; 0,8 és 0,85. Mekkora a valószínűsége, hogy egy óra leforgása alatt:

a) a munkásnak egy géppel sem kell külön foglalkoznia;

b) legalább egy géppel nem kell külön foglalkoznia?

277. Egy gyárban két gép működési idejére végeztek megfigyeléseket, és megállapították, hogy az I-es gép átlagban munkaidejének 60%-ában dolgozik, a II-es gép pedig a munkaidő 70%-ában. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott időpontban

a) mindkét gép dolgozik;

b) legalább az egyik dolgozik;

c) csak az egyik dolgozik;

d) mindkét gép áll?

278. Egy üzemben végzett statisztikai vizsgálatok azt eredményezték, hogy meghatározott idő alatt az elektromotoroknak csak $100p$%-a dolgozik. Tekintsünk három motort az üzemben. Mekkora a valószínűsége, hogy

a) mind a három motor működik;

b) legalább az egyik működik;

c) csak az egyik motor működik;

d) mindhárom motor áll?

Tegyük fel, hogy a motorok működése egymástól független.

279. Egy 500 darabból álló árumennyiség 5%-a szépséghibás. Az átvevő az áru átvétele előtt abból 10 darabot kiválaszt, és megvizsgálja, majd e vizsgálatot a már megvizsgált darabok visszatevése után megismétli. A megrendelt mennyiséget csak akkor veszi át, ha mindkét próba csak hibátlan alkatrészeket tartalmaz. Mennyi a valószínűsége, hogy az 500 darab alkatrészt átveszik?

280. Valaki két lottószelvényt tölt ki egymástól függetlenül. Mennyi a valószínűsége, hogy nyer?

281. Hányszor kell két kockát feldobnunk, hogy 0,99-nél nagyobb valószínűséggel legalább egyszer két hatost dobjunk?

282. Legalább hány lottószelvényt kell kitöltenünk egymástól függetlenül, hogy a nyerés valószínűsége nagyobb legyen, mint annak valószínűsége, hogy nem nyerünk? (Használjuk fel, hogy egy szelvénnyel a nyerés valószínűsége $p=0,0233$.)

283. Valaki hetenként egy lottószelvénnyel játszik. Legalább hány hétig kell játszania ahhoz, hogy a hármas, négyes vagy ötös találat valószínűsége nagyobb legyen, mint 0,5?

284. Tegyük fel, hogy valamely hír helyes átvételének valószínűsége 0,9. Hányadik hírvivőnél csökken a hír helyes átvételének valószínűsége $\frac{1}{8}$ alá?

285. Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy 5 cm átmérőjű labdát egy négyzetháló alakú rácson a drót érintése nélkül átdobunk, ha a négyzetek oldala 8 cm, és a labdával nem célzott dobásokat végzünk?
Legalább hány dobást kell végeznünk, hogy annak valószínűsége, hogy a labda legalább egyszer simán átmegy, nagyobb legyen annak valószínűségénél, hogy nem megy át?

286. Öt katona lő egy céltáblára. Mindegyikük 100 lövése közül átlagosan 80 talál. Mekkora annak valószínűsége, hogy egyszerre leadva egy lövést, háromnál több találat lesz a céltáblán?

287. Végezzünk n független kísérletet az A esemény bekövetkezésének megfigyelésére. Legyen $P(A)=p$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a) az első k számú $(1 \leqq k \leqq n)$ kísérlet során az A következik be;

b) az első k számú kísérlet során az A, a többi kísérlet során pedig az $\bar{A}$ következik be?

288. Egy dobozba véletlenszerűen helyezünk el 4 golyót a következőképpen. Feldobunk egy kétforintost, s ha írást dobunk, akkor egy fehér golyót teszünk a dobozba, ha pedig nem írást, akkor feketét. Ezt az eljárást négyszer megismételve helyezzük a golyókat a dobozba.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobozba 3 fehér golyó kerül?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobozba 3 fehér golyó kerül, ha az első beletett golyó fehér volt?

289. Egy meghatározott gyapjúfajta szálai átlag 75%-ban 45 mm-nél rövidebbek, 25%-ban ennél hosszabbak. Mekkora annak valószínűsége, hogy három találomra kivett szál közül kettő rövidebb, egy pedig hosszabb 45 mm-nél?

290. Statisztikai vizsgálatok alapján tudjuk: annak valószínűsége, hogy egy újszülött fiú, 0,516. Tegyük fel, hogy egy családban 6 gyermek van. Mekkora annak valószínűsége, hogy legfeljebb 2 lány van köztük?

291. Tegyük fel, hogy annak valószínűsége, hogy egy város vízellátása valamely napon normális: 0,98. Mekkora annak valószínűsége, hogy egy év alatt legfeljebb két napon nem lesz normális a vízellátás?

292. Egy 1000 darabból álló alkatrészhalmaz 30%-át az A üzem gyártotta, 70%-át a B üzem. A gyártó üzem jele az alkatrészeken megtalálható. Véletlenszerűen veszünk visszatevéssel egy 20 elemű mintát. Mennyi a valószínűsége, hogy a minta az A üzem termékeiből legfeljebb 4 darabot tartalmaz? Írjuk fel a kérdéses valószínűséget 4 tizedesjegy pontossággal.

293. Tíz golyót osztunk el egyenként, véletlenszerűen, 7 dobozba úgy, hogy bármelyik dobozt egyenlő valószínűséggel választhatjuk minden egyes golyó elhelyezésekor. Mennyi a valószínűsége, hogy a második dobozba 3 golyó kerül?

294. Két láda mindegyikében N darab gépalkatrész van, s ezek között mindkét ládában 1 selejtes. Mindkettőből n elemű mintát veszünk visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik kivett darab selejtes lesz? Keverjük össze a két láda tartalmát, s azután húzzunk ki $2n$ elemű mintát, szintén visszatevés nélkül. Mekkora annak a valószínűsége, hogy lesz közöttük selejtes? Melyik esetben nagyobb a kérdéses valószínűség?

295. Egy műhelyben két azonos típusú gépen — amelyek az I., ill. II. számozást kapták —, egymástól függetlenül dolgoznak. Annak valószínűsége, hogy valamelyik gép a nap folyamán meghibásodás miatt javításra szorul, mindkét gépre $\frac{1}{8}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a nap folyamán mindkét gép megáll, ha tudjuk, hogy

a) az I-es számú gép biztosan meg fog állni;

b) legalább az egyik gép meg fog állni?

296. Egy urnában elhelyeztünk n lapot, 1-től n-ig megszámozva. Legyen az n törzstényezőkre bontott alakja:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Kihúzunk egy lapot. Tegyük fel, hogy az az esemény, hogy egy kihúzott lap az n valamelyik adott törzstényezőjével osztható, független attól, hogy más törzstényezővel osztható-e vagy sem. Mennyi a valószínűsége, hogy a kihúzott lapon n-hez relatív prím szám fog szerepelni? (Lásd a 211. feladatot is!)

297. Legyen $B_1, B_2, \dots, B_n$ egy teljes eseményrendszer. Végezzünk n független kísérletet egy A esemény megfigyelésére. Tegyük fel, hogy az A esemény mind az n kísérletben bekövetkezett. Határozzuk meg e feltétel mellett a B_1 esemény bekövetkezésének valószínűségét!

298. Legyenek az A_1, A_2 és A_3 események egymást kizáró események, melyek a $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$ és $P(A_3)=p_3$ valószínűségekkel következnek be. Mennyi a valószínűsége, hogy n független kísérletet végezve, a kísérletek során az A_2 előbb következik be, mint az A_1 vagy az A_3? Számítsuk ki e valószínűség határértékét, ha a kísérletek száma a végtelenhez tart.

IV. A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÉS JELLEMZŐIK

1. Valószínűségeloszlás. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

299. Legyen $p=0{,}8$ és $q=1-p$. Alkothatnak-e a

$$q,\ pq,\ p^2q,\ \ldots,\ p^{k-1}q,\ldots\ (\mathrm{k}=1,\ 2,\ \ldots)$$

számok valószínűségeloszlást?

300. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei a 0, 1, 2, ... nemnegatív egész számok. Tudjuk, hogy a $\xi=k$ esemény valószínűsége arányos $\frac{1}{k!}$-sal. Határozzuk meg a $P(\xi=k)$ valószínűségeket ($k=0$, 1, 2, ...).

301. Egy kétforintost feldobunk. Definiáljunk egy olyan valószínűségi változót, mely e kísérlet lehetséges eredményeit jellemezheti. Írjuk fel e valószínűségi változó valószínűségeloszlását, eloszlásfüggvényét, és ábrázoljuk ezeket.

302. Egy ξ valószínűségi változó a következő értékeket veheti fel: -1, 0 és 6. Az ezekhez tartozó valószínűségeloszlás:

$$P(\xi=-1)=\frac{1}{3},\quad P(\xi=0)=\frac{1}{2},\quad P(\xi=6)=\frac{1}{6}.$$

Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét, és ábrázoljuk. Ábrázoljuk a ξ valószínűségeloszlását is.

303. Két kockával dobunk. A dobott számok összege valószínűségi változó. Határozzuk meg e valószínűségi változó valószínűségeloszlását. Írjuk fel ennek eloszlásfüggvényét is, és ábrázoljuk.

304. Három kockával dobunk. Számítsuk ki a dobott számok összege eloszlásfüggvényének az $x=5{,}2$ helyen felvett értékét.

305. A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0,\\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 10,\\ 1, & \text{ha} \quad 10<x. \end{cases}$$

Mit állapíthatunk meg ennek alapján a valószínűségi változóról? Definiáljunk egy olyan, konkrét kísérlettel kapcsolatos valószínűségi változót, amelynek az adott $F(x)$ eloszlásfüggvénye.

306. Egy egységsugarú, kör alakú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál, és hogy a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. A találat helyének a céltábla középpontjától mért távolsága valószínűségi változó.

a) Írjuk fel e valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és ábrázoljuk.

b) Határozzuk meg, mekkora valószínűséggel esik egy találat az $a \leqq x \leqq 2a$ $\left(a \leqq \frac{1}{2}\right)$ egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományba.

307. Egy egységnyi oldalú, négyzet alakú céltáblára lövünk. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál, és hogy a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. Tekintsük valószínűségi változónak a találat helyének a céltábla bal alsó sarkától mért távolságát. Határozzuk meg e valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

308. Egy $F(x)$ függvény néhány helyen felvett értékére a következőket kaptuk:

$$F(0)=0; \quad F(3)=0{,}63; \quad F(6)=0{,}64; \quad F(9)=0{,}12.$$

Lehet-e $F(x)$ eloszlásfüggvény?

309. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket. Melyik lehet eloszlásfüggvény, és melyik nem?

a) $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<\frac{1}{2}, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geqq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

b) $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<1, \\ \frac{x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geqq 1; \end{cases}$$

c) $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<1, \\ \frac{2x-1}{x+1}, & \text{ha } x \geqq 1; \end{cases}$$

d) $$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x<0, \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & \text{ha } x \geqq 0. \end{cases}$$

310. Mutassuk meg, hogy ha $F(x)$ a ξ eloszlásfüggvénye, akkor fennállnak a következő egyenlőségek:

a) $P(a \leqq \xi \leqq b)=F(b)-F(a)+P(\xi=b)$;

b) $P(a<\xi<b)=F(b)-F(a)-P(\xi=a)$;

c) $P(a<\xi \leqq b)=F(b)-F(a)-P(\xi=a)+P(\xi=b)$.

311. Tegyük fel, hogy egy étteremben a vendégek ebédidőben eltöltött idejét, percekben mérve, a következő eloszlásfüggvény jellemzi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ \dfrac{x}{60}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 30, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 30<x\leqq 60, \\ \dfrac{x}{120}, & \text{ha} \quad 60<x\leqq 120, \\ 1, & \text{ha} \quad 120<x. \end{cases}$$

a) Ábrázoljuk e függvényt.

b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy vendég az étteremben 30 percnél több időt tölt el? Mennyi a valószínűsége, hogy 45 percnél tovább marad?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy egy vendég 1 óránál több, de 1 óra 30 percnél kevesebb időt tölt el az étteremben?

312. Az A és B állandók mely értékére lehet az

$$F(x)=A+B \operatorname{arc\,tg} x \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

eloszlásfüggvény?

313. Határozzuk meg a 306. feladatban definiált valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, és ábrázoljuk.

314. A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen (egyenletes eloszlást feltételezve) kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ ennek a szakasz középpontjától való (pozitív) távolságát. Írjuk fel a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

315. A $(0, a)$ szakaszon véletlenszerűen megjelölünk egy pontot, majd az $(a, 2a)$ szakaszon, szintén véletlenszerűen, egy másik pontot. Jelentse ξ e két pont távolságát.

a) Írjuk fel a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a két pont távolsága $\dfrac{a}{2}$-nél kisebb?

316. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<2, \\ \dfrac{A}{(1-x)^2}, & \text{ha} \quad x>2. \end{cases}$$

Mekkora az A érték? Mekkora valószínűséggel esik ξ a $(2, 3)$ intervallumba? Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét is.

317. Írjuk fel a 311. feladatban szereplő valószínűségi változó sűrűségfüggvényét, és ábrázoljuk.

318. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} A\cos\dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0<x<\pi, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A érték?

b) Írjuk fel e valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, és ábrázoljuk.

c) Mekkora valószínűséggel vesz fel a ξ a $\dfrac{\pi}{2}$-nél nagyobb értéket?

319. Lehet-e sűrűségfüggvény az az $f(x)$ függvény, amelynek néhány helyen felvett értéke: $f(0)=0$, $f(1)=100$, $f(1{,}01)=0$?

320. Vizsgáljuk meg, hogy a következő függvények közül melyik lehet sűrűségfüggvény, s melyik nem:

a) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1<x<1, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

321. Vizsgáljuk meg, van-e olyan A szám, amelyre az

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x-3, & \text{ha} \quad \dfrac{5}{2}<x<A, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény sűrűségfüggvény.

322. Adjunk meg egy olyan valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye felveszi a 319. feladatban adott értékeket.

323. A következő függvények közül melyik lehet sűrűségfüggvény?

a) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha} \quad 0<x<1, \\ 2-x, & \text{ha} \quad 1<x<2, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 1-|1-x|, & \text{ha} \quad 0<x<2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

324. Legyen ξ sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}(2+x), & \text{ha} \quad -A<x<0, \\ \dfrac{1}{4}(2-x), & \text{ha} \quad 0<x<A \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \qquad (A \text{ állandó}),$$

a) Határozzuk meg az A értéket.

b) Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét.

c) Ábrázoljuk a sűrűség- és eloszlásfüggvényt.

d) Számítsuk ki, mekkora a $\xi>1$ esemény valószínűsége.

325. Legyen az a szám tetszőleges szám a $2\leqq a<3$ intervallumban. Legyen továbbá

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<a, \\ \dfrac{x-a}{3-a}, & \text{ha} \quad a<x<3, \\ 1, & \text{ha} \quad 3<x<a+1, \\ \dfrac{4-x}{3-a}, & \text{ha} \quad a+1<x<4, \\ 0, & \text{ha} \quad 4<x. \end{cases}$$

a) Igazoljuk, hogy e függvény az a minden $[2, 3)$ intervallumba eső értékére sűrűségfüggvény. Ábrázoljuk e függvényt.

b) Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét.

c) Melyik az az x_0 érték, amelyre $P(\xi\geqq x_0)=\frac{1}{2}$?

d) Mekkora az a értéke, ha $P(\xi<2{,}5)=\frac{1}{8}$?

326. Statisztikai adatokból megállapították, hogy a 20 éves fiúk magassága centiméterben mérve, $m=170$ és $\sigma=5$ paraméterértékekkel rendelkező, normális eloszlású valószínűségi változó.

a) Írjuk fel a 20 éves fiúk magasságát jellemző sűrűségfüggvényt.

b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott fiú 175 cm-nél magasabb?

327. Legyen ξ normális eloszlású $m=0$ és $\sigma=2$ paraméterértékekkel.

a) Írjuk fel a ξ sűrűségfüggvényét.

b) Legyen $\alpha=0{,}95$. Határozzuk meg azt a K_α számot, amelyre

$$P(\xi>K_\alpha)=\alpha.$$

328. 60 egyenlő nagyságú területről a betakarított répatermés mennyisége nagyság szerint rendezve az alábbi táblázatban található:

72,5	81,6	86,8	89,2	91,9	95,0
76,0	82,0	86,9	89,5	92,5	95,0
76,2	82,5	87,0	89,7	92,6	95,4
78,1	83,5	87,1	89,8	92,6	96,3
79,5	84,1	87,3	89,9	92,8	96,3
79,8	84,8	87,3	89,9	92,9	98,2
79,8	84,8	87,8	90,5	93,2	99,0
80,5	84,9	88,0	90,8	94,1	101,5
80,9	85,3	89,1	91,4	94,2	104,5
81,0	86,2	89,2	91,6	94,5	110,3

Tekintsük ezeket az adatokat egy ξ valószínűségi változóra (mely most az adott területen termett répa mennyiségét jelenti) kapott mintának. Rajzoljuk meg a minta empirikus eloszlás- és sűrűségfüggvényét (hisztogramját). Ennek alapján közelítőleg milyen eloszlásúnak tekinthetjük a ξ-t?

329. Bizonyos iparágban dolgozó segédmunkások havi keresetének eloszlását akarjuk meghatározni. E célból véletlenszerűen kiválasztottunk 247 segédmunkást, és feljegyeztük havi keresetüket. Az így kapott mintaelemeket 10 darab 100 Ft-os csoportba foglaltuk. A csoportbeosztás melletti oszlopban azt írtuk fel, hogy hány segédmunkásnak a keresete esik a vele egy sorban levő intervallumba. Ezt kaptuk:

Havi kereset Ft	Gyakoriság k
1001—1100	3
1101—1200	8
1201—1300	34
1301—1400	51
1401—1500	77
1501—1600	45
1601—1700	15
1701—1800	9
1801—1900	3
1901—2000	2

Rajzoljuk meg ennek alapján a minta tapasztalati eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

330. Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó. Az általa felvehető értékek legyenek: $x_1=5$ és $x_2=10$. A megfelelő valószínűségek: $p_1=P(\xi=x_1)=\frac{1}{3}$ és $p_2=$ $=P(\xi=x_2)=\frac{2}{3}$. Írjuk fel az $\eta=2\xi+1$ valószínűségi változó valószínűségeloszlását. Írjuk fel az η eloszlásfüggvényét is, és ábrázoljuk.

331. Dobjunk egy kockával. Jelentse ξ a dobott számot. Legyen

$$\eta=\xi-3 \quad \text{és} \quad \zeta=(\eta^3-\eta)^2.$$

a) Írjuk fel az η és a ζ valószínűségeloszlását.

b) Ábrázoljuk a ξ az η és a ζ eloszlásfüggvényét.

332. Legyen ξ eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ 1-\cos x, & \text{ha} \quad 0<x\leqq\frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2}<x. \end{cases}$$

Határozzuk meg az $\eta=2\xi+1$ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

333. Legyen ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2} \quad (-\infty<x<+\infty).$$

Írjuk fel a ξ sűrűségfüggvényét. Határozzuk meg az $\eta=2\xi+1$ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

334. Legyen ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, és legyen $\eta=2\xi+1$. Írjuk fel az η eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Milyen eloszlású az η?

335. Egy villanyóra nagymutatója percenként ugrik egyet. 12 óra és 12 óra 1 perc között véletlenszerűen ránézünk az órára. Állapítsuk meg, milyen lesz a következő mutatóugrásig eltelt idő eloszlása, ha az órára nézés időpontja egyenletes eloszlású az adott egy percnyi hosszúságú intervallumon.

336. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta=\xi^2$ eloszlását.

337. Legyen ξ a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású. Határozzuk meg az $\eta=\xi^2$ eloszlását.

338. A $(0, 1)$ intervallumon találomra felveszünk egy pontot. Mekkora a valószínűsége, hogy e ponttól az intervallum végpontjaiig mért távolságok négyzetösszege a távolság-négyzetösszeg minimumát α-nál nagyobb pontossággal megközelíti? $\left(0<\alpha<\frac{1}{2}\right)$.

339. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ intervallumon. Határozzuk meg az

$$\eta=a \sin \xi \quad (a>0)$$

valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

340. Legyen ξ normális eloszlású m és $\sigma>0$ paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy az

$$\eta=a\xi+b \quad (a\neq 0)$$

valószínűségi változó szintén normális eloszlású.

341. Legyen a ξ normális eloszlású m_1 és $\sigma_1>0$ paraméterekkel. Az

$$\eta=a\xi+b \quad (a\neq 0)$$

transzformációt határozzuk meg úgy, hogy az η m_2 és σ_2 paramétereire $m_2=0$ és $\sigma_2=1$ teljesüljön.

342. Legyen ξ normális eloszlású $m=0$, $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Írjuk fel az

a) $\eta_1=\xi^2$; *b)* $\eta_2=2\xi-1$ és *c)* $\eta_3=(2\xi-1)^2$

valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit.

343. Legyen ξ normális eloszlású, $m=0$ és $\sigma>0$ paraméterekkel. Írjuk fel az $\eta=\xi^2$ sűrűségfüggvényét.

344. Csapágygolyók átmérője normális eloszlású valószínűségi változó m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Írjuk fel a golyók felszínének eloszlását jellemző sűrűségfüggvényt.

345. Legyen ξ normális eloszlású $m=0$ és $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Írjuk fel az $\eta=|\xi|$ sűrűségfüggvényét.

Írjuk fel az $\eta=|\xi|$ sűrűségfüggvényét abban az esetben is, ha ξ eloszlása m és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlás.

346. Határozzuk meg annak a valószínűségi változónak a sűrűségfüggvényét, amelynek természetes logaritmusa m és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású.

347. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

a) Írjuk fel az $\eta=\sqrt{\xi}$ sűrűségfüggvényét.

b) Állapítsuk meg, mekkora valószínűséggel vesz fel az η 1-nél kisebb értéket.

348. Legyen ξ-nek az $F(x)$ eloszlásfüggvénye folytonos és szigorúan növekvő. Határozzuk meg az

$$\eta=F(\xi)$$

valószínűségi változó eloszlását.

2. A várható érték és a szórás

349. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: -1, 0, 1 és 2. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre: $\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$. Számítsuk ki a ξ várható értékét.

350. Egy urnában n cédula van, ezeken rendre az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok szerepelnek. Egy cédulát kihúzunk. A ξ jelentse a kihúzott lapon álló számot. Ha mindegyik cédula egyenlő valószínűséggel húzható, mekkora lesz a ξ várható értéke?

351. Két személy, A és B, két kockával játszanak. Az A játékos akkor fizet B-nek, ha a feldobott kockákon páratlan számok szerepelnek. A B játékos akkor fizet A-nak, ha az egyik kockán — de csakis az egyiken — páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyik sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

352. Két személy, A és B, a 32 lapos magyar kártyával játszik. A játékszabály a következő: az asztal közepére tett kártyacsomagból felváltva felütnek egy-egy lapot. Ha az első négy felütött lap között van piros, akkor A fizet B-nek 10 Ft-ot. Ha a négy lap között nincs piros, akkor B fizet A-nak 7 Ft-ot. Melyik játékosnak előnyösebb a játék? Mennyit fizessen B az A-nak az A 10 Ft-os ajánlatára, hogy a játék igazságos legyen?

353. Tekintsük azt a lottójátékot, ahol 90 számból 5-öt húznak ki, és az 5, 4, 3, 2 találat esetén a tiszta nyereség (a szelvény árát is leszámítva) 1 000 000, 100 000, 600 és 20 Ft. A 0 és 1 találat esetén a „nyereség” $-3{,}30$ Ft (azaz: a szelvény ára negatív előjellel). Mekkora lesz a nyereség mint valószínűségi változó várható értéke?

354. Egy kockával addig dobunk, míg 6-ost nem dobunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beszámítjuk?

355. Két kockával dobunk addig, míg valamelyiken 6-ost nem dobunk. Mekkora lesz a dobások várható száma, ha az utolsó dobást is beszámítjuk?

356. Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei az

$$x_k = (-1)^k \frac{2^k}{k}$$

számok, és a megfelelő valószínűségek:

$$p_k = P(\xi = x_k) = \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mutassuk meg, hogy a p_k számok valószínűségeloszlást alkotnak, és hogy ξ-nek nincs várható értéke.

357. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek a $0, 1, 2, \ldots, n$ számok, és $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ alkossák a megfelelő valószínűségeloszlást. Bizonyítsuk be, hogy

$$M(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi > i).$$

358. Legyen ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{ha} \quad 0 < x < \dfrac{1}{4}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét.

b) Mekkora annak valószínűsége, hogy ξ-nek a 0-tól való eltérése kisebb, mint 0,1?

359. Számítsuk ki a 306. feladatben definiált valószínűségi változó várható értékét. Mennyi a valószínűsége, hogy a találat helyének a céltábla középpontjától mért távolsága kisebb lesz, mint a várható érték?

360. Számítsuk ki, mekkora a vendégek étteremben eltöltött idejének várható értéke, ha az étteremben eltöltött idő valószínűségeloszlását a 311. feladatban adott $F(x)$ eloszlásfüggvény jellemzi.

361. Milyen A értékre lehet az

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

függvény sűrűségfüggvény? Mutassuk meg, hogy az e sűrűségfüggvénnyel jellemzett valószínűségi változónak nincs várható értéke.

362. Igazoljuk, hogy ha a ξ lehetséges értékei az $[a, b]$ intervallumba esnek, akkor

$$a \leqq M(\xi) \leqq b.$$

363. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(x)$ sűrűségfüggvény görbéje az $x=a$ egyenesre szimmetrikus, és $M(\xi)$ létezik, akkor $M(\xi)=a$.

364. Számítsuk ki az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó n-edik momentumát.

365. Legyen a ξ normális eloszlású $m=0$ és $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó $2k$-adrendű és $2k+1$-edrendű momentumait $(k \geqq 1)$.

366. Legyenek a ξ lehetséges értékei: 1, 2, 3. A megfelelő valószínűségek:

$$P(\xi=1)=\frac{1}{3}, \quad P(\xi=2)=\frac{1}{2}, \quad P(\xi=3)=\frac{1}{6}.$$

a) Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét és ábrázoljuk.

b) Számítsuk ki a ξ várható értékét és szórását.

367. A ξ lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5. Az ezekhez tartozó $p_1, p_2, \ldots, p_5$ valószínűségek (ebben a sorrendben) számtani sorozatot alkotnak, és $p_1=10^{-1}$.

a) Írjuk fel a ξ valószínűségeloszlását.

b) Számítsuk ki a $P(|\xi-M(\xi)|>D(\xi))$ valószínűséget.

368. Legyen ξ a p valószínűségű A esemény bekövetkezéseinek száma, ha n független kísérletet végzünk. Határozzuk meg az A esemény relatív gyakoriságának eloszlását. Számítsuk ki e relatív gyakoriság várható értékét és szórását.

369. Számítsuk ki a következő sűrűségfüggvényekkel jellemzett eloszlások várható értékét és szórását:

a) $$f(x)=\begin{cases} 2x, & \text{ha} \quad 0<x<1, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases} |x|, & \text{ha} \quad -1<x<1, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

c) $$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2};$$

d) $$f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0; \end{cases}$$

e) $$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-1)}, & \text{ha} \quad x>1, \\ 0, & \text{ha} \quad x<1; \end{cases}$$

f) $$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

370. Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki a ξ várható értékét és szórását.

371. Számítsuk ki az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$$

sűrűségfüggvénnyel jellemzett valószínűségi változó várható értékét és szórását.

372. Valaki egy valószínűségszámítási feladat megoldása során a következő integrált számította ki:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-2)^2}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}dx.$$

Mit számíthatott ki? Milyen eredményt kellett kapnia?

373. Legyen ξ egyenletes eloszlású az $(1, 5)$ intervallumon. Mekkora valószínűséggel vesz fel ξ a várható értékénél nagyobb értéket? Mekkora valószínűséggel lesz a ξ eltérése a várható értékétől nagyobb, mint a szórása?

374. Egy gyárban ötféle kötött pulóvert készítenek. Az egyes pulóverekhez szükséges gyapjúfonal mennyisége rendre 44, 45, 48, 60 és 64 dekagramm. Az egyes pulóverfajták iránti kereslet nem egyforma. Közvéleménykutatás alapján megállapították, hogy a vásárlók 30%-a az első, 10%-a a második, 10%-a a harmadik fajtát venné, a negyedik és ötödik fajta pulóver után pedig a közönség 25—25%-a érdeklődik.
Ha a gyár a közvéleménykutatás alapján kapott aránynak megfelelően gyártja a pulóvereket, mennyi lesz az egy pulóverre jutó gyapjúmennyiség várható értéke és szórása?

375. Legyen a ξ várható értéke $M(\xi)$ és szórása $D(\xi)>0$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\eta=\frac{\xi-M(\xi)}{D(\xi)}$$

valószínűségi változó várható értéke 0, és szórása 1.

376. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós c szám esetén

$$M((\xi-c)^2)\geqq M[(\xi-M(\xi))^2],$$

és az egyenlőségjel csak a $c=M(\xi)$ esetén áll fenn, ha a feladatban szereplő várható értékek léteznek.

377. Legyen ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon. Jelölje most m a ξ várható értékét és σ a ξ szórását. Számítsuk ki a

$$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma) \qquad k\geqq 0$$

valószínűséget.

378. Legyen ξ exponenciális eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki a

$$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma) \qquad k\geqq 0$$

valószínűséget, ha most az m és σ az exponenciális eloszlás várható értékét, ill. szórását jelöli.

379. Legyen ξ standard normális eloszlású, vagyis legyen a ξ várható értéke 0, és szórása 1. Feleljünk a következő kérdésekre:

a) mekkora valószínűséggel esik ξ a $(-1, 1)$ intervallumba;

b) mennyi valószínűséggel veszi fel ξ a $(-1, 2)$ intervallum valamely értékét;

c) a várható érték milyen sugarú környezetébe esik a ξ 50% valószínűséggel?

380. Egy fűrésztelepen deszkákat készítenek. A deszkák hossza normális eloszlást követ, melynek várható értéke 5 méter, szórása pedig 0,1 méter.

a) Mekkora annak valószínűsége, hogy valamelyik deszka hossza a várható értéktől nem fog a szórás kétszeresénél jobban eltérni?

b) Mekkora az A szám, ha annak valószínűsége, hogy egy deszka A méternél hosszabb, 0,6-del egyenlő?

381. Legyen a ξ normális eloszlású m várható értékkel és $\sigma > 0$ szórással. Igazoljuk, hogy

a) $P(\xi < m - 3\sigma) + P(\xi > m + 2\sigma) = 2 - \Phi(3) - \Phi(2)$;

b) $P(|\xi - m| > k\sigma) = 2(1 - \Phi(k)), \quad (k > 0)$.

382. A 328. feladatban megadtunk egy ξ valószínűségi változóra vonatkozó 60 elemű mintát. Számítsuk ki a minta empirikus várható értékét és korrigált empirikus szórását. Írjuk fel ezek segítségével annak a sűrűségfüggvénynek az egyenletét, amely a minta alapján készített empirikus sűrűségfüggvény menetével lényegében egyezik.

383. A ξ valószínűségi változó normális eloszlású $m_1 = 3$ várható értékkel és $\sigma_1 = 10$ szórással. Melyik az a lineáris transzformáció, amely ezt a valószínűségi változót $m_2 = 5$ és $\sigma_2 = 20$ paraméterértékekkel rendelkező normális eloszlásúvá teszi?

384. Számítsuk ki a 331. feladatban definiált ξ, η és ζ várható értékét és szórását.

385. Legyen ξ a 318. feladatban definiált valószínűségi változó. Számítsuk a ξ várható értékét és szórását. Számítsuk ki az $\eta = 2\xi + 1$ várható értékét és szórását is.

386. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-1, \sqrt{3})$ intervallumon, és legyen $\eta = \operatorname{arc\,tg} \xi$. Írjuk fel az η sűrűségfüggvényét, és számítsuk ki várható értékét.

387. Legyen a ξ folytonos valószínűségi változó. Igazoljuk, hogy az $\eta = |\xi|$ várható értéke:

$$M(|\xi|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx.$$

388. Számítsuk ki az $\eta = |\xi|$ várható értékét, ha a ξ egyenletes eloszlású a $(-a, a)$ intervallumon.

389. A ξ egyenletes eloszlású az $(a, 5)$ intervallumon, és $P(\xi < M(\xi + 1)) = \frac{5}{6}$. Írjuk fel ξ sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

390. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek: 1, 2, ..., n, és legyen

$$P(\xi=k)=\frac{1}{n} \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Számítsuk ki a ξ várható értékét, szórásnégyzetét és várható eltérését.

391. $2n$ számú pénzérmét feldobunk. Tegyük fel, hogy minden pénzérme $\frac{1}{2}$ valószínűséggel eshet bármelyik lapjára. Jelentse ξ az „írásdobások" számát. Számítsuk ki a ξ várható értékét, szórását és várható eltérését.

392. Legyen ξ Poisson-eloszlású $\lambda>0$ várható értékkel. Mutassuk meg, hogy ha a λ az n és $n+1$ egész számok közé esik, vagyis ha

$$n \leqq \lambda < n+1$$

fennáll, akkor a ξ várható eltérése:

$$d(\xi)=2\lambda\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

393. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó várható eltérését, ha a ξ az (a, b) intervallumon

a) egyenletes eloszlású;
b) normális eloszlású;
c) exponenciális eloszlású.

394. Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változónak van várható értéke, és létezik a $d(\xi)=M[|\xi-M(\xi)|]$ várható eltérés is. Mutassuk meg, hogy

a) $\eta_1=\xi+b$ esetén $d(\eta_1)=d(\xi)$;
b) $\eta_2=a\xi$ esetén $d(\eta_2)=|a|\, d(\xi)$.

395. Legyen a ξ egyenletes eloszlású a $(-2, 1)$ intervallumon és legyen $\eta=|\xi|$. Határozzuk meg az η

a) eloszlás- és sűrűségfüggvényét;
b) várható értékét és szórását;
c) várható eltérését;
d) és annak valószínűségét, hogy η az $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ intervallumba esik.

3. A Csebisev-egyenlőtlenség és a nagy számok törvénye

396. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye csak a (0, 6) intervallumban különbözik 0-tól, és $M(\xi)=1$. Igazoljuk, hogy

$$P(\xi<5)\geqq\frac{4}{5}.$$

397. Egy forgalmas pályaudvaron, meghatározott időben, egy újságárus 1 óra alatt eladott újságainak száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda=64$ várható értékkel.

Adjunk alsó becslést a

$$P(48<\xi<80)$$

valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével, ha ξ az eladott olvasnivalók számát jelenti.

398. Mutassuk meg, hogy a Csebisev-egyenlőtlenség a következő alakban is írható:

$$P(|\xi-M(\xi)|<\varepsilon)\geqq 1-\frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2},$$

ha a ξ várható értéke és szórása létezik.

399. Egy gyufagyárban a dobozokat automata gép tölti. Az egyes dobozokban levő gyufaszálak száma valószínűségi változó, amelynek eloszlása a tapasztalatok alapján a következő:

darabszám	47	48	49	50	51	52	53
valószínűség	0,05	0,10	0,15	0,40	0,15	0,10	0,05

Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével a $P(48<\xi<52)$ valószínűségre, majd számítsuk ki e valószínűséget pontosan is a fenti táblázatban adott valószínűségeloszlás alapján.

400. Egy nagyüzem dolgozói közül 30% végzett felsőfokú iskolát. Az üzem dolgozói közül véletlenszerűen kiválasztunk 10 000 dolgozót.

a) Mennyi lesz ezek között a felsőfokú végzettségűek várható száma?

b) Legalább mekkora a valószínűsége, hogy a felsőfokú végzettségűek számának valódi értéke e várható értéktől 5%-nál kevesebbel tér el?

401. Egy gyár egyik részlegében apró szögeket készítenek. A szögeket automata gép csomagolja. A becsomagolt szögek mennyisége valószínűségi változó, amelynek várható értéke 5000, szórása 10. A szögek számának eloszlása nem ismeretes. Legfeljebb mekkora a valószínűsége, hogy egy csomagban a szögek száma a várható értéktől 50-nél többel tér el?

402. A tapasztalatok szerint egy üzemben a termékek 95%-a hibátlan. Az üzemnek meghatározott idő alatt 100 000 darab terméket kell készítenie. Legalább mennyi a valószínűsége, hogy a legyártott termékek közül 93 000 és 97 500 közé esik a hibátlan termékek száma?

403. Legyen ξ olyan folytonos valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke és szórása. A rövidség kedvéért jelöljük most ezeket a következőképpen: $m=M(\xi)$ és $\sigma=D(\xi)$. Igazoljuk, hogy $k>0$-ra fennállnak az

$$\int_{-\infty}^{m-k\sigma}(x-m)^2f(x)\,dx\geqq k^2\sigma^2P(\xi<m-k\sigma)$$

és az

$$\int_{m+k\sigma}^{+\infty}(x-m)^2f(x)\,dx\geqq k^2\sigma^2P(\xi\geqq m+k\sigma)$$

egyenlőtlenségek.

404. Az előző feladatban szereplő egyenlőtlenségek felhasználásával, a

$$\sigma^2 > \int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx + \int_{m+k\sigma}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx$$

nyilvánvaló egyenlőtlenségből kiindulva, bizonyítsuk be a Csebisev-egyenlőtlenséget.

405. Hány dobást kell végeznünk egy kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét $\left(\text{mely nem feltétlenül } \frac{1}{6}\right)$ a kapott relatív gyakoriság legalább 0,9 valószínűséggel $\frac{1}{20}$-nál kisebb hibával megközelítse?

406. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni 90% valószínűséggel a találatok száma?

407. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak valószínűsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad: 0,008 minden szálra. Határozzuk meg, hogy 0,95 valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt?

408. Egy csavargyártó automata esetében kívánjuk meghatározni a selejtarányt (azaz: a selejtgyártás valószínűségét). E célból megvizsgálunk 5000 csavart. Összesen 80 selejtest találunk köztük. Határozzuk meg, hogy az ebből számított $\frac{80}{5000}$ relatív gyakoriság az ismeretlen p valószínűséget 90% biztonsággal mennyire közelíti meg.

409. Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell végezni ahhoz, hogy a megfigyelésekből adódó arány a valódi aránytól 95% valószínűséggel legfeljebb 0,01-dal térjen el?

V. TÖBBDIMENZIÓS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

1. Többdimenziós valószínűségeloszlás. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

410. Egy dobozban 1-től 22-ig számozott, 22 darab cédulát helyeztünk el. Véletlenszerűen kihúzunk egy cédulát. A kihúzott szám két szempontból érdekel: a 2-vel és a 3-mal való oszthatóság szempontjából. A ξ valószínűségi változó legyen 1, ha páros számot húzunk, és legyen 0, ha páratlant húzunk. Hasonlóképpen az $\eta=1$ jelentse azt az eseményt, hogy hárommal osztható a kihúzott szám, és $\eta=0$ azt, hogy 3-mal nem osztható. Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó valószínűségeloszlását, és határozzuk meg a ξ és η peremeloszlását.

411. Végezzünk két kockával dobásokat. A ξ jelentse az egyik kockán dobott számot, η jelentse a másikon dobottat. Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását.

412. Egy dobozban 30 darab 40 wattos, 30 darab 60 wattos és 40 darab 100 wattos villanykörte van. Kiveszünk véletlenszerűen, visszatevés nélkül, 20 villanykörtét. Jelentse ξ a mintában szereplő 40 wattos égők számát, η pedig a 60 wattos égők számát. (Ekkor nyilvánvaló, hogy a 100 wattos égők száma a mintában: $20-\xi-\eta$.)

a) Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó valószínűségeloszlását.

b) Számítsuk ki a ξ és η peremeloszlását is.

413. Egy dobozban n piros, n fehér, n zöld és n kék golyó van. Véletlenszerűen kiveszünk (visszatevés nélkül) n golyót. Jelentse ξ a mintában levő piros, η a fehér, és ζ a zöld golyók számát.

a) Írjuk fel a (ξ, η, ζ) háromdimenziós valószínűségi változó valószínűségeloszlását.

b) Számítsuk ki a ξ peremeloszlását, és a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó peremeloszlását.

414. Egy kockával 10 dobást végzünk. Mekkora a valószínűsége, hogy kétszer dobunk 1-est, kétszer 6-ost és 6-szor mást?

415. Valamilyen gépalkatrész gyártásánál a kész munkadarabok vizsgált mérete 5%-ban van az alsó tűréshatár alatt és 3%-ban a felső tűréshatár fölött.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy a kész termékek közül egy 50 elemű mintát véve visszatevéssel, ebben 5 darab mérete lesz az alsó tűréshatár alatt és 3 darab mérete lesz a felső tűréshatár felett?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy az 50 elemű minta 3 olyan elemet tartalmaz, amelynek mérete a felső tűréshatár felett van?

416. Általánosítsuk a Bernoulli-féle problémát!

Legyenek adottak az egymást páronként kizáró $A_1, A_2, \ldots, A_m$ események. Végezzünk ezek megfigyelésére n független kísérletet. Legyen $P(A_i)=p_i (i=1, 2, \ldots, m)$ minden kísérletnél, és jelentse ξ_i az A_i esemény bekövetkezéseinek számát az n kísérlet során. Határozzuk meg az m dimenziós $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ eloszlását.

417. A (ξ, η) lehetséges értékeit és valószínűségeloszlását a következő táblázatban foglaltuk össze:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

$$p=\frac{1}{12}.$$

Írjuk fel a (ξ, η) eloszlásfüggvényét és ábrázoljuk.

418. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $(-a \leqq x \leqq a, -b \leqq y \leqq b)$ egyenlőtlenségekkel jellemzett téglalap alakú tartományon.

a) Írjuk fel a (ξ, η) eloszlásfüggvényét.

b) Számítsuk ki az eloszlásfüggvény alapján a

$$P(\xi<0,\ \eta<0), \quad P\left(\xi<0,\ \eta \geqq \frac{b}{2}\right),$$

$$P\left(0 \leqq \xi < \frac{a}{2},\ 0 \leqq \eta < \frac{b}{2}\right) \text{ és } P\left(\xi > \frac{a}{2}\right)$$

valószínűségeket.

419. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq a-x$ tartományon. Írjuk fel a (ξ, η) eloszlásfüggvényét, és számítsuk ki a ξ és η perem-eloszlásfüggvényét.

420. A (ξ, η) eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x, y)=\begin{cases} 1+e^{-x-y}-e^{-x}-e^{-y}, & \text{ha } x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a ξ és η perem-eloszlásfüggvényét. Számítsuk ki a $P(\xi<1, \eta<1)$ valószínűséget.

421. Mutassuk meg, hogy az

$$F(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y \leqq -x, \\ 1, & \text{ha} \quad y > -x \end{cases}$$

függvény nem lehet eloszlásfüggvény.

422. Tegyük fel, hogy a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó egyenletes eloszlású a sík $0<x<1$, $0<y<1$ egységnégyzetében, azaz: ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0 & \text{különben}. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ekkor a ξ és η külön-külön egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

423. Legyen (ξ, η) a 419. feladatban definiált kétdimenziós valószínűségi változó. Számítsuk ki a (ξ, η) sűrűségfüggvényét és a perem-sűrűségfüggvényeket, először felhasználva a 419. feladat eredményeit, másodszor az egyenletes eloszlás definíciója alapján.

424. Számítsuk ki a

$$P(\xi<1,\ \eta<1) \quad \text{és} \quad P\left(\xi<1,\ \eta \geqq \frac{3}{2}\right)$$

valószínűségeket, ha (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

a) $f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{ha} \quad 0<x<2,\ 0<y<2, \\ 0 & \text{különben}; \end{cases}$

b) $f(x, y)=\begin{cases} e^{-x-y}, & \text{ha} \quad x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{különben}. \end{cases}$

425. Állapítsuk meg, lehet-e sűrűségfüggvény az

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}$$

függvény.

426. Határozzuk meg, az A milyen értéke mellett lehet az

$$f(x, y)=x^2+Ay^2$$

függvény a $(0<x<1,\ 0<y<2)$ tartományban egy (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Írjuk fel a ξ és η perem-sűrűségfüggvényét is.

427. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0<x<1,\ 0<y<2(1-x), \\ 0 & \text{különben}. \end{cases}$$

a) Írjuk fel a ξ és η perem-sűrűségfüggvényét.

b) Írjuk fel a

$$P\left(\xi<x,\ 1<\eta<\frac{3}{2}\right)$$

valószínűséget mint az x változó függvényét.

428. A (ξ, η, ζ) háromdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y, z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2y+2z+2)}$$

Számítsuk ki a ξ, η és ζ perem-sűrűségfüggvényét. Számítsuk ki a (ξ, η) együttes perem-sűrűségfüggvényét is.

2. Feltételes eloszlások. Valószínűségi változók függetlensége

429. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása legyen a 417. feladatban adott eloszlás. Számítsuk ki az

a) $P(\xi=i\,|\,\eta=0)$ $\quad (i=0, 1, 2)$;

b) $P(\xi<2\,|\,\eta=0)$;

c) $P(\xi\geqq 1\,|\,\eta=1)$;

d) $P(\eta=1\,|\,\xi\geqq 1)$

valószínűségeket.

430. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0\leqq x\leqq a$, $0\leqq y\leqq a$ négyzeten. Számítsuk ki az

a) $F(x\,|\,y\leqq\eta<y+h)$ és $F(x\,|\,y)$ feltételes eloszlásfüggvényeket $(h>0)$ és

b) az $f(x\,|\,y)$ feltételes sűrűségfüggvényt.

431. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye a 427. feladatban megadott függvény.

a) Számítsuk ki az

$$F\left(x\,\middle|\,1<\eta<\frac{3}{2}\right)$$

feltételes eloszlásfüggvényt.

b) Számítsuk ki az

$$F(x\,|\,1<\eta<3)$$

feltételes eloszlásfüggvényt.

432. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású az $x^2+y^2\leqq 1$ körön.

a) Írjuk fel a (ξ, η) sűrűségfüggvényét.

b) Számítsuk ki a ξ és η perem-sűrűségfüggvényét.

c) Írjuk fel az $f(x\,|\,y)$ és $f(y\,|\,x)$ feltételes sűrűségfüggvényt, majd számítsuk ki az $F(x\,|\,\eta=0)$ feltételes eloszlásfüggvényt is.

433. Határozzuk meg az $f(x\,|\,y)$ és $f(y\,|\,x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket, ha (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

a) $$f(x, y)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)};$$

b) $$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}$$

434. Biztosítótársaságok adatai alapján megállapítható, hogy bizonyos káresetek során a kár nagysága (pénzben kifejezve) olyan valószínűségi változó, amelyet az $m=0$ és $\sigma>0$ paraméterű normális eloszlás pozitív értékekre csonkított eloszlása jellemez.

a) Írjuk fel a kérdéses csonkított eloszlás sűrűségfüggvényét.

b) Számítsuk ki a kárösszeg várható értékét.

c) Mekkora annak valószínűsége, hogy a keletkezett kár egy adott a pénzösszegnél nagyobb lesz?

435. A (ξ, η) eloszlásfüggvénye legyen a 420. feladatban adott eloszlásfüggvény. Mutassuk meg, hogy a ξ és η valószínűségi változók függetlenek. Számítsuk ki ezek után a $P(\xi<1, \eta<1)$ valószínűséget.

436. Mutassuk meg, hogy a 428. feladatban definiált ξ, η és ζ valószínűségi változók függetlenek. Írjuk fel ezek után a ξ és η együttes sűrűségfüggvényét. Írjuk fel az $f(y|z)$ feltételes sűrűségfüggvényt is.

437. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását jellemezze az

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{4}[1+xy(x^2-y^2)], & \text{ha} \quad |x|\leqq 1, |y|\leqq 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény. Állapítsuk meg, független-e a ξ és η, vagy nem. Írjuk fel az $f(x|y)$ és $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket. Végül számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)\,dx \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)\,dy$$

integrálokat.

438. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x, y)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0<x<1,\ 0<y<2(1-x), \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Állapítsuk meg, függetlenek-e a ξ és η valószínűségi változók.

b) Írjuk fel az $f(x|y)$ és $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket.

c) Számítsuk ki a

$$P\left(0<\xi<\frac{1}{2} \,\middle|\, \eta=\frac{1}{2}\right)$$

valószínűséget.

439. Jelentse ξ valamely személy életkorát (pl. években). Jelöljük $p(x, t)$-vel annak valószínűségét, hogy a kérdéses személy, feltéve, hogy az x kort megérte, még t időt is megér, vagyis legyen

$$p(x, t)=P(\xi\geqq x+t \mid \xi\geqq x) \qquad (x, t\geqq 0).$$

Mutassuk meg, hogy fennáll a következő összefüggés:

$$p(x, t+v)=p(x, t)\cdot p(x+t, v) \ (v\geqq 0).$$

440. Legyen n pozitív egész szám. Az előző feladatban igazolt összefüggés segítségével igazoljuk a következő egyenlőség fennállását:

$$p(x,\ n)=p(x,\ 1)\cdot p(x+1,\ 1)\cdot p(x+2,\ 1)\cdots p(x+n-1,\ 1).$$

Fogalmazzuk meg szavakban is e képlet mondanivalóját.

441. Legyen $l(x)$ egy olyan függvény, amely megadja, hogy $l(0)$ számú újszülött közül x év elteltével még hány személy van életben. (Ilyen függvény pl. egy olyan táblázat is, amely azt mutatja, hogy 100 000 újszülött közül hány éri meg az 1., a 2., . . . életévét. Ilyen táblázatok alapján dolgoznak a biztosítótársaságok. Ismeretes olyan folytonos $l(x)$ függvény is, amely a tapasztalattal jól megegyező értékeket ad — eltekintve a véletlen ingadozásoktól.) Mutassuk meg, hogy a klasszikus képlet feltételeinek teljesülése esetén igaz a következő összefüggés:

$$p(x,\ t)=\frac{l(x+t)}{l(x)} \quad (x,\ t\geqq 0).$$

442. Jelentse a $d(x)$ függvény az $l(0)$ számú megfigyelt újszülött közül azok számát akik az x-edik életévüket megérték, de az $x+1$-ediket már nem, vagyis legyen

$$d(x)=l(x)-l(x+1).$$

Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy egy x évet megért ember az $x+1$-edik évének betöltése előtt meghal, a következő:

$$P(\xi\leqq x+1\,|\,\xi\geqq x)=1-p(x,\ 1)=\frac{d(x)}{l(x)}.$$

443. Jelölje ξ továbbra is valamely egyén életkorát. Fejezzük ki a ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét az előzőkben definiált $l(x)$ függvény segítségével. [Tegyük fel, hogy $l(x)$ folytonos és differenciálható függvény.]

444. Legyen η egy az x évet megért ember haláláig eltelt idő. Írjuk fel az η eloszlásfüggvényét az $l(x)$ függvény segítségével, és számítsuk ki az η sűrűségfüggvényét is.

3. Valószínűségi változók függvényeinek eloszlása

445. A következő táblázatban a $(\xi,\ \eta)$ valószínűségeloszlását írtuk fel:

ξ \ η	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

$$p=\frac{1}{12}.$$

Számítsuk ki a

a) $\zeta_1=\xi+\eta$; *b)* $\zeta_2=\xi-\eta$;

c) $\zeta_3=|\xi-\eta|$; *d)* $\zeta_4=\xi\cdot\eta$

valószínűségi változók eloszlását.

446. Egy üzemben valamely gép működését vizsgáljuk. Ismeretes, hogy annak valószínűsége, hogy a gép valamelyik napon működik, p-vel egyenlő, s a gép működése független attól, hogy más napokon működött-e, vagy sem. Jelentse ξ azoknak a napoknak a számát, melyeken a gép hibátlan volt. A gép meghibásodásakor rögtön egy másik gépet állítottak helyére. Erre vonatkozólag ugyanazok a feltételek teljesülnek, mint az előzőére. Jelentse η a hibátlan működésben eltelt napok számát.

Határozzuk meg az egymás után munkába állított két gép munkában eltöltött napjai összegének valószínűségeloszlását.

447. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots$ valószínűségi változók függetlenek és mind ugyanazon p paraméterű karakterisztikus eloszlásúak, vagyis legyen minden j-re:

$$P(\xi_j=1)=p, \quad P(\xi_j=0)=1-p.$$

Tekintsük most az

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_\nu$$

összeget, s tegyük fel, hogy ebben a tagok száma (azaz ν) maga is valószínűségi változó, amely Poisson-eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel.

Számítsuk ki a teljes valószínűség tételének felhasználásával az η valószínűségeloszlását.

448. Legyen a (ξ, η) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Írjuk fel a

$$\zeta_1=\xi+\eta$$

$$\zeta_2=\xi-\eta$$

valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét.

449. Legyen (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású az

$$f(x, y)=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}e^{-\frac{x^2-2xy+3y^2}{4}}$$

sűrűségfüggvénnyel. Vezessük be a

$$\zeta=\eta-\xi,$$

$$\tau=\eta$$

transzformációt.

a) Írjuk fel a ζ és τ együttes sűrűségfüggvényét.

b) Állapítsuk meg, független-e a ζ és a τ, vagy nem.

450. Legyen ξ és η mindegyike normális eloszlású, $m=0$ és $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Tegyük fel, hogy ξ és η függetlenek. Írjuk fel a

$$\zeta = a\xi + b\eta + c \quad \text{és} \quad \tau = \eta \quad (a \neq 0)$$

valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét, és számítsuk ki a ζ perem-sűrűségfüggvényét.

451. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$ négyszögön. A ζ és τ valószínűségi változókat a következő transzformációval definiáljuk:

$$\zeta = \xi + \eta,$$
$$\tau = \xi - \eta.$$

a) Írjuk fel a ζ és τ együttes sűrűségfüggvényét.
b) Számítsuk ki a $P(\zeta \leqq 2, \tau \geqq 0)$ valószínűséget.
c) Számítsuk ki a τ perem-sűrűségfüggvényét.

452. Legyen ξ a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású, az η pedig a (2, 4) intervallumban ugyancsak egyenletes eloszlású, és tegyük fel, hogy ξ és η függetlenek. Számítsuk ki e két valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvényét, eloszlásfüggvényét, majd ábrázoljuk a kapott függvényeket.

453. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{ha} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < x, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $\zeta = \xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

454. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,[1 + xy(x^2 - y^2)], & \text{ha} \quad -1 < x < 1,\ -1 < y < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

455. Legyen ξ és η mindegyike normális eloszlású $m=0$ várható értékkel és $\sigma=1$ szórással, s tegyük fel, hogy ξ és η függetlenek. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

456. A (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású a 425. feladatban adott sűrűségfüggvénnyel. Igazoljuk, hogy ξ és η nem függetlenek, és számítsuk ki a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

457. Legyen ξ normális eloszlású $m=0$, $\sigma=1$ paraméterértékekkel, és η egyenletes eloszlású a $(-1, 1)$ intervallumban. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét, ha ξ és η függetlenek.

458. Ágyúval egy célpontra tüzelnek, amelyről feltesszük, hogy egy derékszögű koordináta-rendszer középpontja. A golyó a (ξ, η) koordinátájú pontba csapódik. ξ és η függetlenek, és normális eloszlásúak $m=0$, $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Számítsuk ki, milyen eloszlású a lövedék becsapódási helyének a célponttól való távolsága.

459. Legyenek a ξ_1, ξ_2 és ξ_3 valószínűségi változók függetlenek és normális eloszlásúak $m=1$, $\sigma=3$ paraméterértékekkel. Mekkora annak valószínűsége, hogy

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3>0?$$

460. Legyen a (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{ha} \quad x\geqq 0, \quad y\geqq 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

461. Valamely gépalkatrész élettartama exponenciális eloszlású 1000 óra várható értékkel. A gépalkatrész törése után a törött alkatrészt rögtön kicserélik. Az új alkatrész élettartamának eloszlása egyezik az előző élettartamának eloszlásával, és a két élettartam egymástól független. Számítsuk ki, mi lesz a két alkatrész élettartama összegének eloszlása.

462. Legyen ξ exponenciális eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel, η ugyancsak exponenciális eloszlású $\mu>0$ paraméterrel $(\lambda\neq\mu)$, és legyenek ξ és η függetlenek. Számítsuk ki a ξ és η összegének eloszlását.

463. Legyen (ξ, η) folytonos kétdimenziós valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\zeta=\xi-\eta$ sűrűségfüggvényét.

464. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0<x<1$, $0<y<2$ négyszögön. Számítsuk ki a

$$\tau=\xi-\eta$$

sűrűségfüggvényét.

465. Oldjuk meg a 188. feladatot annak feltételezésével, hogy a két személy mindegyikének megérkezési időpontja egyenletes eloszlású az egységnyi hosszúságú intervallumon, és ezek függetlenek.

466. Legyen ξ és η két független, normális eloszlású valószínűségi változó, $m=0$ várható értékkel és $\sigma>0$ szórással. Számítsuk ki az

a) $\zeta_1=\xi+\eta$; *b)* $\zeta_2=\xi-\eta$;

c) $\zeta_3=\dfrac{\xi+\eta}{2}$; *d)* $\zeta_4=|\xi-\eta|$

valószínűségi változók eloszlását.

467. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0<x<1$, $0<y<2$ tartományon. Számítsuk ki a $\zeta=\xi\cdot\eta$ sűrűségfüggvényét.

468. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}, & \text{ha} \quad 0<x<2, \quad 0<y<2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a

$$\zeta=\xi+\eta \quad \text{és a} \quad \tau=\frac{\xi}{\eta}$$

valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

469. Legyen (ξ,η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{ha} \quad x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a

$$\zeta=\frac{\xi}{\eta}$$

valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

470. Számítsuk ki a

$$P(\xi+\eta<1), \qquad P(\xi+\eta\geqq 2),$$
$$P(\xi<2\eta) \quad \text{és} \quad P(\xi=\eta)$$

valószínűségeket, ha (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

a)
$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha} \quad 0<x<2,\ 0<y<2, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

b)
$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & \text{ha} \quad x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

4. A várható értékre és szórásra vonatkozó feladatok. Korrelációs együttható. Regressziós függvény

471. Bizonyos munkadarabok elkészítése során egy-egy tengelyre 10 db egyforma nagyságú alkatrészt helyeznek szorosan egymás mellé. Az alkatrészek hossza valószínűségi változó, s ezek egymástól függetlenek. Az alkatrészek hosszának várható értéke 10 cm, szórása 0,2 cm. Mekkora az összeszerelt munkadarab várható hossza, és mekkora e hossz szórása?

472. Egy löveg addig tüzel egy célpontra, amíg három találatot el nem ér. A célbatalálás valószínűsége minden lövésnél 0,05. Határozzuk meg a szükséges lövedékek számának várható értékét.

473. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} x+y, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $\xi+\eta$ és a $\xi\cdot\eta$ várható értékét.

474. Legyen (ξ, η) normális eloszlású az

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}$$

sűrűségfüggvénnyel. Számítsuk ki a $\xi\cdot\eta$ várható értékét.

475. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $(0<x<1,\ 0<y<x)$ háromszögön. Számítsuk ki a következő várható értékeket:

$$a)\ M(\xi^n\cdot\eta^k);\qquad b)\ M(\xi^n);\qquad c)\ M(\eta^k).$$

476. Mutassuk meg, hogy ha a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, akkor

$$D^2(\xi-\eta)=D^2(\xi)+D^2(\eta).$$

477. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$D^2(\xi\eta)=D^2(\xi)D^2(\eta)+M^2(\xi)D^2(\eta)+M^2(\eta)D^2(\xi).$$

Mutassuk meg, hogy a

$$D^2(\xi\eta)=D^2(\xi)D^2(\eta)$$

egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha (feltételezve, hogy sem ξ, sem η nem állandó) a ξ és η várható értéke 0.

478. Jelentse $R(\xi, \eta)$ a ξ és η korrelációs együtthatóját. Igazoljuk, hogy

$$D^2(\xi+\eta)=D^2(\xi)+D^2(\eta)+2D(\xi)D(\eta)R(\xi, \eta).$$

479. Bizonyítsuk be, hogy két karakterisztikus valószínűségi változó korrelálatlansága a két valószínűségi változó függetlenségét is jelenti.

480. Legyen

$$\zeta_1=\frac{\xi-M(\xi)}{D(\xi)}\quad\text{és}\quad\zeta_2=\frac{\eta-M(\eta)}{D(\eta)}.$$

Igazoljuk, hogy ez esetben

$$R(\zeta_1, \zeta_2)=M(\zeta_1\cdot\zeta_2).$$

481. Számítsuk ki a

$$\zeta_1=1-\xi\quad\text{és}\quad\zeta_2=\eta-1$$

korrelációs együtthatóját, ha $R(\xi, \eta)=\frac{1}{2}$.

482. Mutassuk meg, hogy ha

$$\zeta_1=a\xi+b\quad\text{és}\quad\zeta_2=c\eta+d,$$

akkor a ζ_1 és ζ_2 korrelációs együtthatója:

$$R(\zeta_1, \zeta_2)=\pm R(\xi, \eta).$$

483. Legyenek ξ, η és ζ korrelálatlan valószínűségi változók, ugyanakkora szórással. Legyen továbbá

$$\tau_1=\xi+\eta \quad \text{és} \quad \tau_2=\eta+\zeta.$$

Mutassuk meg, hogy

$$R(\tau_1, \zeta)=R(\tau_2, \zeta)=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{és} \quad R(\tau_1, \tau_2)=\frac{1}{2}.$$

484. Tegyük fel, hogy a ξ_1 és ξ_2 valószínűségi változók kovarianciája és szórása létezik. Mutassuk meg, hogy a ξ_1 és ξ_2 között fennálló

$$\xi_2=a\xi_1+b \quad a\neq 0$$

alakú összefüggésből következik, hogy (ξ_1, ξ_2) kovarianciamátrixa szinguláris, és fordítva, ha a kovarianciamátrix szinguláris, akkor fennáll a ξ_1 és ξ_2 között egy lineáris összefüggés.

485. A ξ és η együttes eloszlását a következő táblázatban adjuk meg:

$\xi \backslash \eta$	1	0
1	0,5	0,04
0	0,06	0,4

Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját.

486. Adott az A és B esemény. Ismeretes, hogy $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B|A)=\frac{1}{2}$ és $P(A|B)=\frac{1}{4}$. A ξ legyen 1, ha A bekövetkezik, és legyen 0, ha A nem következik be. Hasonlóképpen: η legyen 1, ha B bekövetkezik, és 0, ha B nem következik be. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját. Függetlenek-e a ξ és az η?

487. Valamely árucikk két üzemből kerül ki. Az A üzem gyártja a kikerülő termékek 70%-át, a B üzem a többit. A kész termékeket I., II. és III. osztályú minősítéssel hozzák forgalomba. Az A üzem termékei közül 35% első osztályú, 50% másodosztályú és 15% harmadosztályú. Hasonlóképpen a másik üzemnél 56% az első osztályú, 25% a másodosztályú és 19% a harmadosztályú termék.
Véletlenszerűen vásárolunk egy terméket. A ξ valószínűségi változó legyen 1, ha az A üzem termékét vásároljuk meg, és legyen 0, ha a B üzem termékét. Az η legyen 0, ha első osztályú a termék; 1, ha másodosztályú, és 2, ha harmadosztályú. Határozzuk meg a ξ és η együttes eloszlását. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját.

488. Statisztikai adatok szerint annak valószínűsége, hogy ikerszületéskor mindkét gyermek fiú: 0,32, s azé, hogy mindkettő lány: 0,28. Annak valószínűsége, hogy az első iker fiú és a második lány, egyenlő annak valószínűségével, hogy az első iker lány és a második fiú. A ξ legyen 0, ha az első iker fiú, és 1, ha lány. Az η valószínűségi változó vonatkozzék a második ikerre hasonlóképpen. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját.

489. A (ξ, η) együttes eloszlását a következő táblázat tartalmazza:

ξ \ η	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

a) Mekkora a p értéke? Független-e a ξ és η?
b) Számítsuk ki $\xi+\eta$ szórását.
c) Mekkora az $\eta \geqq 0$ valószínűsége?

490. Egy dobozban 4 jó, 3 hibás, és 3 selejtes termék van. Egymás után, visszatevés nélkül, kiveszünk két terméket. Jellemezze ξ az első húzás eredményét, mégpedig legyen 0, ha selejtest húzunk, 1, ha hibásat, és 2, ha jót. Jellemezze η a második húzás eredményét ugyanígy.
a) Írjuk fel az eloszlás táblázatát.
b) Független-e a két valószínűségi változó?
c) Mekkora a ξ szórása?
d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét húzás eredménye selejt, vagy mindkettő jó?

491. Az A és B jelű termékeket egy üzem gyártja. Ezeket I., II., és III. osztályú minősítéssel látták el. Egy alkalommal a készáruraktárban e termékek a következő megoszlásban szerepeltek:

	I. oszt	II. oszt.	III. oszt.
A jelű	500	200	100
B jelű	650	300	50

E halmazból egy terméket veszünk ki véletlenszerűen. $\xi=0$ jelentse, hogy A jelű, $\xi=1$, hogy B jelű a termék. $\eta=1$, $\eta=2$, ill. $\eta=3$ jelentse azt, hogy a kivett termék I., II., ill. III. osztályú.
a) Készítsük el az eloszlás táblázatát.
b) Számítsuk ki ξ és η korrelációs együtthatóját.
c) Számítsuk ki $\xi+\eta$ szórását.

492. A ξ és η valószínűségi változók lehetséges értékeit és együttes eloszlását a következő táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p_1	p_2
1	p_2	p_3

A ξ és η korrelációs együtthatója 1. Milyen összefüggés áll fenn a p_2 és p_3 valószínűségek között?

493. A ξ és η együttes eloszlását a következő táblázat mutatja:

$\xi \backslash \eta$	2	0	-1
1	p_1	p_2	p_1
0	p_2	p_1	p_2
-2	p_1	p_2	p_1

A ξ-ről és η-ról tudjuk, hogy korrelálatlanok. Kérdés: függetlenek-e?

494. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a $P_1(0, 0)$, $P_2(0, 4)$, $P_3(4, 4)$ és $P_4(4, 0)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. A (ξ, η) e pontokat egyenlő valószínűséggel veszi fel — a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi.

Számítsuk ki a (ξ, η) korrelációs együtthatóját. Állapítsuk meg, függetlenek-e a ξ és az η.

495. A (ξ, η) lehetséges értékeit a következő számpárok alkotják:

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (-1, 0), \quad (0, -1).$$

A (ξ, η) ezeket az értékeket egyenlő valószínűséggel veszi fel.

a) Határozzuk meg, függetlenek-e a ξ és η valószínűségi változók?

b) Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját.

496. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó legyen polinomiális eloszlású, a következő valószínűségeloszlással:

$$P(\xi=i,\ \eta=k)=\frac{n!}{i!\,k!\,(n-i-k)!}\,p_1^i p_2^k (1-p_1-p_2)^{n-i-k},$$

hacsak $i+k \leqq n$. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját.

497. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{ha} \quad 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Írjuk fel a ξ és η perem-sűrűségfüggvényét.

b) Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját.

498. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

a) Számítsuk ki (ξ, η) korrelációs együtthatóját.

b) Igazoljuk, hogy (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású valószínűségi változó.

499. A (ξ, η) eloszlását a 425. feladatban adott sűrűségfüggvény jellemzi. Számítsuk ki a ξ és η korrelációs együtthatóját, és igazoljuk, hogy (ξ, η) eloszlása kétdimenziós normális eloszlás.

500. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye a 425. feladatban adott $f(x, y)$ függvény. Számítsuk ki a $\zeta=\xi+\eta$ szórásnégyzetét a 478. feladatban adott képlet segítségével. Ellenőrizzük az eredményt a 456. feladat alapján.

501. Egy termék valamilyen méretét vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy a méretnek a várható értéktől való eltérése normális eloszlású $m=0$ és $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Az eltérések négyzete nyilván szintén valószínűségi változó lesz. Számítsuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

502. Jelentse ξ egy szövőgépen 1 óra alatt előforduló szálszakadások számát. A gépet kezelő munkásnak egy szál megkötözésére $\frac{1}{4}$ percre van szüksége. Az az időmennyiség, amelyet a munkás 1 órán belül nem szálkötözésre fordít, szintén valószínűségi változó, legyen ez η. Írjuk fel ξ és η korrelációs együtthatóját.

503. Egy üzem raktárában különböző alkatrészeket egyenlő nagyságú ládákban tárolnak. A ládák mindegyike V m^3 helyet foglal el. Az egy hétre eső raktározási költség két részből tevődik össze, egy állandó költségből és egy a tárolt ládák számától függő, ezzel arányos költségrészből. A raktárban levő ládák száma hetenként változhat, ez tehát valószínűségi változónak tekinthető. Így nyilván valószínűségi változó a raktárban elhelyezett ládák össztérfogata és a heti raktárköltség is. Számítsuk ki e két utóbbi valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

504. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha} \quad -2<x<6, \quad \text{és} \quad 2<y<2{,}5, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Igazoljuk, hogy ξ és η függetlenek.

b) Számítsuk ki a $P(0\leqq\xi\leqq3,\ 0\leqq\eta\leqq3)$ valószínűséget.

505. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2+2y^2}{8}} \qquad (-\infty<x<\infty, \ -\infty<y<\infty).$$

a) Határozzuk meg a perem-sűrűségfüggvényeket.

b) Igazoljuk, hogy $P(|\xi|\leqq 4)=P(|\eta|\leqq 2\sqrt{2})$.

c) Mekkora az $M(\xi\cdot\eta)$ várható érték?

506. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} ce^{-2x}, & \text{ha} \quad 0<x<\infty,\ 1<y<4, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora a c állandó?

b) Mekkora valószínűséggel esik (ξ, η) értéke a (0, 0), (2, 1), (2, 3) pontok által meghatározott háromszög belsejébe?

c) Számítsuk ki ξ és η kovarianciáját.

507. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\frac{1}{4\pi} e^{-\frac{4x^2+1-2y+y^2}{8}} \qquad (-\infty<x<\infty, \ -\infty<y<\infty).$$

a) Számítsuk ki a perem-sűrűségfüggvényeket.

b) Mekkora a $\xi+\eta$ szórása?

508. A ξ és η valószínűségi változók függetlenek. A ξ egyenletes eloszlású a (0, 5) intervallumon, az η pedig exponenciális eloszlású, 0,8 várható értékkel.

a) Írjuk fel ξ, η együttes sűrűségfüggvényét.

b) Mekkora a $P(\eta<5-\xi)$ valószínűség?

509. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} A\left(x+\dfrac{y}{2}\right), & \text{ha} \quad 0<x<1,\ 0<y<2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A értéke?

b) Írjuk fel a perem-sűrűségfüggvényeket, és ábrázoljuk őket.

c) Írjuk fel a perem-eloszlásfüggvényeket, készítsük el ábráikat is.

d) Mekkora a $P(\xi<1, \eta>1)$ valószínűség?

e) Írjuk fel a $\zeta=2\xi-1$ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

f) Számítsuk ki a ζ n-edik momentumát, és írjuk fel ennek alapján a ζ várható értékét és szórását.

510. Legyen η egy x évet megért ember haláláig eltelt idő. Tegyük fel, hogy η sűrűségfüggvénye létezik, s ez a 444. feladatban megismert függvény. Tegyük fel még, hogy teljesül a

$$\lim_{y\to\infty} y\,l(x+y)=0$$

reláció is. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az η várható értéke:

$$M(\eta\,|\,\xi\geqq x)=\frac{1}{l(x)}\int_0^\infty l(x+y)\,dy.$$

511. Egy előadás látogatóinak száma 0-tól N-ig akárhány személy lehet. Tegyük fel, hogy ezek közül minden szám egyenlő valószínűséggel fordulhat elő. Előző tapasztalatokból tudjuk, hogy a látogatók 80%-a nő. Állapítsuk meg, mekkora lesz egy adott előadáson a megjelenő nők számának várható értéke.

512. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_j, \dots$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Legyen továbbá

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_\nu,$$

ahol a ν is valószínűségi változó, amely a ξ_j valószínűségi változóktól független.

a) Számítsuk ki az η várható értékét.

b) Írjuk fel ez alapján a 447. feladatban definiált η várható értékét.

513. Legyen a ν olyan valószínűségi változó, amely csak természetes egész értékeket vesz fel, s a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots$ valószínűségi változóktól független, és legyen

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_\nu.$$

Mutassuk meg, hogy

$$M(\eta)=\sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j)P(\nu\geqq j),$$

amennyiben a szükséges várható értékek léteznek. Hogyan nyerhető ebből a képletből az előző feladat eredménye, ha feltesszük, hogy a ξ_j valószínűségi változók azonos eloszlásúak?

514. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}$$

Mutassuk meg, hogy ez esetben is

$$M(\xi)=M(M(\xi\mid\eta)).$$

515. Legyen a diszkrét (ξ, η) valószínűségeloszlása a következő:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

$$p=\frac{1}{12}.$$

Határozzuk meg a ξ-nek η-ra, ill. az η-nak ξ-re vonatkozó regressziós függvényét.

516. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 0)$ és $P_3(0; 2)$ pontok által meghatározott háromszögön. Számítsuk ki a ξ-nek η-ra vonatkozó, ill. az η-nak ξ-re vonatkozó regressziós függvényét. Ábrázoljuk e függvényeket.

517. Számítsuk ki a ξ-nek η-ra, ill. az η-nak ξ-re vonatkozó regressziós függvényét, ha (ξ, η) eloszlását az

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{4}{r^2\pi}, & \text{ha} \quad x^2+y^2 \leqq r^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény jellemzi. [Milyen eloszlású a (ξ, η)?]

518. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a sík egy konvex T tartományán. Mutassuk meg, hogy az $M(\xi|\eta=y)$ várható érték mindig az $\eta=y$ feltétellel definiált T-be eső egyenes szakasz felezőpontja. (Igaz ez a megállapítás az előző két feladatra is?)

519. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye az

$$f(x, y)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

függvény. Számítsuk ki a ξ-nek η-ra vonatkozó regressziós függvényét.

520. Számítsuk ki a (ξ, η) valószínűségi változóhoz tartozó regressziós függvényeket, ha (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2xy+2y^2)}$$

521. Számítsuk ki az η-nak $\xi=x$-re vonatkozó feltételes várható értékét, ha ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{4}{5}(x+3y)e^{-x-2y}, & \text{ha} \quad x>0,\ y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

522. Számítsuk ki a 428. feladatban adott sűrűségfüggvényű (ξ, η, ζ) háromdimenziós valószínűségi változó esetében a ξ-nek az η-ra és ζ-ra vonatkozó regressziós függvényét.

523. Legyen (ξ, η) az 515. feladatban adott valószínűségeloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a ξ-nek η-ra, ill. az η-nak ξ-re vonatkoztatott (másodfajú) regressziós egyenese egyenletét.

524. Legyen (ξ, η) az 517. feladatban definiált valószínűségi változó. Számítsuk ki a ξ-nek η-ra, ill. az η-nak ξ-re vonatkoztatott regressziós egyenese egyenletét.

525. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{1}{4}(x^2-2xy+3y^2)}$$

Számítsuk ki a

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \eta-\xi, \\ \tau &= \eta \end{aligned}\right\}$$

transzformációval definiált ζ és τ elsőfajú regressziós függvényeit, továbbá a másodfajú regressziós egyenesek egyenletét.

526. Az η-nak ξ-re vonatkozó regressziós egyenese a ξ-nek olyan lineáris függvénye, amelyre fennáll, hogy

$$M((\eta-a\xi-b)^2)\rightarrow \text{minimális}.$$

Az $\eta-a\xi-b$ jelenti a (ξ, η) pont ordinátája és az $\eta=a\xi+b$ egyenes ξ abszciszszájú pontja ordinátájának különbségét, amely nyilvánvalóan maga is valószínűségi változó. Legyen tehát

$$\zeta=\eta-a\xi-b.$$

Számítsuk ki a ζ várható értékét és szórását.

527. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0<x<1$, $0<y<x$ háromszögön. Határozzuk meg azt az

$$y=ax^2$$

alakú regressziós függvényt, amelyre

$$M((\eta-a\xi^2)^2)\rightarrow \text{minimális}.$$

528. Egy város egyik piacán 10 egymás után következő napon megfigyelést végeztek a nyári alma felhozatalára és egységárának alakulására vonatkozóan. Az adatokat a következő táblázat tartalmazza:

Sorszám	Felhozatal q	Egységár Ft|kg
1	0,4	8,50
2	0,7	9,—
3	0,9	8,60
4	1,2	8,—
5	1,2	7,80
6	1,1	7,50
7	1,4	6,90
8	1,5	6,50
9	1,5	6,60
10	1,3	6,50

a) Határozzuk meg az ezekhez az adatokhoz tartozó regressziós egyenes egyenletét.

b) Számítsuk ki az empirikus korrelációs együtthatót is.

529. Az n-dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének képletéből állítsuk elő a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényét.

VI. A LEGFONTOSABB VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSOK

1. Karakterisztikus és hipergeometriai eloszlás

530. Egy gép két napon keresztül egyforma alkatrészeket gyárt, egyenlő mennyiségben. Az első napon 10% selejt készült, a második napon már csak 4%. Az összes termék közül kiveszünk egyet, véletlenszerűen. Az A esemény jelentse azt, hogy a kivett termék jó.
Írjuk fel az A eseményhez tartozó karakterisztikus valószínűségi változó eloszlását, eloszlásfüggvényét, és ábrázoljuk ezeket.

531. Egy $N \geqq 20$ elemű alkatrészhalmazban pontosan 5% a selejtarány. Mennyi a valószínűsége, hogy a halmazból egy 20 elemű mintát véve visszatevés nélkül, a mintában levő selejtesek száma éppen 2 lesz? Számítsuk ki, mekkora e valószínűség, ha $N=20$, és ha $N=40$.

532. Egy sorsjátékon N szelvény vesz részt, s ezek közül n darabot húznak ki nyereménnyel. Hányszor nagyobb a nyerési valószínűsége annak, aki 2 szelvénnyel játszik, mint annak, aki csak egy szelvénnyel? Milyen feltételnek kell teljesülnie ahhoz, hogy két szelvénnyel a nyerési valószínűség az egy szelvénnyel való nyerési valószínűség kétszerese legyen?

533. Valaki 50 lottószelvényt tölt ki egymástól függetlenül. Mekkora annak valószínűsége, hogy nyer?

534. Valaki 10 lottószelvénnyel játszik. Mennyi a valószínűsége, hogy 3 szelvényen lesz 2 találata, ha a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki?

535. Egy asztalosipari vállalatnál 100 tábla meghatározott fajta üveget tartanak raktáron. A tapasztalatok szerint az első szállításból származó 50 tábla üveg 60%-a hibátlan, 40%-a pedig kisebb hibákat tartalmaz. A második szállításból származó üvegtáblák minősége jobb, ennek 80%-a hibátlan és 20%-a kis hibás. Az egyik véletlenszerűen kiválasztott ládából 10 tábla üveget vesznek ki. Mekkora a valószínűsége, hogy ezek között nem lesz hibás üveg?

536. Legyen a ξ hipergeometriai eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a ξ szórását.

537. Egy alkatrészhalmazban 4 selejtes van. Mintát veszünk visszatevés nélkül. A mintában szereplő selejtes alkatrészek számának várható értéke 2, szórásnégyzete $\frac{2}{3}$.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a minta legfeljebb 2 selejtest tartalmaz?

b) Oldjuk meg a feladatot visszatevéses mintavétel feltételezésével is.

538. Határozzuk meg, milyen k érték esetén veszi fel a

$$p_k = \frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(s, N, n rögzített) valószínűség a maximális értékét.

539. Egy 100 elemű alkatrészhalmazban 9 selejtes van. Visszatevés nélkül veszünk egy 50 elemű mintát. Hány selejtes lesz e mintában a legnagyobb valószínűséggel?

540. Egy dobozban csavarokat helyeztek el. Ezek száma 51-től 80-ig bármely szám lehet, és minden szám egyforma valószínűséggel fordulhat elő. Azt tudjuk, hogy a dobozban 10 csavar selejtes. Egy 20 elemű mintát veszünk ki visszatevés nélkül. Mekkora lesz a mintában szereplő selejtes csavarok várható száma?

541. Egy üzemben két gépen gyártanak egyforma munkadarabokat. Az első gépen készült munkadaraboknak 2%-a selejtes, a második gépnél 5% a selejt. Az első gép egy műszak alatt 100 terméket készít, a második 160-at. A műszak után az elkészült munkadarabok közül 20 elemű mintát vesznek. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ebben a selejtesek száma 2 lesz?

2. Binomiális eloszlás

542. Egy üzemben elektromos biztosítékokat gyártanak. A tapasztalat szerint átlagban ezek 12%-a hibás. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy 10 darab véletlenszerűen kiválasztott biztosíték között

a) nincs selejtes;

b) legalább egy selejtes van;

c) nincs 1-nél több selejtes.

543. Annak valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0,75.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy héten (6 napon) keresztül csak három napon át lesz a nyersanyagellátás zavartalan?

b) Mennyi lesz az egy heti zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

544. Megfigyelések szerint Magyarországon 1000 újszülött közül átlagosan 516 a fiú, és 484 a lány. Mekkora annak valószínűsége, hogy egy 6 gyermekes családban a fiúk száma legalább annyi, mint a lányoké?

545. Egy céltáblára öten adnak le egy-egy lövést. A lövők egyformán jók, mindegyikük 80% valószínűséggel ér el találatot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb három találat lesz a céltáblán?

546. 100 darab alkatrész közül 2 darab selejtes. Egymás után ötször veszünk ki 5 elemű mintát, véletlenszerűen, visszatevéssel. Mekkora annak valószínűsége, hogy mind az ötször jó alkatrészeket húzunk?

547. Egy gyártási folyamatban 5% a selejt. Mennyi a valószínűsége, hogy 20 darab véletlenszerűen kiválasztott gyártmányban 5-nél kevesebb selejtet találunk?

548. Valamely üzemben a legyártott gépalkatrészek 3%-a a felső tűréshatáron felüli, 5%-a pedig az alsó tűréshatáron aluli méretű. Mennyi a valószínűsége, hogy a késztermékek közül egy 50 elemű mintában 6 darabnak a mérete nem lesz megfelelő? (Feltehetjük, hogy az egyes alkatrészek méretének alakulása a többitől független.)

549. Egy alkatrészhalmazból 6 elemű mintát vettünk visszatevéssel. Annak valószínűsége, hogy a minta 3 darab selejtet tartalmaz: $\frac{4}{25}$. Mekkora a selejtarány?

550. Egy automata gépnél megfigyelték, hogy naponta átlagosan 12 darab termék lesz selejtes, és ezek számának szórása 3,41.

a) Hány terméket készít a gép naponta?

b) Mekkora annak valószínűsége, hogy egy napon a selejtes termékek száma 10-nél kevesebb?

551. Legyen a ξ binomiális eloszlású n és p paraméterekkel. Milyen értéket vesz fel a ξ a legnagyobb valószínűséggel?

552. Oldjuk meg az 539. feladatot azzal a feltételezéssel, hogy a mintavételt visszatevéssel végezzük.

553. Hány lövést kell leadni a lövegnek, hogy 90% valószínűséggel legalább 10 találatot érjen el, ha minden egyes lövés esetén 0,8 a cél eltalálásának valószínűsége?

554. Hányszor dobjunk fel egy kockát, ha azt akarjuk, hogy $\frac{1}{2}$-nél ne legyen kisebb annak a valószínűsége, hogy a 6-os dobások száma legalább 2 legyen?

555. Ha 100 különböző gép mindegyike bármelyik időpontban 0,95 valószínűséggel működik, és 0,05 valószínűséggel áll javítás alatt, mennyi a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban legalább 90 gép működik? Feltehetjük, hogy az egyes gépek meghibásodásai egymástól függetlenek.

556. Egy üzem egyik műhelyében a két nap alatt elkészült termékeket vizsgáljuk meg. Ismeretes, hogy az első napon N_1 termék készült el, a másodikon pedig N_2 darab. A selejtarány mindkét napon p volt. Az első napi termésből n_1 elemű mintát veszünk ki visszatevéssel, a második napiból pedig n_2 elemű mintát,

ugyancsak visszatevéssel. Mekkora a valószínűsége, hogy az n_1, ill. n_2 elemű mintákban levő selejtes termékek számának összege k lesz?
Tekintsük most csak a második napon készült termékek halmazát, és vegyünk ebből visszatevéssel egy n_1+n_2 elemű mintát. Mennyi a valószínűsége, hogy e mintában a selejtesek száma k lesz?

557. Egy üzemben N gépen gyártanak egyforma termékeket. A tapasztalatok alapján ismertek az egyes gépekre vonatkozó selejtarányok, ezek rendre: $p_1, p_2, \ldots p_N$. A gépeket úgy ellenőrzik, hogy műszakonként véletlenszerűen kiválasztanak egy gépet (minden gép egyenlő valószínűséggel kerül kiválasztásra), majd annak termékei közül veszik ki a megvizsgálandó n elemű mintát. Mennyi a valószínűsége, hogy az ellenőrzés során a megvizsgált n termék között k selejtest fognak találni?

558. Annak valószínűsége, hogy egy löveg célba talál, minden lövésnél 0,001. Mekkora a valószínűsége, hogy 2000 lövés közül legalább két lövés célba talál?

559. Egy életbiztosító társaságnak a többi között 10 000 olyan biztosítottja van, akik egyforma korúak és szociális helyzetűek. Annak valószínűsége, hogy egy ilyen személy az év folyamán meghal, 0,002. Minden biztosított január 1-én 12 Ft-ot fizet be, halála esetén hozzátartozóik 4000 Ft-ot kapnak. Mekkora a valószínűsége, hogy

a) a társaságnak nem lesz nyeresége;

b) legalább 40 000 Ft-ja megmarad?

560. Annak valószínűsége, hogy egy diákszálló valamelyik lakója valamelyik napon beteg lesz, és a betegszobában ágyat foglal el: 0,002. Ha 1200 lakója van a diákszállónak, hány ágyas betegszobát kell berendezni, hogy legfeljebb 1% legyen annak valószínűsége, hogy egy beteg nem kap ágyat?

561. Egy forgalmas postahivatalban egy év alatt 1017 címzetlen levelet adtak fel. Mekkora a valószínűsége, hogy egy nap 2-nél több címzés nélküli levelet adtak fel?

562. Legyen (ξ, η) polinomiális eloszlású kétdimenziós valószínűségi változó, amelynek valószínűségeloszlása $0 \leqq i+j \leqq n$-re

$$P_{ij}=P(\xi=i,\ \eta=i)=\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}p_1^i p_2^j (1-p_1-p_2)^{n-i-j}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha n tart a végtelenbe, továbbá p_1 és p_2 úgy tart a 0-hoz, hogy közben n-nel való szorzatuk állandó marad, vagyis

$$np_1=\lambda>0, \qquad np_2=\mu>0,$$

(ahol λ és μ állandók), akkor

$$\lim P_{ij}=\frac{\lambda^i}{i!}\,\frac{\mu^j}{j!}\,e^{-(\lambda+\mu)}.$$

3. Poisson-eloszlás

563. Egy augusztusi éjszakán átlag 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?

564. Egy konzervgyár valamelyik üveggyártól 1 literes üvegeket rendel. 200 darab üveg közül átlagosan 3 üveg selejtes.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 1000 üveget átnézve, abban pontosan 10 selejtes üveget találunk?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy selejtes üvegek száma legalább 10 lesz?

565. Kalácssütéskor 1 kg tésztába 30 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 dekagrammos szeletben kettőnél több mazsolaszem lesz?

566. Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba található. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott lapon nem lesz sajtóhiba, ha feltételezzük, hogy a sajtóhibák száma Poisson-eloszlású?

567. Egy ruhaszövet anyagában 100 m-enként átlag 5 hiba van. Egy 300 méteres szövetet 3 méteres darabokra vágnak. Előreláthatóan hány hibátlan darab lesz ezek között?

568. Egy üzemben vaslemezekből kiszabott idomokat használnak fel valamely termék elkészítéséhez. Egy lemezből 25 darab egyenlő nagyságú idomot vágnak ki, s a hulladék elhanyagolhatóan kicsiny. A lemezeken elhelyezkedő hibák pontszerűek, ezek száma Poisson-eloszlású, $\lambda = 3{,}5$ várható értékkel.

Hány lemezt kell az üzemnek beszereznie, ha a terv szerint 500 000 hibátlan idomot kell meghatározott időn belül feldolgoznia?

569. Egy üzem 1000 tábla üveget rendel valamelyik üveggyártól. Az üvegben előfordulhatnak kisebb hibák (kövek, buborékok), ezeknek várható értéke $\lambda = 0{,}8$ darab táblánként.

a) Állapítsuk meg, az 1000 darab leszállított üvegtábla közül várhatóan hány lesz hibátlan, hányban lesz 1 hiba, hányban 2 hiba, és így tovább.

b) Feleljünk ugyanerre a kérdésre abban az esetben is, ha tudjuk, hogy az üveggyárban a két hibánál több hibát tartalmazó táblákat kiselejtezik.

570. Jelentse η valamely üzem egymástól függetlenül működő, adott típusú berendezései meghibásodásának számát meghatározott időn belül. A berendezések közül átlagosan 1000 óránként romlik el egy. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 000 óra alatt legfeljebb 10 berendezés romlik el?

571. Swedberg svéd fizikus a Brown-mozgás tanulmányozása során 518 megfigyelést végzett vízben lebegő aranyszemcsékre vonatkozólag. Észlelései szerint adott térfogatrészben 112-szer egyetlen aranyszemcse sem volt, 168-szor talált 1 szemcsét, 130-szor 2 szemcsét, 69-szer hármat, 32-szer 4-et, 5-ször 5-öt, 1-szer 6-ot és 1-szer 7-et.

Számítsuk ki ezekből az eredményekből az aranyszemcsék számára vonatkozó relatív gyakoriságokat, az észlelt aranyszemcsék számának átlagértékét, majd hasonlítsuk össze az így kapott adatokat a megfelelő Poisson-eloszlás tagjaival.

572. Egy telefonközpontba a $(0, t)$ időintervallumban beérkező hívások számát jelölje ξ_t, a rá következő, ugyancsak t hosszúságú $(t, 2t)$ intervallumban érkező hívások számát η_t. Tegyük fel, hogy a két intervallumban befutott hívások száma egymástól független.

a) Írjuk fel a $(0, 2t)$ intervallumban érkezett hívások ζ_{2t} számának eloszlását.

b) Legyen ξ_t és η_t mindegyike Poisson-eloszlású, s tegyük fel, hogy az időegység alatt befutó hívások számának várható értéke λ. Írjuk fel ezek után a ζ_{2t} eloszlását.

573. Egy áruházban adott Δt hosszúságú időtartam alatt megjelent látogatók száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Ismeretes, hogy egy látogató p valószínűséggel vásárol valamit. Mennyi a valószínűsége, hogy adott Δt időintervallumban éppen k személy vásárol?

574. Határozzuk meg — az előző feladatban adott feltételek mellett — az áruházban adott Δt időintervallumban vásárló személyek várható számát. Számítsuk ki e várható értéket az

$$M(\xi)=M(M(\xi|\eta))$$

képlet felhasználásával is. (Figyeljük meg, felhasználjuk-e ez esetben az előző feladatban megismert valószínűségeloszlást!)

575. Egy üzem egyik gépén az egy műszak alatt elkészült termékek száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda=10^3$ paraméterértékkel. A gépen készült termékeknek átlagosan 2%-a selejtes. Mekkora annak valószínűsége, hogy az egy műszak alatt készült termékek között legfeljebb 15 lesz selejtes, ha a selejtes darabok készítése egymástól független?

4. Egyenletes eloszlás

576. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(2, 5)$ intervallumon. Írjuk fel a ξ sűrűségfüggvényét, majd ebből határozzuk meg a ξ eloszlásfüggvényét. Ábrázoljuk e két függvényt.

577. Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől szórásánál nagyobb értékkel tér el?

578. A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és $M(\xi)=D^2(\xi)=4$. Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét.

579. Legyen ξ az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású. Igazoljuk, hogy ez esetben az

$$\eta=\frac{\xi-a}{b-a}$$

valószínűségi változó a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású.

580. A ξ egyenletes eloszlású az $(a, 5)$ intervallumon. Ismeretes, hogy $P(\xi \geqq M(\xi^2-2\xi+1))=\frac{1}{6}$. Mekkora a $P(\xi \geqq M(\xi-1))$ valószínűség?

581. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a ξ olyan értéket vesz fel, amelynek első tizedesjegye 2-es?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a ξ által felvett érték második tizedesjegye 2-es?

c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a k-ik tizedesjegy lesz 2-es?

582. Valaki egy sürgős telefonhívást vár. A hívás időpontja egy reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszúságú intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A hívást váró fél tudja, hogy a hívás 80% valószínűséggel 8 és 10 óra között befut.

a) Állapítsuk meg, mekkora annak valószínűsége, hogy a hívás 1/2 10 és 10 óra között érkezik.

b) A hívás 1/2 10-ig nem jött be. Mennyi a valószínűsége, hogy 1/2 10 és 10 óra között még befut?

583. A ξ legyen egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon. Az a és b értékeket nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a $(2, 5)$ intervallum teljes egészében az (a, b) intervallumon fekszik, és $P(2 \leqq \xi \leqq 5)=\frac{1}{3}$.

a) Mekkora a $P(3 \leqq \xi \leqq 5)$ valószínűség?

b) Mekkora lehet az a minimális és a b maximális értéke?

c) Az adott feltételek mellett milyen becslést adhatunk a $P(1 \leqq \xi \leqq 3)$ valószínűségre?

5. Normális eloszlás

584. Legyen a ξ normális eloszlású $m=3$, $\sigma=2$ paraméterértékekkel. Mekkora legyen az A szám, ha azt kívánjuk, hogy a ξ a $(2, A)$ intervallumba legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel essen?

585. Hogyan jellemezhetők azok a normális eloszlású ξ valószínűségi változók, melyekre 95% valószínűséggel teljesül az, hogy a ξ-nek a várható értékétől való eltérése 1-nél kisebb?

586. Tegyük fel, hogy bizonyos fajta izzólámpák „élettartama" normális eloszlású, $m=1000$ óra várható értékkel és $\sigma=100$ óra szórással. Számítsuk ki, hogy az első 900 órában a lámpák hány százaléka megy tönkre.

587. Egy fafeldolgozó telepen deszkákat készítenek. Ezek hossza normális eloszlású, $m=400$ cm várható értékkel és $\sigma=3$ cm szórással.

a) A deszkák hányad része lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?

b) Mekkora annak valószínűsége, hogy a deszkák hossza a 400 cm-től legfeljebb 2,5 cm-rel tér el?

588. A munkapadról kikerült termék hossza normális eloszlású valószínűségi változó, $m=20$ cm és $\sigma=0{,}2$ cm paraméterértékekkel.

a) Mekkora annak valószínűsége, hogy egy termék hossza 19,7 és 20,3 cm közé esik?

b) Milyen pontosságot biztosíthatunk 0,95 valószínűséggel a munkadarabok hosszára?

589. Egy löveg tüzel egy 1200 méter távoli célpontra. A lőtávolság ingadozása az 1200 méter körül normális eloszlású 40 méter szórással. Hatásosnak tekintünk egy lövést, ha a találat a célhoz 50 méternél közelebb esik. A lövések hány százaléka lesz hatástalan?

590. Egy vasfajta megrozsdásodásának idejére vonatkozó megfigyelések alapján azt kapták, hogy az normális eloszlású 2,5 év átlagidővel és 0,25 év szórással. Mekkora annak valószínűsége, hogy egy ilyen vasból készült tárgy a második évben megrozsdásodik?

591. Egy cukorkacsomagoló gép 10 dekagramm várható súlyú csomagokat készít 5 gramm szórással. Mekkora annak valószínűsége, hogy egy vásárolt csomagban 11 dekagrammnál több cukorkát kapunk?

592. Valamely 15 mm-es átmérőjűre tervezett gépalkatrész átmérője a legyártás után valószínűségi változó, melynek várható értéke 15 mm, és szórása 0,5 mm. Egy alkatrészt akkor tekintünk selejtesnek, ha átmérője a tervezett értéktől 5%-nál többel tér el. Mekkora a valószínűsége, hogy selejtes alkatrész készül?

593. Valamely szolgáltató vállalathoz a naponta beérkező — meglehetősen nagy számú — megrendelések ξ száma a tapasztalatok szerint közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető $\sigma=10$ szórással. Mekkora a megrendelések várható száma, ha tudjuk, hogy

$$P(\xi<20)=0{,}1.$$

594. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és mind $N(m, \sigma)$ eloszlásúak. [Ezt az $N(m, \sigma)$ jelölést annak rövidítésére használjuk, hogy a kérdéses valószínűségi változó „m várható értékű és $\sigma>0$ paraméterű normális eloszlású".] Legyen továbbá

$$\xi=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}.$$

Állapítsuk meg, milyen — a várható értékre szimmetrikus — határok közé esik a ξ előre adott p valószínűséggel.

595. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek és $N(m, \sigma)$ eloszlásúak. Mekkora legyen az n érték, hogy a

$$\xi=\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$$

számtani középnek az m várható értéktől való eltérése előre adott p valószínűséggel A-nál ne legyen nagyobb?

596. Legyen ξ normális eloszlású m és $\sigma>0$ paraméterekkel. Legyen α egy tetszőleges (0, 1) intervallumba eső valós szám. Mekkora x érték esetén áll fenn a

$$P(m \leqq \xi < m+x) = \alpha$$

egyenlőség? Milyen α értékek jöhetnek számításba?

597. Legyen ξ $N(m, \sigma)$ eloszlású, és α egy tetszőleges (0, 1) intervallumba eső valós szám. Határozzuk meg azt a K_α számot, amelyre

$$P(\xi > K_\alpha) = \alpha.$$

Legyen speciálisan $m=20$, $\sigma=2$, és α vegye fel sorban a 0,5; 0,9; 0,95 és 0,99 értékeket. Számítsuk ki az ezekhez tartozó K_α értékeket.

598. Egy gyár rádióadócsöveket gyárt. Egy bizonyos fajta adócső élettartama a vizsgálatok szerint normális eloszlású, 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyár a csövekre garanciát vállal. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5% garanciaigényt kíván kielégíteni?

599. Bizonyos típusú rádiócsöveket, amelyeknek élettartama normális eloszlású, $m=160$ óra, $\sigma=20$ óra paraméterértékekkel, négyesével dobozokba csomagolnak.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy ilyen dobozban levő 4 cső mindegyike 180 óránál tovább fog működni?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 4 cső közül kettőt kivéve, az egyik 180 óránál tovább fog működni, a másik meg nem?

(Az egyes csövek élettartamát tekintsük egymástól független valószínűségi változóknak.)

600. Egy automata gép folyékony vegyszert adagol üvegekbe. Az üvegbe töltendő mennyiség 100 gramm, ez a gép által adagolt vegyszermennyiség várható értéke. A betöltött anyagmennyiség szórásának szabályozására is van lehetőség. Mekkora szórást engedhetünk meg, ha azt kívánjuk, hogy az üvegekbe töltött mennyiség 98%-ban 98 és 102 gramm közé essen? (Feltételezhetjük, hogy az üvegekbe töltött anyagmennyiség normális eloszlású.)

601. Görgőscsapágyak készítésére 12 mm hosszúságú és 6 mm átmérőjű hengereket (görgőket) gyártanak. A hengerek hossza és átmérője normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. A henger hosszmérete (statisztikai adatok alapján) 0,055 mm szórású, átmérője pedig 0,028 mm szórású valószínűségi változó. Egy henger akkor tekintendő selejtnek, ha hosszmérete a tervezett értéktől, azaz: a 12 mm-től 0,1 mm-nél nagyobb értékkel tér el, vagy pedig, ha átmérőjének eltérése a 6 mm-től 0,05 mm-nél nagyobb.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott görgő selejtes lesz?

602. Egy üzem a termeléshez szükséges alapanyagot maga termeli. Az időszakonként termelt mennyiség $N(m, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó. Az üzem egy időszakra eső szükséglete szintén m. Ha a termelt mennyiség m-nél kisebb, a hiány miatt V Ft veszteség éri az üzemet alapanyag-egységenként, ha viszont több, akkor a fölösleg raktározásáért kell fizetnie R Ft-ot egységenként egy időszakra. A feldolgozásra kerülő alapanyag-mennyiségért raktárköltség nincsen. Állapítsuk meg, hogyan függ az üzem költsége a termelt alapanyag-mennyiségtől. Mekkora a valószínűsége, hogy e költség az A értéket nem lépi túl?

603. Egy üzemben a készített folyékony termék üvegekbe töltését két automata gép végzi. Az üvegekbe töltött mennyiség átlagosan 2 dl, és normális eloszlású mindkét gép esetében. A betöltött mennyiség szórása az első gépnél 0,14 dl, a másodiknál pedig 0,08 dl. Az üvegek 60%-át az első gép tölti, a többit a második.
Mennyi a valószínűsége, hogy egy üveget véletlenszerűen kivéve a napi készletből, abban a betöltött anyag mennyisége a várható értéktől 0,1 dl-nél kevesebbel tér el?

604. Valamilyen vegyszert egy gép kiadagol, és zacskóba csomagol. Egy adag tömege jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó, 25 gramm várható értékkel és 0,4 gramm szórással. Az üres zacskó tömegét is normális eloszlásúnak tekinthetjük 5 gramm várható értékkel és 0,2 gramm szórással. Mennyi lesz egy csomag tömegének várható értéke és szórása?
Ha a gyár a zacskókba csomagolt vegyszert 10-enként dobozokba csomagolva hozza forgalomba, és a dobozok tömegét is normális eloszlású valószínűségi változónak tekintjük 30 gramm várható értékkel és 1 gramm szórással, akkor mennyi lesz egy megtöltött doboz tömegének várható értéke és szórása?

605. Két üzem, az A és B, közös raktárral rendelkezik. A raktárba havonta szállítanak R mennyiségű nyersanyagot (alkatrészt), amelyből mindkét üzem annyit használ fel, amennyi a szükséglete. Az A üzem havi felhasználása $N(150, 10)$, a B-é pedig $N(210, 15)$ eloszlású valószínűségi változó. Mennyi legyen a raktárban levő R készlet a hónap elején, ha azt kívánjuk, hogy e készlet az üzemeket együttesen legalább 0,99 valószínűséggel elégítse ki?

606. Egy automata gép zacskókba vegyszert adagol. A betöltött vegyszer tömege normális eloszlású valószínűségi változó 100 gramm várható értékkel és 2 gramm szórással. A gép a vegyszert egymástól függetlenül adagolja. Az egy nap alatt elkészített csomagok száma Poisson-eloszlású, $\lambda = 1000$ várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy az egy nap alatt elkészült csomagok között legfeljebb 20 olyan csomag van, amelyben a betöltött mennyiség nem 95 és 105 gramm közé esik?

607. Egy A esemény megfigyelésére végzünk független kísérleteket. Az A bekövetkezésének valószínűsége 0,6. Feleljünk a következő kérdésekre.

a) Ha 2000 kísérletet végzünk, mennyi a valószínűsége, hogy az A esemény relatív gyakorisága a 0,58 és 0,62 korlátok közé esik?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy az előbbi esetben a relatív gyakoriság a 0,60 és 0,64 közé esik?

c) Mekkora az $\varepsilon > 0$ érték, ha 2000 kísérlet esetén az A relatív gyakorisága 0,98 valószínűséggel a $(0{,}6-\varepsilon;\ 0{,}6+\varepsilon)$ intervallumba esik?

d) Legalább hány kísérletet kell végeznünk ahhoz, hogy az A-ra adódó relatív gyakoriság a $P(A)=0{,}6$ valószínűséget 0,95 valószínűséggel 10^{-2}-nál jobban megközelítse?

608. Egy urnában fehér és fekete golyók vannak. Annak valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk: 0,7. Mennyi a valószínűsége, hogy 1000 visszatevéssel húzott golyó között a fehér golyók száma 680 és 720 közé esik?

609. Egy kétforintost 200-szor feldobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejdobások száma 95 és 105 közé esik?

610. Számítsuk ki közelítő pontossággal az

$$\frac{1}{2^{500}} \sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$$

kifejezés számértékét, majd határozzuk meg a

$$\sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$$

összeg közelítő értékét.

611. Egy üzemben a normáknak megfelelő termékek 70%-a első osztályú. A normáknak megfelelő termékeket válogatás nélkül 50 darabot tartalmazó dobozokba csomagolják.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy ilyen dobozban egyetlen első osztályú termék sincs?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy doboz legalább 30 első osztályú terméket tartalmaz?

612. Oldjuk meg a 406. feladatot a Moivre—Laplace-tétel felhasználásával is. Hasonlítsuk össze az eredményeket.

613. Legyen ξ az A esemény megfigyelésére végzett n független kísérlet esetén az A bekövetkezéseinek száma. Mutassuk meg, hogy ha $P(A)=0{,}5$, akkor a

$$0{,}5n-0{,}98\sqrt{n} \leqq \xi \leqq 0{,}5n+0{,}98\sqrt{n}$$

egyenlőtlenség 95% valószínűséggel teljesül.

614. Bizonyos üzletekben a 11 és 12 óra közötti időben megjelenő vevők száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó $\lambda=30$ várható értékkel. 100 ilyen üzletet figyelembe véve, mekkora annak valószínűsége, hogy a 11 és 12 óra közötti időben az összes megjelent vevők száma 3000 és 3100 közé esik?

6. További folytonos valószínűségeloszlások

615. Ha a ξ normális eloszlású m és $\sigma>0$ paraméterekkel, akkor az $\eta=e^{\xi}$ valószínűségi változó *logaritmikusan normális eloszlású* a

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel.

a) Igazoljuk ezt az állítást.

b) Számítsuk ki az η várható értékét és szórásnégyzetét.

c) Mutassuk meg, hogy ez esetben fennáll az

$$M(e^{\xi})>e^{M(\xi)}$$

egyenlőtlenség.

616. Legyen η logaritmikusan normális eloszlású, $m=0$ és $\sigma=1$ paraméterértékekkel. Ábrázoljuk az η sűrűségfüggvényét.

617. Számítsuk ki, hol veszi fel a logaritmikusan normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az $\frac{1}{2}$ értéket.

618. Cementpor szemcséinek méreteit vizsgálják. Legyen ξ egy találomra kivett szemcse átmérője, s tegyük fel, hogy ez logaritmikusan normális eloszlású, melynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

Állapítsuk meg, mennyi a valószínűsége, hogy az átmérő nagysága adott a és b korlátok közé esik (a, $b>0$).

619. Egy budapesti üzem számviteli osztályának dolgozói között a havi jövedelem eloszlását vizsgálták. Megállapították, hogy az átlagos fizetés 1700,— Ft. Ennek szórása 400 Ft, s a havi fizetés jó közelítésben logaritmikusan normális eloszlású.

a) Írjuk fel a fizetések eloszlását jellemző sűrűségfüggvényt.

b) Állapítsuk meg, hogy a dolgozóknak átlagosan hány százaléka keres 1500 Ft és 1800 Ft közé eső összeget.

c) Melyik az a pénzösszeg, amelynél a dolgozók 50%-a kevesebbet keres?

620. Igazoljuk, hogy ha ξ logaritmikusan normális eloszlású, akkor az

$$\eta=a\xi^n \quad (a>0,\ n\geqq 1)$$

valószínűségi változó szintén logaritmikusan normális eloszlású.

621. Bizonyos fajta homokból vett minta alapján azt kapták, hogy a szemcsék átmérője, mm-ben mérve, logaritmikusan normális eloszlású, $m=-\frac{1}{2}$, $\sigma=0{,}3$ paraméterértékekkel.

a) Számítsuk ki, mekkora lesz a homokszemcsék átmérőjének várható értéke és szórásnégyzete.

b) Írjuk fel a homokszemcsék térfogatának eloszlását jellemző sűrűségfüggvényt. (A homokszemcséket tekintsük gömb alakúaknak.)

c) Számítsuk ki, hogy az 1 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből álló homokmennyiség térfogata az összes homokmennyiség térfogatának hány százaléka.

622. Egy intézet külföldről könyveket rendel. Az ehhez szükséges devizára várni kell, a tapasztalatok alapján általában 1/2 évet. A várakozási idő exponenciális eloszlású. Mennyi a valószínűsége, hogy az intézet egy negyedéven belül megkapja a könyveket?

623. Egy szövőgép automatikusan megáll, ha legalább egy fonalszakadás történik. Legyen ξ a gép megindulásától az első fonalszakadásig eltelt idő. A ξ-re tett megfigyelések alapján a ξ exponenciális eloszlású, várható értéke pedig 2,5 óra. Mekkora a valószínűsége, hogy egy munkanap (8 óra) alatt a gép egyszer sem áll le fonalszakadás miatt?

624. Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni, a tapasztalatok szerint 0,1. Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkezve 3 percen belül sorra kerülünk? (A várakozási idő hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó.)

625. Egy szövőgép 400 szállal dolgozik. Az egyes szálak „élettartama", tehát az az idő, amíg az adott szál el nem szakad, exponenciális eloszlású, minden szálra ugyanazzal a $\lambda=\dfrac{1}{150}$ paraméterértékkel, és feltehető, hogy a szakadások egymástól függetlenek. Mennyi a valószínűsége, hogy a gép fonalszakadás miatt a megindulástól számított 3 órán belül megáll?

626. Egy gépi berendezés n olyan alkatrészt tartalmaz, amelynek meghibásodása esetén a gép leáll. Az egyes alkatrészek élettartama (a beindítástól számított működési ideje) egymástól független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó, rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ paraméterekkel.
Jelentse η azt az időtartamot, amely a gép beindításától az első leállásig eltelik. Számítsuk ki az η sűrűségfüggvényét és várható értékét.

627. Egy forgalmas trafikba a vevők Poisson-eloszlás szerint érkeznek, átlagosan 1 vevő percenként. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik vevő távozása után 5 percig nem érkezik újabb vevő?

628. Egy üzletbe átlagosan 30 vevő érkezik óránként.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy két, egymás után érkező vevő érkezési ideje között eltelt idő 2 percnél több?

b) Mennyi a valószínűsége, hogy ez az időtartam 3 percnél kevesebb?

c) Mekkora a valószínűsége, hogy ez az időtartam 1 és 3 perc közé esik?

629. Egy üzemben gépalkatrészeket gyártanak. Ezek élettartama a tapasztalatok szerint exponenciális eloszlású, 1000 óra várható értékkel. A nem selejtes alkatrészeket 100-asával dobozokba csomagolják.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy alkatrészt a dobozból kivéve, az 1050 óránál hosszabb ideig működik?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy a dobozból öt alkatrészt kivéve, ezek közül legalább négy 1050 óránál tovább működik?

c) Mennyi a valószínűsége, hogy a dobozba csomagolt alkatrészek között az 1050 óránál hosszabb élettartamúak száma 30 és 40 közé esik.

630. Legyen ξ egy új berendezés élettartamát jelentő valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye az ismert $F(t)$ függvény $(t \geqq 0)$. *A*

$$G(t) = 1 - F(t) \qquad (t \geqq 0)$$

függvényt a berendezés továbbélési függvényének fogjuk nevezni.

Ez bármely t időpontban annak valószínűségét adja meg, hogy a berendezés ez időpontban még működik, vagy — ami ugyanaz — a berendezés élettartama t időegységnél nem kisebb.

a) Igazoljuk az előbbi megállapítást.

b) Mutassuk meg, hogy a $G(t)$ függvény monoton fogyó függvény.

c) Legyen ξ exponenciális eloszlású $\lambda = 10^{-2}$ paraméterértékkel. Írjuk fel és ábrázoljuk az ehhez a ξ-hez tartozó továbbélési függvényt.

d) Mennyi a valószínűsége, hogy a berendezés a (t_0, t_1) intervallumban megszűnik működni? Hogyan fejezhető ez ki a továbbélési függvénnyel? Hogyan olvasható le ez az eredmény a továbbélési görbéről [azaz a $G(t)$ grafikonjáról]?

631. Legyen ξ valamely berendezés élettartamát jelentő valószínűségi változó. Tegyük fel, hogy ennek létezik várható értéke. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\lim_{t \to \infty} t((1 - F(t)) = 0,$$

továbbá mutassuk meg, hogy ha $G(t)$ $(t \geqq 0)$ a berendezés továbbélési függvényét jelenti, akkor

$$M(\xi) = \int_0^\infty G(t)\, dt.$$

632. Tegyük fel, hogy valamely üzembe helyezett berendezés az üzembe helyezés előtt már x ideig működött. A ξ jelentse továbbra is a berendezés új korától számított élettartamát. *E használt berendezés továbbélési függvényén a*

$$G_x(t) = P(\xi \geqq x + t \mid \xi \geqq x) \qquad (x \geqq 0, \ t \geqq 0)$$

függvényt értjük.

Mutassuk meg, hogy ha a ξ exponenciális eloszlású, akkor

$$G_x(t) = G(t),$$

ahol $G(t)$ az új berendezés továbbélési függvényét jelenti.

633. Legyen ξ valamilyen berendezés új korától számított élettartamát jelentő valószínűségi változó. A $P(t)$-vel jelöljük annak feltételes valószínűségét, hogy egy t időt megért berendezés a $(t, t+\Delta t)$ időintervallumban elromlik, azaz legyen

$$P(t)=P(t \leqq \xi \leqq t+\Delta t \mid \xi \geqq t) \qquad (t \geqq 0).$$

Tegyük fel, hogy ez a valószínűség nem függ attól, hogy a berendezés mióta működik, viszont egyenesen arányos a Δt intervallumhosszal. E feltételek alapján határozzuk meg a ξ eloszlását.

634. Jelentse ξ továbbra is valamely berendezés élettartamát. Tegyük fel, hogy a

$$P(t)=P(t \leqq \xi < t+\Delta t \mid \xi \geqq t) \qquad (t \geqq 0)$$

valószínűség nem független attól, hogy a berendezés mennyit működött, de arányos a már megért élettartammal és a Δt-vel.
Határozzuk meg e feltétel alapján a ξ eloszlásfüggvényét és a berendezés továbbélési függvényét. Ábrázoljuk e függvényeket.

635. Valamely üzemben 100 egyforma berendezés működik egymástól függetlenül. Az egyes berendezések élettartamát (a meghibásodásig tartó működési idejét) jelöljék a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{100}$ valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy a berendezések mindegyikét ugyanez a

$$G(t)=e^{-10^{-3}t} \qquad (t \geqq 0)$$

továbbélési függvény jellemzi.

a) Írjuk fel a berendezések működési ideje összegének (összmunkaidő) várható értékét és szórását.

b) A várható érték milyen sugarú környezetébe esik 0,9 valószínűséggel a berendezések összmunkaideje?

636. Ha ξ valamely berendezés élettartamát jelenti, és ξ eloszlását nem ismerjük, akkor a berendezés továbbélési görbéjének közelítő meghatározásához a ξ eloszlását jellemző mintát kell venni. Ez pl. így történhet: n_0 számú berendezést (pl. izzólámpát) bekapcsolunk, s időegységenként megnézzük, hogy még hány berendezés működik. Így egy $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ sorozatot kapunk. Nyilvánvaló, hogy az $\dfrac{n_k}{n_0}$ relatív gyakoriság a $\xi \geqq k$ esemény valószínűségének jó közelítése, ha n_0 elég nagy. A

$$G_{n_0}(k)=\frac{n_k}{n_0} \qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

függvényt, illetve az így kapott pontokat összekötő folytonos görbét tekinthetjük a ξ továbbélési függvénye közelítő függvényének.

a) Készítsük el az alábbi táblázat alapján a ξ továbbélési függvényét közelítő függvény ábráját. A táblázatban 1000 berendezés megfigyelésével kapott adatokat foglaltuk össze, a megfigyeléseket a 800. óránál kezdtük, s az időegységet 50 órának választottuk.

Az elmúlt idő k	Továbbélők n_k
0	1000
1 (800 óra)	1000
2 (850 óra)	1000
3 (900 óra)	995
4 (950 óra)	985
5 (1000 óra)	975
6 (1050 óra)	955
7 (1100 óra)	930
8 (1150 óra)	870
9 (1200 óra)	770
10 (1250 óra)	630
11 (1300 óra)	480
12 (1350 óra)	320
13 (1400 óra)	180
14 (1450 óra)	100
15 (1500 óra)	60
16 (1550 óra)	35
17 (1600 óra)	20
18 (1650 óra)	10
19 (1700 óra)	0

b) Számítsuk ki azoknak az eseményeknek a (közelítő) valószínűségét, hogy egy berendezés a $(k-1, k)$ intervallumban megszűnik működni.

c) Készítsünk a táblázat alapján hisztogramot. Milyen eloszlású lehet a ξ?

637. Tegyük fel, hogy egy szövőgépen az egyes szálszakadások között eltelt időtartamok exponenciális eloszlásúak, mind ugyanazzal a λ paraméterrel. Ha a megfigyelést a „nulladik" szálszakadástól kezdve végezzük, állapítsuk meg, milyen lesz a megfigyelés kezdőpontjától az n-edik szálszakadásig eltelt időtartam eloszlása. (Tegyük fel, hogy az egyes szálszakadások között eltelt időtartamok egymástól függetlenek.)

638. Állapítsuk meg a $(0, t)$ időintervallumban bekövetkezett szálszakadások számának valószínűségeloszlását, ha az előző feladat feltételei fennállnak.

639. Egy szervizállomáson az egyes gépek javítására fordított idő exponenciális eloszlású 1/2 óra várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a negyediknek beérkezett javítandó gépre nem kell 2 óránál többet várakozni, ha a gépek javítását a beérkezés sorrendjében végzik?

640. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és mind $N(0, 1)$ eloszlásúak. Számítsuk ki az

$$\eta = \frac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}$$

valószínűségeloszlását jellemző sűrűségfüggvényt.

VII. MEGOLDÁSOK

1.

3	5	4	6	1	2		3	5	6	2	4	1
3	5	4	6	2	1		3	5	6	4	1	2
3	5	6	1	2	4		3	5	6	4	2	1
3	5	6	1	4	2		3	6	1	2	4	5
3	5	6	2	1	4		3	6	1	2	5	4

2. Annyi, ahányféleképpen a 2, 3, 4, 5 elemek permutálhatók, tehát $4!=24$. Az első néhány permutáció a következő lesz:

2	3	1	4	5		2	5	1	3	4		3	4	1	2	5
2	3	1	5	4		2	5	1	4	3		3	4	1	5	2
2	4	1	3	5		3	2	1	4	5		3	5	1	2	4
2	4	1	5	3		3	2	1	5	4		.				

.
.

és így tovább.

3. Annyi, ahányféleképpen a maradék öt jegy permutálható, tehát $5!=120$.

4. Az első három helyen a 6, 7, 8 elemeket 3!-féle sorrendben helyezhetjük el. A következő négy helyre az 1, 2, 3, 4 elemeket 4!-féleképpen írhatjuk, így a feltételnek megfelelő összes elrendezések száma $3!4!=144$.

5. Az utolsó helyen az 1, a 3 vagy az 5 állhat. Ilyen permutáció $3\cdot 4!=72$ létezik.

6. Az adott elemek permutációinak száma $5!=120$. A 0-val kezdődő permutációk (ezek nem tekinthetők ötjegyű számoknak) száma 4!. A kérdéses ötjegyű számok száma tehát $5!-4!=96$. A 0 jegy a második helyen nyilván 4! számú permutációban szerepel.

7. Ha az első gépre az egyik szóba jövő munkást helyezzük, akkor a többit a további gépekre 7!-féleképpen helyezhetjük el. Hasonló a helyzet, ha az első gépre a másik munkást tesszük. Az összes lehetséges megoldások száma tehát: $2\cdot 7!$.

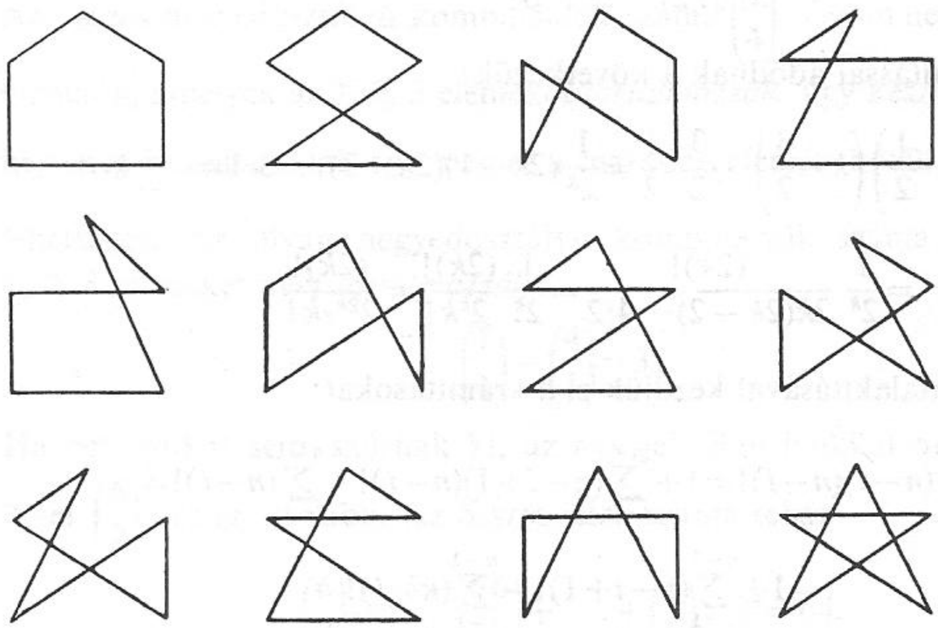
8. A kerek asztal körüli elhelyezkedések esetén nyilván nem tekintjük különbözőknek azokat az elhelyezkedéseket, melyeknél a szomszédok — bármelyik személyre — ugyanazok maradnak. (Ilyen elhelyezkedés fordul elő akkor, ha adott sorrend esetén mindenki pl. egy székkel odébb ül.) Így az összes lehetőség áttekintéséhez egy személy helyét rögzítjük, és az összes többit permutáljuk. Feladatunkban rögzítsük annak a két személynek egyikét, akik egymás mellett akarnak ülni. A másik ekkor ennek jobb vagy bal oldalán ülhet. Mindkét esetben 18!-féle sorrendben helyezhetjük el a többi embert. Az összes megfelelő elhelyezkedések száma tehát: $2\cdot 18!$

9. Ilyen elhelyezkedések csak úgy jöhetnek létre, ha a páratlan sorszámú helyeken nők ülnek. Mivel a nők összes — feltételeknek megfelelő — elhelyezkedéseinek száma 4!, a férfiaké pedig 3!, így a keresett megoldás: $3!4!=144$.

10. Most a páratlan sorszámú helyeken vagy férfiak ülnek, vagy nők. Az előző feladatban alkalmazott meggondolás segítségével az összes lehetőségek száma $2\cdot 4!4!=1152$.

11. A megoldás: 15! 5!

12. Rögzítsük a kiindulási pontot. Innen $n-1$ pontot kell sorban elérnünk egymás után. Az összes lehetséges n-szögek száma így $(n-1)!$-nak adódik. Figyelembe véve azonban, hogy minden n-szög fordított irányban is végigjárható, az összes *különböző* n-szögek száma $\frac{1}{2}(n-1)!$. Ha $n=5$, akkor a kérdéses ötszögek száma $\frac{1}{2}\cdot 4!=12$. Ezeket szemlélteti az 1. ábra.



1. ábra

13. A keresett permutációk száma: $\frac{6!}{2!3!}=60$. Ezek között olyan permutáció, amelynek első jegye 2-es, $\frac{5!}{3!}=20$ van.

14. Az 1 1 1 1 2 2 2 2 elemek permutációiról van szó. Ezek száma: $\frac{8!}{4!4!}$.

17. Annyi, ahányféleképpen a maradék 1 2 2 3 4 4 5 elemek permutálhatók a 135 leírása után. Ezek száma $\frac{7!}{2!2!}$.

18. Az utolsó jegy 2 vagy 6 lehet. A kérdéses számok száma tehát $\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{2!}=120$.

20. Olyan permutáció, amelynek első jegye 0, nem tekinthető ötjegyű számnak. A kérdéses ötjegyű számok száma tehát:

$$\frac{5!}{2!\,2!}-\frac{4!}{2!\,2!}=24.$$

Az első néhány ilyen ötjegyű szám:

10133	11303	13103	30113
10313	11330	13130	30131
10331	13013	13301	.
11033	13031	13310	.

és így tovább.

21. Az előző feladatban megismert gondolatmenettel számolva, a keresett nyolcjegyű számok száma:

$$\frac{8!}{3!\,3!\,2!}-\frac{7!}{2!\,2!\,3!}=350.$$

23. Egyszerű számítással adódnak a következők:

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^k}(2k-1)(2k-3)\ldots3\cdot1=$$

$$=\frac{1}{2^k}\,\frac{(2k)!}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}=\frac{1}{2^k}\,\frac{(2k)!}{2^kk!}=\frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot k!}.$$

24. A jobb oldal átalakításával kezdjük el a számításokat:

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i)!=1+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)(n-i)!-\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)!=$$

$$=1+\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1)!-\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)!$$

Írjunk most az első összegben $i-1$ helyett j-t, a másodikban i helyett j-t, akkor a következőket kapjuk:

$$1+\sum_{j=0}^{n-2}(n-j)!-\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)!=1+n!+\sum_{j=1}^{n-2}(n-j)!-\sum_{j=1}^{n-2}(n-j)!-1=n!,$$

s ezt kellett igazolni. A bizonyítást teljes indukcióval is könnyen elvégezhetjük.

25. Azt kell megmutatni, hogy az adott n tényezős szorzat legalább egyik tényezője páros szám, mert akkor az egész szorzat páros. A feltevés szerint n páratlan, így az $1, 2, \ldots, n$ számok között 1-gyel kevesebb a páros számok száma, mint a páratlanoké. Az adott szorzatban tehát biztosan lesz olyan tényező, amelyben páratlan számból vontunk ki páratlan számot, mely tehát páros szám lesz, így az egész szorzat valóban páros számot jelent.

26.

1 2 3 4	1 2 4 6	1 3 5 6	2 3 5 6
1 2 3 5	1 2 5 6	1 4 5 6	2 4 5 6
1 2 3 6	1 3 4 5	2 3 4 5	3 4 5 6
1 2 4 5	1 3 4 6	2 3 4 6	

27. $\binom{10}{2}=45.$

28. Az n csúcspont $\binom{n}{2}$ egyenest határoz meg. Ezek között vannak az oldalak is.

Az átlók száma:

$$\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}.$$

29. *a)* $\binom{n}{2}$; *b)* $\binom{n}{2}-\binom{k}{2}$, mert a k egyenes párhuzamossága miatt $\binom{k}{2}$ számú metszéspont nem létezik; *c)* $\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}=n-1.$

31. Az összes negyedosztályú kombinációk száma $\binom{7}{4}$. Olyan negyedosztályú kombinációk, amelyek az 1, 2, 3 elemeket *tartalmazzák*, úgy készíthetők, hogy ezekhez még hozzáveszünk egy elemet a maradék elemek közül, ez $\binom{4}{1}$-féleképpen lehetséges. Az olyan negyedosztályú kombinációk száma tehát, melyek az 1, 2, 3 elemeket *nem tartalmazzák:*

$$\binom{7}{4}-\binom{4}{1}=31.$$

32. Ha egy lyukat sem szúrnak ki, az egy jel. Egy lyukkal 6-féle jel készíthető, 2-vel $\binom{6}{2}$, és így tovább. Az összes jelek száma tehát

$$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\ldots+\binom{6}{6}=2^6=64.$$

Ha az üres téglalapokat nem számítjuk, akkor az így készíthető jelek száma 63.

33. A négy férfi $\binom{5}{4}$-féleképpen választható ki, a négy nő $\binom{8}{4}$-féleképpen. Az összes lehetőségek száma tehát: $\binom{5}{4}\binom{8}{4}=350.$

34. A három adott szám mellé még két számot kell vennünk a maradék 17 elem közül, ez $\binom{17}{2}$-féleképpen lehetséges.

35. *a)* $\binom{100}{5}$; *b)* $\binom{90}{5}$; *c)* $\binom{90}{3}\binom{10}{2}$.

36. A 12 láda 30%-a $3{,}6 \approx 4$ láda. Olyan mintát vehetünk tehát, melybe a *B* minőségű áruból 0 vagy 1, vagy 2, vagy 3 ládával kerül. Az ilyen 12 elemű minták száma:

$$\binom{75}{12}+\binom{75}{11}\binom{25}{1}+\binom{75}{10}\binom{25}{2}+\binom{75}{9}\binom{25}{3}.$$

37. *a)* $\binom{12}{3}\binom{9}{4}\binom{5}{5}=27\,720.$

b) Ha a két tanuló az első csónakba ül, akkor az összes lehetőségek száma:

$$\binom{10}{1}\binom{9}{4}\binom{5}{5}=1120,$$

ha a másodikba ülnek, akkor

$$\binom{10}{3}\binom{7}{2}\binom{5}{5}=2520,$$

és ha a harmadikba, akkor

$$\binom{10}{3}\binom{7}{4}\binom{3}{3}=4200$$

az összes helyfoglalási lehetőség. Ezek összege adja a kérdésre a választ.

38. A páros számok: 0, 2, 4, 6, 8; a páratlanok: 1, 3, 5, 7, 9. Mindkét csoportból kettőt kell kiválasztanunk, majd ezeket minden lehetséges módon egymás mellé írnunk. Vegyük azt is figyelembe, hogy a 0 az első helyen nem állhat, így az összes kérdéses számok száma:

$$\binom{5}{2}\binom{5}{2}4!-\binom{5}{2}\binom{4}{1}3!=2160.$$

39. Az előző feladatban alkalmazott gondolatmenettel megállapítható, hogy a kérdéses hatjegyű számok száma:

$$\binom{5}{4}\binom{5}{2}6!-\binom{5}{4}\binom{4}{1}5!=33\,600.$$

40. Ahhoz, hogy a *K* betűtől a jobb alsó sarokban levő *Z*-ig eljussunk, 9 lépést kel tennünk, s ebből 4-et lefelé. Ha rögzítjük a négy „lefelé” lépést, ezzel egyúttal rögzítjük a jobbra lépéseket is, s ez a kívánt szó egy kiolvasási lehetőségét adja meg. A „lefelé” lépések száma $\binom{9}{4}$-féleképpen választható ki, ennyi tehát a *KÖZGAZDÁSZ* szó kiolvasási lehetőségeinek száma is.

41. Most a következő egyenletet oldjuk meg:

$$\binom{n}{4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}=4845.$$

Mivel n csak egész számot jelenthet, érdemes az egyenletet „próbálkozással" megoldani. Minthogy a bal oldal számlálója „majdnem egyenlő" tényezőket tartalmaz, így a tényezők nem különbözhetnek nagyon $\sqrt[4]{24\cdot 4845}\approx 18$-tól Valóban, $n=20$ a feladat megoldása, ami behelyettesítéssel rögtön látható.

42. *a)* $x_1=0$ $x_2=1$ és $x_3=5$; *b)* $x=\frac{21}{2}$.

43. Írjuk ki először a binomiális együtthatókat a megfelelő „faktoriálisokkal", majd rendezéssel és egyszerűsítéssel

$$\frac{(19-x)!}{(17-x)!}=72$$

adódik. Újra egyszerűsítve kapjuk a $(19-x)(18-x)=72$ egyenletet, és ebből az $x_1=10$ és $x_2=27$ megoldásokat. Az egyenletből közvetlenül látható, hogy minden $x>19$ egész szám is megoldás.

44. Ha x-szel jelöljük a társaság létszámát, akkor

$$\binom{x}{2}=66,$$

és innen $x=12$.

45. Ismétléses kombináció. A kapható „dobáshármasok" száma:

$$C_6^{3,i}=\binom{6+3-1}{3}=56.$$

46. A lehetséges esetek száma:

$$\binom{12+5-1}{5}=\binom{16}{5}.$$

47. A megoldást a „fej" és „írás" elemek n-ed osztályú ismétléses kombinációinak száma jelenti:

$$\binom{2+n-1}{n}=\binom{n+1}{n}=n+1.$$

48. A kifejtés minden tagja 6-odfokú lesz. A kifejtés tagjainak száma tehát annyi, ahányféleképpen az x, y és z elemek közül 6-ot kiválaszthatunk, természetesen úgy, hogy akármelyik elemet többször is választhatjuk. Ez 3 elem 6-odosztályú ismétléses kombinációinak számával egyezik, tehát

$$C_3^{6,i}=\binom{3+6-1}{6}=\binom{8}{6}=28.$$

49. *a)* $(n-2)(n-3)^2$; *b)* $(n-k)^2$.

51. Az adott elemeknek V_6^3 variációja van. Azok a variációk, amelyekben az első jegy 0, nem tekinthetők háromjegyű számoknak. A feltételnek megfelelő háromjegyű számok száma tehát $V_6^3 - V_5^2 = 100$.

52. A felhasználható jegyek: 0, 1, 2, …, 9. A kérdéses nyolcjegyű számok száma:

$$V_{10}^8 - V_9^7 = 1\,632\,960.$$

54. A 10 szakmunkást a 10 munkahelyre 10!-féleképpen oszthatjuk el. A segédmunkások közül 10-et V_{12}^{10}-féleképpen küldhetünk a 10 munkahelyre, így az összes elosztási lehetőségek száma:

$$10!\,V_{12}^{10} = 10!\,\frac{12!}{2!}.$$

55. Az ötüléses padon egyszerre vagy 3 fiú és 2 lány, vagy 3 lány és 2 fiú ülhet. A 3 fiú az 5 közül V_5^3-féleképpen helyezkedhet el, köztük a két lány V_4^2-féle sorrendben. Az első esetben tehát

$$V_5^3 \cdot V_4^2 = 720$$

elhelyezkedés lehetséges. Hasonlóképpen a második esetben

$$V_4^3 \cdot V_5^2 = 480$$

leültetési lehetőség van, összesen tehát 1200 lehetőség.

56. Ha x jelenti a fehér golyók számát, akkor

$$V_8^2 \cdot V_x^1 + V_x^2 \cdot V_8^1 = 1280.$$

Ebből $56x + 8x(x-1) = 1280$, és $x = 10$.

57. Igen, ha az

$$n! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

egyenlőség teljesül. Ebből, ha $n \geqq 1$, akkor $k_1 = n$ és $k_2 = n-1$ adódik.

59. Nyilván annyi, ahányféleképpen e jegyekből másodosztályú ismétléses variációk készíthetők, tehát $V_5^{2,\,\mathrm{i}} = 5^2 = 25$.

61. $3^5 - 3^4 = 162$.

63. Az öt darab páros számjegyből előállítható negyedosztályú ismétléses variációk száma $V_5^{4,\,\mathrm{i}}$, ezekhez egy páratlan jegy az öt páratlan számjegy közül $\binom{5}{1} = 5$-féleképpen választható, és minden ismétléses variációban 5 helyre írható. Az így kapott ötelemű csoportok száma tehát

$$5\binom{5}{1} V_5^{4,\,\mathrm{i}} = 5^2 V_5^{4,\,\mathrm{i}}.$$

A 0 jegy áll az első helyen annyi variációban, ahány négyjegyű ismétléses variáció készíthető úgy, hogy bennük három páros és egy páratlan jegy szerepeljen (ui. a 0 számjegy páros, és az első helyen áll). Az előbbihez hasonló meggondolás alapján ezek száma $4\cdot 5\cdot V_5^{3,i}$, mert itt a páratlan jegy csak a második, harmadik, negyedik vagy ötödik helyen állhat. Az összes megfelelő számok száma tehát

$$5^2 V_5^{4,i} - 4\cdot 5\cdot V_5^{3,i} = 13\,125.$$

64. Az egy, kettő, három, ill. négy elemből álló jelek számának összegét kell megállapítani, ez pedig

$$V_2^{1,i} + V_2^{2,i} + V_2^{3,i} + V_2^{4,i} = 30.$$

65. Az első esetben ismétlés nélküli variációkról van szó, ezek száma $V_{32}^4 = 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29$. A második kérdés ismétléses variációkra vonatkozik, s a felelet: $V_{32}^{4,i} = 32^4$.

66. Összesen $V_{25}^{2,i}\cdot V_{10}^{4,i} = 25^2\cdot 10^4 = 6\,250\,000$ autót jelölhetünk meg így.

67. Az $ABCDEF$ elemekből készíthető negyedosztályú ismétléses variációk száma $V_6^{4,i} = 6^4$. Ebből azonban le kell vonnunk azok számát, amelyek az $ACDEF$, ill. $BCDEF$ elemekből készültek, mert ezek nem tartalmazzák a B-t, ill. az A-t. Az $ACDEF$ elemekből készíthető negyedosztályú ismétléses variációk száma $V_5^{4,i} = 5^4$, a $BCDEF$ elemekből készültek száma ugyanennyi. Ha azonban $V_5^{4,i}$ szám kétszeresét levonjuk $V_6^{4,i}$-ből, akkor kétszer vonjuk le a $CDEF$ elemekből készült negyedosztályú ismétléses variációk számát is, így ezt egyszer hozzá is kell adnunk. Az eredmény tehát:

$$V_6^{4,i} - 2V_5^{4,i} + V_4^{4,i} = 6^4 - 2\cdot 5^4 + 4^4 = 302.$$

68. Az összes olyan n-jegyű számok száma, melyek az 1, 2, 3 elemekből készíthetők, 3^n. Ezek között olyanok is vannak, melyek csak egy számjegyet tartalmaznak, ezek száma 3. Azok száma, amelyek csak két jegyet tartalmaznak: $\binom{3}{2}(2^n - 2)$. Az összes kérdéses számok száma tehát

$$3^n - \binom{3}{2}(2^n - 2) - 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1).$$

69. $\binom{3}{2} 4! = 72.$

70. $3\binom{5}{3}\frac{4!}{2!} = 360.$

71. $\binom{4}{2}\binom{5}{2} 4! = 1440.$

72. Ha a 3, 4, 5, 6 elemek közül minden lehetséges módon kiválasztunk kettőt, és minden ilyen számpárhoz hozzáírjuk még az 1-es és 2-es számot, majd e csoportokat még permutáljuk, megkapjuk a keresett számokat. Ezek száma tehát $\binom{4}{2} 4! = 144.$

74. *a)* 5.

b) Az öt jegy közül kettőt $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatunk ki. A feltételnek megfelelő négyjegyű számok előállítására a kétjegyű csoportok egyik számát még kétszer hozzáírjuk a csoporthoz, majd a kapott számnégyest permutáljuk, vagy pedig mindkét számot megkettőzzük, és ezeket is permutáljuk. Így összesen

$$2\binom{5}{2}\frac{4!}{3!}+\binom{5}{2}\frac{4!}{2!2!}=140$$

négyjegyű számot kapunk. — Okoskodhatunk így is: a négyjegyű számban szereplő két számjegyet $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. Két számjegyből $V_2^{4,i}$ darab négyjegyű szám állítható elő, de ezek közül kettő csak egy számjegyet tartalmaz. Így összesen $\binom{5}{2}(2^4-2)=140$ négyjegyű számot kapunk.

c) Hasonló meggondolással

$$3\binom{5}{3}\frac{4!}{2!}=360$$

adódik.

d) $\binom{5}{4}4!=120.$

Vegyük észre, hogy az *a)*, *b)*, *c)*, *d)* feladatok eredményeinek összege azt adja meg, hogy hány olyan négyjegyű szám van, amelyben csak az 1, 2, 3, 4, 5 jegyek szerepelhetnek. Ezek száma $V_5^{4,i}=5^4=625$, s valóban $5+140+360+120=625$.

75. Az adott hat elemből V_6^4 negyedosztályú variáció készíthető. Azok a variációk, amelyek az *A* és *B* elemek egyikét sem tartalmazzák, a maradék négy elemből készültek. Ezek száma $V_4^4=4!$ A többi variációk az *A* és *B* elemek valamelyikét tartalmazzák, ezek száma

$$V_6^4-V_4^4=336.$$

76. Gondoljuk el a 32 kártyát egymás mellé rakva, és írjuk mindegyik fölé a játékosokat jelentő *A*, *B*, *C* és *D* betűk valamelyikét, mindegyiket 8-szor. Egy így kapott sorrend egy szétosztási lehetőséget jelent. Az összes lehetőség száma:

$$\frac{32!}{8!8!8!8!}=\frac{32!}{(8!)^4}.$$

77. A dolgozókat sorba állítva gondoljuk, és mindegyiknek adunk egy-egy számot a 2–2 darab 1-es, 2-es, 3-as és 4-es, illetőleg a 4 db 0 közül. Akik pl. a 2-es számokat kapják, a második munkahelyre mennek, akik a 0 számot, a műhelyben maradnak. Ezek után könnyen látható, hogy az összes lehetőségek száma:

$$P_{12}^{(4,2,2,2,2)}=\frac{12!}{4!(2!)^4}.$$

78. A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből $\binom{10}{2}$ kételemű kombináció készíthető

Számítsuk ki először azt, hogy hány olyan nyolcjegyű szám van, amelyben az egyes kombinációk első jegye k-szor, második jegye pedig $(8-k)$-szor szerepel $(1 \leqq k < 8)$. Ilyen számokat úgy kapunk, hogy minden kételemű kombináció első jegyét k-szor, második jegyét $(8-k)$-szor leírjuk, s a kapott csoport összes permutációját elkészítjük. Ezek száma nyilván:

$$\binom{10}{2}\frac{8!}{k!(8-k)!}=\binom{10}{2}\binom{8}{k}.$$

Ezek között vannak olyanok is, amelyeknek első jegye 0. Mivel ilyeneket úgy kaphatunk, hogy a 0 számot az első helyen rögzítjük, majd még $(k-1)$-szer leírjuk a 0 jegyet, és $(8-k)$-szor a többi 9 elem közül kiválasztott valamelyik jegyet, végül a kapott csoport utolsó hét jegyét permutáljuk, így ezek száma

$$9\cdot\frac{7!}{(k-1)!(8-k)!}=9\binom{7}{k-1}.$$

Az összes olyan nyolcjegyű számok száma tehát, amelyben valamely kételemű kombináció első eleme k-szor, s a második eleme $(8-k)$-szor szerepel:

$$\binom{10}{2}\binom{8}{k}-9\binom{7}{k-1}.$$

A feladat megoldásához ezt összegeznünk kell $k=1$-től 7-ig. Ekkor az összes, két számjeggyel felírható nyolcjegyű számok számára a következő adódik:

$$\binom{10}{2}\sum_{k=1}^{7}\binom{8}{k}-9\sum_{k=1}^{7}\binom{7}{k-1}=\binom{10}{2}(2^8-2)-9(2^7-1)=81(2^7-1).$$

Egy másik megoldást is adunk. Tíz számjegyből kettőt $\binom{10}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Két számjegyből $V_2^{8,i}=2^8$ számú nyolcelemű csoport készíthető, ezek között azonban kettő csak egy számjegyet tartalmaz. A két különböző számjegyből alkotható nyolcelemű csoportok száma tehát

$$\binom{10}{2}(2^8-2).$$

Ezek között olyanok is vannak, amelyeknek első eleme 0. Számuk hasonló meggondolással:

$$\binom{9}{1}(2^7-1)$$

(mert csak a csupa 0-ból álló hétjegyű csoportokat kellett elhagyni). A keresett nyolcjegyű számok száma tehát

$$\binom{10}{2}(2^8-2)-9(2^7-1)=81(2^7-1),$$

ugyanaz, mint az előbb.

79. Most 10-féle termék n-edosztályú ismétléses variációinak száma adja a megoldást, ez pedig 10^n.

80. Az összeadandó ötjegyű számokat az 1 és 2 számjegyek ötödosztályú ismétléses variációi alkotják. Számuk 2^5. Minden oszlopban (ha egymás alá írva gondoljuk őket) 2^4 darab 1-es, és ugyanennyi 2-es jegy áll. Ezek összege 48. Az összes kérdéses szám összege tehát:

$$48(1+10+\ldots+10^4)=48\cdot 11\,111=533\,328.$$

81. Gondoljuk el a kérdéses n-jegyű számokat egymás alá írva. Nyilvánvaló, hogy minden számoszlopban minden számjegy $(n-1)!$-szor szerepel. Egy tetszőleges oszlopban álló számjegyek összege tehát

$$(1+2+\ldots+n)(n-1)!=\frac{(n+1)!}{2}.$$

A kérdéses n-jegyű számok összege ezek után:

$$\frac{(n+1)!}{2}(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})=\frac{(10^n-1)(n+1)!}{18}.$$

82. Tulajdonképpen 20 db százas szétosztási lehetőségeiről van szó. Ez nyilván 3 elem huszadosztályú ismétléses kombinációinak számával egyenlő, tehát:

$$\binom{20+3-1}{20}=\binom{22}{2}=231.$$

83. A monoton növekedő sorozatok száma megegyezik az adott n elemből készíthető $2n$-edosztályú ismétléses kombinációk számával, vagyis

$$C_n^{2n,i}=\binom{3n-1}{2n}.$$

Ugyanennyi a monoton fogyó sorozatok száma is. A növekvő és fogyó sorozatok között csak azok egyenlők, amelyek azonos elemekből állnak. A feltételeknek megfelelő sorozatok száma tehát

$$2\binom{3n-1}{2n}-n.$$

86. $1{,}02^{10}=(1+0{,}02)^{10}=1{,}2190$ négy tizedesjegy pontossággal. Hasonlóképpen $0{,}98^{10}=(1-0{,}02)^{10}=0{,}8171$.

87. A binomiális tétel szerinti kifejtés és összevonás után adódik:

$$\frac{1}{2}[(q+p)^n+(q-p)^n]=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{2}q^{n-2}p^2+\binom{n}{4}q^{n-4}p^4+\ldots$$

88. A z^3 csak az $((x+y)+z)^8$ kifejtésének negyedik tagjában szerepel, ez: $\binom{8}{3}(x+y)^5z^3$.

Az $(x+y)^5$ kifejtésében x^2y^3 együtthatója: $\binom{5}{3}$. A keresett együttható tehát:

$$\binom{8}{3}\binom{5}{3}=560.$$

89. Az $\binom{n}{2}2=110$ egyenletből $n=11$. Az utolsó előtti tag tehát $\binom{n}{n-1}(\sqrt{2})^{n-1}=$
$=352.$

90. A harmadik tag: $\binom{n}{2}(\sqrt{x})^{n-2}\cdot\sqrt[4]{x^2}=\binom{n}{2}x^{\frac{n-1}{2}}$. Mivel a feltétel szerint

$$x^{\frac{n-1}{2}}=x^{\frac{5}{2}}, \qquad \text{ezért} \qquad n=6.$$

91. A feltétel alapján $\binom{n}{4}=3\binom{n}{3}$, s ebből $n=15$. A kifejtés általános tagja $n=15$-tel:

$$\binom{15}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{15-k}\sqrt{x^k}=x^{-15+k+\frac{k}{2}}.$$

Ez a tag állandó, ha $-15+k+\dfrac{k}{2}=0$, vagyis ha $k=10$. Ezek szerint a kifejtés 11. tagja állandó, s e tag: $\binom{15}{10}$.

92. A kifejtés $(k+1)$-edik tagja:

$$(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k}\cdot\sqrt{x^k}=(-1)^k\binom{n}{k}x^{-n+\frac{3}{2}k}.$$

Ez akkor állandó, ha

$$-n+\frac{3}{2}k=0,$$

vagyis, ha $n=\dfrac{3}{2}k$. De n csak nem negatív egész szám lehet, így a k-nak párosnak kell lennie, azaz $k=2l$ alakúnak, ahol $l=0, 1, 2, \ldots$. Ekkor az $n=\dfrac{3}{2}\cdot 2l=3l$ alakú, tehát a 3-nak nemnegatív, egész számú többszöröse. — Könnyen ellenőrizhető, hogy ha $n=3l$ alakú ($l=0, 1, 2, \ldots$), akkor valóban van konstans tagja a tekintett binom kifejtésének, ennek $(2l+1)$-edik tagja ui. állandó.

93. $n=31$.

94. Az adott feltételekből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\binom{n}{9}x^9}{\binom{n}{10}x^{10}}&=\frac{1}{2}, \\ \binom{n}{4}x^4&=11\binom{n}{3}x^3. \end{aligned}\right\}$$

Ebből $n=14$, és $x=4$ adódik.

95. Itt nyilván fennáll az

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}=2\binom{n}{2}$$

egyenlőség, s ebből $n=7$. Az $n=2$ nem jön számításba, mert $(a+b)^2$ csak három tagú.

96. Mivel a

$$\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}$$

egész szám, és a feltétel szerint a nevező egyik tényezője sem tartalmazza tényezőként a p számot, így a $\binom{p}{k}$ törzstényezős előállításában a p szerepelni fog, a $\binom{p}{k}$ tehát valóban osztható p-vel.

97. A tétel $n=1$-re igaz. Az $n=2$ számra

$$2^p-2=(1+1)^p-2=\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\ldots+\binom{p}{p-1},$$

s ez szintén osztható p-vel, mert az összeg minden tagja osztható vele.

Tegyük fel, hogy n-re igaz az állítás. Akkor $(n+1)$-re a következőket írhatjuk:

$$(n+1)^p-(n+1)=(n^p-n)+\left[\binom{p}{1}n^{p-1}+\ldots+\binom{p}{p-1}n\right],$$

s ez újra csak osztható p-vel, az első tag az indukciós feltevés szerint, a második tag pedig azért, mert ebben az összeadandók mindegyike osztható p-vel.

A bebizonyított tételt így is megfogalmazhatjuk: ha $0<n<p$, akkor $n^{p-1}-1$ osztható p-vel. Ez következik abból, hogy ha $n^p-n=n(n^{p-1}-1)$ osztható p-vel, és n a p-vel nem osztható, akkor szükségszerűen $n^{p-1}-1$ osztható vele.

98. Vegyük észre, hogy az itt szereplő összegek a binomiális tétel „ellenkező irányú" alkalmazásával a következők:

a) $$S_1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k\cdot 1^{n-k}-\binom{n}{0}=(1+3)^n-1=4^n-1.$$

b) $$S_2=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}\cdot 1^k=\left(\frac{1}{2}-1\right)^{2n}=\frac{1}{2^{2n}}.$$

c) $$S_3=\left(p+\frac{1}{p}\right)^n.$$

99. Az adott azonosságban szereplő tényezők binomiális tétel szerinti kifejtésével, majd a szorzás elvégzésével adódó egyenlőségben a jobb és bal oldalon x^k együtthatói egyenlők. Ezt fejezi ki az első egyenlőség. Ebből a másodikat úgy kapjuk, hogy m és k helyére n-et írunk, és alkalmazzuk a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát kifejező egyenlőséget.

100. *b)* Felhasználva az $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ egyenlőséget (igazoljuk!), könnyen adódik az igazolandó képlet.

c) A bal oldal:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{k}{i}=0,$$

s ezt kellett bizonyítani.

101. Az adott függvény második deriváltja:

$$y''=n(n-1)(1+x)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)x^{k-2}.$$

Ha ezt 2!-sal elosztjuk, és x helyére 1-et teszünk:

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2}=\binom{n}{2}2^{n-2}$$

adódik.

A *b)* kérdésre a válasz hasonlóképpen adható meg.

102. *a)* Ez a 99. feladatban adott első (binomiális együtthatókra vonatkozó) egyenlőségből következik, ha $k=n$.

b) A jobb oldal tagjait az összegtulajdonság felhasználásával így írjuk fel:

$$\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k-1},$$

$$\binom{n-2}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}-\binom{n-2}{k-2},$$

$$\binom{n-3}{k-2}=\binom{n-2}{k-2}-\binom{n-3}{k-3},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n-k}{1}=\binom{n-k+1}{1}-\binom{n-k}{0},$$

$$\binom{n-k-1}{0}=\binom{n-k}{0}.$$

Ha ezeket az egyenlőségeket összeadjuk, éppen a bizonyítandó egyenlőség adódik.

c) Hasonlóképpen bizonyítható az összegtulajdonságból adódó

$$\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}-\binom{n-1}{k}$$

felhasználásával.

d) A jobb oldali összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{m}{i}=\sum_{i=k}^{m}(-1)^{i-k}\left[\binom{m-1}{i-1}+\binom{m-1}{i}\right]=\binom{m-1}{k-1}.$$

103. Itt is a binomiális együtthatók összegtulajdonságát használjuk fel:

$$\sum_{i=0}^{N}\binom{n+i}{k}=\sum_{i=0}^{N}\left[\binom{n+i+1}{k+1}-\binom{n+i}{k+1}\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^{N+1}\binom{n+j}{k+1}-\sum_{j=0}^{N}\binom{n+j}{k+1}=\binom{n+N+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}.$$

A feladatban adott összeg kiszámításához vegyük észre, hogy az összeg tagjai n-tényezős, egymás után következő egész számokból álló szorzatok. Ezeket könnyen átalakíthatjuk binomiális együtthatókká, ha az összeg tagjaiból az $n!$-t kiemeljük:

$$S=n!\sum_{k=0}^{N}\frac{(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)}{n!}=n!\sum_{k=0}^{N}\binom{n+k}{n}$$

adódik. Az előbb bizonyított egyenlőségben k helyére n-et írva, majd egyszerűbb alakra hozva, a következőket kapjuk:

$$S=n!\left[\binom{n+N+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}\right]=\frac{(N+1)(N+2)\dots(N+n+1)}{n+1},$$

s ez a keresett képlet.

104. Legyen először $n=N$. A bal oldal ez esetben 1, s a jobb oldal is ezt állítja. — Legyen most $n\neq N$. Ekkor

$$\sum_{j=n}^{N}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\binom{N}{j}=\binom{N}{n}\sum_{i=0}^{N-n}(-1)^{i}\binom{N-n}{i}=0,$$

mert az utolsó kifejezésben álló összeg 0, s ezt kellett igazolni.

105. A következő átalakításokat végezzük:

$$S=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k-1}=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n}{j}-\sum_{j=0}^{n-2}\binom{2n-1}{j}-\sum_{j=0}^{n-2}\binom{2n-1}{j}=$$

$$=\binom{2n}{n-1}+\sum_{j=0}^{n-2}\left[\binom{2n}{j}-\binom{2n-1}{j}\right]-\sum_{j=0}^{n-2}\binom{2n-1}{j}.$$

Ha a második tagban felhasználjuk fel a binomiális együtthatók összegtulajdonságát, mely szerint

$$\binom{2n}{j}-\binom{2n-1}{j}=\binom{2n-1}{j-1},$$

akkor

$$S=\binom{2n}{n-1}+\sum_{j=1}^{n-2}\binom{2n-1}{j-1}-\sum_{j=0}^{n-2}\binom{2n-1}{j}=$$

$$=\binom{2n}{n-1}+\sum_{i=0}^{n-3}\left[\binom{2n-1}{i}-\binom{2n-1}{i}\right]-\binom{2n-1}{n-2}.$$

A középső tag 0. Újra alkalmazva az összegtulajdonságot, a következő adódik eredményül:

$$S=\binom{2n}{n-1}-\binom{2n-1}{n-2}=\binom{2n-1}{n-1}.$$

106. A bal oldali összeget a logaritmus azonosságainak felhasználásával először két részre bontjuk:

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lg a^{n-k}b^{k}=\lg a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)+\lg b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k.$$

Vezessük be az első összegben a $j=n-k$ új összegező változót, és alkalmazzuk a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát, ekkor a következőket kapjuk:

$$S=\lg a\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}j+\lg b\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}j=(\lg a+\lg b)\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}j=\lg(ab)\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}j.$$

Az itt szereplő összeget 100. *b)*-ből ismerjük. Ezt felhasználva:

$$S=n\cdot 2^{n-1}\cdot\lg(ab)=\lg(ab)^{n2^{n-1}},$$

s ezt kellett belátni.

107. 860 darab.

108. A tételt k szerinti teljes indukcióval igazoljuk.

$k=1$*-re:* az olyan elemek száma, melyek az A_1 tulajdonsággal nem rendelkeznek: $N_1=n-n_1$.

$k=2$*-re:* az A_1 tulajdonsággal nem rendelkezik N_1 elem. Az A_2 tulajdonsággal rendelkező n_2 elem közül az A_1 tulajdonsággal nem rendelkezik n_2-n_{12} darab, tehát azoknak az elemeknek a száma, amelyek sem az A_1, sem az A_2 tulajdonságokkal nem rendelkeznek:

$$N_2=n-n_1-n_2+n_{12}.$$

$k=3$*-ra:* az A_1 és A_2 tulajdonságokkal nem rendelkező elemek száma N_2. Az A_3 tulajdonsággal bíró n_3 elem közül az A_1 és A_2 tulajdonságokkal nem rendelkezik, a $k=2$-re nyert képlet alapján: $n_3-n_{13}-n_{23}+n_{123}$ elem. Azoknak az elemeknek a száma tehát, amelyek az A_1, A_2, A_3 tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek:

$$N_3=N_2-n_3+n_{13}+n_{23}-n_{123}=n-n_1-n_2-n_3+n_{12}+n_{13}+n_{23}-n_{123}.$$

Látjuk, a tétel igaz $k=1, 2, 3$-ra. Az eddigiek alapján a k-ról $k+1$-re vonatkozó lépést is megtehetjük.

Tegyük fel tehát, hogy k-ra igaz a képlet, s bizonyítsuk be, hogy akkor $k+1$-re is igaz. Legyen A_{k+1} a $k+1$-edik tulajdonság. Az olyan elemek száma, amelyek az A_{k+1} tulajdonsággal rendelkeznek, de ugyanakkor az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tulajdonságokkal nem, a k-ra feltételezett képlet felhasználásával:

$$n_{k+1} - \sum_{1 \leq i \leq k} n_{i(k+1)} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} n_{ij(k+1)} - \ldots \pm n_{12\ldots k(k+1)}.$$

Így azoknak az elemeknek a száma, amelyek az $A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}$ tulajdonságok egyikével sem rendelkeznek:

$$N_{k+1} = N_k - \left[n_{k+1} - \sum_{1 \leq i \leq k} n_{i(k+1)} + \ldots \pm n_{12\ldots(k+1)}\right] =$$

$$= n - \sum_{1 \leq i \leq k+1} n_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} n_{ij} - \ldots \pm n_{12\ldots(k+1)},$$

s ezt kellett belátni.

109. Mivel az előző feladatban igazolt képlet szerint a szummajelekkel összefogott összeadandók indexei az $1, 2, \ldots, k$ elemek megfelelő kombinációin futnak végig, így a keresett képlet:

$$N_k = n - \binom{k}{1} m_1 + \binom{k}{2} m_2 - \binom{k}{3} m_3 + \ldots \pm m_k.$$

110. Tekintsük az adott azonosság jobb oldalát. Ennek a következő kombinatorikai értelmet adhatjuk.

Az első tag jelenti az $1, 2, \ldots, n$ elemek n-ed osztályú ismétléses variációinak számát.

A második tag második tényezője jelenti azoknak az n-ed osztályú ismétléses variációknak a számát, amelyek az n elem közül kiválasztott $n-1$ darab elemből alkothatók.

A harmadik tag második tényezője ugyanígy azoknak az ismétléses variációknak a számát jelenti, amelyek $n-2$ elemből készíthetők, és így tovább.

Az utolsó tag utolsó tényezője az egy elemből készíthető n-ed osztályú ismétléses variációk számát jelenti.

A jobb oldalon szereplő összeg tehát a 108. feladat alapján azoknak az n elemű ismétléses variációknak a számát jelenti, amelyek

1. nem egy elemből készültek,
2. nem csak két elemet tartalmaznak,
3. nem csak három elemet tartalmaznak,

és így tovább, végül:

$n-1$. nem csak $n-1$ elemből készültek.

Ez azonban azt jelenti, hogy a jobb oldalon azon n-ed osztályú ismétléses variációk száma áll, amelyeknek elemei mind különbözők. Az n elem ilyen n-ed osztályú variációi azonban éppen az n elem permutációit jelentik, s ezek száma, mint tudjuk, $n!$ Az adott azonosság tehát igaz.

111. Alkalmazzuk az előző feladat azonosságát $n=p-1$-re. Ekkor

$$(p-1)!+1=\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k\binom{p-1}{k}(p-1-k)^{p-1}+1=$$

$$=\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k\binom{p-1}{k}[(p-1-k)^{p-1}-1]+\sum_{k=0}^{p-2}(-1)^k\binom{p-1}{k}+1.$$

Az első tag a „kis Fermat-tétel" szerint osztható p-vel, mert a szögletes zárójelben álló különbség osztható p-vel. A második és harmadik tag összege viszont:

$$\binom{p-1}{0}-\binom{p-1}{1}+\binom{p-1}{2}-\ldots-\binom{p-1}{p-2}+\binom{p-1}{p-1}=0,$$

így ez is osztható p-vel, állításunk tehát igaz.

112. A binomiális tétel szerint kifejtve a második és harmadik tényezőt és a szorzásokat elvégezve, x^3 együtthatójául $5\binom{n}{2}+2n^2$ adódik. A feltétel szerint

$$5\binom{n}{2}+2n^2=203,$$

ebből viszont $n=7$ adódik, a vizsgált függvény tehát 15-öd fokú.

113. Az x^3 együtthatója 83-mal egyenlő, tehát

$$\binom{n}{3}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{1}=83.$$

Egyszerűbb alakra hozás után a következő egyenletet kapjuk:

$$(n-2)(n^2+2n+3)=6\cdot 83=2\cdot 3\cdot 83.$$

Itt az n pozitív egész szám, az $n-2$ tényező tehát osztója kell, hogy legyen a jobb oldali szorzatnak. Így az n-re csak az $n-2=1$, $n-2=2$, $n-2=3$, $n-2=83$, $n-2=2\cdot 3$, $n-2=2\cdot 83$, $n-2=3\cdot 83$, $n-2=2\cdot 3\cdot 83$ egyenletek megoldásaiként adódó n értékek jöhetnek számításba. Ezek közül azonban a vizsgált harmadfokú egyenletet csak az ötödik egyenletből adódó $n=8$ elégíti ki (ezt a szóba jövő értékek behelyettesítésével határoztuk meg), a vizsgált polinom tehát 8-ad fokú.

114. Az x együtthatója a binomiális tétel alapján

$$n\cdot 2^{n-1}-506{,}5(n+1)\cdot 2=-892.$$

Innen

$$2^{n-1}=\frac{1013n+121}{n}=1013+\frac{121}{n}.$$

Mivel $n>0$ és n egész szám, továbbá az egyenlet bal oldala egész szám, így a jobb oldal is szükségképpen egész; az n tehát nem lehet más, mint a 121 valamelyik pozitív egész osztója, tehát 1 vagy 11, vagy 121. Ezek közül az lesz a feladat megoldása, amely az előbbi egyenletet kielégíti. Behelyettesítéssel láthatjuk, hogy $n=11$ a megoldás. (Az $n=121$ már nem adhat megoldást, mert $2^{121}>1024$.)

115. Mivel

$$(1+i)^4=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4=4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4,$$

így $(1+i)^{4n}=(-4)^n$. Ebből azonban következik, hogy az $(1+i)^{4n}$ binomiális tétel szerinti kifejtésében a valós rész $(-4)^n$-nel egyenlő, az i együtthatója pedig 0, s az igazolandó egyenlőségek is ezt fejezik ki.

116. Most az $(1+i)^{8n}$ kifejtésével igazolhatjuk e tételeket, figyelembe véve, hogy $(1+i)^8=16$, így $(1+i)^{8n}=16^n$.

117. Számítsuk ki a $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ komplex szám n-edik hatványát a Moivre-tétel segítségével, majd a binomiális tétellel, és tegyük egyenlővé a kétféleképpen kapott valós, ill. imaginárius részeket. Az igazolandó képletek adódnak.

118. Az $\bar{A}$ itt azt jelenti, hogy a tíz dobás közül legalább egyszer 6-ost dobtunk.

119. Egyszerű „behelyettesítéssel" az adódik, hogy páros számot dobunk. Ugyanez adódik akkor is, ha az adott kifejezést először egyszerűbb alakra hozzuk, és azután használjuk fel a szereplő események konkrét jelentését. Például:

$$[A-(B\cap C)]\cup[(A-B)-C]=A\cap[(\overline{B\cap C})\cup(\bar{B}\cap\bar{C})]=$$
$$=A\cap[(\bar{B}\cup\bar{C})\cup(\bar{B}\cap\bar{C})]=A\cap[(\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{B})\cap(\bar{B}\cup\bar{C}\cup\bar{C})]=$$
$$=A\cap(\bar{B}\cup\bar{C})=A\cap(\overline{B\cap C}).$$

De $\overline{B\cap C}$ azt jelenti, hogy nem dobunk hármast. Az eredmény tehát valóban azt adja, hogy páros számot dobunk.

120. *a)* Ez az egyenlőség nyilvánvaló.

b) Mindkét oldalt egyszerűbb alakra hozzuk. A bal oldal:

$$\overline{(A\cap B)\cap(\bar{A}\cap\bar{B})}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cap(A\cup B)=(\bar{A}\cap B)\cup(\bar{B}\cap A).$$

A jobb oldal:

$$\overline{\overline{(A\cap\bar{B})\cap(\bar{A}\cap B)}}=\overline{\overline{(A\cap\bar{B})}}\cup\overline{\overline{(\bar{A}\cap B)}}=(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B).$$

Ezek valóban egyenlők.

121. Nyilván $A\subset(B\cap C)$.

122. A feltételi egyenlet így írható:

$$(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap\bar{B}=(A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{B})=A\cap\bar{B}=A.$$

Mivel azonban

$$(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})=A,$$

és a bal oldali összeadandók egymást kizáró események, ezért szükségszerűen $A\cap B=\emptyset$.

123. Ha $A\subset B$.

124. Ha $A\subset B$, akkor $(A\cap C)\subset(B\cap C)$ minden olyan C-re, amelyre $C\subset H$. Így $C=A$-ra

$$A=(A\cap A)\subset(A\cap B),\quad\text{vagyis}\quad A\subset(A\cap B).$$

Másrészt az események szorzásának definíciója miatt

$$(A \cap B) \subset A,$$

s e két relációból az következik, hogy

$$A \cap B = A.$$

Legyen most $A \cap B = A$. Ekkor azonban, mivel $(A \cap B) \subset B$, így $A \subset B$ is teljesül, így tételünket igazoltuk.

125. Néhány átalakítás után:

$$\overline{A \cup (\bar{B} \cup \bar{C})} = \overline{A \cup (\overline{B \cap C})} = \bar{A} \cap \overline{(\overline{B \cap C})} = \bar{A} \cap B \cap C,$$

s ez az $A \cap B \cap C$ eseményt valóban kizárja, hiszen szorzatuk a lehetetlen esemény.

126. Az adott eseményeket így írjuk:

$$A \cap \bar{B}, \quad A \cap B, \quad B \cap \bar{A} \cap \bar{C}, \quad B \cap C \quad \text{és} \quad C \cap \bar{B}.$$

Igazolandó, hogy ezek közül bármelyik kettő szorzata a lehetetlen esemény. Ez sok eseménypárra közvetlenül látható (pl. az első és második, az első és harmadik, a második és harmadik stb. események szorzata nyilvánvalóan $\emptyset$). Az első és ötödik esemény pedig a feltétel miatt egymást kizáró, hiszen

$$(A \cap \bar{B}) \cap (C \cap \bar{B}) = (A \cap C) \cap \bar{B} = \emptyset,$$

mert $A \cap C = \emptyset$. Hasonlóképpen igazolható ez más eseménypárokra is.

127. Most az

$$\bar{A}, \quad A \cap \bar{B} \quad \text{és} \quad A \cap B$$

eseményekről van szó. Hogy ezek egymást páronként kizárják, az nyilvánvaló. Hogy összegük a biztos esemény, az így látható:

$$\bar{A} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = \bar{A} \cup [A \cap (\bar{B} \cup B)] = \bar{A} \cup A = H.$$

129. Az adott egyenlőségben szereplő összeadandók páronkénti egymást kizáró volta nyilvánvaló. Az egyenlőség fennállásának igazolása sem nehéz. Ugyanis

$$(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B) = [A \cap (\bar{B} \cup B)] \cup (B \cap \bar{A}) =$$
$$= A \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup B.$$

130. Az első disztributív törvény felhasználásával:

$$(A \cup B) \cap A = A \cup (A \cap B) = (A \cap H) \cup (A \cap B) = A \cap (H \cup B) = A.$$

131. A jobb oldal átalakításával a következőket kapjuk:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = [(A \cup B) \cap A] \cup [(A \cup B) \cap C] =$$
$$= A \cup [(A \cup B) \cap C] = A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C),$$

s ezt kellett belátni.

132. Ha $A \subset B$, akkor $A \cup B = B$. Ugyanígy, ha $B \subset C$, akkor $B \cup C = C$, tehát az adott kifejezés

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = B \cap C.$$

Az is nyilvánvaló, hogy $B \subset C$ esetében $B \cap C = B$ is fennáll, tehát a kifejezés legegyszerűbb alakja:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = B.$$

133. *a)* A második csapon nem folyik;
b) legalább az egyiken folyik;
c) mindkettőn folyik;
d) csak a másodikon folyik;
e) legalább az egyiken nem folyik;
f) az elsőn folyik, vagy egyiken sem;
g) csak az elsőn folyik;
h) csak az egyiken folyik;
i) egyiken sem folyik;
j) legalább az egyiken nem folyik.

134. *a)* Ez esetben tehát az első elromlik, a második és harmadik viszont nem. Ez így fejezhető ki: $A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$.
b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
c) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$.
d) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. [Ez az esemény így is kifejezhető: $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$. Igazoljuk, hogy e kétféle kifejezés ugyanazt az eseményt jelenti!]
e) $A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3$.
f) Ez így is mondható: vagy csak az első gép romlik el, vagy csak a második, vagy csak a harmadik. Ezt így fejezzük ki:

$$(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3).$$

g) A „legfeljebb egy gép romlik el" azt jelenti, hogy vagy csak egy gép, vagy egy sem romlik el. Ez így írható fel:

$$(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3).$$

Egyszerűbben is felírhatjuk ezt, ha figyelembe vesszük, hogy az az esemény, hogy „legfeljebb egy gép romlik el", azonos azzal, hogy „legalább két gép nem romlik el", azaz: vagy az első és második nem romlik el, vagy az első és harmadik, vagy a második és harmadik nem romlik el. Ez így írható:

$$(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3).$$

Meggondolásaink szerint az adott eseménynek kétféle előállítása is van. Igazoljuk eseményalgebrai átalakításokkal is, hogy a két felírt kifejezés ugyanazt az eseményt jelenti!

h) Ez az esemény a „mindhárom elromlik” komplementere, tehát így írható: $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$. Azt is mondhatjuk, hogy a „mindhárom elromlik” esemény komplementere azonos a „legalább egy gép nem romlik el” eseménnyel, ez viszont így fejezhető ki: $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$. (Az így nyert $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$ egyenlőség könnyen igazolható.)

i) Ez egyszerűen a következő: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

135. *a)* A bal oldal így írható:

$$(A \cap B) - C = A \cap B \cap \bar{C}.$$

A jobb oldal viszont:

$$(A - C) \cap (B - C) = A \cap \bar{C} \cap B \cap \bar{C} = A \cap B \cap \bar{C},$$

a két oldal tehát egyenlő.

A többi feladatot is hasonlóképpen oldhatjuk meg. Példaként álljon még itt a *g)* alatti feladat megoldása:

g) $A - \{A - [B - (B - C)]\} = A \cap \{\overline{A \cap \overline{[B \cap (\overline{B \cap \bar{C}})]}}\} =$

$$= A \cap \{\bar{A} \cup \overline{\overline{[B \cap (\overline{B \cap \bar{C}})]}}\} = A \cap \{\bar{A} \cup [B \cap (\overline{B \cap \bar{C}})]\} =$$

$$= A \cap \{\bar{A} \cup [B \cap (\bar{B} \cup C)]\} = A \cap B \cap C.$$

136. Teljes indukcióval igazoljuk. $n = 2$-re igaz a tétel, ez esetben az ismert

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$$

képletet kapjuk; n-ről $(n+1)$-re így bizonyíthatunk:

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) \cup A_{n+1}} = \overline{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)} \cap \bar{A}_{n+1} =$$

$$= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n \cap \bar{A}_{n+1}.$$

Szavakban: „Az az esemény, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események legalább egyike nem következik be, azt jelenti, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül egyik sem következik be.”

138. „Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül csak az egyik következett be.”

139. *a)* $\frac{1}{6}$; *b)* $\frac{1}{2}$; *c)* $\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{2}{3}$; *e)* $\frac{1}{2}$.

140. Az elemi események száma 36. A kedvező eseményeket a következő számpárok adják: 1, 6; 2, 5; 3, 4; 4, 3; 5, 2; 6, 1; ezek száma 6. A kérdéses valószínűség tehát: $\frac{6}{36}$.

141. Itt egy kísérlet: a kocka kétszeri feldobása. Egy elemi esemény tehát a két dobás során adódó számpár. Vegyük észre, hogy e feladatban az elemi események ugyanazok, mint az előző feladatban, a kedvező események is egyeznek, így a kérdéses valószínűség is egyenlő az előző feladatban kapott eredménnyel, tehát $p = \frac{1}{6}$.

142. $p=\frac{27}{216}$.

143. *a)* Az elemi események száma 36. A kedvező elemi események:
1, 6; 2, 6; 3, 6; 4, 6; 5, 6; 6, 6; 6, 5; 6, 4; 6, 3; 6, 2; 6, 1.

Ezek száma 11. A keresett valószínűség tehát $p=\frac{11}{36}$.

A többi kérdésre csak a végeredményt közöljük. Ezek:

b) $\frac{1}{6}$; *c)* $\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{1}{18}$.

144. *a)* Az elemi események száma 6^6, a kedvezők száma $6!$, így a kérdéses valószínűség: $p=\frac{6!}{6^6}$.

b) Az olyan elemi események száma, amelyekben az első helyen 6-os szerepel, s a többi helyen nem 6-os, egyenlő az 1, 2, 3, 4, 5 elemek ötödosztályú ismétléses variációinak számával, így a kérdéses valószínűség: $\frac{5^5}{6^6}$.

c) Azt kell megnézni, hány olyan „dobáshatos" létezik, amelyben az első két elem 6-os, a többi pedig az 1, 2, 3, 4, 5 elemekből készített, csupa különböző elemet tartalmazó számnégyes. Ezek száma nyilván V_5^4, így a keresett valószínűség: $p=\frac{5!}{6^6}$.

d) Annak valószínűsége, hogy két *rögzített sorszámú* dobás eredménye 6-os, a többi pedig ettől különböző, a *b)* alatti gondolatmenethez hasonlóan, egyenlő $\frac{5^4}{6^6}$-nal. A két 6-os helyét szonban $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, a keresett valószínűség tehát: $p=\binom{6}{2}\frac{5^4}{6^6}$.

145. *a)* $\frac{8!}{10!}$; *b)* $2\cdot\frac{9\cdot 8!}{10!}$.

148. $p=\frac{3!2!2!}{10!}$.

149. A betűk száma 13. Ezek permutációinak száma, ha a betűk álló helyzetben vannak:

$$P_{13}^{(2,2,2,2)}=\frac{13!}{(2!)^4} .$$

Mivel az *A, B, K, M, R, T* betűknek négyféle helyzete lehetséges (pl.: A, $\rhd$, $\forall$, $\lhd$), az *I, T* és *N* betűnek kétféle, az O betűnek pedig csak egyféle helyzete, ezért a betűk elhelyezési lehetőségeinek száma összesen:

$$\frac{13!}{(2!)^4}\cdot 4^8\cdot 2^3=13!2^{15}.$$

A kedvező lehetőségek száma 1. A keresett valószínűség tehát

$$p=\frac{1}{13!2^{15}}.$$

150. Az összes elemi események száma 2^{10}. Annak valószínűsége, hogy mind a tízen írást dobunk, $\frac{1}{2^{10}}$, s ugyanennyi annak valószínűsége is, hogy mind a tízen címert dobunk. A valószínűség III. axiómája értelmében a keresett valószínűség:

$$p=\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{2^9}.$$

151. *a)* Az összes elemi események száma $n!$, a kedvezőké: 1, a keresett valószínűség tehát $\frac{1}{n!}$.

b) $p=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$.

152. Kör alakú asztalnál az egyik személy helyét rögzítjük, s ehhez képest tekintjük a különböző sorrendeket. Az összes elrendezési lehetőségek száma így $9!$, a kedvezőké pedig $4!\,5!$, a keresett valószínűség tehát

$$P(A)=\frac{4!5!}{9!}=\frac{1}{126}.$$

153. *a)* Használjuk fel a 8. feladatban alkalmazott gondolatmenetet. Mivel most az összes elhelyezkedési lehetőségek száma $(n-1)!$, a kedvező esetek száma $2(n-2)!$, így a keresett valószínűség: $p=\frac{2}{n-1}$.

b) Ha egy sorba állnak, akkor az összes lehetőségek száma $n!$, a kedvezők száma $2(n-1)(n-2)!$, így a kérdezett valószínűség: $p=\frac{2}{n}$.

154. Jelentse A azt az eseményt, hogy mindkét kihúzott golyó fehér, B azt, hogy egyenlő színűek, és C azt, hogy legalább az egyik fehér. Ha az elemi események az (i, j) számpárok, ahol $i\neq j$, és minden ilyen elemi esemény egyenlő valószínűséggel következhet be, akkor

a) $P(A)=\frac{V_4^2}{V_6^2}=\frac{4\cdot 3}{6\cdot 5}=\frac{2}{5}$;

b) $P(B)=\frac{V_4^2+V_2^2}{V_6^2}=\frac{4\cdot 3+2}{6\cdot 5}=\frac{7}{15}$;

c) $P(C)=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$.

155. $p=\frac{6!4!}{10!}$.

156. Az összes elemi események száma $\binom{32}{4}$, a kedvező elemi események száma $\binom{31}{3}$, így a kérdéses valószínűség:

$$p=\frac{\binom{31}{3}}{\binom{32}{4}}=\frac{1}{8}.$$

157. *a)* Az összes elemi események száma nyilván V_{32}^5. A kedvező elemi események száma pedig $V_8^1 \cdot V_{31}^4$, mert a harmadik húzás helyére piros lap V_8^1-féleképpen kerülhet, s a többi helyre a maradék 31 lapból 4 darab V_{31}^4-féleképpen. A keresett valószínűség tehát

$$P_1=\frac{V_8^1 \cdot V_{31}^4}{V_{32}^5}=\frac{8}{32}.$$

b) A második kérdésre hasonlóképpen felelhetünk:

$$P_2=\frac{V_8^2 \cdot V_{30}^3}{V_{32}^5}=\frac{8 \cdot 7}{32 \cdot 31}.$$

158. *a)* Annak valószínűségét kell meghatároznunk, hogy rögzített i esetén az i-edik húzás eredménye „selejteshúzás" lesz. A kedvező esetek száma $V_s^1 \cdot V_{N-1}^{n-1}$, hiszen az adott i-edik helyre az s selejtes közül V_s^1-féleképpen tehetünk egy elemet, s a fennmaradó $n-1$ helyre a többi $N-1$ alkatrészből V_{N-1}^{n-1}-féleképpen. Az összes esetek száma V_N^n. Ezek hányadosa a keresett valószínűség, tehát minden i-re:

$$P(A_i)=\frac{V_s^1 \cdot V_{N-1}^{n-1}}{V_N^n}=\frac{s}{N} \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

b) A második kérdésre a felelet hasonló meggondolás alapján:

$$P(A_i \cap A_j)=\frac{V_s^2 \cdot V_{N-2}^{n-2}}{V_N^n}=\frac{s(s-1)}{N(N-1)},$$

az $1, 2, \ldots, n$ elemek minden (i, j) kombinációjára $(i \neq j)$.

c) Végül általánosan, az $1, 2, \ldots, n$ elemek minden ismétlés nélküli, k-ad osztályú $i_1, i_2, \ldots, i_k$ kombinációjára:

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})=\frac{V_s^k V_{N-k}^{n-k}}{V_N^n}=\frac{s(s-1)\ldots(s-k+1)}{N(N-1)\ldots(N-k+1)}.$$

159. A kihúzott 6 lap között mind a négy szín megjelenése a következőképpen valósulhat meg: vagy 3 lap jön az egyik színből, és a többiből csak 1—1, vagy két színből adódik 2—2 lap, és a többiből 1—1. Az első eset 4-féleképpen következhet be, a második eset pedig $\frac{4!}{2!2!}$-féleképpen (mert a 2, 2, 1, 1 elemeket a négy szín jele alatt ennyiféleképpen helyezhetjük el).

Tekintsünk most egy konkrét „színmegvalósulást". Az a lehetőség például, hogy három pirosat húzunk, egy zöldet, egy tököt és egy makkot,

$$\binom{8}{3}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}=\binom{8}{3}\binom{8}{1}^3$$

különböző módon valósulhat meg. Figyelembe véve, hogy ilyen módon a színeket 4-féleképpen választhatjuk, az ilyen kedvező esetek száma:

$$4\cdot\binom{8}{3}\binom{8}{1}^3.$$

Hasonlóképpen okoskodhatunk a másik esetben is. Ekkor a kedvező esetek száma:

$$\frac{4!}{2!2!}\binom{8}{2}^2\binom{8}{1}^2,$$

s mert az összes esetek száma nyilván $\binom{32}{6}$, így a keresett valószínűség:

$$p=\frac{4\binom{8}{3}\binom{8}{1}^3+6\binom{8}{2}^2\binom{8}{1}^2}{\binom{32}{6}}.$$

160. Az összes elemi események száma $\binom{15}{5}$, a kedvezők száma $\binom{9}{5}$, a keresett valószínűség tehát $p=\frac{6}{143}$.

161. 14 hely közül kell kiválasztanunk 10-et, ahova a szerelők eljutnak. Ez $\binom{14}{10}$-féleképpen lehetséges. Hogy a másodikként és harmadikként bejelentett helyre biztosan nem jut szerelő, az $\binom{12}{10}$-féleképpen valósulhat meg. A kérdéses valószínűség tehát:

$$P=\frac{\binom{12}{10}}{\binom{14}{10}}=\frac{6}{91}.$$

162. Jelentse A azt az eseményt, hogy fehér golyót húzunk, B azt, hogy feketét, és C azt, hogy pirosat húzunk. Legyen az urnában x fehér és y fekete golyó. Ekkor

$$P(A\cup B)=\frac{x+y}{x+y+6}=\frac{3}{5},$$

és $$P(B\cup C)=\frac{y+6}{x+y+6}=\frac{2}{3}.$$

Ebből az egyenletrendszerből $x=5$ és $y=4$.

163. Tegyük fel, hogy x számú fehér golyót teszünk a dobozba. A fehér golyó húzásának valószínűsége ekkor $\frac{x}{5+x}$, s ennek a feltétel szerint 0,9-nél nagyobbnak kell lenni. Az

$$\frac{x}{5+x}>0{,}9$$

egyenlőtlenségből $x\geqq 46$ adódik.

164. A 16 fő két egyenlő csoportba $\binom{16}{8}$-féleképpen osztható. Az a követelmény, hogy a két legjobb egy csapatba kerüljön, annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféleképpen melléjük még 6 főt kiválaszthatunk, tehát $\binom{14}{6}$-féleképpen. A kérdéses valószínűség tehát:

$$p=2\frac{\binom{14}{6}}{\binom{16}{8}}.$$

165. Az egyik csapat létszáma x, a másiké y. Fennállnak a következő egyenlőségek:

$$\binom{x+y}{2}=136, \quad \text{és} \quad \binom{x}{2}+\binom{y}{2}=66.$$

Innen:

$$\left.\begin{aligned} x^2+2xy+y^2-x-y&=272, \\ x^2+y^2-x-y&=132. \end{aligned}\right\}$$

E két egyenletből következik, hogy $xy=70$. Mivel $x>2$, $y>2$, továbbá x és y egész számok, és $70=2\cdot5\cdot7$, ezért csak a (7, 10) és (14, 5) számpárok, és ezek fordítottja jönnek megoldásként számításba. Behelyettesítéssel látható, hogy csak (7, 10) és (10, 7) megoldás. Az egyik csapat létszáma tehát 10, a másiké 7. A keresett valószínűség most már:

$$P(A)=\frac{\binom{10}{2}}{\binom{17}{2}}=\frac{45}{136}.$$

166. Ha A_k jelenti a k találat elérését, akkor

$$P(A_k)=\frac{\binom{5}{k}\binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

167. Visszatevés nélküli mintavétel.

$$a)\ \frac{\binom{20}{2}}{\binom{50}{2}}=0{,}155,\quad b)\ \frac{\binom{30}{2}}{\binom{50}{2}}=0{,}355,\quad c)\ \frac{20\cdot 30}{\binom{50}{2}}=0{,}489.$$

168. Visszatevéses mintavétel.

$$a)\ \binom{2}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^0=0{,}16,\quad b)\ \binom{2}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2=0{,}36,$$

$$c)\ \binom{2}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^1=0{,}48.$$

169. *b)* Visszatevés nélküli mintavétellel:

$$p_1=\sum_{k=0}^{3}\frac{\binom{8}{k}\binom{32}{4-k}}{\binom{40}{4}}=1-\frac{\binom{8}{4}}{\binom{40}{4}}.$$

Visszatevéses mintavételt feltételezve:

$$p_2=\sum_{k=0}^{3}\binom{4}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}=1-\binom{4}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^0.$$

170. Több lesz a 6 mm-es csavar, ha ezek száma legalább 11. Ennek valószínűsége:

$$P(A)=\sum_{k=11}^{20}\frac{\binom{50}{k}\binom{50}{20-k}}{\binom{100}{20}}.$$

171. Jelentse p a selejtarányt. Ez esetben a keresett valószínűség ($q=1-p$ jelöléssel):

$$P(A)=\binom{n}{0}q^n+\binom{n}{2}p^2q^{n-2}+\binom{n}{4}p^4q^{n-4}+\dots.$$

Felhasználva a 87. feladat eredményét is,

$$P(A)=\frac{1}{2}[(q+p)^n+(q-p)^n]=\frac{1}{2}[1+(q-p)^n]$$

adódik eredményül.

172. Az 1000 a szóba jövő számok összegeként négy összeadandóval így írható fel: $1000=100+200+200+500$. Ezek szerint az a kérdés, mennyi a valószínűsége, hogy egy 100 Ft-os két 200 Ft-os és egy 500 Ft-os tárgy törik el. A „kedvező" és összes esetek hányadosa alapján a valószínűség:

$$p=\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{7}{1}}{\binom{20}{4}}\approx 0{,}04.$$

173. Az összes lehetőségek száma: 6^{10}. A kedvező esetek számát így határozhatjuk meg: 10 hely közül 5-öt $\binom{10}{5}$-féleképpen választhatunk ki. Erre az 5 helyre 6-osokat írunk, a többi helyre pedig az 1, 2, 3, 4, 5 számok valamelyikét. (Természetesen ismétlődés is előfordulhat.) E lehetőségek száma 5^5, tehát a keresett valószínűség:

$$P=\binom{10}{5}\frac{5^5}{6^{10}}=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^5.$$

174. Először az összes elemi események számát határozzuk meg. k darab alkatrészt $\binom{10}{k}$-féleképpen vehetünk ki ($k=1, 2, \ldots, 10$), tehát „néhányat" (1-et vagy 2-t, vagy ... stb.)

$$\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{10}{10}=2^{10}-1$$

különböző lehetséges módon.

Hányféleképpen vehetünk ki páros számú alkatrészt? Ahányféleképpen 2-t, 4-et stb. kivehetünk. Ezek száma:

$$\binom{10}{2}+\binom{10}{4}+\ldots+\binom{10}{10}=2^9-1.$$

A keresett valószínűség tehát

$$p=\frac{2^9-1}{2^{10}-1}.$$

A lehetséges esetek összeszámolásakor felhasználtuk a $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ összefüggést és a 100/a feladat eredményét.

175. I. Tekintsük a golyókat megkülönböztethetőknek (pl. számozott golyók). A dobozok is legyenek számozottak 1-től 4-ig. Rendezzük most valamilyen módon sorba a golyókat, s írjuk mindegyik alá az 1, 2, 3, 4 számok valamelyikét; az, hogy valamelyik golyó alá pl. a 2-es számot írtuk, jelentse azt, hogy az a golyó a 2. dobozba került. Nyilvánvalóan annyi szétosztás lehetséges, ahányféleképpen az 1, 2, 3, 4 számokat a kilenc golyó alá írhatjuk, tehát $V_4^{9,i}=4^9$. A kedvező eseteket így számoljuk össze. Mivel ez esetben három dobozba jut 2 golyó és egybe 3, így az összes kedvező lehetőséget az 1 1 2 2 3 3 4 4 4 számok permutációi számának négyszerese adja (mert bármelyik szám szerepelhet a három 4-essel analóg módon a golyók alatt). A keresett valószínűség tehát

$$P_1=\frac{\frac{9!}{(2!)^3 3!}4}{4^9}=\frac{9!}{(2!)^3 3!4^8}=\frac{9!}{3!2^{19}}.$$

II. Tekintsük a golyókat megkülönböztethetetlennek. Tegyük fel, hogy a dobozokba való elhelyezési lehetőségek mindegyike egyenlően valószínű. Ha az első dobozba x, a másodikba y, a harmadikba z és a negyedikbe t darab golyó került, akkor nyilván fennáll az

$$x+y+z+t=9$$

egyenlőség, ahol $0 \leqq x, y, z, t \leqq 9$, és mindegyik változó egész értékű. A feltételnek megfelelő elhelyezések száma annyi, ahány megoldása a fenti diofantikus egyenletnek az adott feltételek mellett létezik. E megoldásszám meghatározására tekintsük az

$$f(x)=(1+x+x^2+\ldots)^4=\frac{1}{(1-x)^4}$$

függvényt. Ebben x^9 együtthatója adja az összes lehetséges esetek számát. Erre az adott $f(x)$ függvény hatványsorba fejtésével 220 adódik. Mivel pedig a kedvező elhelyezések száma 4, így a keresett valószínűség:

$$P_2=\frac{4}{220}=\frac{1}{55}.$$

A kétféle feltételezés alapján kapott eredmények különböznek. A gyakorlatban mindkét feltételezés megvalósulhat!

176. A k-adik akkor lesz S-sel egyenlő, ha $k-1$ golyó száma kisebb S-nél, és $n-k$ golyó száma S-nél nagyobb. Mivel az összes elemi események száma $\binom{N}{n}$, a kedvezők száma pedig $\binom{S-1}{k-1}\binom{N-S}{n-k}$, így a keresett valószínűség:

$$P(A)=\frac{\binom{S-1}{k-1}\binom{N-S}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

180. A 2-nek r sugarú környezete $2r$ hosszúságú. Annak valószínűsége, hogy e környezetbe esik a kérdéses pont: $\frac{2r}{3}$. Mivel pedig a feltétel szerint $\frac{2r}{3}=\frac{1}{5}$, ezért $r=\frac{3}{10}$.

182. A keresett sugarak sorban a következők: $\sqrt{0,1}$; $\sqrt{0,2}$; $\sqrt{0,3}$; $\ldots$, $\sqrt{0,9}$; 1.

183. Rajzoljuk meg a 7-től 1/2 8-ig terjedő időnek megfelelő intervallumot, jelöljük meg ebben az a és b jelű villamosok érkezésének időpontjait, és ezek mindegyike előtt tüntessük föl azt a 2 perces intervallumot, amely „kedvezőnek" számít. Az egyenletes eloszlás feltételezésével a keresett valószínűség: $p=\frac{1}{2}$.

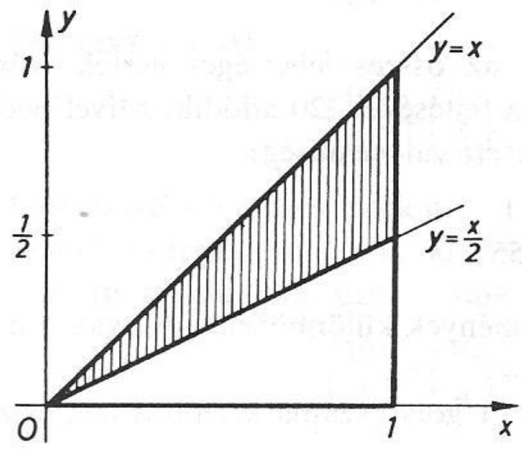
184. Jelöljük y-nal a 0 ponthoz közelebb eső pont koordinátáját, és x-szel a távolabbiét. Akkor nyilvánvalóan fennállnak a

$$0 \leqq y \leqq x \leqq 1$$

egyenlőtlenségek. A két pont közelebb van egymáshoz, mint a 0-hoz az y koordinátájú pont, ha

$$x-y<y, \quad \text{azaz:} \quad 2y>x.$$

Ha most a két pont koordinátái által meghatározott (x, y) számpárnak megfeleltetjük a koordinátasík $Q=(x, y)$ pontját, akkor a $0 \leqq y \leqq x \leqq 1$ egyenlőtlenségek ezen egy háromszöget határoznak meg, melyben azok a pontok „kedvezőek", amelyek koordinátáira $2y>x$ is fennáll. Ezt a tartományt a 2. ábrán besatírozással szemléltetjük.



2. ábra

Ha egyenletes valószínűségeloszlást tételezünk föl, rögtön látjuk, hogy a keresett P valószínűség:

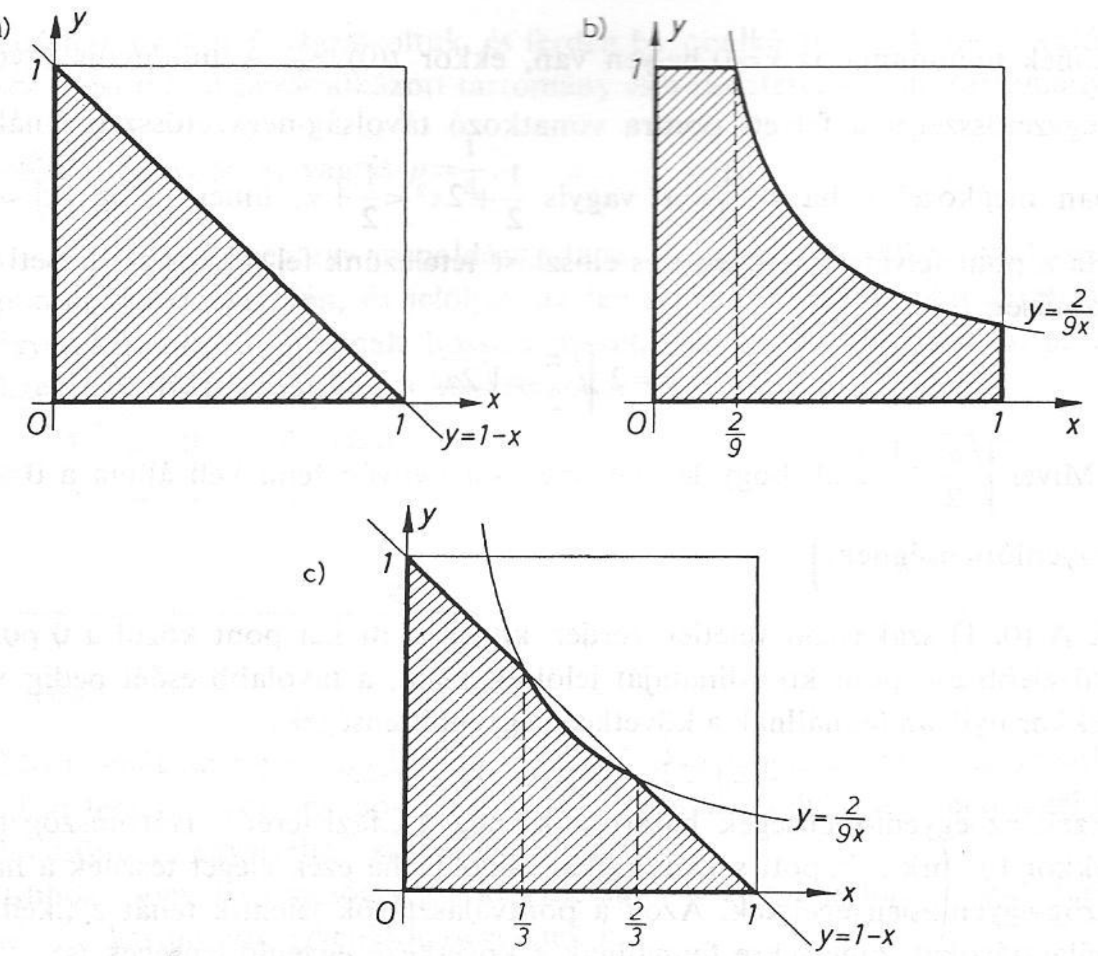
$$P=\frac{1}{2}.$$

185. Tegyük föl, hogy az egyik szám x, a másik pedig y. A feltevés szerint $0<x$, $y<1$. Az (x, y) számpárnak megfelel a sík $0<x<1$, $0<y<1$ egységnégyzetének valamelyik pontja. Egyenletes valószínűségeloszlást tételezünk fel.

a) Az $x+y<1$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $y<1-x$, vagyis ha az (x, y) számpárnak megfelelő pont a 3*a* ábra besatírozott tartományába esik. A keresett valószínűség tehát: $p_1=\frac{1}{2}$.

b) $xy<\frac{2}{9}$ akkor teljesül, ha $y<\frac{2}{9x}$. Az ennek megfelelő tartomány a 3*b* ábrán látható. A keresett valószínűség:

$$p_2=\frac{2}{9}+\int_{\frac{2}{9}}^{1}\frac{2}{9x}\,dx=\frac{2}{9}\left(1-\ln\frac{2}{9}\right).$$



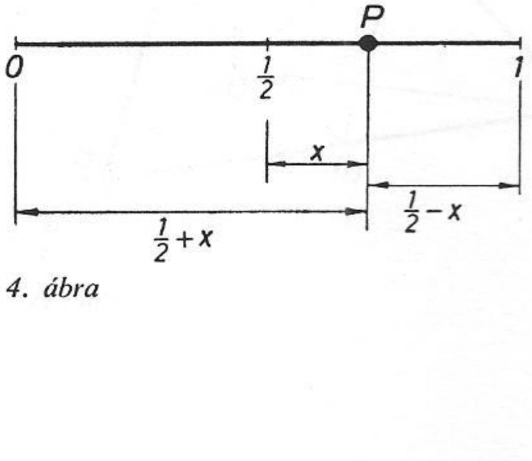
3. ábra

c) Az $x+y<1$ és $xy<\dfrac{2}{9}$ egyenlőtlenségeknek eleget tevő (x, y) számpárok, ill. pontok a 3*c* ábrán látható tartomány pontjai. A kérdéses valószínűség tehát:

$$p_3=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{2}{9x}\,dx\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\ln 2.$$

186. A távolság-négyzetösszeg, a 4. ábra jelöléseivel:

$$t=\left(\frac{1}{2}+x\right)^2+\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\frac{1}{2}+2x^2.$$



4. ábra

Ennek minimuma az $x=0$ helyen van, ekkor $t(0)=\frac{1}{2}$. A minimális távolság-négyzetösszeget a felvett pontra vonatkozó távolság-négyzetösszeg α-nál jobban megközelíti, ha $t-\frac{1}{2}<\alpha$, vagyis $\frac{1}{2}+2x^2<\frac{1}{2}+\alpha$, innen pedig $|x|<\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$. Ha a pont felvételére egyenletes eloszlást tételezünk fel, akkor a keresett valószínűség:

$$p=2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2\alpha}.$$

$\left(\text{Mivel } \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\leqq\frac{1}{2}\right.$ kell, hogy legyen, így α-ra nyilván fenn kell állnia a $0\leqq\alpha\leqq\frac{1}{2}$ egyenlőtlenségnek.$\left.\right)$

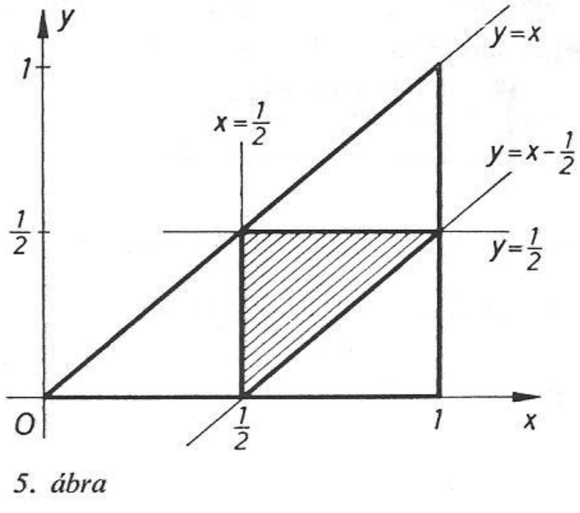
187. I. A (0, 1) szakaszon véletlenszerűen kiválasztott két pont közül a 0 ponthoz közelebb eső pont koordinátáját jelöljük y-nal, a távolabb esőét pedig x-szel. Ekkor nyilván fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$0\leqq y\leqq 1, \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad y\leqq x.$$

Ezek az egyenlőtlenségek határozzák meg a „fázisteret". Háromszöget csak akkor tudunk a kapott szakaszokkal rajzolni, ha ezek eleget tesznek a háromszög-egyenlőtlenségeknek. Azok a pontválasztások jelentik tehát a „kedvező" választásokat, amelyekre fennállnak a következő egyenlőtlenségek is:

$$\left.\begin{aligned} y+(x-y)&>1-x,\\ y+(1-x)&>x-y,\\ (x-y)+(1-x)&>y;\end{aligned}\right\} \quad \text{azaz:} \quad \left.\begin{aligned} x&>\frac{1}{2},\\ y&>x-\frac{1}{2},\\ y&<\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}$$

Az ezekkel az egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományt az 5. ábrán (a

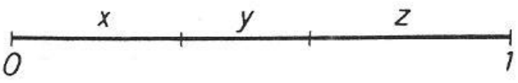


5. ábra

fázistérrel együtt) megrajzoltuk, és ferdén bevonalkáztuk. A keresett valószínűség most már a bevonalkázott tartomány és a fázisteret jelentő tartomány területének hányadosa, vagyis $p=\frac{1}{4}$.

II. A feladatra még egy megoldást adunk. Vegyünk fel a (0, 1) szakaszon két pontot véletlenszerűen, és jelöljük az így három részre felosztott intervallum egyes részintervallumainak hosszát x-szel, y-nal és z-vel (lásd a 6. ábrát). Ezekre nyilván teljesülnek a következők:

1. $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$;
2. $x+y+z=1$.

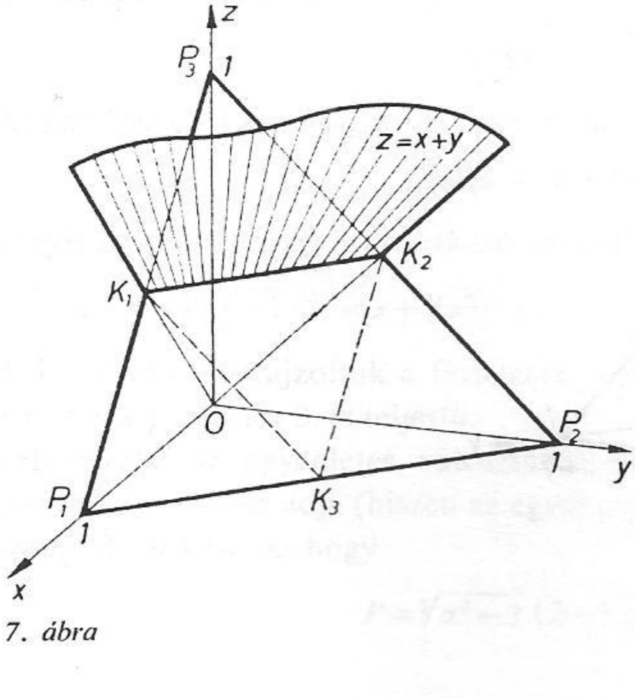


6. ábra

Most tehát az $x+y+z=1$ síknak az első térnyolcadba eső része jelenti azt a „fázisteret", amelynek pontjai és a (0, 1) szakasz felosztási lehetőségei között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn.
Ahhoz, hogy háromszöget szerkeszthessünk a kapott szakaszokkal, fenn kell állni a háromszög-egyenlőtlenségeknek is:

3. $z<x+y$; 4. $y<x+z$; 5. $x<y+z$.

A $z=x+y$ függvény képe egy sík (lásd a 7. ábrát). Az 1., 2., 3. alatti feltételek akkor teljesülnek, ha a fázistérnek olyan pontját választjuk, mely a $z=x+y$ egyenletű sík *alatt* van, tehát a $K_1K_2P_2P_1$ trapézban. K_1 és K_2 nyilván oldalfelező pontok.



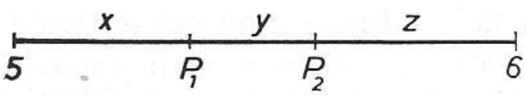
7. ábra

Az 1., 2. és 3. feltételekhez vegyük most hozzá a 4. és 5. feltételeket is. Ekkor a „kedvező" pontokat tartalmazó idom a $K_1K_2K_3$ csúcspontokkal rendelkező háromszög lesz. Ha feltételezzük, hogy a pontválasztás valószínűsége egyenletes eloszlású a fázisteret jelentő háromszögön, akkor a keresett valószínűség a $K_1K_2K_3$ háromszög és a $P_1P_2P_3$ háromszög területének hányadosa lesz, tehát $p=\frac{1}{4}$.

188. A feladatot könnyen megoldhatjuk az előző feladatban megismert módszerekkel. Most a II. módszert írjuk le. Legyenek P_1 és P_2 az érkezési időpontok, az x, y és z pedig jelentse a 8. ábrán megjelölt szakaszhosszakat. Ez esetben nyilván fennáll a következő két feltétel:

1. $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$;

2. $x+y+z=1$.

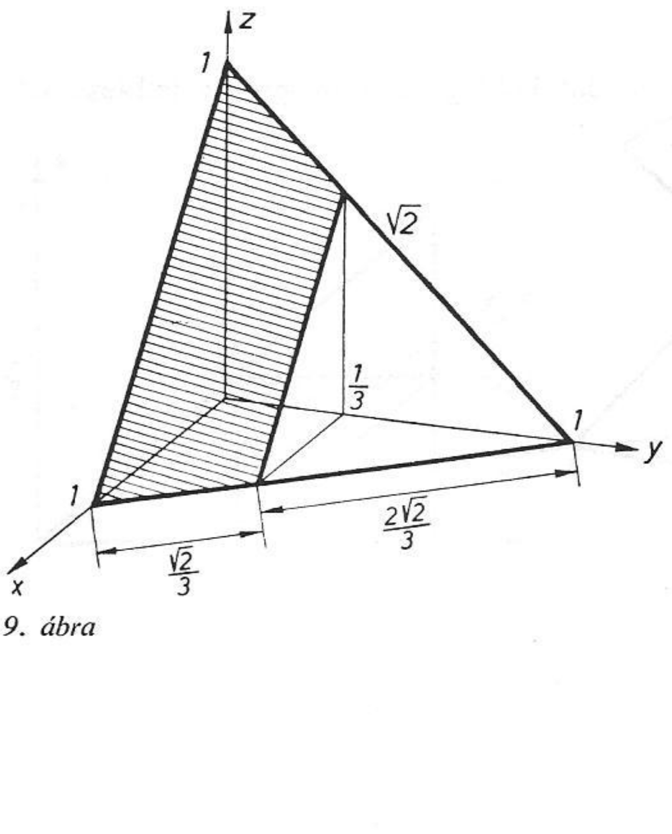


8. ábra

A fázistér most tehát ugyanaz, mint az előző feladatban volt. A találkozás akkor történik meg, ha a P_1 és P_2 pont közötti távolság 1/3-nál kisebb, vagyis ha fennáll a következő egyenlőtlenség is:

3. $y<\frac{1}{3}$.

A 9. ábrán megrajzoltuk az 1. és 2. alatti követelményekkel definiált fázisteret, továbbá az 1., 2. és 3. feltételekkel meghatározott (és ferdén bevonalkázott)



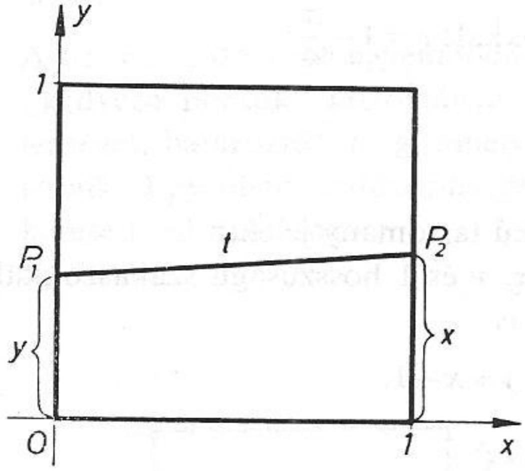
9. ábra

„kedvező pontok” tartományát. A keresett valószínűség a bevonalkázott tartomány és a fázisteret jellemző háromszög területének hányadosa, amelyre könnyű számolással $p=\frac{5}{9}$ adódik. (Természetesen itt is feltételeztük az egyenletes valószínűségeloszlást.)

189. $P=\frac{5}{9}$.

190. A 10. ábrán megrajzoltuk a négyzetet, és felvettük a P_1 és P_2 pontokat. Az ábra jelöléseivel fennáll a következő két egyenlőtlenség:

1. $0 \leqq x \leqq 1$;
2. $0 \leqq y \leqq 1$.



10. ábra

A fázistér most az 1. és 2. követelményekkel meghatározott egységnyi oldalhosszúságú négyzet. A P_1 és P_2 pontok egymástól való távolsága:

$$t=\sqrt{(x-y)^2+1}.$$

Akkor lesz ez a távolság α-nál kisebb, ha

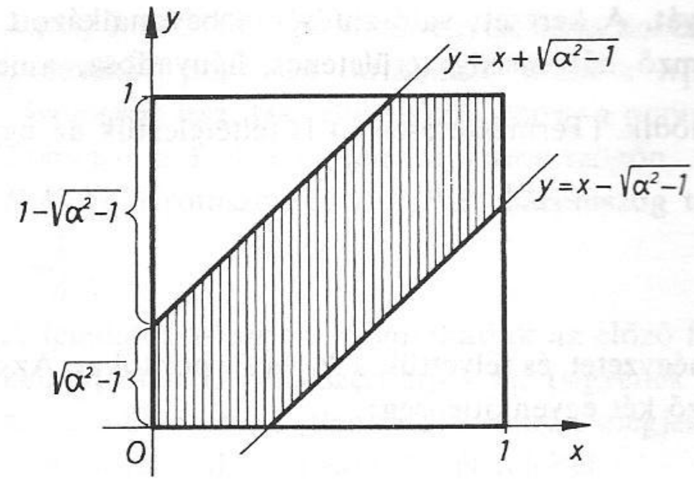
$$t^2=(x-y)^2+1<\alpha^2,$$

vagyis ha fennáll még a következő egyenlőtlenség is:

3. $x-\sqrt{\alpha^2-1}<y<x+\sqrt{\alpha^2-1}$.

A 11. ábrán megrajzoltuk a fázisteret, s ezen bevonalkáztuk azt a tartományt, amelynek pontjaira 3. is teljesül.
Feltételezve az egyenletes valószínűségeloszlást, a keresett valószínűséget e tartomány területe adja (hiszen az egységnégyzet területe 1), erre viszont könnyű számolással kapjuk, hogy

$$P=\sqrt{\alpha^2-1}\,(2-\sqrt{\alpha^2-1}).$$



11. ábra

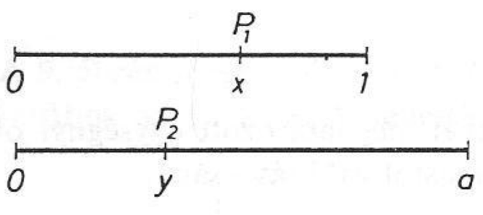
191. Az előzőkben alkalmazott meggondolásokkal: $p=1-\frac{\pi}{4}$.

192. A fázisteret most a 12. ábra alapján az

1. $0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq a$

egyenlőtlenségekkel definiált téglalap alakú tartomány jelenti.
Háromszöget akkor tudunk rajzolni az x, y és 1 hosszúságú szakaszokkal, ha fennállnak a következő egyenlőtlenségek is:

2. $y > -x+1$, 3. $y < x+1$, 4. $y > x-1$.

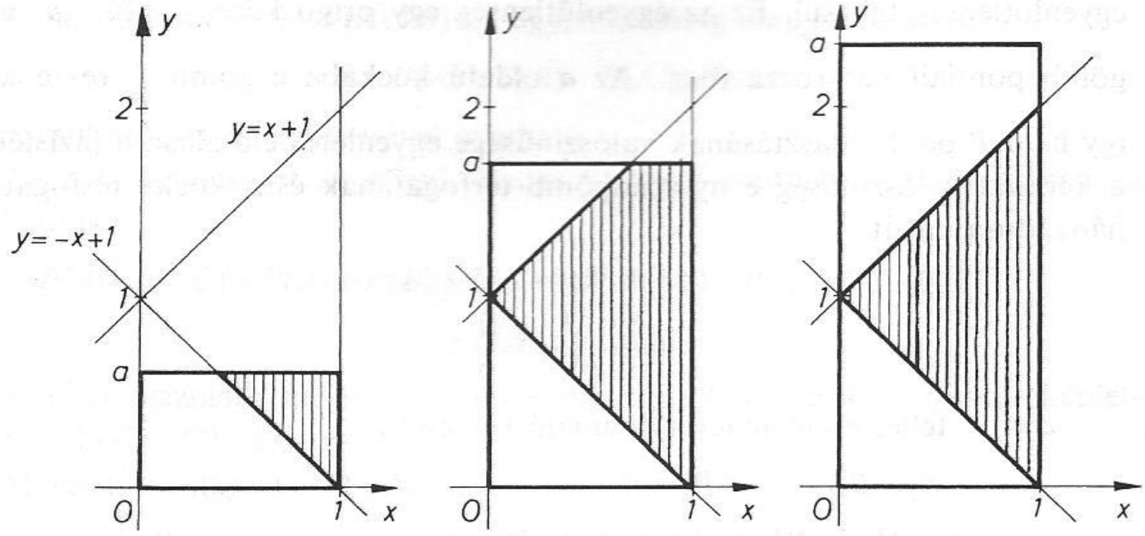


12. ábra

A 4. egyenlőtlenség mindig teljesül. A fázisteret és a „kedvező pontok" tartományát a 13. ábrán rajzoltuk meg. Ennek alapján a keresett valószínűség, most már az a paraméter függvényében, a következő lesz:

$$p=\begin{cases} \dfrac{a}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq a \leqq 1, \\[2ex] \dfrac{4a-a^2-2}{2a}, & \text{ha} \quad 1 \leqq a \leqq 2, \\[2ex] \dfrac{1}{a}, & \text{ha} \quad 2 < a. \end{cases}$$

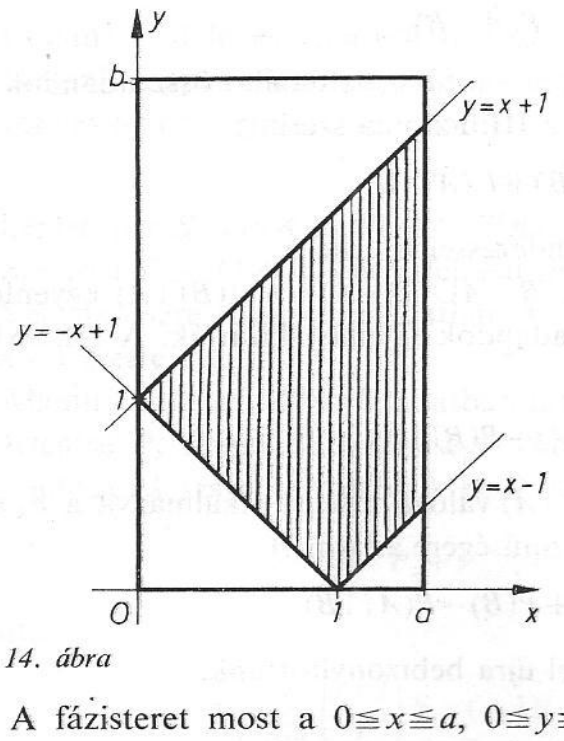
(Ez esetben is feltételeztük az egyenletes valószínűségeloszlást.)



13. ábra

193. A $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ egyenlőtlenségekkel definiált fázisteret és a bevonalkázott „kedvező pontok" tartományát (14. ábra) ugyanazok a háromszög-egyenlőtlenségek határozzák meg, amelyeket az előző feladatban 2., 3. és 4. alatt felírtunk. Egyenletes valószínűségeloszlás feltételezésével a következőt kapjuk a keresett valószínűségre:

$$p = \frac{2a-1}{ab}.$$



14. ábra

194. A fázisteret most a $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq a$, $0 \leqq z \leqq a$ egyenlőtlenségek határozzák meg. Ez egy a oldalú kockát jelent a háromdimenziós térben. A $P(x, y, z)$ pont a térbeli koordináta-rendszer kezdőpontjától nem lesz a egységnél távolabb, ha a fázistérnek olyan pontja, amelyre az

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq a^2$$

egyenlőtlenség teljesül. Ez az egyenlőtlenség egy origó középpontú, a sugarú gömb pontjait határozza meg. Az a oldalú kockába e gömb $\frac{1}{8}$ része kerül, így ha a P pont választásának valószínűsége egyenletes eloszlású a fázistérben, a keresett valószínűség e nyolcadgömb térfogatának és a kocka térfogatának hányadosa, tehát

$$p=\frac{\frac{1}{8}\,\frac{4a^3\pi}{3}}{a^3}=\frac{\pi}{6}.$$

195. *a)* A teljes eseményteret definiáló képletek:

$$B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=H \quad \text{és} \quad B_i\cap B_j=\emptyset \quad (i\neq j),$$

így a II. és III. axióma értelmében:

$$P(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1.$$

b) Ez az összefüggés következik az ismert

$$A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n)$$

egyenlőségből, ahol $(A\cap B_i)\cap(A\cap B_j)=\emptyset$ $(i\neq j)$ is fennáll, a III. axióma alapján.

196. *a)* $P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

c) Mivel $A=(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$, és a jobb oldalon álló összeadandók egymást kizáró események, így a III. axióma szerint:

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\bar{B}),$$

s ebből az adott képlet átrendezéssel nyerhető.

d) Nyilvánvalóan fennáll az $A\cup B=A\cup(B-A)=A\cup(B\cap\bar{A})$ egyenlőség, és a jobb oldalon levő összeadandók egymást kizárják. A III. axióma szerint tehát

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\cap\bar{A}).$$

Vegyük észre, hogy a $P(B\cap\bar{A})$ valószínűségre alkalmazva a *c)* alatti egyenlőséget, az $A\cup B$ valószínűségére az ismert

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

képletet kapjuk, melyet ezzel újra bebizonyítottunk.

197. A III. axióma értelmében

$$P(A\cup B)=P(A\cap\bar{B})+P(B\cap\bar{A})+P(A\cap B).$$

A második és harmadik tagra alkalmazva az előző feladat *c)* alatti képletét, majd elvégezve az összevonásokat, az igazolandó képletet kapjuk.

198. Mindkét állítás a $0 \leqq P(A \cup B) \leqq 1$ egyenlőtlenség alapján felírható

$$0 \leqq P(A)+P(B)-P(A \cap B) \leqq 1$$

egyenlőtlenség átrendezésével nyerhető.

199. Az egyenlőtlenséget az előző feladat *b)* alatti eredményének felhasználásával kapjuk.

200. $$P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+$$
$$+P(A \cap B \cap C).$$

A tétel igazolása céljából alkalmazzuk a 197. feladatban igazolt képletet a $P\big((A \cup B) \cup C\big)$ valószínűségre!

201. Meghatározandó a

$$P_1=P\big((A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)\big)$$

valószínűség.

A zárójelben álló tagok egymást páronként kizárják. (Bizonyítsuk be!) Ezért

$$P_1=P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3).$$

Először az összeg első tagját alakítjuk át:

$$P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)=P\big(A_1 \cap (\overline{A_2 \cup A_3})\big)=P(A_1)-P\big(A_1 \cap (A_2 \cup A_3)\big)=$$
$$=P(A_1)-P\big((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)\big)=$$
$$=P(A_1)-P(A_1 \cap A_2)-P(A_1 \cap A_3)+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Itt a második lépésben a 196. feladat *c)* alatti képletét használtuk fel.

Hasonlóképpen alakíthatjuk át az összeg többi tagját is. Az átalakítások elvégzése és az összegezés után adódik a

$$P_1=S_1-2S_2+3S_3$$

képlet [itt $S_1=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$, $S_2=P(A_1 \cap A_2)+P(A_1 \cap A_3)+P(A_2 \cap A_3)$, $S_3=P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$], s ez a feladat megoldása.

Vegyük észre, hogy e feladatban a Jordan-tételt bizonyítottuk be az $n=3$ és $k=1$ esetre.

202. Alkalmazzuk az előző feladatban látott számítás gondolatmenetét.

203. Jelentse P_k annak valószínűségét, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül pontosan k számú következik be. Ekkor

$$Q_k=P_k+P_{k+1}+\ldots+P_n=\sum_{i=k}^{n} P_i,$$

ahol

$$P_i=\sum_{j=0}^{n-i} \binom{i+j}{i} S_{i+j}(-1)^j \qquad (i=k,\ k+1, \ldots, n).$$

A Q_k valószínűség tehát így írható fel:

$$Q_k=\sum_{i=k}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{i+j}{i} S_{i+j}(-1)^j.$$

Rendezzük át ezt a kettős szummát a következőképpen. Írjuk ki az összeg egyes tagjait (az első sorba a P_k, a másodikba a P_{k+1} kerüljön, és így tovább) úgy, hogy az egyenlő S_ν szimbólumok egy oszlopban legyenek, majd végezzük el az összegezést „függőleges" irányban, azaz: adjuk össze az azonos oszlopban levő tagokat; végül ezeket is összegezzük. (Kettős szummákat nagyon gyakran alakítunk át így.)

Az S_{k+j} szimbólumot tartalmazó oszlop tagjainak összegezésével ezt kapjuk:

$$\sum_{\nu=0}^{j}(-1)^{j+\nu}\binom{k+j}{k+\nu}S_{k+j} \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-k).$$

Az összes oszlop összege:

$$Q_k=\sum_{j=0}^{n-k}\sum_{\nu=0}^{j}(-1)^{j+\nu}\binom{k+j}{k+\nu}S_{k+j}.$$

Írjunk most a $k+j$ helyére m-et, majd a $k+\nu$ helyére l-et, akkor

$$Q_k=\sum_{m=k}^{n}\sum_{\nu=0}^{m-k}(-1)^{m-k+\nu}\binom{m}{k+\nu}S_m=\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}S_m\sum_{l=k}^{m}(-1)^{l-k}\binom{m}{l}$$

adódik. A belső összeget a 102. *d)* feladatból ismerjük. Ezt felhasználva kapjuk a

$$Q_k=\sum_{m=k}^{n}(-1)^{m-k}\binom{m-1}{k-1}S_m$$

képletet, s ez volt bizonyítandó.

204. Ezt a feladatot a 143. feladatban már megoldottuk az összes esetek összeszámlálásával. Most a Poincaré-tétel felhasználásával oldjuk meg.

Legyen A az az esemény, hogy az első kockán 6-ost dobunk, B pedig az, hogy a másodikon 6-ost dobunk. Ekkor a keresett valószínűségre a

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

képlet alapján, mivel most

$$P(A)=\frac{1}{6},\qquad P(B)=\frac{1}{6},\qquad P(A\cap B)=\frac{1}{36},$$

a következő eredményt kapjuk:

$$P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}.$$

205. Legyen A az az esemény, hogy a kihúzott lap piros, B pedig, hogy ász. Ez esetben

$$P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}=\frac{11}{32}.$$

206. *Visszatevés nélküli* mintavételt feltételezve, annak valószínűsége, hogy a kihúzott 6 lap egyike sem lesz ász:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{0}\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}},$$

s hogy legalább az egyik ász lesz:

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{\binom{4}{0}\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}}.$$

Visszatevéses mintavétel esetén ugyanígy adódik a

$$P(A)=\binom{6}{0}\left(\frac{4}{32}\right)^0\left(\frac{28}{32}\right)^6=\left(\frac{7}{8}\right)^6$$

valószínűség, s ebből

$$P(\bar{A})=1-\left(\frac{7}{8}\right)^6.$$

207. A feltétel szerint a szobában 5 jobbkezes és 5 balkezes kesztyű van. Ezek közül 5 db $\binom{10}{5}$-féleképpen választható ki. A 10 kesztyűből 5 jobbkezest csak egyféleképpen vehetünk, ugyancsak egyféleképpen vehetünk 5 balkezest. E szerint annak valószínűsége, hogy csak jobb-, vagy csak balkezest veszünk ki:

$$p=\frac{2}{\binom{10}{5}}.$$

Annak valószínűsége, hogy a kivettek között lesz jobbkezes is, balkezes is — ez az esemény az előbbi komplementere —, a következő lesz:

$$P=1-\frac{2}{\binom{10}{5}}.$$

208. Visszatevés nélküli mintavétel esetén, ha p_0 annak valószínűségét jelenti, hogy a mintában nincs selejt, a keresett valószínűség:

$$p=1-p_0=1-\frac{\binom{50}{0}\binom{950}{10}}{\binom{1000}{10}}.$$

Visszatevéses mintavétel esetén hasonlóképpen:

$$p=1-\binom{10}{0}0{,}05^0\cdot 0{,}95^{10}.$$

209. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i jelű lapot az i-edik húzásra húzzuk ki ($i=1, 2, 3, 4, 5$). Ekkor a kiszámítandó valószínűség:

$$P_5=P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5).$$

A Poincaré-tétel szerint ez a következővel egyenlő;

$$P_5=S_1-S_2+S_3-S_4+S_5.$$

Az S_k számok meghatározására a következőket használjuk fel:

$$P(A_i)=\frac{4!}{5!}=\frac{1}{5},$$

$$P(A_i\cap A_j)=\frac{3!}{5!}=\frac{1}{4\cdot 5}\qquad (i\neq j),$$

$$P(A_i\cap A_j\cap A_k)=\frac{2!}{5!}=\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\qquad (i\neq j,\ i\neq k,\ j\neq k),$$

és így tovább. Ezekből

$$S_1=\sum_{i=1}^{5}P(A_i)=1,$$

$$S_2=\sum_{1\leq i<j\leq 5}P(A_i\cap A_j)=\binom{5}{2}\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{2!},$$

$$S_3=\binom{5}{3}\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{3!},$$

és hasonlóképpen számolva: $S_4=\frac{1}{4!}$, $S_5=\frac{1}{5!}$, így a keresett valószínűség:

$$P_5=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}.$$

(Vegyük észre, hogy e valószínűség az $1-e^{-1}$ közelítő értéke!)

210. Ha az A_i esemény azt jelenti, hogy az i-edik házaspár együtt táncol ($i=1, 2, \ldots, n$), akkor a

$$p=P(\bar{A}_1\cap \bar{A}_2\cap \ldots \cap \bar{A}_n)$$

valószínűséget kell kiszámítanunk. Ez azonban így írható:

$$p=P(\overline{A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n})=1-P(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n).$$

Itt a második tag annak valószínűségét jelenti, hogy legalább az egyik házaspár együtt táncol.

Gondoljuk el, hogy minden házaspárt megjelölünk, a férj és feleség azonos számot kap. A $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ valószínűségre így is kérdezhetünk: mi a valószínűsége, hogy legalább az egyik férfi a saját számával megegyező számú nőt kérte fel táncolni?
Az előző feladatban alkalmazott gondolatmenetet megismételve, végeredményül

$$p = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \approx \frac{1}{e}$$

adódik.

211. Ha B jelenti a kérdéses eseményt, akkor nyilvánvaló, hogy

$$P(B) = \frac{\varphi(n)}{n}.$$

Ezt a valószínűséget számítjuk ki most más úton is.
Legyen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ és A_i jelentse azt az eseményt, hogy a kihúzott szám osztható p_i-vel ($i = 1, 2, \ldots, k$). Ez esetben $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k$ jelenti azt az eseményt, hogy n-hez relatív prímet húztunk. Így világos, hogy

$$P(B) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_k) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) =$$
$$= 1 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^k S_k.$$

Most $P(A_i) = \frac{1}{p_i}$, mert az n-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül csak a

$$p_i,\ 2p_i, \ldots, p_i^2,\ (p_i + 1)p_i, \ldots, \frac{n}{p_i} p_i = n$$

számok oszthatók p_i-vel, s ezek száma $\frac{n}{p_i}$, így valóban

$$P(A_i) = \frac{\frac{n}{p_i}}{n} = \frac{1}{p_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Hasonlóképpen látható, hogy a $p_i p_j$ szorzattal csak a

$$p_i p_j, \quad 2p_i p_j, \ldots, \quad \frac{n}{p_i p_j} p_i p_j \qquad (i \neq j)$$

számok oszthatók, tehát

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{\frac{n}{p_i p_j}}{n} = \frac{1}{p_i p_j},$$

és így tovább. Ezek szerint

$$S_1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}, \quad S_2 = \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{1}{p_i p_j}, \ldots, \quad S_k = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k},$$

tehát a keresett valószínűség:

$$P(B)=1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{p_ip_j}-\sum_{1\le i<j<l\le k}\frac{1}{p_ip_jp_l}+\ldots\pm\frac{1}{p_1p_2\ldots p_k}.$$

Ezt az összeget a következő szorzatalakban is írhatjuk:

$$P(B)=\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right).$$

Ebből az eredményből és a

$$P(B)=\frac{\varphi(n)}{n}$$

egyenlőségből a feladatban közölt képletet n-nel való szorzással kapjuk meg.

212. A visszatevés nélküli mintavétel feltételezésével a

$$P_1=\frac{\binom{10}{1}\binom{90}{1}}{\binom{100}{2}}=0{,}182$$

valószínűség adódik.

Legyen most A_i az az esemény, hogy az i-edik húzás eredménye „selejteshúzás" ($i=1, 2$). Akkor annak valószínűsége, hogy e két esemény közül csak egy következik be, a Jordan-tétel szerint:

$$P_1=P(A_1)+P(A_2)-2P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-2\frac{10\cdot 9}{100\cdot 99}=0{,}182.$$

213. A visszatevés nélküli mintavételre vonatkozó képlettel számolva, a keresett valószínűség:

$$P_2=\frac{\binom{4}{2}\binom{28}{3}}{\binom{32}{5}}.$$

Jordan-tételével, ha az A_i esemény azt jelenti, hogy az i-edik húzás eredménye ász ($i=1, 2, \ldots, 5$), akkor

$$P_2=S_2-\binom{3}{2}S_3+\binom{4}{2}S_4-\binom{5}{2}S_5.$$

Most azonban felhasználva a 158. feladatban követett gondolatmenetet is:

$$S_2=\binom{5}{2}\frac{4\cdot 3}{32\cdot 31},\qquad S_3=\binom{5}{3}\frac{4\cdot 3\cdot 2}{32\cdot 31\cdot 30},$$

$$S_4=\binom{5}{4}\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29},\qquad S_5=0,$$

így ezeket a P_2 előbbi kifejezésébe írva, a keresett valószínűséget újra megkapjuk. Kis számolással nem nehéz ellenőrizni, hogy a P_2-re kapott eredmények egyenlők.

214. Az előző feladat megoldásában követett gondolatmenetet ismételjük meg, most általánosan.

Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik húzás eredménye selejtes ($i=1, 2, \ldots, n$). Annak valószínűsége, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események közül k számú következik be, Jordan-tételével:

$$P_k = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k+i}{k} S_{k+i}(-1)^i = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} S_j(-1)^{j-k}.$$

Mivel most a 158. feladat eredményeit felhasználva:

$$P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}) = \frac{V_s^j V_{N-j}^{n-j}}{V_N^n} = \frac{\binom{s}{j}}{\binom{N}{j}},$$

így

$$S_j = \binom{n}{j} \frac{\binom{s}{j}}{\binom{N}{j}},$$

tehát a fenti P_k valószínűség:

$$P_k = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \frac{\binom{j}{k}\binom{n}{j}\binom{s}{j}}{\binom{N}{j}} = \frac{\binom{s}{k}}{\binom{N}{n}} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \frac{\binom{j}{k}\binom{n}{j}\binom{s}{j}\binom{N}{n}}{\binom{N}{j}\binom{s}{k}}.$$

Az összegben szereplő tört egyszerű számolással átalakítható, így a következőt kapjuk:

$$P_k = \frac{\binom{s}{k}}{\binom{N}{n}} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{N-j}{n-j}\binom{s-k}{s-j}.$$

Ez a Jordan-tétellel nyert eredmény.

Ugyanerre a valószínűségre a visszatevés nélküli mintavétel esetére kapott összefüggést használva, a

$$P_k = \frac{\binom{s}{k}}{\binom{N}{n}} \binom{N-s}{n-k}$$

képlet adódik. Ezt összevetve a Jordan-tétellel kapott eredménnyel, a

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{N-j}{n-j}\binom{s-k}{s-j} = \binom{N-s}{n-k}$$

egyenlőség írható fel. Ezt még tovább alakítjuk. A binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát alkalmazva az összegben szereplő második tényezőkre, majd a $\nu=j-k$ új összegező változót bevezetve:

$$\sum_{\nu=0}^{n-k}(-1)^{\nu}\binom{s-k}{\nu}\binom{N-k-\nu}{n-k-\nu}=\binom{N-s}{n-k}$$

adódik. Végezzük el végül az $s-k=a$, $N-k=b$, $n-k=m$ helyettesítéseket, akkor a következőt kapjuk:

$$\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\binom{a}{\nu}\binom{b-\nu}{m-\nu}=\binom{b-a}{m},$$

s ez volt bizonyítandó. (Mivel a $N\geqq s$, így $b=N-k\geqq s-k=a$ is nyilvánvalóan teljesül.)

215. Jelentse az A_i esemény azt, hogy az i-edik fajtából egyet sem vásároltak ($i=1, 2, \ldots, n$). Ez esetben annak valószínűségét kell megállapítani, hogy az A_1, $A_2, \ldots, A_n$ események közül pontosan k számú következik be. Az A_i események nyilvánvalóan nem függetlenek, hiszen

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_i\right)=0\neq\prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

A kérdéses valószínűséget a Jordan-tétellel kaphatjuk meg.

Most $P(A_i)=\dfrac{(n-1)^N}{n^N}$, mert az összes lehetőségek száma annyi, ahányféleképpen az n számú televíziófajtát (ismétlődést is megengedve) a N számú vevő között szétoszthatjuk, s ez nyilván az n számú elem N-ed osztályú ismétléses variációinak számával egyenlő; a „kedvező" esetek pedig azt jelentik, hogy az i-edik fajtát egy vevőhöz sem rendeljük, tehát $n-1$ televízióf ajta oszlik meg az N vevő között, s e lehetőségek száma $(n-1)^N$.

Hasonlóképpen látható be, hogy

$$P(A_i\cap A_j)=\frac{(n-2)^N}{n^N}\quad (i\neq j),$$

és általánosságban:

$$P(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_l})=\frac{(n-l)^N}{n^N},$$

az $1, 2, \ldots, n$ elemek minden $i_1, i_2, \ldots, i_l$ kombinációjára. Ezekből pedig következik, hogy minden l-re

$$S_l=\binom{n}{l}\left(1-\frac{l}{n}\right)^N,$$

a keresett valószínűség tehát

$$P_k=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{k+i}{k}S_{k+i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{k+i}{k}\binom{n}{k+i}\left(1-\frac{k+i}{n}\right)^N=\binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n-k}{i}\left(1-\frac{k+i}{n}\right)^N.$$

A feladatban szereplő $\max(0, n-N) \leqq k \leqq n$ feltétel azt fejezi ki, hogy az eladatlan televíziófajták száma nem lehet kevesebb, mint az összes televíziófajták számának és a vásárlók számának különbsége, ugyanis nincs értelme pl. $n=10$, $N=2$ esetén azt kérdezni, hogy milyen valószínűséggel lesz az eladatlan fajták száma $k=3$. Az egyenlőtlenség jobb oldala pedig azt mondja, hogy $N>0$ esetén $k=n$ nem jöhet szóba. (Az $N=0$ esettől természetesen eltekinthetünk.)

216. A Jordan-tétel szerint, mivel most

$$S_{k+i}=\binom{n}{k+i}\frac{(n-k-i)!}{n!}=\frac{1}{(k+i)!},$$

a következő eredményt kapjuk:

$$P_k=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{k+i}{k}S_{k+i}=\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{k+i}{k}\frac{1}{(k+i)!}=$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{1}{i!}=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}\right).$$

217. *a)* A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$P(\bar{A}|B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=1-\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=1-P(A|B).$$

b) Hasonló számolással:

$$P(A_1\cup A_2|B)=\frac{P((A_1\cup A_2)\cap B)}{P(B)}=\frac{P((A_1\cap B)\cup(A_2\cap B))}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}-\frac{P(A_1\cap A_2\cap B)}{P(B)}=$$

$$=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1\cap A_2|B).$$

218. Ha $A\subset B$, akkor $P(A\cap B)=P(A)$, tehát

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(B)}.$$

Ha pedig $B\subset A$, akkor $P(A\cap B)=P(B)$, így

$$P(A|B)=\frac{P(B)}{P(B)}=1.$$

219. Az első és második valószínűségből következnek a

$$P(A\cap B)=0{,}7P(B),$$

$$P(A\cap \bar{B})=0{,}3P(\bar{B})=0{,}3[1-P(B)]$$

egyenlőségek. Ezeket összeadva a következőt kapjuk:

$$P(A)=0{,}4P(B)+0{,}3.$$

Hasonlóképpen adódik a második és harmadik feltételből a

$$P(B)=\frac{6}{7}P(A)$$

egyenlet. Ezekből végül is

$$P(A)=\frac{21}{46}.$$

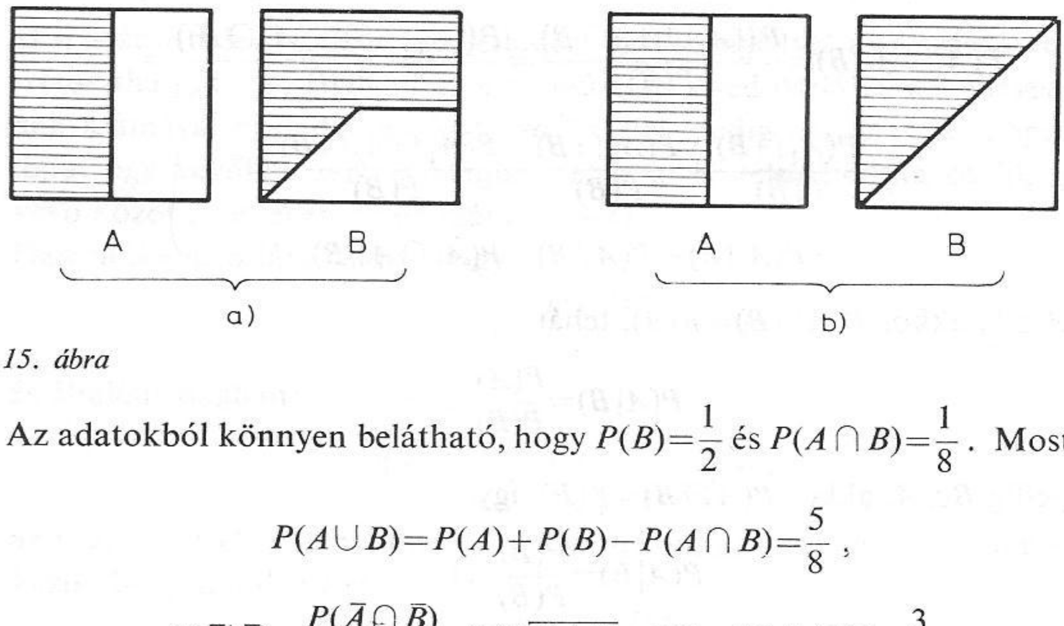
220 Tekintsük például a kockadobást. Legyen A az az esemény, hogy páros számot dobunk, B pedig az, hogy nem dobunk 1-est. Akkor

$$P(A|B)=\frac{3}{5}, \quad \text{és} \quad P(A|\bar{B})=0.$$

A $P(A|B)=1-P(A|\bar{B})$ egyenlőség tehát nem általánosan igaz összefüggés. Legyen most A: páros számot dobunk, B: 4-nél kisebbet dobunk. Akkor

$$P(A|B)=\frac{1}{3} \quad \text{és} \quad P(A|\bar{B})=\frac{2}{3}.$$

Ez esetben teljesül a feladatban adott összefüggés.
Másik példa olyan eseményekre, amelyekre nem teljesül az egyenlőség (egyenletes eloszlást feltételezve) a 15*a* ábrán látható két esemény; az ábra *b)* részén olyan események láthatók, amelyekre teljesül.



15. ábra

221. Az adatokból könnyen belátható, hogy $P(B)=\frac{1}{2}$ és $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$. Most már

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{8},$$

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=2P(\overline{A\cup B})=2[1-P(A\cup B)]=\frac{3}{4}.$$

222. Az igazolandó egyenlőtlenséget a 198. *b)* feladat felhasználásával bizonyíthatjuk be.

223. Az egyenlőség a feltételes valószínűség definíciója alapján egyszerűen bizonyítható. A $P(C)>0$ egyenlőtlenség feltételezésére nincs szükség, mert ez a $P(B\cap C)>0$ feltételből következik.

224. Legyen H elemi eseményeinek száma n. Ekkor $P(A \cap B)=\frac{k}{n}$ és $P(B)=\frac{m}{n}$, a feltétel szerint. Ebből viszont

$$P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{k}{m}$$

225. Az első kérdésre a válasz: $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

Az első dobásból nyert információ (párosat dobtak) alapján a következő számpárok jönnek csak számításba: $(2, i)$; $(4, i)$ és $(6, i)$, ahol $i=1, 2, \ldots, 6$. Ezek száma 18. A dobott számok összege 7 lesz 3 esetben: [(2, 5); (4, 3); (6, 1)].

A keresett feltételes valószínűség tehát $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

Ez esetben tehát az a közlés, hogy páros szám adódott az első dobás eredményeként, nem befolyásolta annak valószínűségét, hogy a dobott számok összege 7 lesz.

226. Tudjuk, hogy a dobott számok összege páratlan. Így csak az (1, 2); (1, 4); (1, 6); (2, 3); (2, 5); (3, 4); (3, 6); (4, 5) és (5, 6) számpárok, és ezek fordítottjai veendők figyelembe. Ezek közül 7 lesz a dobott számok összege 6 esetben.

A keresett valószínűség tehát $\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

227. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy az i-edik kockán 6-ost dobunk ($i=1, 2, 3$), és B azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 12. A keresett valószínűség így:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 | B).$$

A B feltételnek megfelelő elemi eseményeket a

6 5 1,	5 5 2,	4 4 4
6 4 2,	5 4 3,	
6 3 3,		

dobások és ezek permutációi jelentik. Ezek száma 25. A kedvező elemi eseményeket az első oszlop lehetőségei és ezek permutációi alkotják. Ezek száma 15.

A keresett valószínűség most már:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 | B)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}.$$

228. Az adott táblázatból könnyen kiolvashatók a megoldások:

a) $P(A_1)=\frac{520}{1510}$.

b) $P(B_2)=\frac{585}{1510}$.

c) $P(A_1 \cap B_2)=\frac{220}{1510}$.

d) $P(A_1\cup B_2)=P(A_1)+P(B_2)-P(A_1\cap B_2)=\frac{885}{1510}$.

e) $P(A_1|B_2)=\frac{220}{585}$.

f) $P(B_2|A_1)=\frac{220}{520}$.

g) $P(\bar{A}_1|\bar{B}_2)=P(\bar{A}_1|B_1)=P(A_2\cup A_3|B_1)=$

$$=P(A_2|B_1)+P(A_3|B_1)=\frac{310}{925}+\frac{315}{925}=\frac{625}{925}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\bar{B}_2=B_1$, továbbá, hogy $\bar{A}_1=A_2\cup A_3$, és az A_2 és A_3 események egymást kizárják. (Az előzőkhöz hasonlóan ezt a valószínűséget is kiolvashatjuk a táblázatból.)

h) $P(A_1|B_1\cup B_2)=P(A_1|H)=P(A_1)=\frac{520}{1510}$, mert $B_1\cup B_2=H$.

i) $P(A_1\cup A_3|B_1)=P(A_1|B_1)+P(A_3|B_1)=\frac{615}{921}$, mert $A_1\cap A_3=\emptyset$.

j) $P(A_1|B_1\cap B_2)$. Ez a valószínűség nem értelmezhető, mert a feltétel lehetetlen esemény.

k) $P(B_1\cup B_2|A_1)=1$.

l) $P(B_1|A_1\cup A_2)=\frac{300+310}{520+500}=\frac{610}{1020}$. Ezt a valószínűséget így is számolhatjuk:

$$P(B_1|A_1\cup A_2)=\frac{P(B_1\cap(A_1\cup A_2))}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(B_1\cap A_1)+P(B_1\cap A_2)}{P(A_1)+P(A_2)},$$

mert $A_1\cap A_2=\emptyset$, és $(B_1\cap A_1)\cap(B_1\cap A_2)=\emptyset$.

229. Ha az egyik (kiválasztott) játékosnak nem jutott ász, akkor annak valószínűsége, hogy a következőnek sem jutott:

$$P(B|A)=\frac{\binom{20}{8}}{\binom{24}{8}}.$$

Itt az A esemény azt jelöli, hogy a kiválasztott játékosnak nem jutott ász, B pedig, hogy az utána következőnek nem jutott.

230. Az adatokból csak relatív gyakoriságokat tudunk számolni. Ha azonban l_0 elég nagy, akkor a relatív gyakoriságokat a keresett valószínűségek jó közelítő értékeinek tekinthetjük. Ezt tesszük majd a következőkben előforduló hasonló jellegű feladatokban is.

Jelentse most A azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott egyén az 50. életévét megéri, B pedig azt, hogy a 60. évét megéri. Akkor

$$a)\quad P(A)=\frac{l_{50}}{l_0}. \qquad b)\quad P(B\mid A)=\frac{l_{60}}{l_{50}}.$$

231. Gondoljuk el, hogy az $N-s$ jó csavar közül $2n$-et letettünk az első $2n$ számú helyre. Maradt még s selejtes és $N-2n-s$ számú jó csavar. Annak valószínűsége, hogy az $N-2n$ csavar közül vett $2n$ elemű minta n selejtest tartalmaz:

$$P(A\mid B)=\frac{\binom{s}{n}\binom{N-2n-s}{n}}{\binom{N-2n}{2n}}.$$

E képletben a B esemény azt jelenti, hogy az első $2n$ számú kihúzott csavar jó, az A pedig azt az eseményt, hogy a $4n$ elemű mintában n lesz a selejtesek száma.

232. Tegyük fel, hogy az urnában N fehér és M fekete golyó van. Jelentse B azt az eseményt, hogy az n kihúzott golyó közül k fehér és $n-k$ fekete, az A esemény pedig jelentse azt, hogy az első húzás eredménye fehér golyó. Meghatározandó a $P(A\mid B)$ valószínűség.

Az összes B-nek megfelelő elemi események száma

$$\binom{n}{k}\binom{N}{k}k!\binom{M}{n-k}(n-k)!,$$

ui. $\binom{n}{k}$-féleképpen választhatjuk ki a k fehér golyó helyét, s erre az N számú fehér golyó közül a k számú fehéret $\binom{N}{k}$ $k!$-féle sorrendben helyezhetjük el, és a többi helyre a fekete golyókat $\binom{M}{n-k}$ $(n-k)!$-féleképpen tehetjük.

A kedvező elemi események száma hasonló meggondolással:

$$N\binom{n-1}{k-1}\binom{N-1}{k-1}(k-1)!\binom{M}{n-k}(n-k)!.$$

Az első tényező onnan származik, hogy az első helyre N-féleképpen tehetünk fehér golyót.

A keresett valószínűség e két szám hányadosa lesz, ebből egyszerűsítésekkel a következőt kapjuk:

$$P(A\mid B)=\frac{k}{n}.$$

233. Legyen A_i az az esemény, hogy a keresett személy az i-edik teremben található ($i=1, 2, \ldots, 5$), továbbá B az az esemény, hogy egyáltalán megtalálható. Ez esetben $P(B)=p$. Nyilvánvaló, hogy

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=B.$$

Mivel pedig

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j), \quad \text{és} \quad P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_5)$$

a feltevés szerint, ezért

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = 5P(A_1) = P(B) = p.$$

Ebből

$$P(A_1) = \frac{p}{5} = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5).$$

A következő valószínűséget kell meghatároznunk:

$$P_5 = P\left(A_5 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{4} \bar{A}_i\right) = \frac{P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{4} \bar{A}_i\right) \cap A_5\right)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{4} \bar{A}_i\right)}.$$

Az nyilvánvaló, hogy $A_5 \subset \left(\bigcap_{i=1}^{4} \bar{A}_i\right)$, hiszen ha a keresett személy az ötödik teremben megtalálható, akkor biztosan nincs a többiben. Így viszont

$$\left(\bigcap_{i=1}^{4} \bar{A}_i\right) \cap A_5 = A_5.$$

A P_5 valószínűség tehát így írható:

$$P_5 = \frac{P(A_5)}{P\left(\bigcap_{i=1}^{4} \bar{A}_i\right)} = \frac{P(A_5)}{P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4})}.$$

Még a nevezőben álló valószínűséget kell meghatároznunk. Mivel $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, ezért

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) = \frac{4p}{5},$$

tehát

$$P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}) = 1 - \frac{4p}{5}.$$

A feladat megoldása:

$$P_5 = \frac{\frac{p}{5}}{1 - \frac{4p}{5}} = \frac{p}{5 - 4p}.$$

234. Jelentse A_i azt az eseményt, hogy a 8 óra utáni i-edik órában érkezik meg a szállítmány ($i = 1, 2, 3, 4$), a B pedig jelentse azt, hogy a szállítmány 8 és 12 óra között érkezik. Ekkor a $P_4 = P(A_4 | \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$ valószínűség számítandó ki. Az előző feladatban megismert gondolatmenettel eredményül $P_4 = \frac{1}{2}$ adódik.

235. I. A $(0, a)$ szakaszon kiválasztott két pont közül az egyiknek legyen x, a másiknak legyen y a szakasz kezdőpontjától mért távolsága (16. ábra). Ez esetben nyilvánvaló, hogy az

$$1.\quad 0 \leqq x \leqq a, \quad 0 \leqq y \leqq a$$

16. ábra

egyenlőtlenségekkel meghatározott négyzetet tekinthetjük a feladathoz rendelt fázistérnek. Tudjuk, hogy a két pont közötti távolság a szakasz harmadrészénél kisebb, tehát fennáll a

$$2.\quad |y-x| < \frac{a}{3}$$

egyenlőtlenség is. Jelöljük B-vel ezt az eseményt. Meg kell határoznunk annak az A eseménynek a valószínűségét, hogy mindkét pont a $(0, a)$ intervallum első felébe esik, azaz hogy a

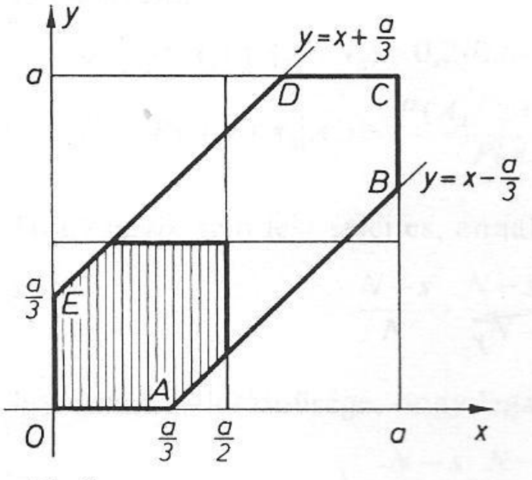
$$3.\quad x \leqq \frac{a}{2}, \quad y \leqq \frac{a}{2}$$

egyenlőtlenségek fennállnak.

A 2. alatti egyenlőtlenséget így is írhatjuk:

$$x - \frac{a}{3} < y < x + \frac{a}{3},$$

tehát a feltételes valószínűség értelmezésének megfelelően a teljes fázistérnek csak az ezekkel az egyenlőtlenségekkel leszűkített részét tekintjük most eseménytérnek. Ezek után az van hátra, hogy a 3. alatti egyenlőtlenségekkel meghatározott „kedvező pontok" tartományának területét az $OABCDE$ idom területével elosszuk. (Az említett tartományokat a 17. ábrán rajzoltuk meg.)



17. ábra

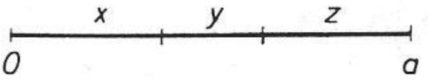
Eredményül a következőt kapjuk:

$$P(A|B)=\frac{2}{5}.$$

Megoldhatjuk a feladatot úgy is, hogy a $(0, a)$ intervallumon felvett pontok közül az elsőnek koordinátáját jelöljük y-nal és a másodikét x-szel. Ez esetben a fázistér természetesen a $0 \leqq y \leqq x \leqq a$ egyenlőtlenségekkel jellemzett háromszög. Oldjuk meg a feladatot így is!

II. Végül nézzük meg, hogy a 187. feladatra adott második megoldás módszerével hogyan okoskodhatunk. Ez esetben a 18. ábra alapján fázistérként az

$$x+y+z=a$$



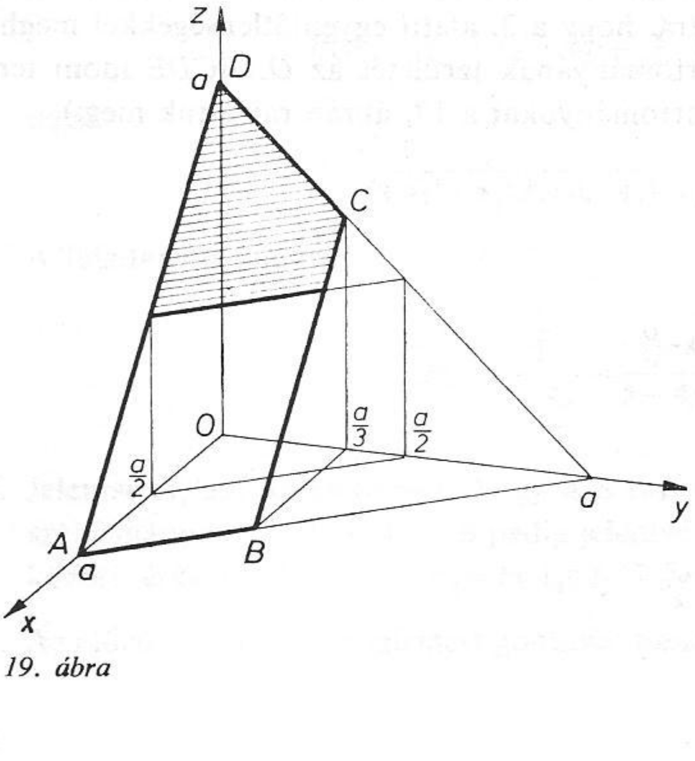
18. ábra

egyenlet által meghatározott sík $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ feltételeknek eleget tevő része adódik. A B eseménynek megfelelő feltétel most az $y<\frac{a}{3}$ egyenlőtlenségben jut kifejezésre. Ha ehhez még hozzávesszük az

$$x+y<\frac{a}{2}$$

egyenlőtlenséget, akkor ezzel egyben meghatározzuk a „kedvező" pontok tartományát is.

A 19. ábrán szemléltetjük az itt elmondottakat. A keresett valószínűség a besatírozott idom területének és az $ABCD$ pontokkal meghatározott trapéz



19. ábra

területének hányadosa. E hányados könnyen kiszámítható, hiszen az ábrán szereplő háromszögek egyenlőoldalúak. Eredményül

$$P(A|B)=\frac{2}{5}$$

adódik.

236. Az előző feladatban követett gondolatmenetet alkalmazva, a keresett valószínűségre a következőt kapjuk:

$$P(A|B)=\frac{1}{19}.$$

237. Legyen A_1 az az esemény, hogy az első húzás eredménye király; A_2: a második húzás eredménye király; A_3: a harmadik húzás eredménye felső, végül A_4: a negyedik húzás eredménye ász. Ekkor a szorzási szabály szerint a visszatevés nélküli esetre:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)=$$

$$=\frac{4}{32}\cdot\frac{3}{31}\cdot\frac{4}{30}\cdot\frac{4}{29}.$$

Visszatevéses mintavétel feltételezésével:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=\left(\frac{4}{32}\right)^4.$$

238. Ha A_i-val azt az eseményt jelöljük, hogy a szúnyog az i-edik irtószer-alkalmazást túléli, akkor a feltételek alapján a következő valószínűségek ismertek:

$$P(\bar{A}_1)=0{,}8; \quad P(\bar{A}_2|A_1)=0{,}4; \quad P(\bar{A}_3|A_1\cap A_2)=0{,}2.$$

Ezekből, felhasználva a 217. *a)* összefüggést is:

$$P(A_1)=0{,}2; \quad P(A_2|A_1)=0{,}6; \quad P(A_3|A_1\cap A_2)=0{,}8.$$

Ezek szerint

a) $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}096,$

b) $P(A_2\cap A_3|A_1)=\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1)}=0{,}48.$

239. Hogy egyik sem lesz selejtes, annak valószínűsége:

$$\frac{N-s}{N}\cdot\frac{N-s-1}{N-1}\cdot\frac{N-s-2}{N-2},$$

így annak valószínűsége, hogy legalább az egyik selejtes lesz:

$$1-\frac{N-s}{N}\cdot\frac{N-s-1}{N-1}\cdot\frac{N-s-2}{N-2}.$$

240. Mivel a B és $\bar{B}$ teljes eseményrendszer, így tételünk a teljes valószínűség tételének speciális alakja.

241. A teljes valószínűség tételével: $P(A)=0{,}92$.

242. Jelentse B_1 azt az eseményt, hogy az első urnából húzunk, és B_2 azt, hogy a másodikból. Az A esemény legyen: mindkét golyó fehér. Akkor a feltétel szerint

$$a)\quad P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2},\qquad P(A|B_1)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}},\qquad P(A|B_2)=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}},$$

és így a teljes valószínűség tételével:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot 4}{9\cdot 8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{7\cdot 6}{12\cdot 11}.$$

b) Jelentse C azt az eseményt, hogy a két golyó közül legalább egy fehér. Akkor

$$P(C|B_1)=1-\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{5}{6},\qquad P(C|B_2)=1-\frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{28}{33},$$

így

$$P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{28}{33}.$$

243. A hiba ott van, hogy az adott 0,6 és 0,4 valószínűségek csak feltételes valószínűségek, mégpedig ha A azt jelenti, hogy a kiválasztott személy dohányzik, B_1 azt, hogy az illető nő, B_2 azt, hogy férfi, akkor

$$P(A|B_1)=0{,}6 \quad \text{és} \quad P(A|B_2)=0{,}4,$$

és az A valószínűségét a teljes valószínűség tétele értelmében a

$$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)$$

képlet adja meg. A feladatmegoldó tehát a B_1 és B_2 valószínűségéről megfeledkezett.

244. Jelentse B_1 azt az eseményt, hogy a kivett alkatrészt az első két gép valamelyike — röviden: az első csoport — készítette, B_2: a második csoport és B_3: a harmadik csoport készítette. Az A esemény jelentse azt, hogy a kivett alkatrész selejtes. Akkor

$$P(B_1)=\frac{2}{10},\qquad P(B_2)=\frac{5}{10},\qquad P(B_3)=\frac{3}{10},$$

$$P(A|B_1)=0{,}03,\qquad P(A|B_2)=0{,}015,\qquad P(A|B_3)=0{,}01.$$

A teljes valószínűség tételével:

$$P(A)=0{,}0165.$$

245. A teljes valószínűség tételét alkalmazva: $p=\frac{19}{120}$.

246. Jelentse B_i azt az eseményt, hogy a 100 darab műszer között i db szépséghibás ($i=0, 1, 2, 3, 4$), és A azt, hogy a megvásárolt műszer hibátlan. Akkor

$$P(B_0)=\frac{1}{6}; \quad P(B_1)=\frac{5}{12}, \ldots,$$

$$P(A|B_0)=1, \quad P(A|B_1)=\frac{99}{100}, \ldots.$$

A $P(A)$ valószínűség ezek után a teljes valószínűség tételével számítható ki.

247. $p=0{,}486$.

248. *a)* Az n-edik dobozban 597 piros golyó van. Mivel most

$$2+(n-1)5=597, \text{ így } n=120.$$

Az $\frac{n}{12}=10$-edik dobozban 47 golyó piros, így ha A-val azt az eseményt jelöljük hogy piros golyót húzunk a 10. dobozból,

$$P(A)=\frac{47}{600}.$$

b) Ezt a valószínűséget a teljes valószínűség tételével számítjuk ki:

$$P=\sum_{k=1}^{120}\frac{1}{120}\cdot\frac{2+(k-1)5}{600}=\frac{1}{72\,000}\sum_{k=1}^{120}(5k-3)=\frac{599}{1200}.$$

249. Jelentse B_i azt, hogy az i-edik dobozból húzunk ($i=1, 2$), és A azt az eseményt, hogy a kihúzott csavar selejtes. Ekkor

$$P(B_1)=p, \quad P(B_2)=1-p,$$

és így

$$P_1(A)=p\,\frac{s_1}{N}+(1-p)\,\frac{s_2}{N}=\frac{s_1-s_2}{N}\,p+\frac{s_2}{N}.$$

Összeöntés után nyilván

$$P_2(A)=\frac{s_1+s_2}{2N}.$$

Rögzített $s_1\neq s_2$ és N esetén $P_1(A)$ a p-nek monoton függvénye, a $P_2(A)$ viszont állandó, így egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{s_1-s_2}{N}\,p+\frac{s_2}{N}=\frac{s_1+s_2}{2N}$$

teljesül, vagyis ha $p=\frac{1}{2}$. Ha viszont $s_1=s_2$, akkor az egyenlőség bármilyen p értékre fennáll.

250. Ha A-val jelöljük azt az eseményt, hogy a kihúzott csavar selejtes, akkor az első esetben

$$P_1(A)=\left(\frac{s_1}{N}+\frac{s_2}{N}+\ldots+\frac{s_m}{N}\right)\frac{1}{m}$$

adódik; a dobozok tartalmának összeöntése után viszont

$$P_2(A)=\frac{s_1+s_2+\ldots+s_m}{mN},$$

a két valószínűség tehát egyenlő.

251. Jelentse B_i azt az eseményt, hogy az i-edik gép termeléséből húztunk ($i=1, 2, 3$), A pedig, hogy a kihúzott csavar selejtes. Akkor

$$P(B_1)=0{,}25, \quad P(B_2)=0{,}35, \quad P(B_3)=0{,}40,$$
$$P(A|B_1)=0{,}05, \quad P(A|B_2)=0{,}04, \quad P(A|B_3)=0{,}02.$$

a) Ez a valószínűség a Bayes-tételből adódik: $P(B_3|A)=\dfrac{16}{69}$.

b) Most $P(B_2\cup B_3|A)$ határozandó meg. Mivel $B_2\cap B_3=\emptyset$, ezért

$$P(B_2\cup B_3|A)=P(B_2|A)+P(B_3|A),$$

és itt a jobb oldalon szereplő összeadandók újra a Bayes-tétel alapján számíthatók ki. Megoldás: $P(B_2\cup B_3|A)=\dfrac{44}{69}$.

252. Legyen B_i: az ügyiratot az i-edik gép készítette ($i=1, 2, 3$); A: az ügyirat hibás. Ekkor

$$P(B_1)=\frac{10}{50}, \quad P(B_2)=\frac{15}{50}, \quad P(B_3)=\frac{25}{50},$$

$$P(A|B_1)=\frac{0{,}3}{10}, \quad P(A|B_2)=\frac{0{,}9}{15}, \quad P(A|B_3)=\frac{0{,}5}{25}.$$

Bayes tételével most már:

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{3}{17}.$$

254. Legyen B_i: a csavart az i-edik gép készítette ($i=1, 2$); A: a csavar selejtes. Ekkor

$$P(B_1)=\frac{n_1}{n_1+n_2}, \quad P(B_2)=\frac{n_2}{n_1+n_2}.$$

$$P(A|B_1)=\frac{p_1}{100}, \quad P(A|B_2)=\frac{p_2}{100}.$$

A Bayes-tétel alapján:

$$P(B_1|A)=\frac{n_1p_1}{n_1p_1+n_2p_2}.$$

255. $p=0{,}2138$.

256. Jelöljük B_i-vel azt az eseményt, hogy az i-edik dobozt választottuk ($i=1, 2, \ldots, n$), A-val pedig azt, hogy piros golyót húztunk. Akkor a $P(B_{n-1} \cup B_n|A)$ valószínűséget kell kiszámítanunk. Mivel a B_i események teljes rendszert alkotnak, ezért

$$P(B_{n-1} \cup B_n|A) = P(B_{n-1}|A) + P(B_n|A)$$

fennáll. A feltételekből ismeretesek a

$$P(B_i) = \frac{1}{n} \quad \text{és} \quad P(A|B_i) = \frac{i}{n} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

valószínűségek. Bayes tétele alapján:

$$P(B_i|A) = \frac{2i}{n(n+1)},$$

így a keresett valószínűség:

$$P(B_{n-1} \cup B_n|A) = \frac{4n-2}{n(n+1)}.$$

257. Jelentse B_1 azt az eseményt, hogy a termék elsőosztályú, és legyen $B_2 = \bar{B}_1$. Az A esemény jelentse azt, hogy a terméket a vizsgálaton első osztályúra minősítették. Ekkor

$$P(B_1) = 0{,}75, \qquad P(B_2) = 0{,}25,$$
$$P(A|B_1) = 0{,}98, \qquad P(A|B_2) = 0{,}05,$$

s így a Bayes-tétel szerint

$$P(B_1|A) = 0{,}9831.$$

258. Legyen B_i: a halmazban levő selejtesek száma i ($i=0, 1, 2, \ldots, N$); A: a mintában k számú selejtes volt. Ekkor a Bayes-tétel szerint $s=0, 1, 2, \ldots, N$-re

$$P(B_s|A) = \frac{P(A|B_s)P(B_s)}{\sum_{i=0}^{N} P(A|B_i)P(B_i)} = \frac{P(A|B_s)}{\sum_{i=0}^{N} P(A|B_i)} =$$

$$= \frac{\binom{n}{k}\left(\frac{s}{N}\right)^k \left(1-\frac{s}{N}\right)^{n-k}}{\sum_{i=0}^{N} \binom{n}{k}\left(\frac{i}{N}\right)^k \left(1-\frac{i}{N}\right)^{n-k}} = \frac{s^k(N-s)^{n-k}}{\sum_{i=0}^{N} i^k(N-i)^{n-k}}.$$

260. Nyilvánvalóan nem alkothatnak, hiszen ez esetben az események páronként egymást kizáróak lennének, vagyis pl. $P(A \cap B) = 0$ lenne, ami az adott feltételek mellett nem teljesül.

261. Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események függetlenek, akkor

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

262. Ha $A \subset B$, akkor $A \cap B = A$, így a függetlenség miatt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A),$$

vagyis

$$P(A)[P(B) - 1] = 0,$$

s ebből valóban az következik, hogy $P(A) = 0$, vagy $P(B) = 1$.

263. Mivel $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$, így az A és B események függetlenek, tehát $P(B|A) = P(B) = \frac{1}{2}$. Ha viszont A és B függetlenek, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is függetlenek, így

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{5}{8},$$

és

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A})P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(\bar{A}) = \frac{3}{4}.$$

264. Vegyük figyelembe, hogy a kísérletek függetlenek, így

$$P(A_6 | A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_5) = P(A_6) = \frac{1}{2},$$

ha A_i jelenti azt az eseményt, hogy az i-edik dobás fejdobás $(i = 1, 2, \ldots, 6)$

266. Ha A, ill. B jelenti azt az eseményt, hogy az első, ill. a második gépen készült huzal kibírja a terhelést, akkor feltételezhetjük, hogy A és B függetlenek, így

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}855.$$

267. Az itt szereplő események is függetlenek, így

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

268. Annak valószínűsége, hogy egyszer feldobva a két kockát, egyenlő számokat dobunk:

$$p = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}.$$

Ha n-szer végezzük el e kísérletet, akkor a függetlenség feltételezésével

$$P = \frac{1}{6^n}.$$

269. Egy dobás esetén annak valószínűsége, hogy 10-et dobunk, a klasszikus képlet szerint $\frac{3}{36}$. Annak valószínűsége, hogy a négy dobás során egyszer sem dobunk 10-et:

$$\left(1 - \frac{3}{36}\right)^4 = \left(\frac{33}{36}\right)^4,$$

így annak valószínűsége, hogy legalább egyszer 10-et dobunk:

$$1-\left(\frac{33}{36}\right)^4.$$

270. A feladat feltevései szerint most

$$P(A)=\frac{4}{6}, \quad P(B)=\frac{4}{6}, \quad P(A\cap B)=\frac{4\cdot 3}{6\cdot 5}.$$

Mivel pedig

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B),$$

így A és B nem függetlenek. (A 158. feladatban kiszámított eredményeket is felhasználtuk.)

Könnyen belátható, hogy ha a mintavételt visszatevéssel végezzük, akkor az A és B események függetlenek.

271. Nyilván $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2}$, továbbá

$$P(A_1\cap A_2)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_2),$$

$$P(A_1\cap A_3)=\frac{1}{4}=P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2\cap A_3)=\frac{1}{4}=P(A_2)P(A_3),$$

vagyis az A_1, A_2 és A_3 események páronként valóban függetlenek. Összességükben azonban nem, mert

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0\neq\frac{1}{8}=P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

272. Könnyen ellenőrizhető, hogy a feladatban szereplő egyenlőség teljesül, de már

$$P(A\cap C)=\frac{3}{8}\neq P(A)P(C)=\frac{1}{4},$$

így A, B és C valóban nem függetlenek.

273. Legyen A: az első gépkocsi időben célhoz ér, B: a második gépkocsi időben célhoz ér. Ekkor

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=0{,}97;$$

vagy pedig:

$$P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=0{,}97.$$

275. $p=0{,}95^2\cdot 0{,}05\approx 0{,}045.$

276. Legyen A_i: az i-edik géppel nem kell külön foglalkozni ($i=1, 2, 3$). Akkor

a) $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85=0{,}612.$

b) $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)=0{,}997.$

Felhasználtuk, hogy az A_i események függetlenek.

277. Legyen A: az I-es gép dolgozik, B: a II-es gép dolgozik.

Az A és B események függetleneknek tekinthetők. Mivel most $P(A)=p_1=0{,}6$ és $P(B)=p_2=0{,}7$, így

a) $P(A\cap B)=p_1p_2=0{,}42;$

b) $P(A\cup B)=1-(1-p_1)(1-p_2)=0{,}88;$

c) $P((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B))=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)=$
$=p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)=0{,}46;$

d) $P(\bar{A}\cap\bar{B})=(1-p_1)(1-p_2)=0{,}12.$

278. Legyen A_i: az i-edik motor dolgozik ($i=1, 2, 3$). Akkor az előzőkben követett gondolatmenet mintájára:

a) $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=p^3;$

b) $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-(1-p)^3;$

c) $P(A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3)=3p(1-p)^2;$

d) $P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap{}_3\bar{A})=(1-p)^3.$

279. A feltétel szerint 475 alkatrész jó, 25 hibás. Annak valószínűsége, hogy egy 10 elemű minta hibátlan:

$$\frac{\binom{475}{10}}{\binom{500}{10}}=\frac{475!\,490!}{465!\,500!}.$$

Annak valószínűsége, hogy mindkétszer hibátlan mintát veszünk, a függetlenség miatt:

$$p=\left(\frac{475!\,490!}{465!\,500!}\right)^2.$$

Ez az átvétel valószínűsége is.

280. Annak valószínűsége, hogy valaki egy szelvénnyel nem nyer:

$$p_0=\frac{\binom{85}{5}+\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}.$$

Hogy két szelvénnyel nem nyer, annak valószínűsége p_0^2, és hogy legalább az egyiken nyer, azaz: hogy nyer,

$$p=1-p_0^2.$$

281. Tegyük fel, hogy n-szer.

Annak valószínűsége, hogy egyszer feldobva a két kockát, nem dobunk két

6-ost: $\frac{35}{36}$. Hogy n dobás között nem fordul elő két 6-os, annak valószínűsége: $\left(\frac{35}{36}\right)^n$, s hogy legalább egyszer előfordul, annak valószínűsége: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$.

Azt kell kiszámítanunk, hogy milyen n-ekre lesz e valószínűség 0,99-nál nagyobb, vagyis meg kell oldanunk az

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > 0{,}99$$

egyenlőtlenséget. Ebből $n \geqq 164$ adódik megoldásul. Ha tehát legalább 164 dobást végzünk, akkor a két 6-os dobásának valószínűsége már nagyobb 0,99-nál.

282. Tegyük fel, hogy n szelvényt töltünk ki egymástól függetlenül. Annak valószínűsége, hogy egy szelvénnyel nem nyerünk: 0,9767. Hogy n szelvénnyel nem nyerünk, annak valószínűsége $0{,}9767^n$, s hogy legalább 1-gyel nyerünk, annak valószínűsége $1-0{,}9767^n$. A nyerés valószínűsége nagyobb lesz, mint a nem nyerés valószínűsége, ha

$$1-0{,}9767^n > \frac{1}{2}.$$

Ebből $n \geqq 30$ adódik megoldásul.

283. Tegyük fel, hogy n hétig kell játszania. Jelöljük a 2-nél több találat valószínűségét p_{345}-tel. Ez esetben az

$$1-(1-p_{345})^n > \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenséget kell megoldani. A számításokat mellőzzük.

284. Tegyük fel, hogy az egyes hírvivők hírközléseinek pontossága egymástól függetlennek tekinthető. Így annak valószínűsége, hogy az n-edik hírvivő helyesen veszi át a hírt: $0{,}9^n$.

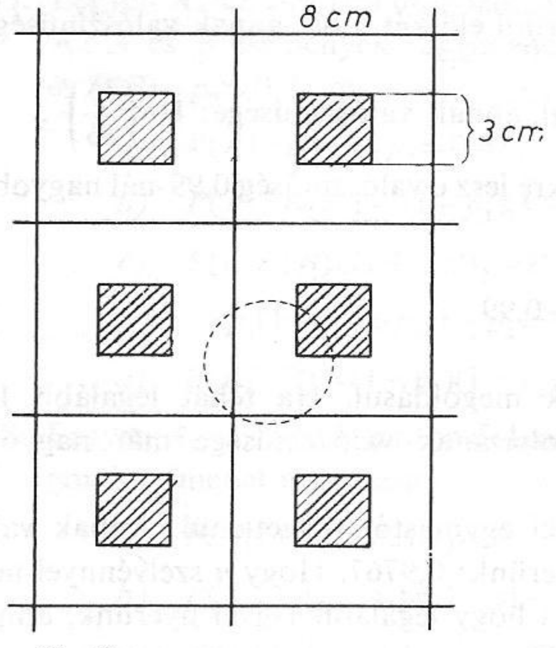
Annak megállapítására, hogy hányadik hírvivőnél lesz e valószínűség $\frac{1}{8}$-nál kisebb, a

$$0{,}9^n < \frac{1}{8}$$

egyenlőtlenséget kell megoldani. Ebből $n \geqq 20$ adódik.

285. A labda simán átmegy a négyzetháló alakú rácson, ha középpontja a négyzet belsejébe eső 3 cm oldalú négyzet belsejébe esik (lásd a 20. ábrát). Ha feltételezzük, hogy a labda középpontja a háló négyzeteire egyenletes eloszlással érkezik, akkor a kérdéses valószínűség:

$$P = \frac{9}{64}.$$



20. ábra

Tegyük fel, hogy n dobást végzünk egymástól függetlenül. Akkor annak valószínűsége, hogy a labda legalább egyszer simán átmegy a hálón, $1-\left(\frac{55}{64}\right)^n$. Annak valószínűsége, hogy simán átmegy, nagyobb lesz, mint annak valószínűsége, hogy nem megy át simán, ha

$$1-\left(\frac{55}{64}\right)^n > \frac{1}{2}.$$

Ebből $n \geqq 5$ adódik, tehát adott feltételek esetén legalább 5 dobást kell végezni a kívánt eredmény eléréséhez.

286. Mindegyik katona találati valószínűsége 0,8. Annak valószínűsége, hogy az öt katona k találatot ér el — a Bernoulli-feladat alapján —

$$p_k = \binom{5}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{5-k} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Annak valószínűsége, hogy háromnál több találat lesz a céltáblán:

$$P = p_4 + p_5 = \binom{5}{4} 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 + \binom{5}{5} 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^0.$$

Mivel a binomiális eloszlás táblázatában $p \leqq 0{,}5$, így ahhoz, hogy a táblázatot használni tudjuk, a kapott valószínűséget előbb átalakítjuk. A következő eredményt kapjuk:

$$P = \binom{5}{1} 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 + \binom{5}{0} 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}4096 + 0{,}3277 = 0{,}7373.$$

287. A Bernoulli-feladat megoldása során használt gondolatmenet segítségével az *a)* kérdésre p^k, a *b)* kérdésre $p^k(1-p)^{n-k}$ adódik feleletül.

288. *a)* A pénzdobások függetlenek. Nyilván annyi a keresett valószínűség, amennyi annak valószínűsége, hogy a négy dobás közül háromszor írást és egyszer fejet dobtunk; ez pedig

$$p_3=\binom{4}{3}\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

b) Most feltételes valószínűséget számítunk. Ha tudjuk, hogy az első dobozba helyezett golyó fehér volt, akkor azt kell megállapítanunk, hogy a még hátralevő három dobás közül mekkora valószínűséggel kapunk kétszer írást, és egyszer fejet. Erre a

$$p_2=\binom{3}{2}\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

a felelet. (Látjuk, hogy $p_2>p_3$.)

289. Mivel feltehetőleg igen sok gyapjúszál közül kell a három szálat kivennünk, az egyes szálak kivétele függetlennek tekinthető. A kérdésre adandó válasz:

$$p=\binom{3}{2}0{,}75^2\cdot 0{,}25=\frac{27}{64}.$$

290. A feladat szerint azt kell megállapítanunk, hogy mekkora valószínűséggel lesz egy véletlenszerűen kiválasztott 6-gyermekes családban a lányok száma 0 vagy 1, vagy 2. A Bernoulli-feladat alapján ez a következővel egyenlő:

$$P=\sum_{k=0}^{2}\binom{6}{k}0{,}484^k\cdot 0{,}516^{6-k}\approx 0{,}37.$$

291. Tegyük fel, hogy valamely napon a vízellátás független a más napokon adott vízellátástól, akkor

$$P=\binom{365}{0}0{,}98^{365}+\binom{365}{1}0{,}02\cdot 0{,}98^{364}+\binom{365}{2}0{,}02^2\cdot 0{,}98^{363}\approx 0{,}0222.$$

A valószínűség numerikus értékét logaritmussal számítottuk ki.

292. A binomiális eloszlás táblázatát felhasználva:

$$P=\sum_{k=0}^{4}\binom{20}{k}0{,}3^k\cdot 0{,}7^{20-k}=0{,}2374.$$

293. Minden egyes golyó elhelyezése egy „kísérlettel" jár. A kísérlet: egy doboz kiválasztása. Most 10 kísérletet kell végezni. Bármelyik dobozt $\frac{1}{7}$ valószínűséggel választjuk minden kísérletben. A kísérleteket tekintsük függetleneknek. A Bernoulli-feladat szerint annak valószínűsége, hogy a 10 kísérlet közül **a** második dobozt 3-szor választjuk:

$$p_3=\binom{10}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^7.$$

294. Annak valószínűsége, hogy a ládák mindegyikéből egy n elemű mintát véve, ezek között lesz selejtes:

$$P_1(A)=1-\left(\frac{\binom{N-1}{n}}{\binom{N}{n}}\right)^2=1-\left(1-\frac{n}{N}\right)^2.$$

Összeöntés után, annak valószínűsége, hogy a kivett $2n$ elemű mintában lesz selejtes:

$$P_2(A)=1-\frac{\binom{2N-2}{2n}}{\binom{2N}{2n}}=1-\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{2n}{2N-1}\right).$$

Mivel pedig

$$\frac{2n}{2N-1}>\frac{2n}{2N}=\frac{n}{N},\quad \text{ezért}\quad 1-\frac{2n}{2N-1}<1-\frac{n}{N},$$

így

$$P_1(A)=1-\left(1-\frac{n}{N}\right)^2<1-\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1-\frac{2n}{2N-1}\right)=P_2(A),$$

tehát a második esetben nagyobb a keresett valószínűség.

295. Legyen A: az I-es gép a nap folyamán megáll, B: a II-es gép a nap folyamán megáll. Mivel a feltevés szerint az A és B események függetlenek, ezért

a) $P(A\cap B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)=\dfrac{1}{8}.$

b) $P(A\cap B|A\cup B)=\dfrac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=$

$$=\frac{P(A)P(B)}{1-P(\bar{A})P(\bar{B})}=\frac{1}{15}.$$

296. Az n-hez relatív prím számok számát jelölje $\varphi(n)$. Ekkor a keresett valószínűség

$$P(B)=\frac{\varphi(n)}{n},$$

ha B-vel azt az eseményt jelöljük, hogy a kihúzott lapon n-hez relatív prím áll. Legyen most is A_i: a kihúzott lapon álló szám p_i-vel osztható ($i=1, 2, \ldots, k$). Ekkor a B eseményt így írhatjuk fel:

$$B=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_k.$$

Ennek valószínűsége, most felhasználva azt a feltételt is, hogy az A_i események függetlenek:

$$P(B)=P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_k)=\prod_{j=1}^{k}P(\bar{A}_j)=\prod_{j=1}^{k}(1-P(A_j)).$$

A $P(A_j)$ valószínűséget már ismerjük, ezt a 211. feladatban kiszámítottuk. Ennek felhasználásával:

$$P(B)=\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_j}\right).$$

A kétféle eredmény egybevetésével most is megkapjuk a 211. feladatban már felírt Euler-féle képletet.

297. Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy az A esemény n-szer bekövetkezett. Ez esetben

$$P(B_1|C)=\frac{P(C|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(C|B_i)P(B_i)}.$$

Ki kell számítanunk a $P(C|B_i)$ valószínűségeket. Tegyük fel, hogy a $P(A|B_i)$ valószínűségeket ismerjük. Ekkor a kísérletek függetlensége miatt

$$P(C|B_i)=[P(A|B_i)]^n,$$

így

$$P(B_1|C)=\frac{[P(A|B_1)]^nP(B_1)}{\sum_{i=1}^{n}[P(A|B_i)]^nP(B_i)}.$$

298. Legyen B_i: az i-edik kísérletben az A_2 bekövetkezik, C_i: az i-edik kísérletben sem A_1, sem A_2, sem A_3 nem következik be.
Az az esemény, hogy az A_2 előbb következik be, mint a többi, így írható:

$$B_1\cup(B_2\cap C_1)\cup(B_3\cap C_2\cap C_1)\cup\ldots\cup(B_n\cap C_{n-1}\cap\ldots\cap C_1).$$

Az itt szereplő összeadandók egymást páronként kizárják, ui. $B_k\cap C_k=\emptyset$ minden k-ra. Így a keresett valószínűség:

$$P_n=P(B_1)+P(B_2\cap C_1)+\ldots+P(B_n\cap C_{n-1}\cap\ldots\cap C_1).$$

Ha a kísérletek függetlenek, akkor minden tagot felírhatunk a bennük szereplő események valószínűségeinek szorzataként. Felhasználva a $P(A_2)=p_2$ és

$$P(C_i)=P(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3)=1-P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-p_1-p_2-p_3=p_4$$

jelöléseket, a következőt kapjuk:

$$P_n=p_2+p_2p_4+p_2p_4^2+\ldots+p_2p_4^{n-1}=p_2\frac{1-p_4^n}{1-p_4}.$$

Ha most $n\to\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{p_2}{1-p_4},$$

s ezt kellett meghatározni.

299. Igen, mert

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} \cdot q = q \frac{1}{1-p} = 1.$$

300. A feltételezett arányosság miatt van olyan $c > 0$ szám, amellyel

$$P(\xi = k) = \frac{c}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

A c arányossági tényezőt abból határozzuk meg, hogy az adott valószínűségek valószínűségeloszlást alkotnak, tehát összegük 1. Ekkor azonban

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) = c \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1,$$

s mivel a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ végtelen sor összege e-vel egyenlő, így

$$c = e^{-1}.$$

A keresett valószínűségeloszlás tagjai tehát:

$$P(\xi = k) = \frac{e^{-1}}{k!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots).$$

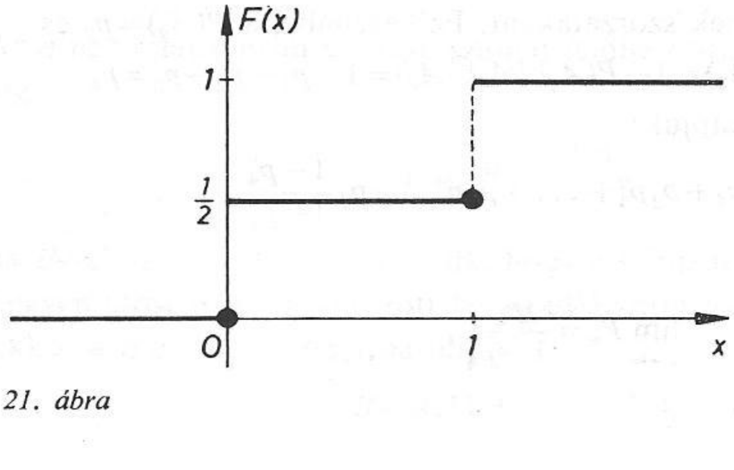
301. Legyen $\xi = 1$, ha írást dobunk, és legyen $\xi = 0$, ha fejet. A ξ valószínűségeloszlása:

$$P(\xi = 0) = \frac{1}{2}, \qquad P(\xi = 1) = \frac{1}{2}.$$

A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény grafikonja a 21. ábrán látható.

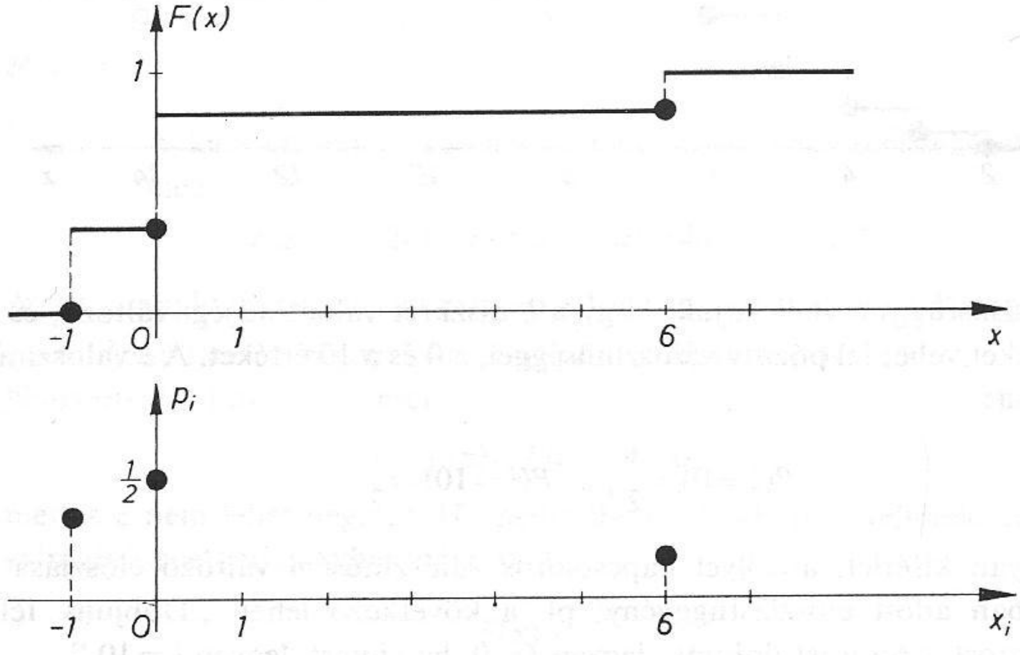


21. ábra

302. Az e feladatban definiált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq -1, \\ \frac{1}{3}, & \text{ha} \quad -1 < x \leqq 0, \\ \frac{5}{6}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq 6, \\ 1, & \text{ha} \quad 6 < x. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény és a valószínűségeloszlás grafikonját a 22. ábra mutatja.



22. ábra

303. Jelentse ξ a dobott számok összegét. Ez esetben a ξ valószínűségeloszlása:

$$p_2=\frac{1}{36},\quad p_3=\frac{2}{36},\quad p_4=\frac{3}{36},\quad p_5=\frac{4}{36},\quad p_6=\frac{5}{36},\quad p_7=\frac{6}{36},$$

$$p_8=\frac{5}{36},\quad p_9=\frac{4}{36},\quad p_{10}=\frac{3}{36},\quad p_{11}=\frac{2}{36},\quad p_{12}=\frac{1}{36}.$$

Az eloszlásfüggvényt az előzőkben megismertek alapján már nem nehéz felírni. Grafikonja a 23. ábrán látható.

304. Az eloszlásfüggvény definíciója értelmében:

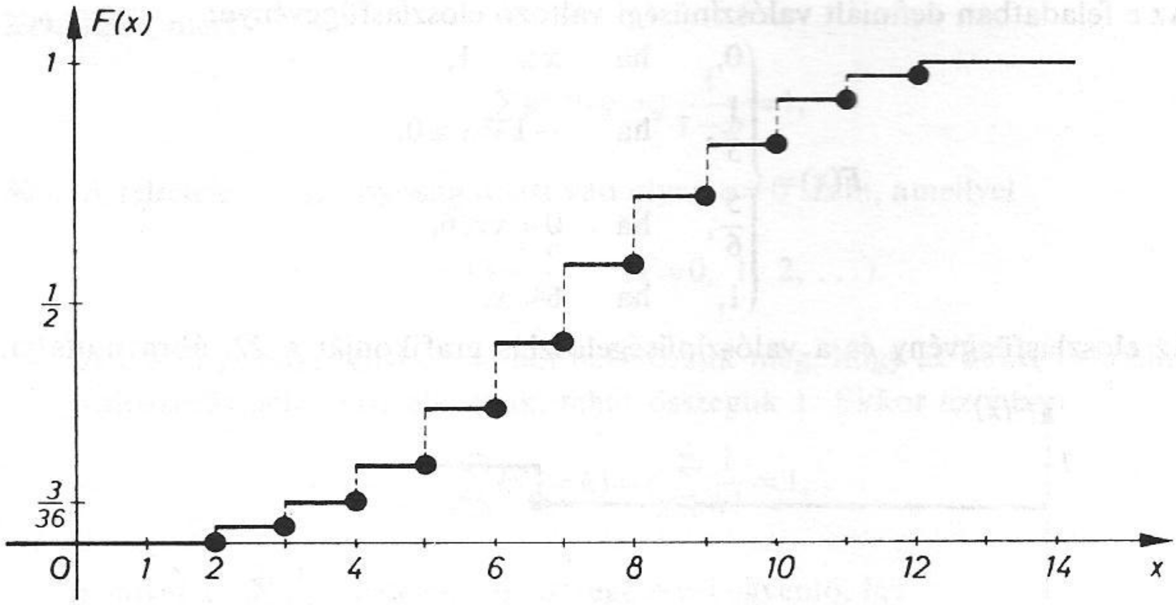
$$F(5{,}2)=P(\xi<5{,}2)=P(\xi=3)+P(\xi=4)+P(\xi=5).$$

Az egyes összeeadandók most

$$P(\xi=3)=\frac{1}{6^3},\qquad P(\xi=4)=\frac{3}{6^3},\qquad P(\xi=5)=\frac{6}{6^3},$$

így a keresett érték:

$$F(5{,}2)=\frac{10}{6^3}.$$



23. ábra

305. Az eloszlásfüggvényből látjuk, hogy a ξ diszkrét valószínűségi változó, és csak két értéket vehet fel pozitív valószínűséggel, a 0 és a 10 értéket. A ξ valószínűség-eloszlása:

$$P(\xi=0)=\frac{1}{2}, \qquad P(\xi=10)=\frac{1}{2}.$$

Egy olyan kísérlet, amellyel kapcsolatos valószínűségi változó eloszlása az e feladatban adott eloszlásfüggvény, pl. a következő lehet. „Dobjunk fel egy kétforintost, s ha írást dobunk, legyen $\xi=0$, ha címert, legyen $\xi=10$."

306. Jelöljük ξ-vel a találat helyének a kör középpontjától mért távolságát. A feltételekből nyilvánvaló, hogy ξ folytonos valószínűségi változó, és $0\leqq\xi\leqq 1$. A $\xi<x$ esemény azt jelenti, hogy a találat a középpont körüli x sugarú kör belsejébe esik. Ha $x\leqq 0$, akkor nyilvánvaló, hogy $F(x)=0$, mert a $\xi<x$ esemény ez esetben a lehetetlen esemény. Ha az x a $(0, 1]$ intervallumba esik, akkor a $\xi<x$ esemény valószínűsége, a céltáblán egyenletes valószínűségeloszlást feltételezve:

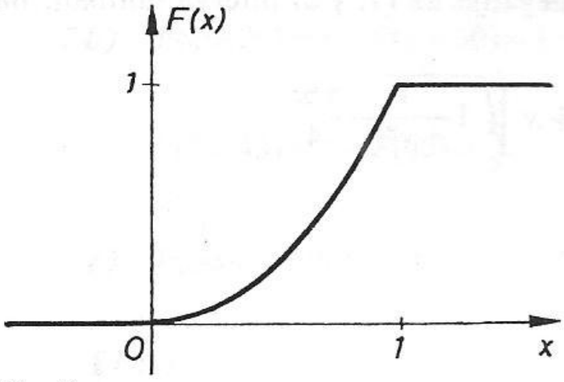
$$F(x)=P(\xi<x)=\frac{x^2\pi}{1^2\pi}=x^2,$$

végül, ha $x>1$, akkor $P(\xi<x)=1$, mert feltételezésünk szerint minden lövés a céltáblába talál, így a $\xi<1$ esemény a biztos esemény. Összefoglalva az itt nyert eredményeket:

a)

$$F(x)=P(\xi<x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ x^2, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<x. \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény grafikonja a 24. ábrán látható.



24. ábra

b) A keresett valószínűséget az eloszlásfüggvény segítségével határozzuk meg:

$$P(a \leqq \xi \leqq 2a) = F(2a) - F(a) = 4a^2 - a^2 = 3a^2.$$

307. Az itt szereplő valószínűségi változó is folytonos, értékei a $(0, \sqrt{2})$ intervallumba esnek. (A $\sqrt{2}$ az egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza.)

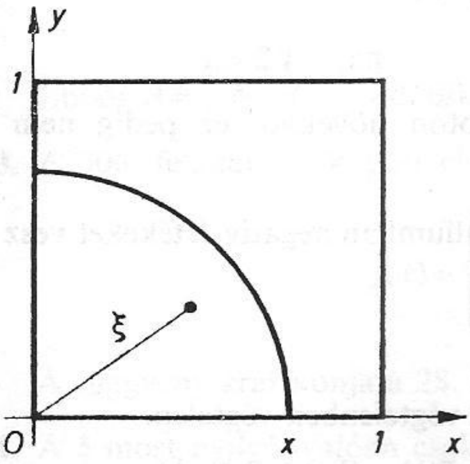
Nyilvánvaló, hogy $x \leqq 0$ esetén

$$F(x) = P(\xi < x) = 0,$$

mert a ξ nem lehet negatív. Ha pedig $0 < x \leqq 1$, akkor a feltételezett egyenletes valószínűségeloszlás felhasználásával:

$$F(x) = \frac{x^2\pi}{4}.$$

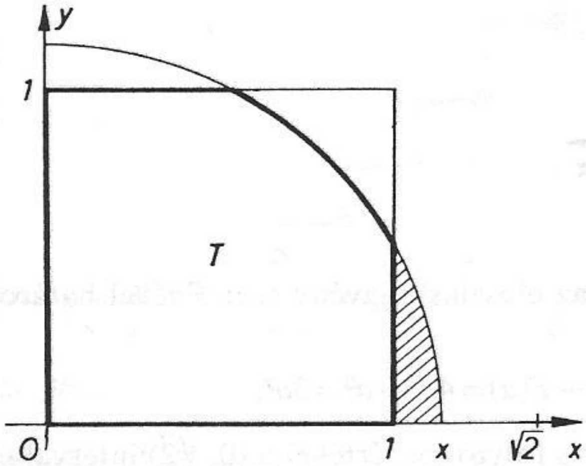
(Lásd a 25. ábrát.)



25. ábra

Ha $1 < x \leqq \sqrt{2}$, akkor az x sugarú negyedkör által a négyzetből levágott T idom területét kell meghatározni. (Lásd a 26. ábrán.) Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy az x sugarú negyedkör területéből levonjuk az ábrán besatírozott idom területének a kétszeresét. Integrálszámítással adódik a következő eredmény — mely egyben az $F(x)$ eloszlásfüggvényt is megadja az $(1, \sqrt{2})$ intervallumban, mert a céltábla területe egységnyi:

$$F(x)=x^2 \arcsin \frac{1}{x}+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{x^2\pi}{4}.$$



26. ábra

Végül pedig, ha $x>\sqrt{2}$, akkor $P(\xi<x)=1$, mert a feltevés szerint minden lövés a céltáblába talál, a $\xi<x$ esemény tehát a biztos esemény. Összefoglalva a nyert eredményeket:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ \dfrac{x^2\pi}{4}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ x^2 \arcsin \dfrac{1}{x}+x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{x^2\pi}{4}, & \text{ha} \quad 1<x\leqq\sqrt{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \sqrt{2}<x. \end{cases}$$

308. Nem, mert minden eloszlásfüggvény monoton növekvő, ez pedig nem az, hiszen $F(6)>F(9)$.

309. *a)* Nem lehet, mert az $\frac{1}{3}\leqq x<1$ intervallumban negatív értékeket vesz fel.

b) Lehet.

c) Nem lehet, mert $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=2$

d) Nem lehet, mert $F(x)$ határértéke a végtelenben végtelen.

310. *a)* $P(a\leqq\xi\leqq b)=P(a\leqq\xi<b)+P(\xi=b)=F(b)-F(a)+P(\xi=b)$.

Itt felhasználtuk, hogy az $a\leqq\xi<b$ és $\xi=b$ események egymást kizárják, továbbá az $a\leqq\xi<b$ esemény valószínűségére vonatkozó ismert képletet.

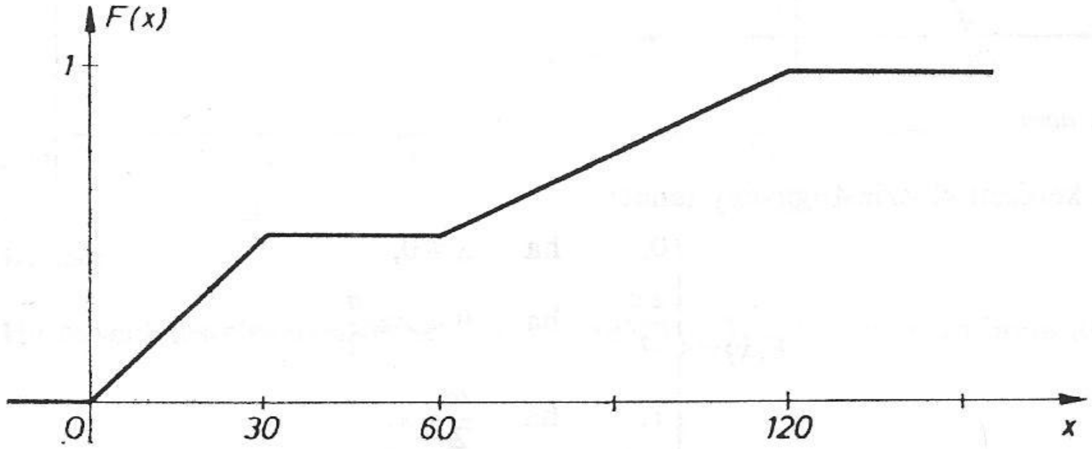
b) és *c)* Hasonlóképpen igazolhatók.

311. *a)* Az eloszlásfüggvény grafikonját a 27. ábra mutatja.

b) $P(\xi > 30) = 1 - P(\xi \leqq 30) = 1 - F(30) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$P(\xi > 45) = 1 - F(45) = \frac{1}{2}$.

c) $P(60 < \xi < 90) = F(90) - F(60) = \frac{90}{120} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.



27. ábra

312. Az A és B állandókat a következő egyenletrendszerből határozhatjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} F(-\infty) &= A + B\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ F(+\infty) &= A + B\frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}\right\}$$

Ebből $A = \frac{1}{2}$ és $B = \frac{1}{\pi}$ adódik eredményül.

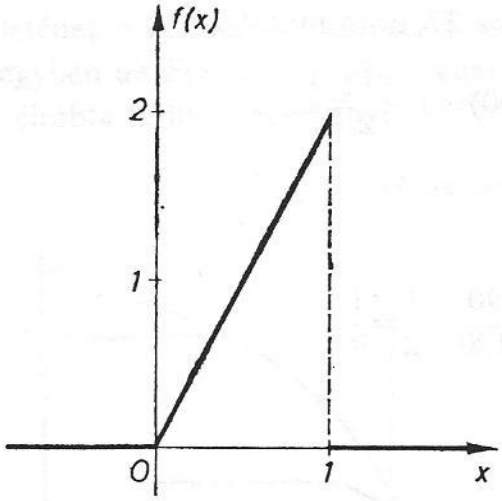
313. A 306. feladatban kapott eloszlásfüggvényt kell differenciálnunk. Ezt kapjuk:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x < 0, \\ 2x, & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases}$$

A függvény grafikonja a 28. ábrán látható.

314. A ξ most nyilvánvalóan csak pozitív lehet, és $\frac{a}{2}$-nél kisebb (29. ábra). Legyen $0 < x \leqq \frac{a}{2}$, akkor egyenletes eloszlással számolva,

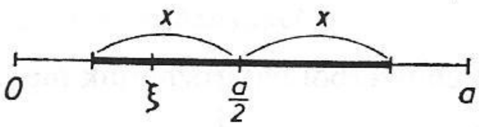
$$P(\xi < x) = P\left(\frac{a}{2} - x < \xi < \frac{a}{2} + x\right) = \frac{2x}{a}.$$



28. ábra

A keresett eloszlásfüggvény tehát:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ \dfrac{2x}{a}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq \dfrac{a}{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \dfrac{a}{2}<x. \end{cases}$$



29. ábra

A sűrűségfüggvény:

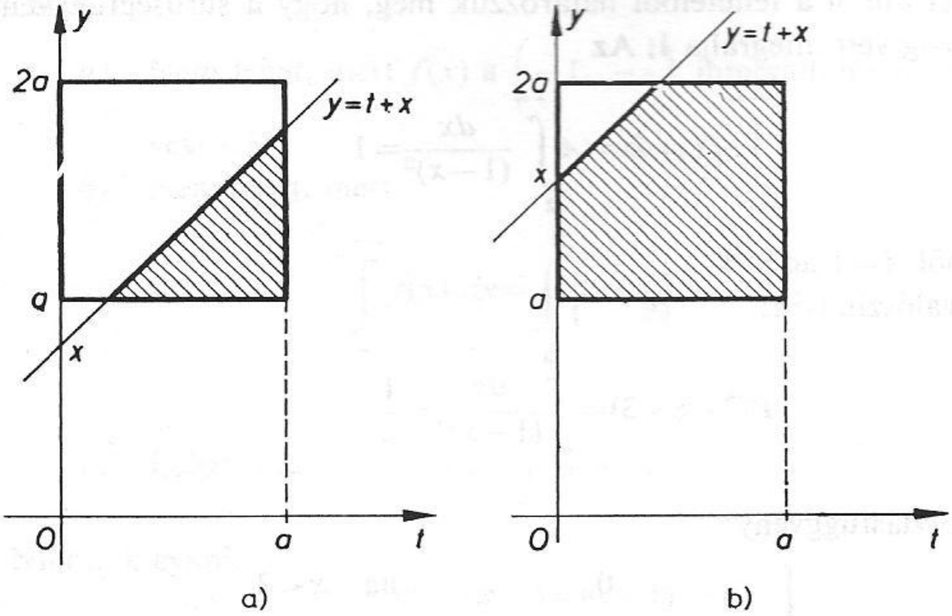
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{a}, & \text{ha} \quad 0<x<\dfrac{a}{2} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

315. Jelentse t az először felvett pontnak az O ponttól való távolságát, y pedig a másik pontnak O-tól való távolságát (30. ábra), akkor fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$0<t<a, \quad a<y<2a.$$

30. ábra

A ξ értéke két adott pont esetében: $y-t$. Ez a távolság akkor kisebb x-nél $(x>0)$. ha a (t, y) számpárral meghatározott pont a 31. ábrán látható négyzet besatírozott részébe esik. Nyilvánvaló, hogy most elég csak a $0<x<2a$ esettel foglalkozni.



31. ábra

Ha egyenletes eloszlást tételezünk fel, akkor a 31. ábra *a)* részábrája alapján:

$$P(\xi<x)=\frac{\frac{x^2}{2}}{a^2}=\frac{x^2}{2a^2}, \quad \text{ha} \quad 0<x\leqq a,$$

és a *b)* ábrarészlet alapján:

$$P(\xi<x)=\frac{a^2-\frac{(2a-x)^2}{2}}{a^2}=-1+\frac{2x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}, \quad \text{ha} \quad a<x\leqq 2a.$$

A keresett eloszlás- és sűrűségfüggvény tehát:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ \frac{x^2}{2a^2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a, \\ -1+\frac{2x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}, & \text{ha} \quad a<x\leqq 2a, \\ 1, & \text{ha} \quad 2a<x. \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<x<a, \\ \frac{2}{a}-\frac{x}{a^2}, & \text{ha} \quad a<x<2a, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

316. Az A értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy a sűrűségfüggvénynek $-\infty$-től $+\infty$-ig vett integrálja 1. Az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = A\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(1-x)^2} = 1$$

egyenlőségből $A=1$ adódik.
A keresett valószínűség:

$$P(2<\xi<3)=\int_{2}^{3}\frac{dx}{(1-x)^2}=\frac{1}{2}.$$

Végül az eloszlásfüggvény:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x<2, \\ \displaystyle\int_{2}^{x}\frac{dt}{(1-t)^2}=1+\frac{1}{1-x}, & \text{ha} \quad x\geqq 2. \end{cases}$$

317. A keresett sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{60}, & \text{ha} \quad 0<x<30, \\ \dfrac{1}{120}, & \text{ha} \quad 60<x<120, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

318. *a)* A 316. feladat megoldásához hasonlóan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = A\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx = 1,$$

s innen $A=\frac{1}{2}$.

b) A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ \sin\dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq\pi, \\ 1, & \text{ha} \quad \pi<x. \end{cases}$$

c) A kérdezett valószínűség:

$$P\left(\xi>\frac{\pi}{2}\right)=1-P\left(\xi<\frac{\pi}{2}\right)=1-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

319. Lehet.

320. *a)* Nem lehet, mert $f(x)$ a $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ intervallumban negatív értékeket vesz fel.

b) Nem lehet, mert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2.$$

c) Lehet, mert $f(x) \geqq 0$ és $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

321. Nincs. Ugyanis

$$x^2-2x-3=(x-1)^2-4,$$

és ez az $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ intervallumban negatív értékeket vesz fel.

322. Ilyen valószínűségi változó például a (0,995; 1,005) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Ennek sűrűségfüggvénye ui.

$$f(x)=\begin{cases} 100, & \text{ha} \quad 0{,}995<x<1{,}005, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

s ez eleget tesz a 319. feladat feltételeinek.

323. Mind a kettő, ui. az *a)* alattira teljesülnek az

$$f(x) \geqq 0 \qquad \text{és} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

feltételek, a *b)* alatti $f(x)$ viszont azonos az *a)* alattival, hiszen

$$1-|1-x|=\begin{cases} 1-(1-x)=x, & \text{ha} \quad x \leqq 1, \\ 1-(x-1)=2-x, & \text{ha} \quad 1<x. \end{cases}$$

324. *a)* Az A értékét így határozhatjuk meg:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_{-A}^{0} (2+x)\,dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{A} (2-x)\,dx = \frac{1}{4}(4A-A^2)=1,$$

s innen $A=2$.

b) A ξ eloszlásfüggvényére $x \leqq -2$ esetén nyilván 0 adódik; $-2<x \leqq 0$-ra:

$$F(x)=\frac{1}{4}\int_{-2}^{x} (2+t)\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}+2x+2\right) = \frac{1}{8}(x+2)^2.$$

A $0<x\leqq 2$ intervallum értékeire:

$$F(x)=P(\xi<x)P(-2\leqq\xi<0)+P(0\leqq\xi<x)=$$

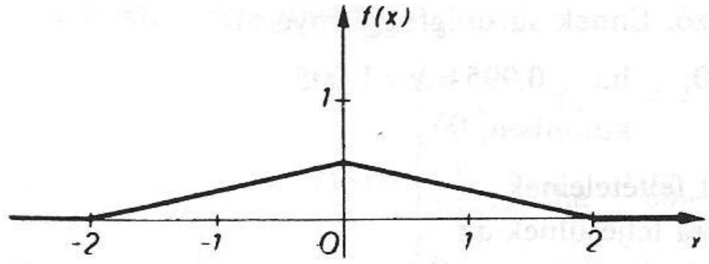
$$=\frac{1}{4}\int_{-2}^{0}(2+x)\,dx+\frac{1}{4}\int_{0}^{x}(2-x)\,dx=1-\frac{1}{8}(2-x)^2,$$

s végül $x>2$-re $F(x)=1$. Összefoglalva tehát:

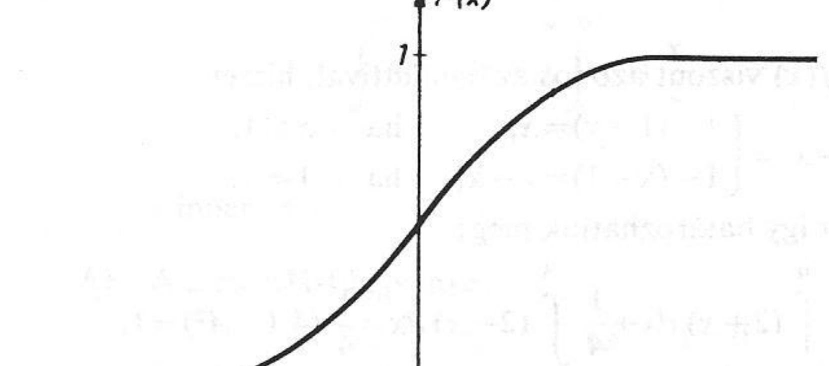
$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq -2,\\ \frac{1}{8}(x+2)^2, & \text{ha} \quad -2<x\leqq 0,\\ 1-\frac{1}{8}(2-x)^2, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 2,\\ 1, & \text{ha} \quad 2<x.\end{cases}$$

c) A sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény grafikonja a 32. és a 33. ábrán látható.

d) Végül $P(\xi>1)=\frac{1}{8}$.

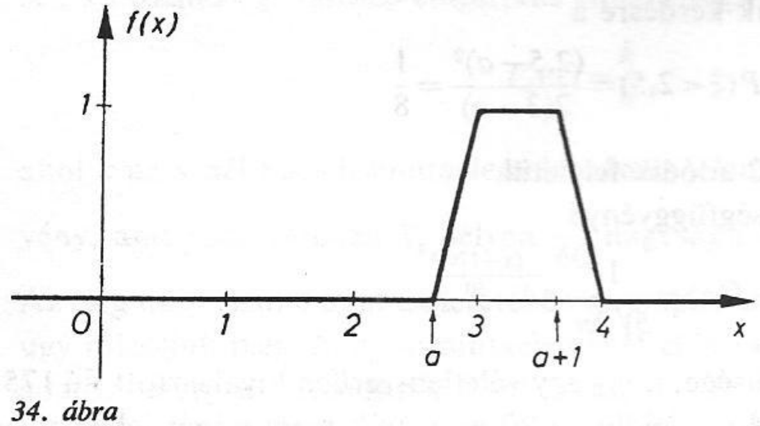


32. ábra



33. ábra

325. *a)* Nyilvánvaló, hogy $f(x)$ minden $2\leqq a<3$ értékre nemnegatív. Könnyen belátható, hogy $f(x)$ integrálja minden $2\leqq a<3$ értékre 1, így $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény. A sűrűségfüggvény grafikonját a 34. ábra mutatja.



34. ábra

b) A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq a, \\ \dfrac{(x-a)^2}{2(3-a)}, & \text{ha} \quad a<x\leqq 3, \\ x-\dfrac{a+3}{2}, & \text{ha} \quad 3<x\leqq a+1, \\ \dfrac{-x^2+8x-2a-10}{2(3-a)}, & \text{ha} \quad a+1<x\leqq 4 \\ 1, & \text{ha} \quad 4<x. \end{cases}$$

c) Az x_0 érték megállapítására meg kell oldanunk a

$$P(\xi<x_0)=F(x_0)=\frac{1}{2}$$

egyenletet. Az a paraméter értékétől függően a következőképpen számolunk.

Ha $a=2$, akkor a $2<x\leqq 3$ intervallumon

$$F(x)=\frac{(x-2)^2}{2}\leqq\frac{1}{2},$$

és az $\frac{1}{2}$ értéket akkor veszi fel, hogy $x=x_0=3$.

Ha $a>2$, akkor x_0 nem lehet az $a<x\leqq 3$ intervallumban, mert itt $F(x)<\frac{1}{2}$. Az x_0 ez esetben a $3<x\leqq a+1$ intervallumban van, ui. ekkor

$F(a+1)>\frac{1}{2}$ is fennáll. Az x_0 értéket tehát az

$$F(x)=x-\frac{a+3}{2}=\frac{1}{2}$$

egyenletből nyerjük, innen $x_0=\dfrac{a+4}{2}$.

d) Végül a negyedik kérdésre a

$$P(\xi<2{,}5)=\frac{(2{,}5-a)^2}{2(3-a)}=\frac{1}{8}$$

egyenletből $a=2$ adódik feleletül.

326. *a)* A keresett sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-170)^2}{50}}.$$

b) Annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott fiú 175 cm-nél magasabb, ξ-vel jelölve a 20 éves fiúk magasságát jellemző valószínűségi változót:

$$P(\xi>175)=1-P(\xi\leqq 175)=1-F(175),$$

ha $F(x)$-szel a ξ eloszlásfüggvényét jelöljük. A tanultak alapján most már

$$P(\xi>175)=1-F(175)=1-\Phi\left(\frac{175-170}{5}\right)=1-\Phi(1)=0{,}1587.$$

327. *b)* A $P(\xi>K_\alpha)=\alpha$ egyenlőséget előbb kifejezzük a standard normális eloszlásfüggvény segítségével. Ekkor a

$$P(\xi>K_\alpha)=1-P(\xi\leqq K_\alpha)=1-\Phi\left(\frac{K_\alpha-0}{2}\right)=1-\Phi\left(\frac{K_\alpha}{2}\right)=\alpha$$

adódik. Figyelembe véve, hogy most $\alpha=0{,}95$, ebből a

$$\Phi\left(\frac{K_{0,95}}{2}\right)=1-0{,}95=0{,}05$$

egyenletet nyerjük. Ezt az egyenletet a

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$$

képlet segítségével átalakítva, a következőt kapjuk:

$$\Phi\left(\frac{K_{0,95}}{2}\right)=1-\Phi\left(-\frac{K_{0,95}}{2}\right)=0{,}05,$$

s ebből

$$\Phi\left(-\frac{K_{0,95}}{2}\right)=0{,}95.$$

A normális eloszlás táblázatából visszakeresve

$$-\frac{K_{0,95}}{2}=1{,}65$$

adódik, így a keresett $K_{0,95}$ szám:

$$K_{0,95}=-3{,}30.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $\alpha=0{,}95$ esetén $-3{,}30$ az a szám, amelynél nagyobb értéket a ξ 0,95 valószínűséggel vesz fel.

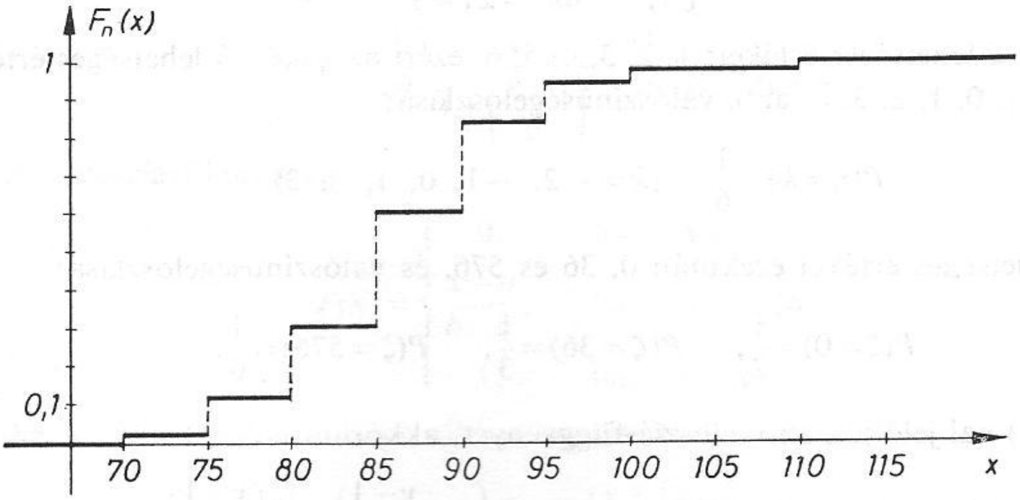
328. A ξ valószínűségi változó empirikus eloszlásfüggvénye a definíció szerint

$$F_n(x) = \frac{k}{n},$$

ahol k az x-nél kisebb mintaelemek számát jelenti. Ez a függvény lépcsős függvény, amelynek minden X_i helyen $\frac{1}{60}$ nagyságú ugrása van ($i = 1, 2, \ldots, 60$). Az elég nagy számú adat ismeretében az empirikus eloszlás- és sűrűségfüggvényt úgy rajzoljuk meg, hogy a mintaelemeket előbb csoportosítjuk, s az így kapott adatok alapján számolunk. Válasszuk az értékközöket egyenlő nagyokra. A $h = 5$-tel és a 70 kezdőértékkel számolva, a következő táblázathoz jutunk:

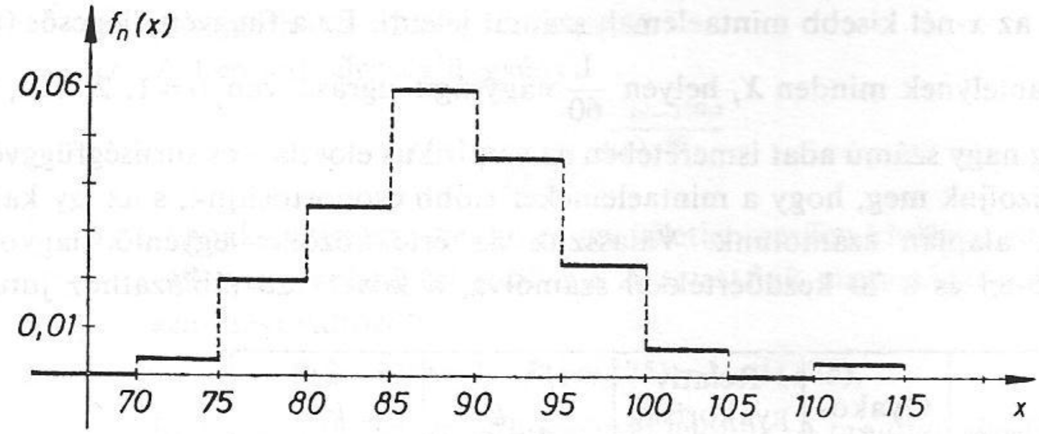
Értékközök	Gyakoriság k_i	Relatív gyakoriság $\frac{k_i}{n}$	$\sum_{j \leq i} \frac{k_j}{n}$	$\frac{k_i}{nh}$
70—75	1	0,017	0,017	0,0034
75—80	6	0,100	0,117	0,0200
80—85	11	0,183	0,300	0,0366
85—90	18	0,300	0,600	0,0600
90—95	14	0,233	0,833	0,0466
95—100	7	0,117	0,950	0,0234
100—105	2	0,033	0,983	0,0066
105—110	0	0,000	0,983	0,0000
110—115	1	0,017	1,000	0,0034

Ezek alapján az empirikus eloszlásfüggvény grafikonja a 35. ábra szerint készíthető el. Az utolsó oszlopban álló adatok felhasználásával az empirikus sűrűség-



35. ábra

függvény grafikonja a 36. ábra szerint rajzolható meg. Az empirikus eloszlás- és sűrűségfüggvény görbéje alapján a ξ-t közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthetjük.



36. ábra

330. Ha ξ lehetséges értékei 5 és 10, akkor az $\eta=2\xi+1$ lehetséges értékei nyilván $y_1=2\cdot5+1=11$ és $y_2=2\cdot10+1=21$. Az η valószínűségeloszlása:

$$P(\eta=11)=P(2\xi+1=11)=P(\xi=5)=\frac{1}{3},$$

és hasonlóképpen

$$P(\eta=21)=P(\xi=10)=\frac{2}{3}.$$

Ezekből az η eloszlásfüggvénye, ha ezt $G(y)$-nal jelöljük:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y\leqq 11, \\ \dfrac{1}{3}, & \text{ha} \quad 11<y\leqq 21, \\ 1, & \text{ha} \quad 21<y. \end{cases}$$

331. Mivel a ξ lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ezért az $\eta=\xi-3$ lehetséges értékei: -2, -1, 0, 1, 2, 3, és az η valószínűségeloszlása:

$$P(\eta=k)=\frac{1}{6} \qquad (k=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

A ζ lehetséges értékei ezekután 0, 36 és 576, és valószínűségeloszlása:

$$P(\zeta=0)=\frac{1}{2}, \qquad P(\zeta=36)=\frac{1}{3}, \qquad P(\zeta=576)=\frac{1}{6}.$$

332. Ha $G(y)$-nal jelöljük az η eloszlásfüggvényét, akkor

$$G(y)=P(\eta<y)=P(2\xi+1<y)=P\left(\xi<\frac{y-1}{2}\right)=F\left(\frac{y-1}{2}\right),$$

így

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha } \frac{y-1}{2}\leqq 0,\\ 1-\cos\frac{y-1}{2}, & \text{ha } 0<\frac{y-1}{2}\leqq\frac{\pi}{2},\\ 1, & \text{ha } \frac{\pi}{2}<\frac{y-1}{2}, \end{cases}$$

vagy átalakítva a jobb oldalon szereplő egyenlőtlenségeket:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha } y\leqq 1,\\ 1-\cos\frac{y-1}{2}, & \text{ha } 1<y\leqq\pi+1,\\ 1, & \text{ha } \pi+1<y. \end{cases}$$

E függvény y szerinti deriváltja adja az η sűrűségfüggvényét. Eszerint, ha ezt $g(y)$-nal jelöljük,

$$g(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{y-1}{2}, & \text{ha } 1<y<\pi+1,\\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

333. A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Az $\eta=2\xi+1$ eloszlásfüggvénye, az előző feladatban felírt képlet szerint számolva:

$$G(y)=\frac{1}{\pi}\,\text{arc tg}\,\frac{y-1}{2}+\frac{1}{2}\qquad(-\infty<y<+\infty),$$

és végül az η sűrűségfüggvénye:

$$g(y)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{1+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2}=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{y^2-2y+5}.$$

334. A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\leqq a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a<x\leqq b,\\ 1, & \text{ha } b<x. \end{cases}$$

Az $\eta=2\xi+1$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a

$$G(y)=F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

képlet alapján

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y\leqq 2a+1, \\ \dfrac{y-(2a+1)}{2(b-a)}, & \text{ha} \quad 2a+1<y\leqq 2b+1, \\ 1, & \text{ha} \quad 2b+1<y. \end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvényét ebből differenciálással kapjuk:

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2(b-a)}, & \text{ha} \quad 2a+1<y<2b+1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Látjuk, hogy az η a $(2a+1,\ 2b+1)$ intervallumon egyenletes eloszlású, hiszen sűrűségfüggvénye ez intervallumon az intervellum hosszának reciprokával egyenlő, másutt pedig 0.

335. Jelentse ξ az órára nézés időpontját. Ez a feltétel szerint egyenletes eloszlású, így

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ x, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<x. \end{cases}$$

A következő mutatóugrásig eltelt időt η-val jelölve, nyilvánvaló, hogy $\eta=1-\xi$, így az η eloszlásfüggvénye a

$$G(y)=P(\eta<y)=P(1-\xi<y)=P(\xi>1-y)=1-P(\xi\leqq 1-y)=1-F(1-y)$$

képlet szerint

$$G(y)=\begin{cases} 1-0, & \text{ha} \quad 1-y\leqq 0, \\ 1-(1-y), & \text{ha} \quad 0<1-y\leqq 1, \\ 1-1, & \text{ha} \quad 1<1-y, \end{cases}$$

vagy egyszerűbb alakra hozva:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y<0, \\ y, & \text{ha} \quad 0\leqq y<1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1\leqq y. \end{cases}$$

Látjuk, hogy az η is egyenletes eloszlású a $(0,\ 1)$ intervallumon.

336. Most a

$$G(y)=\begin{cases} F(\sqrt{y})-F(-\sqrt{y}), & \text{ha} \quad y\geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0 \end{cases}$$

képletet használjuk fel az $\eta=\xi^2$ eloszlásfüggvényének felírásához. Ebben $G(y)$ az η, $F(x)$ pedig a ξ eloszlásfüggvényét jelöli. Mivel

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ x, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<x, \end{cases}$$

ezért, felhasználva, hogy $\sqrt{y} \geqq 0$, ha $y \geqq 0$, az adódik, hogy

$$F(\sqrt{y}) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{ha} \quad 0 \leqq y \leqq 1. \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < y \end{cases}$$

(az $y < 0$ értékekre a függvény nincs értelmezve). Mivel továbbá $-\sqrt{y} < 0$, ezért

$$F(-\sqrt{y}) = 0, \quad \text{ha} \quad y \geqq 0,$$

így a keresett eloszlásfüggvény:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y < 0, \\ \sqrt{y}, & \text{ha} \quad 0 \leqq y \leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < y. \end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvénye innen:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{ha} \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvényét természetesen felírhatjuk a

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{ha} \quad y > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y < 0 \end{cases}$$

képlet felhasználásával is, eredményül ugyanaz adódik, mint az előbb.

337. Az előző feladatban megismert módon számolunk. Most

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq -1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{ha} \quad -1 < x \leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x, \end{cases}$$

így $y \geqq 0$ esetében

$$F(\sqrt{y}) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}+1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq y \leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < y, \end{cases} \qquad (\text{mert } \sqrt{y} \geqq 0)$$

továbbá $y \geqq 0$-ra

$$F(-\sqrt{y}) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y > 1, \\ \dfrac{1-\sqrt{y}}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq y \leqq 1, \end{cases} \qquad (\text{mert } -\sqrt{y} \leqq 0)$$

így az előző feladatban felírt képlet szerint az η eloszlásfüggvénye:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y<0, \\ \sqrt{y}, & \text{ha} \quad 0\leqq y\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<y. \end{cases}$$

Ugyanazt az eredményt kaptuk, mint az előző feladatban!

338. A felvett pontnak a kezdőponttól mért távolsága legyen ξ, akkor a másik végponttól mért távolság $1-\xi$, és a távolságok négyzetösszege:

$$\eta=\xi^2+(1-\xi)^2.$$

Ennek a $\xi=\frac{1}{2}$ helyen van minimuma, s ez: $\eta_{\min}=\frac{1}{2}$. Mivel a ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ x, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<x, \end{cases}$$

ezért a keresett valószínűség:

$$P\left(\eta-\frac{1}{2}<\alpha\right)=P\left(2\xi^2-2\xi+\frac{1}{2}<\alpha\right)=$$

$$=P\left(\frac{1-\sqrt{2\alpha}}{2}<\xi<\frac{1+\sqrt{2\alpha}}{2}\right)=F\left(\frac{1+\sqrt{2\alpha}}{2}\right)-F\left(\frac{1-\sqrt{2\alpha}}{2}\right)=\sqrt{2\alpha}.$$

Itt azt is felhasználtuk, hogy $0<\alpha<\frac{1}{2}$-re

$$0<\frac{1\pm\sqrt{2\alpha}}{2}<1.$$

(Ha az $\alpha\geqq\frac{1}{2}$, akkor — mint könnyen belátható — a keresett valószínűség 1-gyel egyenlő.)

A feladatot megoldhatjuk úgy is, ahogy azt a 186. feladatban tettük. Ez esetben az ott szereplő x helyére ξ-t kell írnunk, melynek eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq -\frac{1}{2}, \\ x+\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{1}{2}<x\leqq\frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}<x. \end{cases}$$

A további számítások az ott látottakkal lényegében megegyeznek. (Oldjuk meg így is a feladatot!)

339. Mivel most a ξ az $|x| \leqq \frac{\pi}{2}$ intervallumon egyenletes eloszlású, ezért a ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{2x+\pi}{2\pi}, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} < x \leqq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

Az $\eta = a \sin \xi$ eloszlásfüggvényét a

$$G(y) = P(\eta < y) = P(a \sin \xi < y) = P\left(\xi < \arcsin \frac{y}{a}\right) = F\left(\arcsin \frac{y}{a}\right)$$

képlet alapján így írhatjuk fel:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y \leqq -a, \\ \frac{1}{\pi}\left(\arcsin \frac{y}{a} + \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha} \quad -a < y \leqq a, \\ 1, & \text{ha} \quad y < a. \end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvénye innen differenciálással kapható:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{a\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}, & \text{ha} \quad |y| < a, \\ 0 & \text{különben}. \end{cases}$$

(Megjegyezzük, hogy valószínűségi változók ilyen jellegű transzformációi elsősorban a ballisztikában fordulnak elő.)

340. A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Ha az $a \neq 0$, akkor az $y = ax + b$ függvény monoton, így az η sűrűségfüggvénye:

$$g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(\frac{y-b}{a}-m\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{|a|\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-(am+b))^2}{2(a\sigma)^2}}$$

Innen pedig rögtön leolvasható, hogy az η szintén normális eloszlású, amelynek paraméterei: $m_2 = am + b$, és $\sigma_2 = |a|\sigma$.

341. Az előző feladat értelmében szükséges, hogy az a és b eleget tegyen az

$$\left.\begin{aligned} am_1+b&=0, \\ |a|\sigma_1&=1 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszernek. A második egyenletből

$$|a|=\frac{1}{\sigma_1}, \quad \text{vagyis} \quad a=\pm\frac{1}{\sigma_1}$$

adódik, s ezt felhasználva, az első egyenletből:

$$b=-am_1=\mp\frac{m_1}{\sigma_1}.$$

A keresett transzformációk tehát:

$$\eta=\frac{1}{\sigma_1}\xi-\frac{m_1}{\sigma_1}=\frac{\xi-m_1}{\sigma_1},$$

vagy pedig

$$\eta=-\frac{1}{\sigma_1}\xi+\frac{m_1}{\sigma_1}=-\frac{\xi-m_1}{\sigma_1}.$$

Könnyen belátható, hogy az ilyen transzformációval nyert valószínűségi változók valóban a kívánt tulajdonságúak.

342. A ξ sűrűségfüggvénye most

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

a) Az $\eta_1=\xi^2$ sűrűségfüggvényét $g_1(y)$-nal jelölve, a

$$g_1(y)=\begin{cases} \dfrac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0 \end{cases}$$

képlet alapján

$$g_1(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0. \end{cases}$$

b) Az $\eta_2=2\xi-1$ sűrűségfüggvényét $g_2(y)$-nal jelölve,

$$g_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y+1)^2}{8}}.$$

c) Jelöljük $g_3(y)$-nal az $\eta_3=(2\xi-1)^2=\eta_2^2$ sűrűségfüggvényét. Ekkor az előzőkben kapott eredményeket felhasználva:

$$g_3(y)=\begin{cases} \dfrac{g_2(\sqrt{y})+g_2(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0, \end{cases}$$

vagyis

$$g_3(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{(\sqrt{y}+1)^2}{8}}+e^{-\frac{(-\sqrt{y}+1)^2}{8}}\right), & \text{ha}\quad y>0,\\ 0, & \text{ha}\quad y<0,\end{cases}$$

vagy egyszerűbb alakra hozva:

$$g_3(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y+1}{8}}\left(e^{-\frac{\sqrt{y}}{4}}+e^{\frac{\sqrt{y}}{4}}\right), & \text{ha}\quad y>0,\\ 0, & \text{ha}\quad y<0.\end{cases}$$

343. Mivel most $f(-x)=f(x)$, ezért az η sűrűségfüggvényét $g(y)$-nal jelölve:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{f(\sqrt{y})}{\sqrt{y}}, & \text{ha}\quad y>0,\\ 0, & \text{ha}\quad y<0,\end{cases}$$

vagyis

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & \text{ha}\quad y>0,\\ 0, & \text{ha}\quad y<0.\end{cases}$$

344. Ha ξ a golyók átmérőjét jellemző valószínűségi változó, akkor ennek sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Jelölje η a golyók felszínét. Akkor

$$\eta=\pi\xi^2.$$

Nyilvánvaló, hogy $\eta\geqq 0$. Legyen $G(y)$ az η eloszlásfüggvénye, akkor ez a ξ $F(x)$ eloszlásfüggvénye segítségével így írható fel:

$$G(y)=P(\pi\xi^2<y)=P\left(-\sqrt{\frac{y}{\pi}}<\xi<\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)=F\left(\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)-F\left(-\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)$$

ha $y\geqq 0$, máskülönben $G(y)=0$. Az η sűrűségfüggvénye ebből $y>0$-ra:

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\left[f\left(\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)+f\left(-\sqrt{\frac{y}{\pi}}\right)\right],$$

s így $f(x)$ ismeretében a keresett sűrűségfüggvény:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sigma\sqrt{2y}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{y}-m\sqrt{\pi})^2}{2\pi\sigma^2}}+e^{-\frac{(\sqrt{y}+m\sqrt{\pi})^2}{2\pi\sigma^2}}\right], & \text{ha}\quad y>0,\\ 0, & \text{ha}\quad y<0.\end{cases}$$

345. Mivel az $\eta=|\xi|$ eloszlásfüggvénye:

$$G(y)=P(\eta<y)=\begin{cases} F(y)-F(-y), & \text{ha} \quad y\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

és a jelen esetben

$$F(y)-F(-y)=\Phi(y)-\Phi(-y)=2\Phi(y)-1,$$

így

$$g(y)=\begin{cases} 2\varphi(y), & \text{ha} \quad y>0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0\end{cases} =\begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{ha} \quad y>0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

Ha a ξ m és $\sigma>0$ paraméterű normális eloszlású, akkor hasonló számolással kapjuk a következő sűrűségfüggvényt:

$$g(y)=\begin{cases} 2\dfrac{1}{\sigma}\varphi\left(\dfrac{y-m}{\sigma}\right)=\dfrac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad y>0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

346. Legyen ξ a keresett valószínűségi változó. A feltétel szerint az

$$\eta=\ln\xi \quad (\xi>0)$$

m és $\sigma>0$ paraméterű, normális eloszlású. Jelölje $G(y)$, ill. $g(y)$ az η eloszlás-, ill. sűrűségfüggvényét, és hasonlóképpen $F(x)$ és $f(x)$ a ξ megfelelő jellemzőit, akkor

$$F(x)=P(\xi<x)=P(e^{\eta}<x)=P(\eta<\ln x)=G(\ln x),$$

hacsak $x>0$, és $F(x)=0$, ha $x\leqq 0$. Ebből differenciálással:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}g(\ln x), & \text{ha} \quad x>0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0,\end{cases}$$

vagyis mivel most a feltétel értelmében

$$g(y)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}},$$

így a keresett sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad x>0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

Azt a valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye a most meghatározott függvény, *logaritmikusan normális eloszlásúnak* vagy röviden: *lognormális eloszlásúnak* nevezzük. A későbbiekben még találkozunk vele.

347. Jelöljük $G(y)$-nal, ill. $g(y)$-nal az η eloszlás-, ill. sűrűségfüggvényét. Ez esetben

$$G(y)=\begin{cases} P(\sqrt{\xi}<y)=P(\xi<y^2)=F(y^2), & \text{ha} \quad y\geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0, \end{cases}$$

és

$$g(y)=\begin{cases} 2yf(y^2), & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0. \end{cases}$$

Felhasználva az adott sűrűségfüggvényt, a következőt kapjuk:

$$g(y)=\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0. \end{cases}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk az általános

$$g(y)=f(h(y))|h'(y)|$$

képlet felhasználásával is.

A második kérdésre így felelhetünk:

$$P(\eta<1)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}}dy=2[\Phi(1)-\Phi(0)]=0{,}6826.$$

Itt természetesen a normális eloszlás táblázatát használtuk fel az utolsó lépésben.

348. Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvény minden x-re szigorúan nő, akkor fennáll a $0<F(x)<1$ egyenlőtlenség, így nyilván a $0<\eta<1$ egyenlőtlenség is teljesül. Ezért minden $0<y<1$ értékre

$$G(y)=P(F(\xi)<y)=P(\xi<F^{-1}(y))=F(F^{-1}(y))=y,$$

így a keresett eloszlásfüggvény:

$$G(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y\leqq 0, \\ y, & \text{ha} \quad 0<y\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<y. \end{cases}$$

Az η tehát a (0, 1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Megjegyezzük, hogy a fenti levezetésben az $F^{-1}(y)$ függvény a $F(x)$ inverzét jelenti.

350.
$$M(\xi)=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}.$$

351. Jelöljük C-vel azt az eseményt, hogy mindkét kockán páratlan számot dobunk. Ennek valószínűsége

$$P(C)=\frac{9}{36}.$$

Ha D azt az eseményt jelenti, hogy az egyik és csakis az egyik kockán páros szám szerepel, akkor

$$P(D)=\frac{18}{36}.$$

A játékot akkor tekintjük méltányosnak, ha mindkét játékos egyenlő eséllyel vesz részt benne, azaz ha bármelyikük nyereményének várható értéke ugyanaz. Tegyük fel, hogy az A játékos B-nek x Ft-ot fizet, ha a C esemény bekövetkezik, és természetesen 0 Ft-ot, ha nem következik be, így, ξ-vel jelölve a B játékos nyereményét jelentő valószínűségi változót, ennek várható értéke:

$$M(\xi)=x\cdot\frac{9}{36}+0\cdot\frac{27}{36}=\frac{1}{4}x.$$

Ha η-val az A játékos nyereményét jelöljük, akkor — feltételezve, hogy a B játékos y Ft-ot fizet A-nak a D esemény bekövetkezésekor, és 0 Ft-ot különben —, az η várható értéke:

$$M(\eta)=y\cdot\frac{18}{36}+0\cdot\frac{18}{36}=\frac{1}{2}y.$$

A fenti megállapodás szerint méltányos a játék, ha

$$\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}y,$$

vagyis ha $x=2y$, tehát igazságos (méltányos) játék esetén az adott játékszabályok mellett az A játékosnak kétszer annyit kell fizetnie a C esemény bekövetkezésekor, mint B-nek a D bekövetkezésekor.

352. Először meg kell határozni, mekkora annak a valószínűsége, hogy a négy felütött lap között van (legalább egy) piros. Mivel annak valószínűsége, hogy a négy lap között egyik sem piros:

$$p_0=\frac{24}{32}\cdot\frac{23}{31}\cdot\frac{22}{30}\cdot\frac{21}{29}=\frac{5313}{17\,980},$$

ezért annak valószínűsége, hogy legalább az egyik lap piros a négy közül:

$$p_1=1-p_0=\frac{12\,667}{17\,980}.$$

Ha a ξ az A játékos által fizetendő összeget jelenti, akkor a ξ várható értéke (ez a B játékos nyereségének várható értéke):

$$M(\xi)=10\cdot p_1+0\cdot p_0=10p_1.$$

Hasonlóképpen számolva, az A játékos nyereségének várható értéke:

$$M(\eta)=7\cdot p_0+0\cdot p_1=7p_0.$$

Mivel most

$$M(\xi)-M(\eta)=10p_1-7p_0\approx 5 \text{ Ft},$$

így az A játékos nagyon „előnytelenül" játszik, hiszen neki minden játékra átlag 5 Ft veszteség jut.

Méltányos játék esetén a két várható érték különbségének 0-t kell adnia, hiszen csak így lesz mindkét játékos nyereségének várható értéke egyenlő. Az A játékos 10 Ft-os ajánlatára a B játékosnak a

$$10p_1-xp_0=0$$

egyenletből adódó

$$x=\frac{10p_1}{p_0}=23{,}84$$

forintot kell fizetnie, hogy a játék igazságos legyen.

354. Jelentse ξ a dobások számát, míg 6-ost nem dobunk, a 6-os dobást is beszámítva. A ξ lehetséges értékei tehát az 1, 2, 3, ... természetes számok. Először a ξ valószínűségeloszlását kell meghatározni. Annak valószínűsége, hogy először a k-adik dobás során kapunk 6-ost:

$$p_k=P(\xi=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ez abból a meggondolásból nyerhető, hogy akkor lesz a k-adik dobás eredménye először 6-os, ha az előző $k-1$ dobás eredménye nem 6-os, és feltételezzük, hogy a dobások függetlenek.

A ξ várható értéke most már

$$M(\xi)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

E várható értékben egy végtelen sor összege szerepel. Ezt a következőképpen határozhatjuk meg:

Mint ismeretes, az $|x|<1$ intervallumban

$$1+x+x^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}.$$

Egy konvergens hatványsor azonban a konvergenciaintervallumban tagonként differenciálható, így az $|x|<1$ intervallumban:

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Ezt felhasználva a fenti várható érték kiszámítására

$$M(\xi)=\frac{1}{6}\,\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2}=6$$

adódik eredményül. Átlagban tehát minden hatodik dobásra jut egy 6-os, mint az eleve sejthető is volt.

355. Ugyanazt a gondolatmenetet használjuk, mint az előző feladatnál. A ξ valószínűségeloszlása most:

$$p_k = P(\xi = k) = \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} \cdot \frac{11}{36} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

így a ξ várható értéke:

$$M(\xi) = \frac{11}{36} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{25}{36}\right)^{k-1} = \frac{11}{36} \frac{1}{\left(1 - \frac{25}{36}\right)^2} \approx 3{,}3.$$

Azt kaptuk eredményül, hogy két kockával végzett dobások esetén átlagosan „minden harmadik-negyedik" dobásra jut egy 6-os dobás.

356. Az adott p_k számok valóban valószínűségeloszlást alkotnak, mert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

A ξ valószínűségi változónak azonban nincs várható értéke, mert

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{2^k}{k} \right| \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

és mint ismeretes, a jobb oldalon álló végtelen sor, az ún. harmonikus sor, nem konvergens.

357. Írjuk fel az $M(\xi)$ várható értéket úgy, hogy az összegben szereplő tagokat részletesen kiírjuk:

$$\begin{aligned} M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k p_k = 0 \cdot p_0 + p_1 + & \\ & p_2 + p_2 + \\ & p_3 + p_3 + p_3 + \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & \underline{p_n + p_n + p_n + \ldots + p_n} \qquad (n\text{-szer}). \end{aligned}$$

Adjuk most össze az így kapott tagokat „függőleges" irányban, akkor ez adódik:

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=2}^{n} p_k + \sum_{k=3}^{n} p_k + \ldots + p_n =$$

$$= P(\xi > 0) + P(\xi > 1) + P(\xi > 2) + \ldots + P(\xi > n-1) = \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi > i).$$

Ezt kellett belátni.

358. A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ 2\sqrt{x}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq \frac{1}{4}, \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{1}{4} < x. \end{cases}$$

A keresett várható érték:

$$M(\xi)=\int_0^{\frac{1}{4}} x\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{12},$$

s végül a kérdéses valószínűség:

$$P(\xi<0{,}1)=F(0{,}1)=2\sqrt{0{,}1}\approx 0{,}62.$$

360. A várható érték kiszámításához szükséges sűrűségfüggvényt a 317. feladat megoldása során számítottuk ki. Ezt felhasználva:

$$M(\xi)=\frac{1}{60}\int_0^{30} x\,dx+\frac{1}{120}\int_{60}^{120} x\,dx=52{,}5\,(\text{perc}).$$

361. Az A állandó értékre az

$$A\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=A\pi=1$$

egyenletből $A=\frac{1}{\pi}$ adódik. Az ezzel a sűrűségfüggvénnyel definiált valószínűségi változónak nincs várható értéke, mert az

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx$$

integrál divergens.

362. Először a diszkrét esetet vizsgáljuk. Ha ξ lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots,$ akkor a feltétel szerint minden k-ra $a\leqq x_k\leqq b$. Ha p_k-val jelöljük a ξ valószínűségeloszlását, akkor nyilván $\sum_{k=1}^{\infty} p_k=1$, így

$$a=a\sum_{k=1}^{\infty} p_k\leqq\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k=M(\xi)\leqq b\sum_{k=1}^{\infty} p_k=b.$$

Ezzel a tételt a diszkrét esetre igazoltuk.
Legyen most ξ folytonos. Ekkor ξ sűrűségfüggvénye az $[a, b]$ intervallumon kívül 0, így

$$a=a\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b xf(x)\,dx=M(\xi)\leqq b\int_a^b f(x)\,dx=b.$$

Ezt kellett belátni.

363. Ha $f(x)$ szimmetrikus az $x=a$ egyenesre, akkor bármilyen t valós számra teljesül az $f(a-t)=f(a+t)$ egyenlőség. A ξ várható értékét felírva, majd elvégezve az $x=a-t$ helyettesítést, ezt kapjuk:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(a-t)f(a-t)dt.$$

Alkalmazzuk a szimmetriát kifejező egyenlőséget, majd végezzük el az $a+t=x$ helyettesítést. Sorban adódnak a következők:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}(a-t)f(a+t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}(2a-x)f(x)\,dx=2a-\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx=2a-M(\xi).$$

Ebből valóban $M(\xi)=a$, amint állítottuk.

364. Az $(a,\, b)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{ha} \quad a<x<b,\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

így a kérdezett n-edik momentum:

$$M(\xi^n)=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^n\,dx=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}.$$

365. A $2k$-adik momentum:

$$M(\xi^{2k})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Végezzük el itt az

$$\frac{x^2}{2}=t, \qquad x=\sqrt{2t}, \qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2t}}\,dt$$

helyettesítést, akkor a következőt kapjuk:

$$M(\xi^{2k})=\frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}t^{\,k+\frac{1}{2}-1}e^{-t}\,dt=\frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Használjuk fel a gammafüggvény következő tulajdonságát: $p>1$-re

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1),$$

és akkor a $2k$-adik momentumra

$$M(\xi^{2k})=\frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

adódik. Ezt még egyszerűbb alakra is hozhatjuk, ha felhasználjuk a 23. feladatban bebizonyított képletet, és az ismert

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

egyenlőséget. Ezekkel ui.

$$M(\xi^{2k})=\frac{(2k)!}{2^k\cdot k!}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

A $2k+1$-ed rendű momentumok mind 0-val egyenlők, mert az

$$M(\xi^{2k+1})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

egyenlőségben az integrandus páratlan függvény, az integrál konvergens is, így

$$M(\xi^{2k+1})=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-u}^{u} x^{2k+1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=0.$$

366. *b)* $M(\xi)=\frac{11}{6}$; $D(\xi)=\frac{\sqrt{17}}{6}$.

367. *a)* A ξ valószínűségeloszlását a $p_1+(n-1)d$ számok alkotják, ahol $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$. Mivel ezek összege 1, és $p_1=\frac{1}{10}$, így $d=\frac{1}{20}$. A keresett valószínűségeloszlás tehát: $\frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \frac{4}{20}, \frac{5}{20}, \frac{6}{20}$.

b) Könnyen kiszámíthatók a következők: $M(\xi)=\frac{7}{2}$; $M(\xi^2)=14$; $D^2(\xi)=$ $=\frac{7}{4}$; $D(\xi)=\frac{\sqrt{7}}{2}\approx 1{,}3$. A $|\xi-M(\xi)|$ akkor nagyobb, mint $D(\xi)$, ha $\xi=1$, $\xi=2$, vagy $\xi=5$. Tehát

$$P(|\xi-M(\xi)|>D(\xi))=P(\xi=1)+P(\xi=2)+P(\xi=5)=\frac{11}{20}=0{,}55.$$

368. Az A esemény relatív gyakorisága $\eta=\frac{\xi}{n}$. A ξ nyilvánvalóan binomiális eloszlású. Az η lehetséges értékei a definíció alapján: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. Ezeket az értékeket az η a következő valószínűségekkel veszi fel:

$$P\left(\eta=\frac{k}{n}\right)=P(\xi=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},$$

ahol $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

Az η várható értéke (felhasználva, hogy a ξ várható értéke np) a következő:

$$M(\eta)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=p.$$

A szórásnégyzetet hasonlóképpen számíthatjuk ki. Eredményül

$$D^2(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta)=\frac{pq}{n}.$$

adódik, s innen a szórás

$$D(\eta)=\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

369. *b)* A ξ várható értéke:

$$M(\xi)=\int_{-1}^{1}x\cdot|x|\,dx=\int_{-1}^{0}(-x^2)\,dx+\int_{0}^{1}x^2\,dx=0.$$

A ξ szórásnégyzete:

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=-\int_{-1}^{0}x^3\,dx+\int_{0}^{1}x^3\,dx=\frac{1}{2}.$$

c) $M(\xi)=2,\ D(\xi)=2.$

d) $M(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad D(\xi)=\sqrt{\frac{\pi-2}{\pi}}.$

370. A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x>0,\\ 0, & \text{ha } x<0.\end{cases}\qquad(\lambda>0)$$

A ξ várható értéke és szórása parciális integrálást alkalmazva:

$$M(\xi)=\frac{1}{\lambda},\qquad D(\xi)=\frac{1}{\lambda}.$$

372. A feladatban szereplő integrált így is írhatjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2)^2 e^{-\frac{(x-2)^2}{2(\sqrt{2})^2}}\,dx.$$

Mivel pedig az

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4}}$$

függvény egy $m=2$ várható értékű és $\sigma=\sqrt{2}$ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ezért a feladatmegoldó e valószínűségi változó szórásnégyzetét számíthatta a szórásnégyzet definíciója szerint, s így eredményül 2-t kellett kapnia.

373. Abból, hogy a ξ egyenletes eloszlású az $(1, 5)$ intervallumon, rögtön nyerjük a következőket.

A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 1, \\ \dfrac{x-2}{4}, & \text{ha} \quad 1<x\leqq 5, \\ 1, & \text{ha} \quad 5<x. \end{cases}$$

A ξ várható értéke és szórása:

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2}=3, \qquad D(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ezek felhasználásával a kérdéses valószínűségek közül az első:

$$P(\xi>3)=1-P(\xi\leqq 3)=1-F(3)=\frac{1}{2},$$

a második:

$$P\left(|\xi-3|>\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=1-P\left(|\xi-3|\leqq\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=1-P\left(3-\frac{2}{\sqrt{3}}\leqq\xi\leqq 3+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=1-F\left(3+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+F\left(3-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\approx 0{,}42.$$

374. Jelentse ξ az egyes pulóverekhez szükséges gyapjúmennyiséget. Akkor a ξ lehetséges értékei: 44, 45, 48, 60, 64, s a megfelelő valószínűségek:

$$p_1=0{,}3; \quad p_2=0{,}1; \quad p_3=0{,}1; \quad p_4=0{,}25; \quad p_5=0{,}25.$$

A ξ várható értéke:

$$M(\xi)=44\cdot 0{,}3+45\cdot 0{,}1+\ldots=53{,}5 \text{ (dekagramm)}.$$

A ξ szórása egyszerű számításokkal:

$$D(\xi)=8{,}7 \text{ (dekagramm)}.$$

375. Mivel $M(a\xi+b)=aM(\xi)+b$ és $D(a\xi+b)=|a|D(\xi)$, ezért

$$M(\eta)=M\left(\frac{1}{D(\xi)}\xi-\frac{M(\xi)}{D(\xi)}\right)=\frac{1}{D(\xi)}M(\xi)-\frac{M(\xi)}{D(\xi)}=0,$$

és

$$D(\eta)=D\left(\frac{1}{D(\xi)}\xi-\frac{M(\xi)}{D(\xi)}\right)=\frac{1}{D(\xi)}D(\xi)=1.$$

376. Az igazolandó egyenlőtlenség bal oldalát a várható értékre vonatkozó tételek segítségével átalakítjuk:

$$M\left((\xi-c)^2\right)=M\left((\xi-M(\xi)+M(\xi)-c)^2\right)=$$

$$=M\left((\xi-M(\xi))^2\right)+2M\left((\xi-M(\xi))(M(\xi)-c)\right)+M\left((M(\xi)-c)^2\right)=$$

$$=M\left((\xi-M(\xi))^2\right)+2(M(\xi)-M(\xi))(M(\xi)-c)+(M(\xi)-c)^2.$$

Itt a második tag 0, a harmadik viszont nemnegatív; az igazolandó egyenlőtlenség bal oldala tehát valóban nem kisebb, mint a jobb oldal. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha az utolsó tag 0, vagyis ha $c=M(\xi)$.

377. A kérdéses valószínűség meghatározásához arra is figyelemmel kell lennünk, hogy a k milyen értéket vesz fel. Ha ui. k olyan, hogy

$$m-k\sigma \geqq a \quad \text{és} \quad m+k\sigma \leqq b,$$

vagyis $\left(\text{felhasználva, hogy ez esetben } m=\frac{a+b}{2} \text{ és } \sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)$ ha

$$0 \leqq k \leqq \sqrt{3},$$

akkor

$$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=\frac{1}{b-a}\int\limits_{m-k\sigma}^{m+k\sigma} dx=\frac{k}{\sqrt{3}}.$$

Ha pedig $k>\sqrt{3}$, akkor, mint könnyen belátható, $m-k\sigma<a$ és $m+k\sigma>b$, így a kérdéses valószínűség:

$$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=1.$$

A keresett valószínűség tehát, összefoglalva:

$$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=\begin{cases} \dfrac{k}{\sqrt{3}}, & \text{ha} \quad 0 \leqq k \leqq \sqrt{3}, \\ 1, & \text{ha} \quad \sqrt{3}<k. \end{cases}$$

378. A ξ eloszlásfüggvénye, mivel exponenciális eloszlásról van szó, $\lambda>0$-val:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

A következő valószínűséget kell meghatározni:

$$P=P\left(\frac{1}{\lambda}(1-k)<\xi<\frac{1}{\lambda}(1+k)\right),$$

hiszen most $m=M(\xi)=\frac{1}{\lambda}$, és $\sigma=D(\xi)=\frac{1}{\lambda}$. Legyen először

$$\frac{1}{\lambda}(1-k) \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad 0 \leqq k \leqq 1.$$

Ekkor a $F(x)$ eloszlásfüggvény felhasználásával:

$$P=F\left(\frac{1}{\lambda}(1+k)\right)-F\left(\frac{1}{\lambda}(1-k)\right)=1-e^{-(1+k)}-(1-e^{-(1-k)})=e^{-1}(e^{k}-e^{-k}).$$

Ha viszont $k>1$, akkor nyilván $\frac{1}{\lambda}(1-k)<0$, így e helyen az eloszlásfüggvény 0, tehát a keresett valószínűség:

$$P=F\left(\frac{1}{\lambda}(1+k)\right)-0=1-e^{-1-k}.$$

Összefoglalva a kapott eredményeket:

$$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=\begin{cases} e^{-1}(e^k-e^{-k}), & \text{ha} \quad 0\leqq k\leqq 1, \\ 1-e^{-1-k}, & \text{ha} \quad 1<k. \end{cases}$$

379. Ezekre a kérdésekre könnyen felelhetünk a normális eloszlás használatát megkönnyítő képletek és a táblázat ismeretében.

a) $P(-1<\xi<1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0{,}6826.$

b) $P(-1<\xi<2)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)-1=0{,}8185.$

c) A kérdés most: mekkora az A szám, ha

$$P(-A<\xi<A)=\frac{1}{2}?$$

Az egyenletet így is írhatjuk:

$$P(-A<\xi<A)=2\Phi(A)-1=\frac{1}{2}.$$

Innen $\Phi(A)=0{,}75$, s ebből a $\Phi(x)$ függvény inverzét $\Phi^{-1}(y)$-nal jelölve:

$$A=\Phi^{-1}(0{,}75)\approx 0{,}67.$$

Ezt az eredményt a táblázatból való visszakereséssel állapítottuk meg.

381. Példaként a *b)* alatti egyenlőséget igazoljuk.

$$P(|\xi-m|>k\sigma)=1-P(|\xi-m|\leqq k\sigma)=$$
$$=1-P(m-k\sigma\leqq\xi\leqq m+k\sigma)=1-F(m+k\sigma)+F(m-k\sigma)=$$
$$=1-\Phi(k)+\Phi(-k)=1-\Phi(k)+1-\Phi(k)=2(1-\Phi(k)).$$

382. A 328. feladatban már megállapítottuk, hogy a vizsgált valószínűségi változó közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető. A táblázat alapján az empirikus várható érték:

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_{60}}{60}\approx 88{,}8,$$

és a korrigált empirikus szórás:

$$S^*=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{60}(X_i-\overline{X})^2}{59}}\approx 6{,}8,$$

így a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye közelítőleg:

$$f(x)=\frac{1}{6{,}8\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-88{,}8)^2}{2\cdot(6{,}8)^2}}$$

383. Láttuk a 340. feladatban, hogy egy $y=ax+b$, $a\neq 0$ alakú lineáris transzformáció normális eloszlású valószínűségi változót újra normális eloszlásúba visz át. Legyen η az új valószínűségi változó. Akkor a feltételek szerint

$$\left.\begin{aligned} M(\eta)&=aM(\xi)+b=3a+b=5,\\ D(\eta)&=|a|D(\xi)=10|a|=20.\end{aligned}\right\}$$

Ebből az egyenletrendszerből:

$$a=\pm 2 \quad \text{és} \quad b=\begin{cases}-1\\ 11\end{cases}.$$

Ezek szerint két ilyen transzformáció is létezik. Az egyik az $\eta=2\xi-1$, s a másik az $\eta=-2\xi+11$.

385. A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0<x<\pi,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

A ξ jellemzői:

$$M(\xi)=\pi-2, \qquad M(\xi^2)=\pi^2-8, \qquad D^2(\xi)=4(\pi-3).$$

Az $\eta=2\xi+1$ jellemzői:

$$M(\eta)=2M(\xi)+1=2\pi-3, \qquad D^2(\eta)=2^2D^2(\xi)=16(\pi-3).$$

386. Az η sűrűségfüggvényének felírásához a

$$g(y)=f(h(y))|h'(y)|$$

képletet használjuk, ahol $h(y)$ a transzformációval adott $y=r(x)$ függvény inverze.

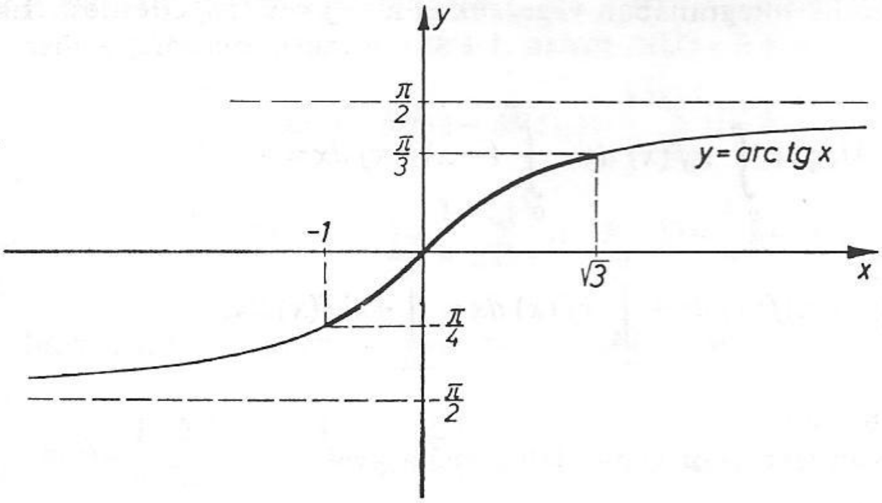
A jelen esetben $y=r(x)=\operatorname{arctg} x$, így $x=h(y)=\operatorname{tg} y$, $h'(y)=\dfrac{1}{\cos^2 y}$, a 37. ábráról pedig azt is látjuk, hogy ha a ξ sűrűségfüggvénye a $(-1, \sqrt{3})$ intervallumon 0-tól különböző, akkor az η sűrűségfüggvénye a $\left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ intervallumon lesz 0-tól különböző. Tekintve, hogy most

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}, & \text{ha} \quad -1<x<\sqrt{3},\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

így az η sűrűségfüggvénye:

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})\cos^2 y}, & \text{ha} \quad -\dfrac{\pi}{4}<y<\dfrac{\pi}{3},\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

(Ellenőrzésül számítsuk ki a $g(y)$ integrálját $-\infty$-től $+\infty$-ig!)



37. ábra

Az η várható értékére a következő adódik:

$$M(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty} r(x)f(x)\,dx=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\int_{-1}^{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-1}^{\sqrt{3}}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right].$$

A várható érték kiszámításának ellenőrzésére szolgálhat az, hogy a várható értéket a $g(y)$ segítségével is kiszámíthatjuk. Ekkor

$$M(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)\,dy=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{y}{\cos^2 y}\,dy=$$

$$=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\left[y\operatorname{tg} y+\ln\cos y\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{3}\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right],$$

vagyis ugyanaz az eredmény, mint az előző.

387. Ismeretes, hogy az $\eta=|\xi|$ sűrűségfüggvénye:

$$g(y)=\begin{cases} f(y)+f(-y), & \text{ha} \quad y>0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

Ekkor az η várható értéke:

$$M(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty} yg(y)\,dy=\int_{0}^{+\infty} y[f(y)+f(-y)]\,dy=\int_{0}^{+\infty} yf(y)\,dy+\int_{0}^{+\infty} yf(-y)\,dy.$$

A jobb oldal második integráljában végezzük el a $-y=x$ helyettesítést. Ekkor $dy=-dx$, és

$$M(\eta)=\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx-\int_0^{-\infty}(-x)f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{0}(-x)f(x)\,dx+\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx,$$

és ez volt bizonyítandó.

388. Az előző feladatban levezetett képlet felhasználásával

$$M(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0}(-x)f(x)\,dx+\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx=$$

$$=-\int_{-a}^{0}\frac{x}{2a}\,dx+\int_0^{a}\frac{x}{2a}\,dx=\frac{a}{2}.$$

389. Az $(a,\ 5)$ intervallumon egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke: $M(\xi)=\frac{a+5}{2}$, így

$$M(\xi+1)=M(\xi)+1=\frac{a+7}{2}.$$

Ezek után a

$$P\left(\xi<\frac{a+7}{2}\right)=\frac{\frac{a+7}{2}-a}{5-a}=\frac{5}{6}$$

egyenletből: $a=2$. A feladat most már könnyen befejezhető.

390. A ξ várható értéke:

$$M(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n+1}{2}.$$

A szórásnégyzet kiszámításához meghatározzuk a második momentumot:

$$M(\xi^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{n}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Így a szórásnégyzet:

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=\frac{n^2-1}{12}.$$

A várható eltérés kiszámításához két esetet különböztetünk meg. Legyen először n páratlan, azaz: $n=2k+1$, akkor $M(\xi)=k+1$, így

$$d(\xi)=M(|\xi-M(\xi)|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2k+1}|i-k-1|=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(k+1-i)+\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{2k+1}(i-k-1)=\frac{1}{n}k(k+1)=\frac{n^2-1}{4n};$$

ha viszont az n páros, vagyis $n=2k$, akkor $M(\xi)=k+\frac{1}{2}$, így

$$d(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2k}\left|i-k-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(k+\frac{1}{2}-i\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{2k}\left(i-k-\frac{1}{2}\right)=\frac{k^2}{n}=\frac{n^2}{4n}=\frac{n}{4}.$$

Összefoglalva az eredményt, a ξ várható eltérése tehát

$$d(\xi)=\begin{cases}\dfrac{n^2-1}{4n}, & \text{ha} \quad n \text{ páratlan,}\\[2ex] \dfrac{n^2}{4n}, & \text{ha} \quad n \text{ páros.}\end{cases}$$

391. A ξ binomiális eloszlású, így valószínűségeloszlása:

$$p_k=P(\xi=k)=\binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

A ξ várható értéke és szórása tehát:

$$M(\xi)=2n\cdot\frac{1}{2}=n, \qquad D(\xi)=\sqrt{2n\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

A várható eltérés meghatározásához a

$$d(\xi)=\sum_{k=0}^{2n}|k-n|\,p_k$$

összeget kell kiszámítani. Vegyük észre, hogy mivel $p=\frac{1}{2}$, az eloszlás szimmetrikus, tehát

$$p_k=p_{2n-k}, \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),$$

így a várható eltérésre vonatkozó képlet a következőre egyszerűsödik:

$$d(\xi)=2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k=\frac{2}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{2n}{k}.$$

Bontsuk most a jobb oldalon levő összeget két részre, és használjuk fel a könnyen belátható

$$k\binom{2n}{k}=2n\binom{2n-1}{k-1}$$

azonosságot, akkor

$$d(\xi)=\frac{2n}{2^{2n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}-2\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n-1}{k-1}\right]$$

adódik. A szögletes zárójelben álló kifejezést kell még kiszámítanunk. Ezt a 105. feladatban már elvégeztük, így az eredményt felhasználva, végül is a várható eltérésre a

$$d(\xi)=\frac{2n}{2^{2n}}\binom{2n-1}{n-1}=\frac{n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

képletet kapjuk.

392. A Poisson-eloszlású valószínűségi változó várható eltérése, az $n\leqq\lambda<n+1$ (n egész) feltétel fennállása esetén, a következőképpen kapható:

$$d(\xi)=M(|\xi-M(\xi)|)=\sum_{k=0}^{\infty}|k-\lambda|\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(\lambda-k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Ha most mindkét tagból kiemeljük a $\lambda e^{-\lambda}$ szorzatot, akkor

$$d(\xi)=\lambda e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right]$$

adódik. Elvégezve a lehetséges összevonásokat, a

$$d(\xi)=2\lambda\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

képletet kapjuk eredményül, s ezt kellett igazolni.

393. Ha a ξ folytonos valószínűségi változó, akkor a ξ várható eltérése:

$$d(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-M(\xi)|f(x)\,dx.$$

a) Mivel egyenletes eloszlású valószínűségi változó esetében

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2},$$

ezért

$$d(\xi)=\frac{1}{b-a}\left[\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\right]=\frac{b-a}{4},$$

vagyis egyenletes eloszlás esetén a várható eltérés az (a, b) intervallum hosszának negyedrészével egyenlő.

b) Ha a ξ normális eloszlású, akkor $M(\xi)=m$, így

$$d(\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{m}(m-x)e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx+\int_{m}^{+\infty}(x-m)e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx\right].$$

Az $\frac{x-m}{\sigma}=t$, $dx=\sigma\, dt$ helyettesítéssel ebből könnyen kapható a

$$d(\xi)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

végeredmény.

c) Ha a ξ exponenciális eloszlású, akkor $M(\xi)=\frac{1}{\lambda}$, és az előzőkhöz hasonló számolással

$$d(\xi)=\lambda\left[\int_{0}^{\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{\lambda}-x\right)e^{-\lambda x}dx+\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}dx\right]=\frac{2}{\lambda e}$$

adódik.

Mindhárom esetben megfigyelhetjük, hogy

$$d(\xi)\leqq D(\xi).$$

394. *a)* Ha $\eta_1=\xi+b$, akkor $M(\eta_1)=M(\xi)+b$, így

$$d(\eta_1)=M(|\eta_1-M(\eta_1)|)=M(|\xi+b-M(\xi)-b|)=M(|\xi-M(\xi)|)=d(\xi).$$

b) Ha pedig $\eta_2=a\xi$, akkor $M(\eta_2)=aM(\xi)$, így

$$d(\eta_2)=M(|a\xi-M(a\xi)|)=M\big(|a(\xi-M(\xi))|\big)=$$
$$=M(|a|\cdot|\xi-M(\xi)|)=|a|M(|\xi-M(\xi)|)=|a|d(\xi).$$

395. *a)* Az η eloszlásfüggvénye a

$$G(y)=P(|\xi|<y)=\begin{cases}F(y)-F(-y), & \text{ha} \quad y\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0\end{cases}$$

képlet alapján

$$G(y)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad y\leqq 0,\\ \frac{2y}{3}, & \text{ha} \quad 0<y\leqq 1,\\ \frac{y+1}{3}, & \text{ha} \quad 1<y\leqq 2,\\ 1, & \text{ha} \quad 2<y.\end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvényét legegyszerűbben úgy kapjuk meg, ha $G(y)$-t deriváljuk. Ekkor

$$g(y)=\begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{ha} \quad 0<y<1, \\ \frac{1}{3}, & \text{ha} \quad 1<y<2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

b) A várható érték és szórás:

$$M(\eta)=\frac{5}{6}, \quad D(\eta)=\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

c) A várható eltérés:

$$d(\eta)=M\left(\left|\eta-\frac{5}{6}\right|\right)=\int_{-\infty}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-y\right)g(y)\,dy+\int_{\frac{5}{6}}^{+\infty}\left(y-\frac{5}{6}\right)g(y)\,dy=$$

$$=\int_0^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-y\right)\frac{2}{3}\,dy+\int_{\frac{5}{6}}^{1}\left(y-\frac{5}{6}\right)\frac{2}{3}\,dy+\int_1^2\left(y-\frac{5}{6}\right)\frac{1}{3}\,dy=\frac{25}{54}.$$

d) Végül a keresett valószínűség:

$$P\left(\frac{1}{2}<\eta<\frac{3}{2}\right)=G\left(\frac{3}{2}\right)-G\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

396. Az igazolandó egyenlőtlenség a Markov-egyenlőtlenségből adódik. Ugyanis a

$$P(\xi\geqq a)\leqq\frac{M(\xi)}{a}$$

egyenlőtlenségből a komplementer eseményre való áttéréssel a

$$P(\xi<a)\geqq 1-\frac{M(\xi)}{a}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, így a feladatban adott feltételekkel

$$P(\xi<5)\geqq 1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

valóban fennáll.

397. Mivel $m=64$, és $\sigma=\sqrt{64}=8$, így a Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$P(48<\xi<80)=P(64-2\cdot 8<\xi<64+2\cdot 8)\geqq 1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}.$$

398. A Csebisev-egyenlőtlenség átalakításával kapjuk a

$$P(|\xi-M(\xi)|<kD(\xi))\geqq 1-\frac{1}{k^2}$$

egyenlőtlenséget, s ebből, ha elvégezzük a $kD(\xi)=\varepsilon$ helyettesítést, akkor $k=\frac{\varepsilon}{D(\xi)}$ adódik, és így

$$P(|\xi-M(\xi)|<\varepsilon)\geqq 1-\frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

399. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján, mivel most az adott táblázatból $M(\xi)=50$ és $D(\xi)=\sqrt{2}$, azért

$$P(48<\xi<52)=P(50-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}<\xi<50+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})\geqq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

A táblázat alapján számított valószínűség pedig:

$$P(48<\xi<52)=0{,}70$$

400. *a)* A ξ jelentse a 10 000 kiválasztott dolgozó közötti felsőfokú végzettségűek számát. Ekkor a ξ binomiális eloszlású, így

$$M(\xi)=np=3000, \quad D^2(\xi)=npq=2100.$$

b) Mivel a 3000-nek az 5%-a 150, így a 398. feladatban bebizonyított egyenlőtlenség szerint

$$P(|\xi-3000|<150)\geqq 1-\frac{2100}{22\,500}=0{,}90.$$

401. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján:

$$P(|\xi-5000|>5\cdot 10)\leqq\frac{1}{25}=0{,}04.$$

402. A legyártott 100 000 darab termék között a hibátlan termékek várható száma $M(\xi)=np=95\,000$, szórásnégyzete: $D^2(\xi)=npq=4750$. A keresett valószínűségre egy alsó becslés:

$$P(93\,000<\xi<97\,500)\geqq P(93\,000<\xi<97\,000)=$$

$$=P(|\xi-95\,000|<2000)\geqq 1-\frac{4750}{2000^2}=0{,}9988.$$

403. Az első integrál határaiból következik, hogy

$$x\leqq m-k\sigma,$$

vagyis fennállnak az

$$x-m\leqq -k\sigma \quad \text{és} \quad (x-m)^2\geqq k^2\sigma^2$$

egyenlőtlenségek.

Az utóbbi felhasználásával az első integrálra a következő becslést kapjuk:

$$\int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx \geqq k^2\sigma^2 \int_{-\infty}^{m-k\sigma} f(x)\,dx = k^2\sigma^2 P(\xi \leqq m-k\sigma) = k^2\sigma^2 P(\xi < m-k\sigma).$$

A feladatban szereplő második egyenlőtlenséget ugyanilyen gondolatmenettel láthatjuk be.

404. Felhasználva az előző feladat két egyenlőtlenségét,

$$\sigma^2 \geqq \int_{-\infty}^{m-k\sigma} (x-m)^2 f(x)\,dx + \int_{m+k\sigma}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx \geqq$$

$$\geqq k^2\sigma^2[P(\xi \leqq m-k\sigma) + P(\xi \geqq m+k\sigma)] =$$

$$= k^2\sigma^2[1 - P(m-k\sigma \leqq \xi \leqq m+k\sigma)],$$

ebből viszont egyszerű átrendezéssel kapjuk a

$$P(m-k\sigma \leqq \xi \leqq m+k\sigma) \geqq 1 - \frac{1}{k^2}$$

egyenlőtlenséget, s ez a Csebisev-egyenlőtlenség.

405. Legyen a dobások száma n. Akkor a

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \frac{1}{20}\right) \geqq 1 - \frac{1}{4\cdot\frac{1}{400^n}} \geqq 0{,}9$$

egyenlőtlenségből $n \geqq 1000$ adódik.

406. A feladatot a nagy számok törvénye segítségével oldjuk meg. A

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \leqq \varepsilon\right) \geqq 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}$$

egyenlőtlenség alapján, mivel most $p = 0{,}4$; $q = 0{,}6$ és $n = 200$

$$P\left(\left|\frac{\xi_{200}}{200} - 0{,}4\right| \leqq \varepsilon\right) \geqq 1 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{200\varepsilon^2} = 0{,}90$$

a feladat feltételei szerint. Az utolsó egyenlőségből $\varepsilon = 0{,}11$ adódik. Tehát eszerint legalább 90% valószínűséggel érvényes a

$$\left|\frac{\xi_{200}}{200} - 0{,}4\right| < 0{,}11$$

egyenlőtlenség, azaz a találatok számára 90% valószínűséggel a következő korlátok adhatók:

$$58 \leqq \xi_{200} \leqq 102.$$

Ugyanezt a feladatot a későbbiekben más módszerrel is megoldjuk. Látni fogjuk, hogy az itteninél jobb eredményt is elérhetünk. (Lásd a 612. feladatot!)

407. Itt $n=500$, $p=0{,}008$, $q=1-p=0{,}992$. Az előző feladatban használt egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\left|\frac{\xi_{500}}{500}-0{,}008\right|\leqq\varepsilon\right)\geqq 1-\frac{0{,}008\cdot 0{,}992}{500\varepsilon^2}\geqq 0{,}95.$$

Az utolsó egyenlőtlenségből $\varepsilon\geqq 0{,}02$ adódik, tehát

$$P\left(\left|\frac{\xi_{500}}{500}-0{,}008\right|\leqq 0{,}02\right)\geqq 0{,}95.$$

A zárójelben álló esemény azonban ekvivalens a

$$0<\frac{\xi_{500}}{500}<0{,}028$$

eseménnyel, ha figyelembe vesszük, hogy $\xi_{500}\geqq 0$; így ha 500-zal szorzunk, azt kapjuk, hogy legalább 95% valószínűséggel teljesül a

$$0<\xi_{500}<14$$

egyenlőtlenség, tehát a szakadások száma az adott intervallumban legalább 95% valószínűséggel lesz 0 és 14 között.

408. A kísérletek száma: $n=5000$. A $\xi_n=80$, tehát a selejt relatív gyakorisága e mintában

$$\frac{80}{5000}=0{,}016.$$

A feladat megoldásához a nagy számok törvényének

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geqq 1-\frac{1}{4\varepsilon^2 n}$$

alakját fogjuk használni, mivel p nem ismert.
A feladat feltételei alapján most az

$$1-\frac{1}{4\cdot 5000\cdot\varepsilon^2}\geqq 0{,}9$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Erre $\varepsilon\geqq 0{,}022$ adódik, így igaz, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|<0{,}022\right)=P(|0{,}016-p|<0{,}022)\geqq 0{,}9.$$

Ebből — a megfelelő átalakítások elvégzésével — ezt kapjuk:

$$P(-0{,}022<0{,}016-p<0{,}022)=P(0<p<0{,}038)\geqq 0{,}9.$$

Ezek szerint a (0, 0,038) intervallum 90%-os biztonsággal „lefedi" az ismeretlen p valószínűséget, azaz legalább 90% valószínűséggel állíthatjuk, hogy a p valószínűség ebben az intervallumban van. Ha tehát a 0,016 relatív gyakoriságot használjuk a p helyett, akkor legalább 90%-os szinten igaz, hogy 0,022-nél kisebb hibát követünk el.

409. Tegyük fel, hogy n megfigyelést kell végezni. A megfigyelésekből adódó arány $\frac{\xi_n}{n}$, a valódi arány p. A kérdés: mekkora legyen az n, hogy a

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|<0{,}01\right)\geqq 0{,}95$$

egyenlőtlenség fennálljon?

Mivel a bal oldalon álló valószínűség nem kisebb $1-\frac{1}{4\varepsilon^2 n}$-nél, ezért az

$$1-\frac{1}{4\cdot\frac{1}{100^2}n}\geqq 0{,}95$$

egyenlőtlenség megoldásával $n\geqq 50\,000$ adódik eredményül. A kívánt pontosság eléréséhez tehát legalább 50 000 megfigyelést kell végezni.

410. Figyeljük meg, hogy a dobozban levő cédulák között 3 olyan van, amelyen hárommal osztható páros szám szerepel, 4 darabon van hárommal osztható páratlan szám, 8 darabon hárommal nem osztható páros szám, és 7 darabon hárommal nem osztható páratlan szám. A ξ, η együttes eloszlása tehát:

$$p_{11}=P(\xi=1,\ \eta=1)=\frac{3}{22},\quad p_{10}=P(\xi=1,\ \eta=0)=\frac{8}{22},$$

$$p_{01}=P(\xi=0,\ \eta=1)=\frac{4}{22},\quad p_{00}=P(\xi=0,\ \eta=0)=\frac{7}{22}.$$

A ξ valószínűségi változó peremeloszlása:

$$P(\xi=1)=p_{11}+p_{10}=\frac{11}{22},\quad P(\xi=0)=p_{01}+p_{00}=\frac{11}{22}.$$

Hasonlóképpen az η peremeloszlása:

$$P(\eta=1)=p_{11}+p_{01}=\frac{7}{22}\quad \text{és}\quad P(\eta=0)=p_{10}+p_{00}=\frac{15}{22}.$$

A kétdimenziós diszkrét valószínűségi változók eloszlását és a peremeloszlásokat gyakran táblázatban foglaljuk össze. Így ez esetben a következőt kapjuk:

ξ \ η	1	0	ξ perem-eloszlása
1	$\frac{3}{22}$	$\frac{8}{22}$	$\frac{11}{22}$
0	$\frac{4}{22}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{11}{22}$
η perem-eloszlása	$\frac{7}{22}$	$\frac{15}{22}$	1

411. Két kockával végzett dobások esetén annak valószínűsége, hogy az egyik kockán az i, a másikon a k számot dobtuk ($i, k=1, 2, 3, 4, 5, 6$), a klasszikus képlet szerint

$$P(\xi=i,\ \eta=k)=\frac{1}{36}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ 6).$$

412. *a)* Vegyük észre, hogy egy 20 elemű minta kivétele esetén, ha i darab 40 wattos és j darab 60 wattos körtét húztunk, akkor a 100 wattos körték száma a mintában $20-i-j$. Nyilvánvaló, hogy $0\leqq i+j\leqq 20$ kell, hogy legyen, ez a feltételekből következik.

A $(\xi,\ \eta)$ valószínűségeloszlását a klasszikus képlet alapján számítjuk ki. Mivel a 100 darab villanykörte közül 20 darabot $\binom{100}{20}$-féleképpen vehetünk ki — ez az összes lehetséges elemi események száma —, a 30 darab 40 wattos égők közül i számút, a 30 darab 60 wattos égők közül j számút és végül a 40 darab 100 wattos égők közül $20-i-j$ számút, összesen

$$\binom{30}{i}\binom{30}{j}\binom{40}{20-i-j}\qquad 0\leqq i+j\leqq 20$$

féleképpen húzhatunk — ez a kedvező elemi események száma —, így

$$p_{ij}=P(\xi=i,\ \eta=j)=\frac{\binom{30}{i}\binom{30}{j}\binom{40}{20-i-j}}{\binom{100}{20}},$$

hacsak $0\leqq i+j\leqq 20$ teljesül, máskülönben

$$P(\xi=i,\ \eta=j)=0.$$

Ez a $(\xi,\ \eta)$ valószínűségeloszlása. Az ilyen jellegű eloszlásokat kétdimenziós *polihipergeometriai eloszlásnak* is szokás nevezni.

b) Számítsuk ki most a ξ peremeloszlását. Ezt úgy kapjuk meg, hogy rögzített i érték esetén a p_{ij} valószínűségeket j szerint összegezzük. A $0\leqq i+j\leqq 20$ feltétel miatt most rögzített i esetén a j csak 0-tól $(20-i)$-ig futhat, így a ξ peremeloszlásának tagjai:

$$P(\xi=i)=\sum_{j=0}^{20-i}\frac{\binom{30}{i}\binom{30}{j}\binom{40}{20-i-j}}{\binom{100}{20}}=\frac{\binom{30}{i}}{\binom{100}{20}}\sum_{j=0}^{20-i}\binom{30}{j}\binom{40}{20-i-j}=$$

$$=\frac{\binom{30}{i}\binom{70}{20-i}}{\binom{100}{20}}\qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ 20).$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk a 99. feladatban bizonyított egyik képletet. Azt kaptuk eredményül, hogy a ξ peremeloszlása hipergeometriai eloszlás. Pontosan ugyanígy kiszámíthatjuk az η peremeloszlását is, arra is hipergeometriai eloszlást kapunk.

413. *a)* A klasszikus képlet felhasználásával, ugyanúgy, mint az előbb, a (ξ, η, ζ) valószínűségeloszlására a következő adódik:

$$p_{ijk}=P(\xi=i,\ \eta=j,\ \zeta=k)=\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{k}\binom{n}{n-i-j-k}}{\binom{4n}{n}},$$

hacsak $0 \leqq i+j+k \leqq n$, különben $p_{ijk}=0$.

b) Számítsuk most ki a ξ peremeloszlását. A $P(\xi=i)$ valószínűséget a következőképpen fejezhetjük ki:

$$P(\xi=i)=\sum_{k=0}^{n-i} p_{i0k}+\sum_{k=0}^{n-i-1} p_{i1k}+\ldots+\sum_{k=0}^{n-i-j} p_{ijk}+\ldots+p_{i,n-i,0}.$$

Ezt az összeget tömörebben írva, és felhasználva a (ξ, η, ζ) együttes valószínűségeloszlását is:

$$P(\xi=i)=\sum_{j=0}^{n-i}\ \sum_{k=0}^{n-i-j} p_{ijk}=\frac{\binom{n}{i}}{\binom{4n}{n}}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-i-j}\binom{n}{k}\binom{n}{n-i-j-k}.$$

Ha a belső összeget újra a 99. feladatban bizonyított első képlet segítségével hozzuk egyszerűbb alakra, akkor:

$$P(\xi=i)=\frac{\binom{n}{i}}{\binom{4n}{n}}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n}{j}\binom{2n}{n-i-j}=\frac{\binom{n}{i}\binom{3n}{n-i}}{\binom{4n}{n}}.$$

Itt az utolsó lépésben ismét a 99. feladat már idézett képletét használtuk, s természetesen az i felveheti a $0, 1, 2, \ldots, n$ értékeket. Láthatjuk, hogy a ξ eloszlása ez esetben is hipergeometriai eloszlás.

Számítsuk ki most a (ξ, η) peremeloszlását. Ez az eddigiek ismeretében már nem nehéz, ui.

$$P(\xi=i,\ \eta=j)=\sum_{k=0}^{n-i-j} p_{ijk}=\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}}{\binom{4n}{n}}\sum_{k=0}^{n-i-j}\binom{n}{k}\binom{n}{n-i-j-k}=$$

$$=\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{2n}{n-i-j}}{\binom{4n}{n}},\quad \text{ha}\quad 0 \leqq i+j \leqq n,$$

máskülönben 0. A (ξ, η) eloszlása tehát kétdimenziós polihipergeometriai eloszlás.

Egyébként az e feladatban szereplő (ξ, η, ζ) valószínűségi változó háromdimenziós polihipergeometriai eloszlású.

414. Jelentse ξ az 1-es dobások számát és η a 6-os dobások számát, akkor a kétdimenziós polinomiális eloszlás képlete szerint a keresett valószínűség:

$$P(\xi=2,\ \eta=2)=\frac{10!}{2!2!6!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^6=35\cdot\frac{2^4}{3^8}\,.$$

415. *a)* Legyen ξ_1 az alsó tűréshatár alatti méretű, ξ_2 a felső tűréshatár feletti méretű munkadarabok száma. Minthogy most az alsó tűréshatár alatti méretű munkadarabok aránya 0,05, a felső tűréshatár felettiek aránya pedig 0,03, és mivel nyilván polinomiális eloszlásról van szó, azért a keresett valószínűség:

$$P(\xi_1=5,\ \xi_2=3)=\frac{50!}{5!3!42!}\,0{,}05^5\cdot 0{,}03^3\cdot 0{,}92^{42}.$$

b) Most a $P(\xi_2=3)$ valószínűséget kell kiszámítani. Mivel a ξ_2 peremeloszlása binomiális eloszlás, ezért

$$P(\xi_2=3)=\binom{50}{3}0{,}03^3\cdot 0{,}97^{47}.$$

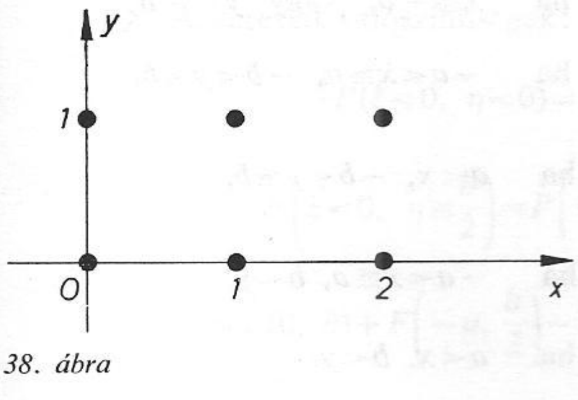
416. A Bernoulli-problémának a kétdimenziós esetre való általánosításához hasonlóan, mivel most a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ lehetséges értékeit az $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ érték rendszerek alkotják, ahol $i_1, i_2, \ldots, i_m$ nem negatív, és n-nél nem nagyobb egész számok, a keresett valószínűségeloszlás:

$$P(\xi_1=i_1,\ \xi_2=i_2, \ldots,\ \xi_m=i_m)=$$
$$=\frac{n!}{i_1!i_2!\ldots i_m!(n-i_1-\ldots-i_m)!}\,p_1^{i_1}p_2^{i_2}\ldots p_m^{i_m}(1-p_1-\ldots-p_m)^{n-i_1-\cdots-i_m},$$

hacsak $0\leqq i_1+i_2+\ldots+i_m\leqq n$, máskülönben 0.

417. Az $F(x, y)$ eloszlásfüggvény felírásánál járjunk el úgy, hogy az y-t valamilyen intervallumban tartva, x-szel végigfutunk az egész számegyenesen. (Az x és y szerepét persze föl is cserélhetjük.) Ilyen például a következő.

Ha $y\leqq 0$, és x tetszőleges, akkor $P(\xi<x,\ \eta<y)=0$. (Nézzük közben a 38. ábrát is!)



38. ábra

Ha $0<y\leqq 1$, akkor

$$F(x,\ y)=P(\xi<x,\ \eta<y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ \frac{1}{12}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ \frac{2}{12}, & \text{ha} \quad 1<x\leqq 2, \\ \frac{4}{12}, & \text{ha} \quad 2<x. \end{cases}$$

A következő lépés hasonló. Nyilván az $y>1$ eset következik.

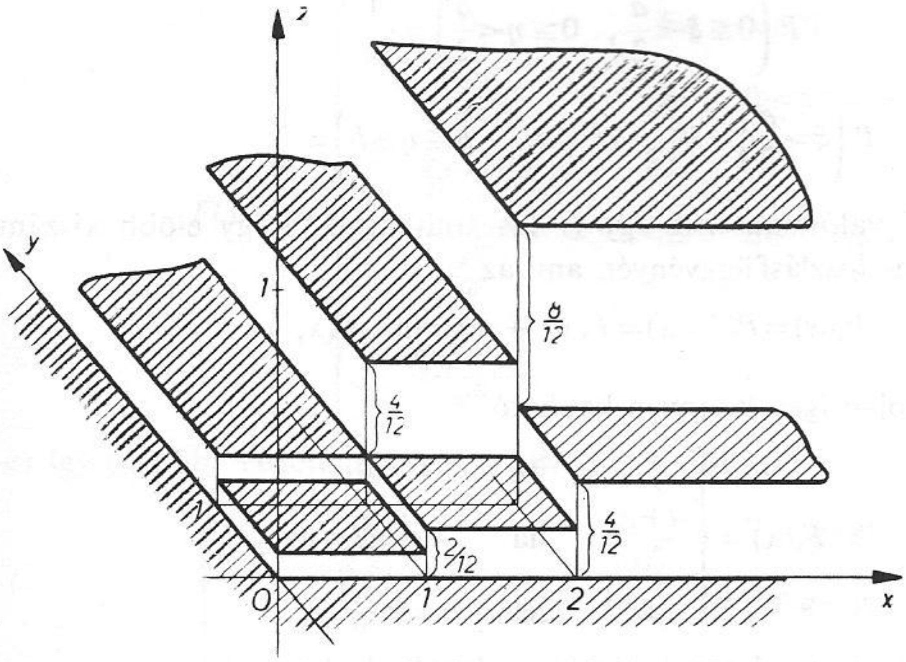
A részleteredményeket foglaljuk össze és csoportosítsuk megfelelően, akkor pl. a következőképpen írhatjuk fel az $F(x,\ y)$ függvényt:

$$F(x,\ y)=\begin{cases} \frac{1}{12}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1,\ 0<y\leqq 1, \\ \frac{2}{12}, & \text{ha} \quad 1<x\leqq 2,\ 0<y\leqq 1, \\ \frac{4}{12}, & \text{ha} \quad 2<x,\ 0<y\leqq 1, \\ \frac{2}{12}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1,\ 1<y, \\ \frac{6}{12}, & \text{ha} \quad 1<x\leqq 2,\ 1<y, \\ 1, & \text{ha} \quad 2<x,\ 1<y, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

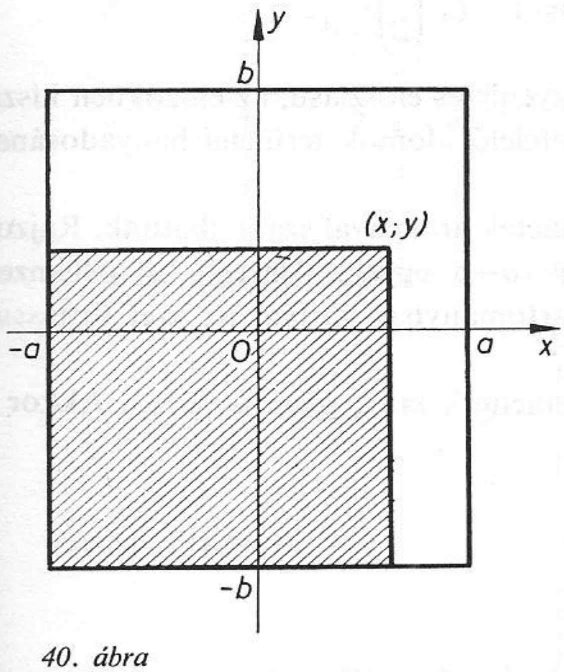
Ennek alapján már az eloszlásfüggvény grafikonját is elkészíthetjük. A 39. ábrán látható kétdimenziós lépcsős függvényt kapjuk.

418. *a)* A most vizsgálandó kétdimenziós valószínűségi változó folytonos. Az eloszlásfüggvényt a 40. ábra alapján írjuk fel:

$$F(x,\ y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq -a, \text{ vagy } y\leqq -b, \\ \frac{(a+x)(b+y)}{4ab}, & \text{ha} \quad -a<x\leqq a,\ -b<y\leqq b, \\ \frac{b+y}{2b}, & \text{ha} \quad a<x,\ -b<y\leqq b, \\ \frac{a+x}{2a}, & \text{ha} \quad -a<x\leqq a,\ b<y, \\ 1, & \text{ha} \quad a<x,\ b<y. \end{cases}$$



39. ábra



40. ábra

b) A keresett valószínűségek:

$$P(\xi<0,\ \eta<0)=F(0,\,0)=\frac{ab}{4ab}=\frac{1}{4}\,.$$

$$P\left(\xi<0,\ \eta\geqq\frac{b}{2}\right)=P\left(-a\leqq\xi<0,\ \frac{b}{2}\leqq\eta<b\right)=$$

$$=F(0,\,b)+F\left(-a,\,\frac{b}{2}\right)-F(-a,\,b)-F\left(0,\,\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{8}\,.$$

$$P\left(0 \leqq \xi < \frac{a}{2},\quad 0 \leqq \eta < \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{16}.$$

$$P\left(\xi > \frac{a}{2}\right) = P\left(\frac{a}{2} < \xi \leqq a,\quad -b \leqq \eta \leqq b\right) = \frac{1}{4}.$$

Ez utóbbi valószínűséget úgy is kiszámíthatjuk, hogy előbb kiszámítjuk a ξ perem-eloszlásfüggvényét, ami az

$$F_1(x) = P(\xi < x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$$

képlet alapján igen könnyen kapható

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq -a, \\ \dfrac{a+x}{2a}, & \text{ha} \quad -a < x \leqq a, \\ 1, & \text{ha} \quad a < x \end{cases}$$

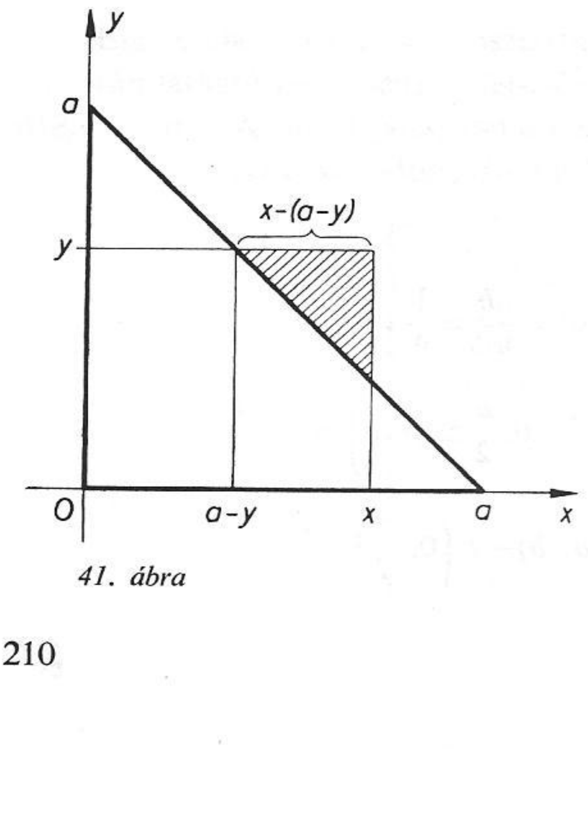
függvény lesz; majd ennek alapján számolunk, így:

$$P\left(\xi > \frac{a}{2}\right) = 1 - P\left(\xi \leqq \frac{a}{2}\right) = 1 - F_1\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Megemlítjük még, hogy mivel a (ξ, η) egyenletes eloszlású, az előzőkben kiszámított valószínűségek helyességét a megfelelő idomok területei hányadosának számításával is ellenőrizhetjük.

419. Mivel egyenletes eloszlásról van szó, területek arányával számolhatunk. Rajzoljuk meg ezért először a $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq a - x$ egyenlőtlenségekkel jellemzett tartományt, majd az y-t a megfelelő tartományban tartva, az x-et futtassuk végig az egész számegyenesen.

Az egész munkából csak egy részletet emelünk ki. Legyen $0 < y \leqq a$. Akkor a 41. ábra alapján:



41. ábra

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0,\\[4pt] \dfrac{2xy}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a-y,\\[8pt] \dfrac{xy-\dfrac{(x-a+y)^2}{2}}{\dfrac{a^2}{2}}, & \text{ha} \quad a-y<x\leqq a,\\[12pt] \dfrac{2ay-y^2}{a^2}, & \text{ha} \quad a<x, \end{cases}$$

és így tovább. Végeredményül a következőt kapjuk:

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0 \quad \text{vagy} \quad y\leqq 0,\\[4pt] \dfrac{2xy}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a-y, \quad 0<y\leqq a,\\[8pt] \dfrac{2a(x+y)-x^2-y^2-a}{a^2}, & \text{ha} \quad a-y<x\leqq a, \quad 0<y\leqq a,\\[8pt] \dfrac{2ay-y^2}{a^2}, & \text{ha} \quad x<a, \quad 0<y\leqq a,\\[8pt] \dfrac{2ax-x^2}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a, \quad a<y,\\[4pt] 1, & \text{ha} \quad a<x, \quad a<y. \end{cases}$$

A perem-eloszlásfüggvények:

$$F_1(x)=\lim_{y\to\infty} F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0,\\[4pt] \dfrac{2ax-x^2}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a,\\[4pt] 1, & \text{ha} \quad a<x, \end{cases}$$

s hasonlóképpen

$$F_2(y)=\lim_{x\to\infty} F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y\leqq 0,\\[4pt] \dfrac{2ay-y^2}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<y\leqq a,\\[4pt] 1, & \text{ha} \quad a<y. \end{cases}$$

420. A ξ perem-eloszlásfüggvénye:

$$F_1(x)=\lim_{y\to\infty} F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0, \end{cases}$$

s az η perem-eloszlásfüggvénye:

$$F_2(y)=\lim_{x\to\infty} F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-y}, & \text{ha} \quad y\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0. \end{cases}$$

A ξ és η mindegyike $\lambda=1$ paraméterértékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

A keresett valószínűség:

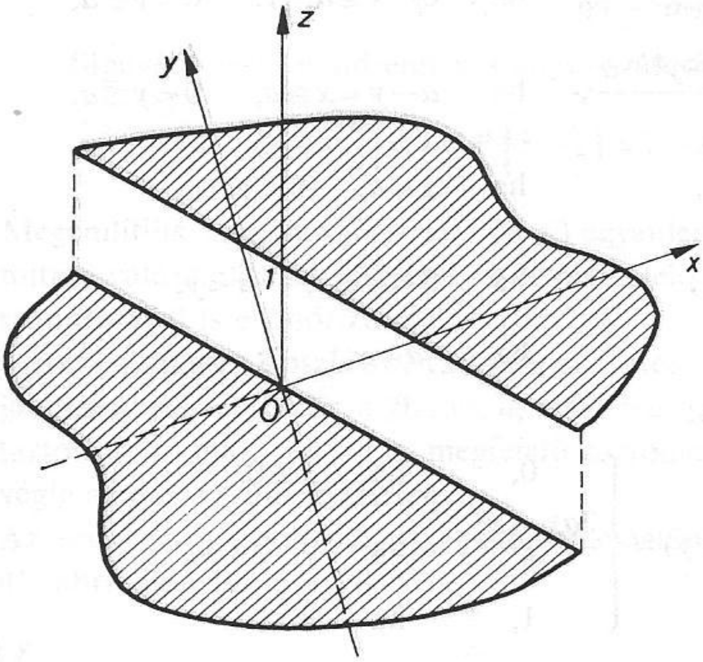
$$P(\xi<1,\ \eta<1)=F(1,1)=1+e^{-2}-2e^{-1}=(1-e^{-1})^2\approx 0{,}397.$$

421. Az $F(x, y)$ függvény képét a 42. ábrán láthatjuk. Könnyen igazolható, hogy $F(x, y)$ mindkét változójában monoton nem csökkenő függvény, továbbá fennállnak az

$$F(-\infty, -\infty)=F(-\infty, y)=F(x, -\infty)=0 \quad \text{és} \quad F(+\infty, +\infty)=1$$

relációk is; az $F(x, y)$ mégsem lehet eloszlásfüggvény, mert nem teljesül minden a_1, a_2, b_1, b_2 számára az

$$F(b_1, b_2)+F(a_1, a_2)-F(a_1, b_2)-F(b_1, a_2)\geqq 0$$



42. ábra

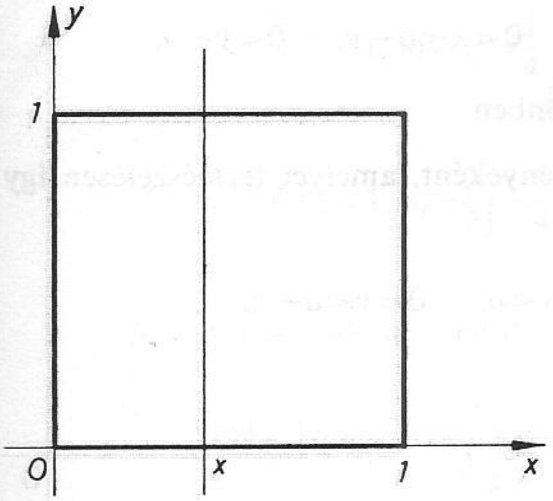
egyenlőtlenség. Ennek igazolására elég egy olyan négyszöget választanunk, amelynek három csúcspontja az XY sík $y=-x$ egyenese fölött, egy pedig ez alatt fekszik, s amelynek oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Ilyen pontok pl. a következők: $P_1=(0, 1)$, $P_2=(2, 1)$, $P_3=(2, -1)$ és $P_4=(0, -1)$. Az ezek által meghatározott négyszögbe a (ξ, η) valószínűségi változó a

$$P(0\leqq\xi<2,\ -1\leqq\eta<1)=$$

$$=F(2,\ 1)+F(0,\ -1)-F(0,\ 1)-F(2,\ -1)=1+0-1-1=-1$$

valószínűséggel esne, ami lehetetlenség.

422. Számítsuk ki a ξ és η perem-sűrűségfüggvényét. Vegyük figyelembe, hogy most az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény csak a $0<x<1$, $0<y<1$ egységnégyzeten 0-tól különböző, így integráláskor célszerű egy kis ábrát segítségül venni (lásd a 43. ábrát).



43. ábra

Kezdjük a ξ perem-sűrűségfüggvényének kiszámításával. A 43. ábra alapján világos, hogy ha $x \leqq 0$, akkor

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dx = 0.$$

Ha viszont $0 < x < 1$, akkor

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dy + \int_{0}^{1} 1\, dy + \int_{1}^{+\infty} 0\, dy = 1,$$

és $1 \leqq x$-re hasonlóképpen

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0\, dy = 0.$$

Összefoglalva az eredményt:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát a ξ valóban egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

Ugyanígy számítjuk ki az η perem-sűrűségfüggvényét is. (Ekkor az x és y szerepet cserélnek.) Eredményül az

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

függvény adódik, s mint látjuk, ez is egyenletes eloszlást jellemez.

423. A 419. feladat eredményeinek felhasználásával a keresett sűrűségfüggvényeket differenciálással határozhatjuk meg. Így az

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \frac{2}{a^2}, & \text{ha} \quad 0 < x < a - y, \quad 0 < y < a, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt kapjuk a (ξ, η) sűrűségfüggvényeként, amelyet természetesen így is felírhatunk:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}, & \text{ha} \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a - x, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A perem-sűrűségfüggvények:

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2}, & \text{ha} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \frac{dF_2(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{2(a-y)}{a^2}, & \text{ha} \quad 0 < y < a, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A felvetett kérdésekre az egyenletes eloszlás definíciója alapján is válaszolhatunk. Mivel az adott tartomány területe $\frac{a^2}{2}$, ezért a keresett sűrűségfüggvény:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{a^2}, & \text{ha} \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a - x, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

innen pedig a perem-sűrűségfüggvényeket integrálással kapjuk meg. Figyelembe véve az előző feladatban elmondottakat (készítsünk rajzot!), a következőket kapjuk:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \frac{2}{a^2} \int_0^{a-x} dy = \frac{2(a-x)}{a^2}, \quad \text{ha} \quad 0 < x < a,$$

máskülönben $f_1(x) = 0$; s ehhez hasonlóan:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx = \frac{2}{a^2} \int_0^{a-y} dx = \frac{2(a-y)}{a^2}, \quad \text{ha} \quad 0 < y < a,$$

máskülönben $f_2(y) = 0$.

Az eredmények természetesen megegyeznek az előbb kiszámítottakkal.

424. A kérdéses valószínűségeket integrálással számítjuk ki.

a) Az első sűrűségfüggvényből:

$$P(\xi<1,\ \eta<1)=\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 dx\,dy=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_0^1 dy=\frac{1}{4}.$$

$$P\left(\xi<1,\ \eta\geqq\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\int_0^1\int_{\frac{3}{2}}^2 dy\,dx=\frac{1}{4}\int_0^1 dx\int_{\frac{3}{2}}^2 dy=\frac{1}{8}.$$

b) A második sűrűségfüggvény alapján:

$$P(\xi<1,\ \eta<1)=\int_0^1\int_0^1 e^{-x-y}\,dx\,dy=\int_0^1 e^{-x}\,dx\cdot\int_0^1 e^{-y}\,dy=$$

$$=(1-e^{-1})^2\approx 0{,}397.$$

$$P\left(\xi<1,\ \eta\geqq\frac{3}{2}\right)=\int_0^1\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} e^{-x-y}\,dy\,dx=\int_0^1 e^{-x}\,dx\cdot\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} e^{-y}\,dy=$$

$$=(1-e^{-1})e^{-1{,}5}\approx 0{,}14.$$

425. Igen, ugyanis $f(x,\ y)>0$, és

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}\,dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\,dx\,dy=1.$$

426. Az A számot az

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy=1$$

feltétel alapján határozzuk meg. Ez az integrál a jelen esetben a következő:

$$\int_0^1\int_0^2 (x^2+Ay^2)\,dy\,dx=8A=1,$$

tehát $A=\frac{1}{8}$.

A ξ perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\,y)\,dy=\begin{cases}\displaystyle\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{8}y^2\right)dy=2x^2+\frac{1}{3}, & \text{ha} \quad 0<x<1,\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

és az η perem-sűrűségfüggvénye hasonlóképpen számítva:

$$f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{8}+\dfrac{1}{3}, & \text{ha} \quad 0<y<2,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

427. *a)* A kérdéses perem-sűrűségfüggvények:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\,y)\,dy=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2(1-x)} dy=2-2x, & \text{ha} \quad 0<x<1,\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

továbbá

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\,y)\,dx=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1-\frac{y}{2}} dx=1-\frac{y}{2}, & \text{ha} \quad 0<y<2,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

b) A keresett valószínűséget, mint az x változó függvényét, a

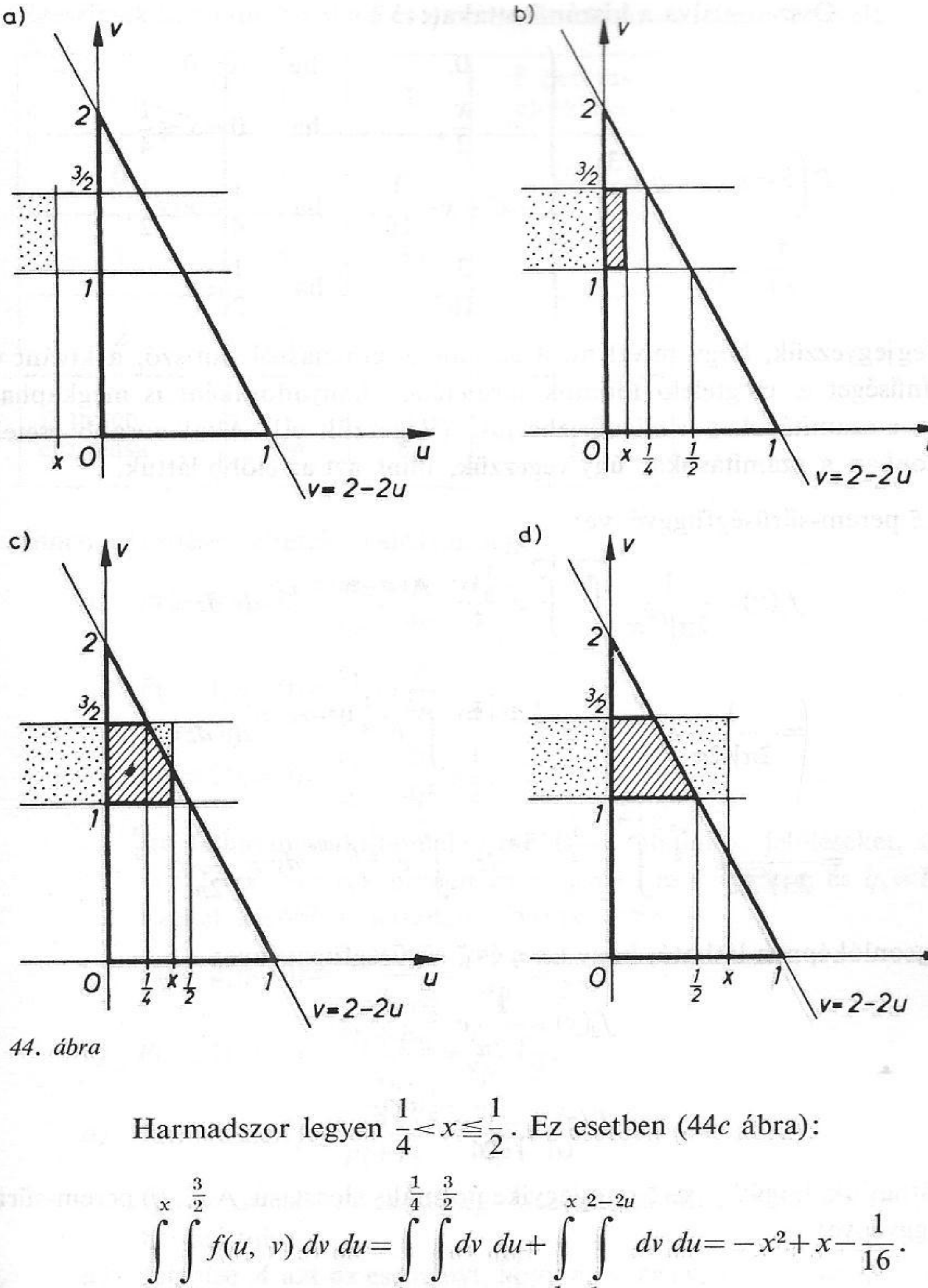
$$P\left(\xi<x,\ 1<\eta<\frac{3}{2}\right)=\int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(u,\,v)\,dv\,du$$

integrál kiszámításával határozzuk meg. Ehhez a 44. ábrát vesszük segítségül, hiszen $f(x,\,y)$ újra csak egy véges tartományon különbözik 0-tól. Legyen először $x\leqq 0$. Ez esetben (44*a* ábra):

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(u,\,v)\,dv\,du=\int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{\frac{3}{2}} 0\,dv\,du=0.$$

Másodszor legyen $0<x\leqq\frac{1}{4}$. Ekkor (44*b* ábra):

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(u,\,v)\,dv\,du=\int_{0}^{x}\int_{1}^{\frac{3}{2}} dv\,du=\frac{x}{2}.$$



44. ábra

Harmadszor legyen $\frac{1}{4} < x \leqq \frac{1}{2}$. Ez esetben (44*c* ábra):

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{1}^{\frac{3}{2}} f(u, v)\, dv\, du = \int_{0}^{\frac{1}{4}} \int_{1}^{\frac{3}{2}} dv\, du + \int_{\frac{1}{4}}^{x} \int_{1}^{2-2u} dv\, du = -x^2 + x - \frac{1}{16}.$$

Végül legyen $\frac{1}{2} < x$, akkor (44*d* ábra):

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{1}^{\frac{3}{2}} f(u, v)\, dv\, du = \int_{0}^{\frac{1}{4}} \int_{1}^{\frac{3}{2}} dv\, du + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_{1}^{2-2u} dv\, du + \int_{\frac{1}{2}}^{x} \int_{1}^{\frac{3}{2}} 0\, dv\, du = \frac{3}{16}.$$

Összefoglalva a kiszámítottakat:

$$P\left(\xi<x,\ 1<\eta<\frac{3}{2}\right)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq\dfrac{1}{4}, \\ -x^2+x-\dfrac{1}{16}, & \text{ha} \quad \dfrac{1}{4}<x\leqq\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{3}{16}, & \text{ha} \quad \dfrac{1}{2}<x. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy mivel most egyenletes eloszlásról van szó, a kívánt valószínűséget a megfelelő idomok területének hányadosaként is megkaphatjuk. Így e számításokat is ellenőrizhetjük. (Végezzük el!) Általánosabb esetekben azonban a számításokat úgy végezzük, mint azt az előbb láttuk.

428. A ξ perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2y+2z+2)}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2+2z)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2y+2)}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z+1)^2}dz\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Hasonlóképpen látható, hogy az η és ζ sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2},$$

$$f_3(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(z+1)^2}.$$

Láthatjuk, hogy ξ, η és ζ mindegyike normális eloszlású. A (ξ, η) perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_{12}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2y+1)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2+2z+1)}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2-2y+1)}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+(y-1)^2}{2}}.$$

429. Egészítsük ki a táblázatot a ξ és η peremeloszlásának feltüntetésével:

ξ \ η	0	1	ξ perem-eloszlása
0	p	p	$2p$
1	p	$3p$	$4p$
2	$2p$	$4p$	$6p$
η perem-eloszlása	$4p$	$8p$	1

$$p=\frac{1}{12}.$$

Innen a kérdéses feltételes valószínűségek:

a) $P(\xi=0|\eta=0)=\dfrac{p_{00}}{q_0}=\dfrac{p}{4p}=\dfrac{1}{4}.$

$P(\xi=1|\eta=0)=\dfrac{p_{10}}{q_0}=\dfrac{p}{4p}=\dfrac{1}{4}.$

$P(\xi=2|\eta=0)=\dfrac{p_{20}}{q_0}=\dfrac{2p}{4p}=\dfrac{1}{2}.$

Itt felhasználtuk (emlékeztetőül) az általános jelöléseket, így $p_{ik}=$ $=P(\xi=x_i,\ \eta=y_k)$ minden szóba jövő i és k értékre, és $q_k=P(\eta=y_k)$. Ezeket később is használni fogjuk.

b) $P(\xi<2|\eta=0)=\dfrac{p_{00}+p_{10}}{q_0}=\dfrac{p+p}{4p}=\dfrac{1}{2}.$

c) $P(\xi\geqq 1|\eta=1)=\dfrac{p_{11}+p_{21}}{q_1}=\dfrac{7p}{8p}=\dfrac{7}{8}.$

d) $P(\eta=1|\xi\geqq 1)=\dfrac{p_{11}+p_{21}}{p_1+p_2}=\dfrac{7p}{10p}=\dfrac{7}{10}.$

Itt az utolsó valószínűség kiszámításánál a $p_i=P(\xi=x_i)$ jelölést is használtuk.

430. *a)* Jelentse A azt az eseményt, hogy az η az $(y,\ y+h)$ intervallumba esik, azaz: $y\leqq\eta<y+h$ teljesül. Ekkor

$$F(x|A)=P(\xi<x|A)=\frac{P(\xi<x,\ y\leqq\eta<y+h)}{P(y\leqq\eta<y+h)}.$$

Legyen először $0\leqq y<a$ és $0<y+h\leqq a$. Ez esetben (a területek arányát számítva)

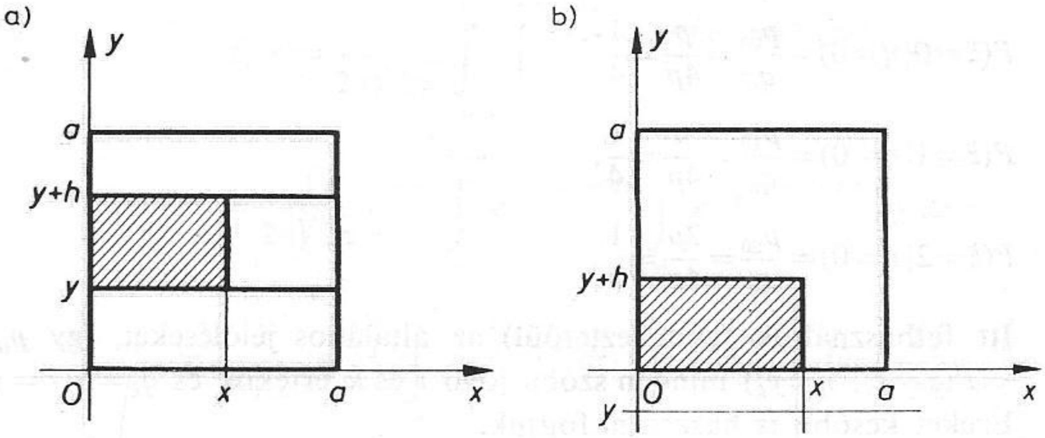
$$P(y\leqq\eta<y+h)=\frac{ah}{a^2}=\frac{h}{a},$$

így

$$F(x|A)=\frac{a}{h}P(\xi<x,\ y\leqq\eta<y+h).$$

A jobb oldalon levő második tényezőt a 427. feladatban megismert gondolatok segítségével írjuk fel; itt azonban, mivel egyenletes eloszlásról van szó, területek hányadosával dolgozunk. Így a 45*a* ábra alapján a következőt kapjuk:

$$P(\xi<x,\ y\leqq\eta<y+h)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\leqq 0,\\ \dfrac{xh}{a^2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a,\\ \dfrac{ah}{a^2}, & \text{ha} \quad a<x.\end{cases}$$



45. ábra

A kérdéses feltételes eloszlásfüggvényre a fentiekben tett feltételek teljesülése esetén a következő adódik: ha $0\leqq y<y+h\leqq a$, akkor:

$$F(x|A)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\leqq 0,\\ \dfrac{x}{a}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq a,\\ 1, & \text{ha} \quad a<x.\end{cases}$$

Ha $y<0$ és $y+h<0$, vagy pedig, ha $y\geqq a$, akkor $F(x|A)$ nincs értelmezve, mert $y\leqq\eta<y+h$ lehetetlen esemény.
Meg kell még vizsgálnunk azt a lehetőséget, hogy $y<0$, de $0<y+h\leqq a$, továbbá azt, amikor $0\leqq y<a$, $y+h>a$. (Azt az esetet, amikor $y<0$ és $y+h>a$, lényegében az eddigiek tartalmazzák.) Most csak az első esetet tárgyaljuk az említett esetek közül, a másik hasonlóan megoldható.

Vegyük most figyelembe a 45*b* ábrát. Ennek alapján

$$P(y \leqq \eta < y+h) = \frac{a(h+y)}{a^2} = \frac{h+y}{a},$$

továbbá

$$P(\xi < x,\ y \leqq \eta < y+h) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ \dfrac{x(h+y)}{a^2}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq a, \\ \dfrac{a(h+y)}{a^2}, & \text{ha} \quad a < x, \end{cases}$$

így $y<0$, $0<y+h \leqq a$ esetére is

$$F(x|A) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ \dfrac{x}{a}, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq a, \\ 1, & \text{ha} \quad a < x. \end{cases}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk az itt nem tárgyalt esetekre is.

A kérdésben szereplő $F(x|y)$ meghatározása is igen egyszerű, mert

$$F(x|y) = \lim_{h \to 0} F(x|y \leqq \eta < y+h) = F(x|A).$$

b) Végül

$$f(x|y) = \frac{\partial F(x|y)}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & \text{ha} \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < a, \\ 0 \text{ vagy értelmetlen különben.} \end{cases}$$

[Ellenőrizzük a számításokat az $F(x|A)$-ra, $F(x|y)$-ra és $f(x|y)$-ra vonatkozó általános képletek segítségével!]

431. *a)* Most

$$F\left(x \middle| 1 < \eta < \frac{3}{2}\right) = \frac{P\left(\xi < x,\ 1 < \eta < \dfrac{3}{2}\right)}{P\left(1 < \eta < \dfrac{3}{2}\right)},$$

így, felhasználva a 427. feladat eredményét, továbbá azt, hogy

$$P\left(1 < \eta < \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{16},$$

a következőt kapjuk a keresett feltételes eloszlásfüggvényre:

$$F\left(x \middle| 1 < \eta < \frac{3}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ \dfrac{8}{3}x, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{16}{3}\left(-x^2 + x - \dfrac{1}{16}\right), & \text{ha} \quad \dfrac{1}{4} < x \leqq \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \dfrac{1}{2} < x. \end{cases}$$

b) Most nyilván

$$P(1<\eta<3)=P(1<\eta<2)=\frac{1}{4},$$

és

$$P(\xi<x,\ 1<\eta<3)=P(\xi<x,\ 1<\eta<2)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ -x^2+x, & \text{ha} \quad 0<x\leqq\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}<x, \end{cases}$$

így a keresett feltételes eloszlásfüggvény:

$$F(x|1<\eta<3)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ 4(-x^2+x), & \text{ha} \quad 0<x\leqq\frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha} \quad \frac{1}{2}<x. \end{cases}$$

432. A feladatok megoldását itt már nem részletezzük. Az előzőkben tanultak alkalmazásával a következők adódnak.

a) $$f(x,\ y)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha} \quad x^2+y^2\leqq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

b) $$f_1(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,dy=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & \text{ha} \quad |x|\leqq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\,dx=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & \text{ha} \quad |y|\leqq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

c) $$f(x|y)=\frac{f(x,\ y)}{f_2(y)}=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & \text{ha} \quad x^2+y^2\leqq 1, \\ 0 & \text{vagy értelmetlen különben.} \end{cases}$$

$$f(y|x)=\frac{f(x,\ y)}{f_1(x)}=\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & \text{ha} \quad x^2+y^2\leqq 1, \\ 0 & \text{vagy értelmetlen különben.} \end{cases}$$

d) $$f(x|0)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad |x|\leqq 1,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

$$F(x|0)=\int_{-\infty}^{x} f(t|0)\,dt=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad x\leqq -1,\\ \frac{x+1}{2}, & \text{ha} \quad -1<x\leqq 1,\\ 1, & \text{ha} \quad 1<x.\end{cases}$$

433. *a)* A (ξ, η) sűrűségfüggvényéből előbb a perem-sűrűségfüggvényeket számítjuk ki:

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dy=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{3}}e^{-\frac{2}{3}x^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2}{3}\left[\left(y-\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4}\right]}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Vegyük észre, hogy $f(x, y)$ az x és y változókban szimmetrikus, akkor világos, hogy

$$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Most már a keresett feltételes sűrűségfüggvények közül az első:

$$f(x|y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}\,e^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}.$$

[Ha ezt a feltételes sűrűségfüggvényt az

$$f(x|y)=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

alakban írjuk, könnyen észrevehetjük, hogy ez rögzített y esetén egy $\frac{y}{2}$ várható értékű és $\frac{\sqrt{3}}{2}$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye, vagyis a ξ-nek az $\eta=y$ feltételre vonatkoztatott valószínűségeloszlása $N\left(\frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ eloszlás. Hasonló megjegyzéseket a későbbiekben is tehetnénk. Vegyük észre, hogy mikor!]

Az $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}\,e^{-\frac{2}{3}\left(y-\frac{x}{3}\right)^2}.$$

b) Ez esetben a perem-sűrűségfüggvények:

$$f_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4}} \quad \text{és} \quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}},$$

és a feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2}},$$

és

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}.$$

434. *a)* Jelöljük η-val a keletkezett kár nagyságát, a ξ pedig legyen $m=0$, $\sigma>0$ paraméterekkel rendelkező normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\eta\geqq 0$, és ennek eloszlása a pozitív értékekre csonkított normális eloszlás. Jelöljük $G(y)$-nal η az eloszlásfüggvényét, $g(y)$-nal ennek sűrűségfüggvényét, akkor a következőket írhatjuk:

$$G(y)=F(y|\xi\geqq 0)=\begin{cases}\dfrac{P(0\leqq\xi<y)}{P(\xi\geqq 0)}, & \text{ha} \quad y\geqq 0,\\[2mm] 0, & \text{ha} \quad y>0.\end{cases}$$

Az $y\geqq 0$ értékekre az előbbi hányados így alakítható át:

$$\frac{P(0\leqq\xi<y)}{P(\xi\geqq 0)}=\frac{F(y)-F(0)}{1-F(0)}=2F(y)-1$$

[itt az $F(x)$ természetesen a ξ eloszlásfüggvényét jelenti, s a következőkben $f(x)$ a ξ sűrűségfüggvényét jelöli], így az η eloszlásfüggvénye:

$$G(y)=\begin{cases}2F(y)-1, & \text{ha} \quad y\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvénye most már

$$g(y)=G'(y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)}{1-F(0)}=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad y>0,\\[2mm] 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

b) A kárösszeg várható értéke:

$$M(\eta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma^{\bar{2}}.$$

c) A keresett valószínűségre $a>0$ esetén a következő adódik:

$$P(\eta>a)=1-P(\eta\leqq a)=1-G(a)=2(1-F(a))=2\left(1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right)\right).$$

435. A 420. feladatban kiszámítottuk a (ξ, η) eloszlásfüggvényéből a peremeloszlásokat is. Mivel ezekkel az

$$F(x, y)=F_1(x)F_2(y)$$

fennáll minden x és y-ra, ezért ξ és η függetlenek.

A keresett valószínűség ezek után:

$$P(\xi<1,\ \eta<1)=P(\xi<1)P(\eta<1)=(1-e^{-1})^2=0{,}397.$$

(Ugyanezt az eredményt kaptuk a 420. és 424. feladat megoldása során is.)

436. A 428. feladatban kiszámítottuk a perem-sűrűségfüggvényeket. Könnyen belátható, hogy

$$f(x, y, z)=f_1(x)f_2(y)f_3(z),$$

tehát ξ, η és ζ valóban függetlenek.

Az η és ζ együttes sűrűségfüggvénye ezek után:

$$f(y, z)=f_2(y)f_3(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(y^2+z^2-2y+2z+2)}$$

Végül az $f(y|z)$ feltételes sűrűségfüggvény:

$$f(y|z)=\frac{f(y, z)}{f_3(z)}=f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2}$$

437. A ξ, ill. η perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad |x|\leqq 1,\\ 0, & \text{különben,}\end{cases}$$

illetve:

$$f_2(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad |y|\leqq 1,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Látjuk, hogy a ξ és η mindegyike egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumon. Mivel pedig

$$f(x, y)\neq f_1(x)f_2(y),$$

ezért ξ és η nem függetlenek.

A ξ-nek η-ra vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f(x|y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2}[1+xy(x^2-y^2)], & \text{ha} \quad |x|\leqq 1, \quad |y|\leqq 1,\\ 0 \text{ vagy értelmetlen} & \text{különben.}\end{cases}$$

Az $f(y|x)$-re ugyanez adódik.
Könnyen belátható, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y|x)\,dy = 1,$$

de nemcsak ebben az esetben, hanem ez általánosan is igaz. Ugyanis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{f_2(y)}\,dx = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \frac{f_2(y)}{f_2(y)} = 1,$$

s a másik integrálra hasonlóképpen. Ez a tény számítási munkánk ellenőrzéséül szolgálhat.

438. *a)* A 427. feladatban számítottuk ki a ξ és η sűrűségfüggvényét. Mivel pedig

$$f(x, y) \neq f_1(x) f_2(y),$$

ezért ξ és η nem függetlenek.

b) A feltételes sűrűségfüggvények:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<2(1-x), \\ 0 \text{ vagy értelmetlen} & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<2(1-x), \\ 0 \text{ vagy értelmetlen} & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre itt is, hogy rögzített y esetén az $f(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény azt fejezi ki, hogy ξ-nek $\eta = y$ feltétel melletti eloszlása a $\left(0, \dfrac{2-y}{2}\right)$ intervallumon egyenletes eloszlás! Hasonló tényt fejez ki az $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény is.

c) Végül a keresett valószínűség:

$$P\left(0 < \xi < \frac{1}{2} \,\middle|\, \eta = \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} f\left(x \,\middle|\, \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{3}\,dx = \frac{2}{3}.$$

439. Az igazolandó összefüggés:

$$P(\xi \geqq x+t+v \,|\, \xi \geqq x) = P(\xi \geqq x+t \,|\, \xi \geqq x) P(\xi \geqq x+t+v \,|\, \xi \geqq x+t).$$

Vegyük figyelembe, hogy a $\xi \geqq x+t+v$ esemény bekövetkezése maga után vonja a $\xi \geqq x+t$ és $\xi \geqq x$ események bekövetkezését, és hasonlóképpen $\xi \geqq x+t$ bekövetkezése a $\xi \geqq x$ bekövetkezését, így a fenti feltételes valószínűségek közötti összefüggés így írható:

$$\frac{P(\xi \geqq x+t+v)}{P(\xi \geqq x)}=\frac{P(\xi \geqq x+t)}{P(\xi \geqq x)} \cdot \frac{P(\xi \geqq x+t+v)}{P(\xi \geqq x+t)},$$

s ez nyilvánvalóan igaz.

440. Az előző feladatban megismert

$$p(x,\ t+v)=p(x,\ t) \cdot p(x+t,\ v)$$

összefüggésben legyen először $t=n-1$ és $v=1$, majd $t=n-2$ és $v=1$, és így tovább. Írjuk fel sorban az így adódó egyenlőségeket:

$$\begin{aligned} p(x,\ n)&=p(x,\ n-1) \cdot p(x+n-1,\ 1), \\ p(x,\ n-1)&=p(x,\ n-2) \cdot p(x+n-2,\ 1), \\ &\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ p(x,\ 3)&=p(x,\ 2) \cdot p(x+2,\ 1), \\ p(x,\ 2)&=p(x,\ 1) \cdot p(x+1,\ 1). \end{aligned}$$

Ha ezeket az egyenlőségeket összeszorozzuk, majd elvégezzük a lehetséges egyszerűsítéseket, az igazolandó képletet nyerjük.

Szavakkal megfogalmazva: annak valószínűségét, hogy egy x évet megért ember az $x+n$ évet is megéri, a következő számítás adja.

Annak valószínűségét, hogy az x kort megért ember az $x+1$ kort is megéri, szorozzuk annak valószínűségével, hogy az $x+1$ kort megért ember az $x+2$ kort is megéri, és így tovább, végül megszorozzuk még annak valószínűségével, hogy az $x+n-1$ kort megért személy az $x+n$ kort is megéri.

441. A képlet egyszerűen következik a feltételes valószínűség definíciójából. Ha ugyanis a figyelembe vett $l(0)$ számú személy közül bármelyik egyenlő valószínűséggel jöhet számításba, akkor

$$P(\xi \geqq x+t \mid \xi \geqq x)=\frac{P(\xi \geqq x+t)}{P(\xi \geqq x)}=\frac{\dfrac{l(x+t)}{l(0)}}{\dfrac{l(x)}{l(0)}}=\frac{l(x+t)}{l(x)}.$$

Itt felhasználtuk, hogy a $\xi \geqq x+t$ esemény bekövetkezése egyúttal a $\xi \geqq x$ bekövetkezését is jelenti. A $p(x,\ t)$-re itt kapott eredményt, mivel az $l(0)$ igen nagy számot jelent, nemcsak az $l(0)$ elemű mintában szereplő személyekre tekintjük érvényesnek, hanem általánosan, minden emberre.

442. Az előző feladat feltételeinek felhasználásával:

$$P(\xi < x+1 \mid \xi \geqq x)=\frac{P(x \leqq \xi < x+1)}{P(\xi \geqq x)}=\frac{l(x)-l(x+1)}{l(x)}=\frac{d(x)}{l(x)}.$$

443. A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=P(\xi < x)=\frac{l(0)-l(x)}{l(0)}=1-\frac{l(x)}{l(0)}, \quad \text{ha} \quad x \geqq 0,$$

és $F(x)=0$, ha $x<0$.

A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = -\frac{l'(x)}{l(0)} \quad (x \geqq 0).$$

444. Az η eloszlásfüggvényét kell felírni, feltéve, hogy a vizsgált személy az x életévet megérte.

$$G(y|\xi \geqq x) = P(\eta < y|\xi \geqq x) = \frac{P(\eta < y,\ \xi \geqq x)}{P(\xi \geqq x)}.$$

Használjuk fel, hogy az $(\eta < y,\ \xi \geqq x)$ esemény az $(x \leqq \xi < x+y)$ eseménnyel ekvivalens, hiszen mindkét esemény azt jelenti, hogy a vizsgált egyén életkora az $(x,\ x+y)$ intervallumba esik; ekkor a fenti egyenlőséget így folytathatjuk:

$$G(y|\xi \geqq x) = \frac{P(x \leqq \xi < x+y)}{P(\xi \geqq x)} = \frac{l(x) - l(x+y)}{l(x)} = 1 - \frac{l(x+y)}{l(x)}, \quad \text{ha} \quad y \geqq 0,$$

és

$$G(y|\xi \geqq x) = 0, \quad \text{ha} \quad y < 0.$$

Ha a $G(y|\xi \geqq x)$ függvény y szerint differenciálható, akkor a keresett sűrűségfüggvény:

$$g(y|\xi \geqq x) = \frac{\partial G(y|\xi \geqq x)}{\partial y} = \begin{cases} -\dfrac{1}{l(x)} \dfrac{\partial l(x+y)}{\partial y}, & \text{ha} \quad y > 0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

445. *a)* A ζ_1 lehetséges értéke: 0, 1, 2, 3. A ζ_1 eloszlása:

$$P(\zeta_1 = 0) = P(\xi = 0,\ \eta = 0) = p = \frac{1}{12},$$

$$P(\zeta_1 = 1) = P(\xi = 1,\ \eta = 0) + P(\xi = 0,\ \eta = 1) = 2p = \frac{2}{12},$$

$$P(\zeta_1 = 2) = P(\xi = 1,\ \eta = 1) + P(\xi = 2,\ \eta = 0) = 5p = \frac{5}{12},$$

$$P(\zeta_1 = 3) = P(\xi = 2,\ \eta = 1) = 4p = \frac{4}{12}.$$

b) A $\zeta_2 = \xi - \eta$ lehetséges értékei: -1, 0, 1, 2. A valószínűségeloszlás felírásához a $p_{ik} = P(\xi = i,\ \eta = k)$ jelöléseket használjuk:

$$P(\zeta_2 = -1) = p_{01} = \frac{1}{12}, \quad P(\zeta_2 = 0) = p_{00} + p_{11} = \frac{4}{12},$$

$$P(\zeta_2 = 1) = p_{10} + p_{21} = \frac{5}{12}, \quad P(\zeta_2 = 2) = p_{20} = \frac{2}{12}.$$

c) A ζ_3 valószínűségeloszlása:

$$P(\zeta_3 = 0) = \frac{4}{12}, \quad P(\zeta_3 = 1) = \frac{6}{12}, \quad P(\zeta_3 = 2) = \frac{2}{12}.$$

d) Végül a ζ_4 valószínűségeloszlása:

$$P(\zeta_4=0)=p_{00}+p_{01}+p_{10}+p_{20}=\frac{5}{12},$$

$$P(\zeta_4=1)=\frac{3}{12}, \quad P(\zeta_4=2)=\frac{4}{12}.$$

446. Először a működésben eltöltött egymás utáni napok számának valószínűségeloszlását határozzuk meg. A ξ lehetséges értékei nyilván a 0, 1, 2, ... értékek, s annak valószínűsége, hogy a gép i napon keresztül működött, és az $i+1$-edik napon megállt, a feltételezett függetlenség felhasználásával:

$$P(\xi=i)=p^i(1-p), \quad (i=0, 1, 2, \dots).$$

A feltételezés szerint az η eloszlása ugyanez, tehát

$$P(\eta=j)=p^j(1-p) \quad (j=0, 1, 2, \dots),$$

és a ξ és η független.

A két gép együtt $\zeta=\xi+\eta$ időt (napot) töltött el munkában. Ennek eloszlása

$$P(\zeta=k)=\sum_{j=0}^{k} P(\xi=j)P(\eta=k-j)=\sum_{j=0}^{k} p^j(1-p)p^{k-j}(1-p)=(k+1)p^k(1-p)^2,$$

ahol $k=0, 1, 2, \dots$.

447. Nyilvánvaló, hogy az η lehetséges értékeit a nemnegatív egész számok alkotják. Azt is tudjuk, hogy ha az η-t definiáló összeg tagjainak száma éppen n, akkor az η binomiális eloszlású, vagyis

$$P(\eta=k\,|\,\nu=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n).$$

A ν valószínűségeloszlása a feltevés szerint

$$P(\nu=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \quad (n=0, 1, 2, \dots; \lambda>0).$$

Ha most A-val az $\eta=k$ eseményt, és B_n-nel a $\nu=n$ eseményeket jelöljük ($n=0, 1, 2, \dots$), akkor a teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(\eta=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(\eta=k\,|\,\nu=n)P(\nu=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

Vegyük észre, hogy ebben az összegben a k-nál kisebb n értékekre $\binom{n}{k}=0$, így az összegezést $n=k$-tól kezdhetjük. Egyszerű átalakításokkal adódnak a következők:

$$P(\eta=k)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Azt kaptuk tehát, hogy az η valószínűségeloszlása λp paraméterű Poisson-eloszlás.

448. A ζ_1 és ζ_2 valószínűségi változókat a következőképpen írhatjuk fel a ξ és η segítségével:

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1&=\xi+\eta,\\ \zeta_2&=\xi-\eta.\end{aligned}\right\}$$

A szóban forgó transzformáció és inverze:

$$\left.\begin{aligned}z_1&=x+y,\\ z_2&=x-y;\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}x&=\frac{z_1+z_2}{2},\\ y&=\frac{z_1-z_2}{2}.\end{aligned}\right\}$$

A Jacobi-féle függvénydetermináns:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}, \quad \text{tehát} \quad |J|=\frac{1}{2},$$

így a keresett sűrűségfüggvény:

$$g(z_1,z_2)=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{\frac{(z_1+z_2)^2}{4}+\frac{(z_1-z_2)^2}{4}}{2}}=\frac{1}{4\pi}e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{4}}$$

449. *a)* A transzformáció, és inverze:

$$\left.\begin{aligned}z&=y-x,\\ t&=y;\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}x&=t-z,\\ y&=t.\end{aligned}\right\}$$

A J determináns abszolút értéke: $|J|=1$, így a ζ és τ együttes sűrűségfüggvénye:

$$g(z,t)=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}e^{-\frac{z^2+2t^2}{4}}$$

b) Annak megállapításához, hogy a ζ és τ függetlenek-e, számítsuk ki a perem-sűrűségfüggvényeket. Könnyű számítással kapjuk, hogy

$$g_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}} \qquad (-\infty<z<+\infty),$$

és

$$g_2(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (-\infty<t<+\infty).$$

S mivel a jelen esetben

$$g(z,t)=g_1(z)g_2(t),$$

a ζ és τ valószínűségi változók függetlenek.

450. Mivel a feltétel szerint a ξ és η függetlenek, ezért együttes sűrűségfüggvényük:

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Mivel az új valószínűségi változókat definiáló transzformáció és inverze:

$$\left.\begin{aligned} z&=ax+by+c,\\ t&=\quad y; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x&=\frac{z-bt-c}{a},\\ y&=\quad t; \end{aligned}\right\}$$

és a J függvénydetermináns:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{a}, \quad \text{és így} \quad |J|=\frac{1}{|a|},$$

a keresett $g(z, t)$ sűrűségfüggvény:

$$g(z, t)=\frac{1}{2\pi|a|}e^{-\frac{(z-bt-c)^2+a^2t^2}{2a^2}}.$$

A ζ perem-sűrűségfüggvényének meghatározásához a $g(z, t)$ függvényt kell integrálnunk t szerint $-\infty$-től $+\infty$-ig. A következőképpen számolunk:

$$g_1(z)=\frac{1}{2\pi|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-bt-c)^2+a^2t^2}{2a^2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi|a|}e^{-\frac{(z-c)^2}{2(a^2+b^2)}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2+b^2}{2a^2}\left[t-\frac{b(z-c)}{a^2+b^2}\right]^2}dt.$$

Végezzük el az integrálban a

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|}\left[t-\frac{b(z-c)}{a^2+b^2}\right]=u, \qquad dt=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}du$$

helyettesítést, akkor:

$$g_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}}e^{-\frac{(z-c)^2}{2(a^2+b^2)}},$$

vagyis e szerint a ζ is normális eloszlású, amelynek várható értéke c, és szórása $\sqrt{a^2+b^2}$.

451. *a)* Mivel most a (ξ, η) a $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 2$ négyszögön egyenletes eloszlású, így sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad 0\leqq y\leqq 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az adott transzformáció és inverze a következő:

$$\left.\begin{aligned} z&=x+y,\\ t&=x-y; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x&=\frac{z+t}{2},\\ y&=\frac{z-t}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Nézzük meg, a (ZT) sík milyen M tartományába viszi át e transzformáció az (XY) sík $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$ négyszögtartományát. Az inverz transzformáció alapján az x-re és y-ra fennálló egyenlőtlenségekből z-re és t-re a következők adódnak:

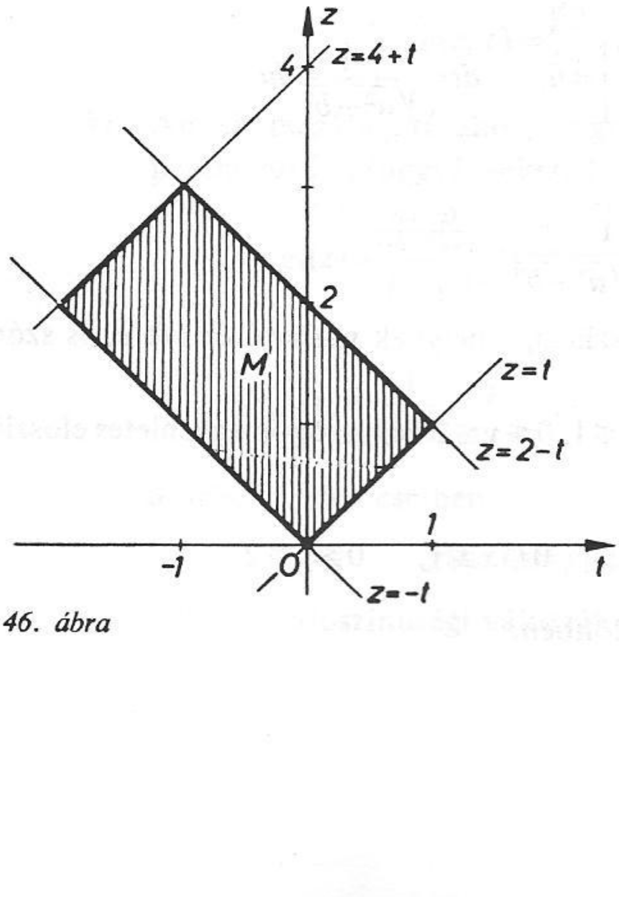
$$0 \leqq z+t \leqq 2,$$
$$0 \leqq z-t \leqq 4.$$

Oldjuk meg ezt az egyenlőtlenségrendszert. A z változót minden egyenlőtlenségből kifejezve, a következőt kapjuk:

$$z \geqq -t,$$
$$z \geqq t,$$
$$z \leqq 2-t,$$
$$z \leqq 4+t.$$

Ezek az egyenlőtlenségek határozzák meg a (Z, T) koordináta-rendszerben az M tartományt (46. ábra). Ezen az M tartományon lesz a ζ és τ együttes sűrűségfüggvénye 0-tól különböző, mégpedig mivel $|J|=\frac{1}{2}$,

$$g(z, t)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha} \quad (z, t) \in M, \\ 0, & \text{ha} \quad (z, t) \notin M. \end{cases}$$



46. ábra

Vegyük észre, hogy az M tartomány területe éppen 4 egység, tehát a (ζ, τ) e tartományon egyenletes eloszlású!

b) A kérdezett valószínűséget itt integrálással számítjuk ki. Eszerint:

$$P(\zeta \leqq 2, \tau \geqq 0) = \int_{-\infty}^{2} \int_{0}^{+\infty} g(z, t)\, dt\, dz =$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{t}^{2-t} \frac{1}{4}\, dz\, dt = \frac{1}{4} \int_{0}^{1} (2-2t)\, dt = \frac{1}{4}.$$

(Ugyanezt kapjuk akkor is, ha ez egyenletes eloszlás alapján területek hányadosával számolunk.)

c) A τ perem-sűrűségfüggvénye, azaz: a $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye, a 46. ábra felhasználásával:

$$g_2(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{-t}^{4+t} dz = \frac{1}{2}(2+t), & \text{ha} \quad -2 \leqq t < -1, \\ \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{-t}^{2-t} dz = \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \leqq t < 0. \\ \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{t}^{2-t} dz = \frac{1}{2}(1-t), & \text{ha} \quad 0 \leqq t < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

452. A ξ és η függetlensége miatt

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad 2 \leqq y \leqq 4, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

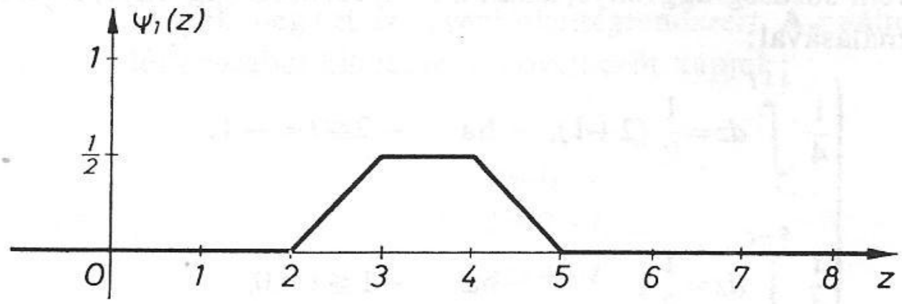
Ebből kiindulva a $\xi + \eta$ eloszlását a szokásos módon számítjuk ki. Ha $\psi_1(z)$-vel jelöljük a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét, akkor erre a következő adódik:

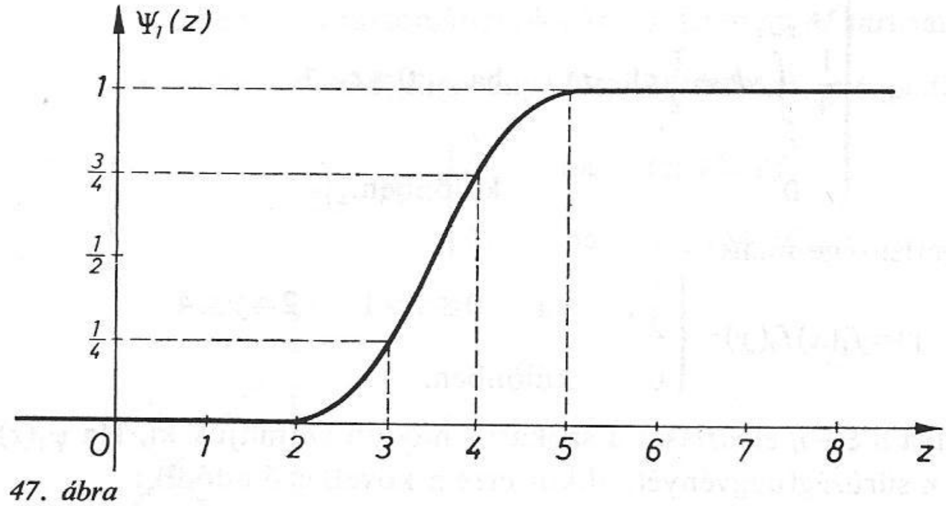
$$\psi_1(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z \leqq 2, \\ \dfrac{z-2}{2}, & \text{ha} \quad 2 < z \leqq 3, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 3 < z \leqq 4, \\ \dfrac{5-z}{2}, & \text{ha} \quad 4 < z \leqq 5, \\ 0, & \text{ha} \quad 5 < z. \end{cases}$$

Ha a $\xi+\eta$ eloszlásfüggvényét $\Psi_1(z)$-vel jelöljük, akkor

$$\Psi_1(z)=\int_{-\infty}^{z}\psi_1(t)\,dt=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z\leqq 2,\\ \dfrac{(z-2)^2}{4}, & \text{ha} \quad 2<z\leqq 3,\\ \dfrac{2z-5}{4}, & \text{ha} \quad 3<z\leqq 4,\\ \dfrac{-z^2+10z-21}{4}, & \text{ha} \quad 4<z\leqq 5,\\ 1, & \text{ha} \quad 5<z. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény grafikonját a 47. ábra mutatja.





47. ábra

453. A $\zeta=\xi+\eta$ sűrűségfüggvényének meghatározásához a

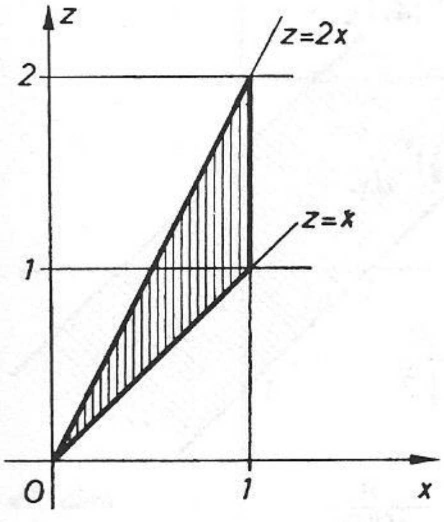
$$\psi_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\,z-x)\,dx$$

képletet használjuk. Most

$$f(x,\,z-x)=\begin{cases} 2, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad 0\leqq z-x\leqq 1,\\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq z-x \leqq 1$, vagy másképpen felírva: a $0 \leqq x \leqq 1$, $x \leqq z \leqq 2x$ tartomány képét az (XZ) síkon a 48. ábra mutatja.

A keresett sűrűségfüggvény ennek alapján:



48. ábra

$$\psi_1(z)=\begin{cases} 2\int\limits_{\frac{z}{2}}^{z} dx = z, & \text{ha} \quad 0 \leqq z \leqq 1, \\ 2\int\limits_{\frac{z}{2}}^{1} dx = 2-z, & \text{ha} \quad 1 \leqq z \leqq 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

454. Eredményül a következőt kapjuk:

$$\psi_1(z)=\begin{cases} \frac{1}{4}(2+z), & \text{ha} \quad -2 \leqq z \leqq 0, \\ \frac{1}{4}(2-z), & \text{ha} \quad 0 \leqq z \leqq 2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

455. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye a feltételezett függetlenség miatt:

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

A $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényének meghatározásához a

$$\psi_1(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+(z-x)^2}{2}} dx$$

integrált kell kiszámítanunk. Az e kitevőjét teljes négyzetté kiegészítéssel átalakítjuk:

$$\frac{x^2+(z-x)^2}{2}=\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\frac{z^2}{4},$$

így

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx.$$

Elvégezve az

$$x-\frac{z}{2}=\frac{t}{\sqrt{2}},\qquad dx=\frac{dt}{\sqrt{2}}$$

helyettesítést:

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}},$$

vagyis a $\xi+\eta$ normális eloszlású, $m=0$ és $\sigma=\sqrt{2}$ paraméterértékekkel.

456. A perem-sűrűségfüggvényeket már a 433. *b)* feladatból ismerjük. Mivel most

$$f(x,\ y)\neq f_1(x)f_2(y),$$

ezért a ξ és η valóban nem függetlenek.

A ξ és η összegének sűrűségfüggvényére a következőt kapjuk:

$$\psi_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{5}{2}\left(x^2-\frac{6}{5}xz+\frac{2}{5}z^2\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2}{10}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{5}{2}\left(x-\frac{3}{5}z\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{10}},$$

vagyis a $\xi+\eta$ normális eloszlású $m=0$, és $\sigma=\sqrt{5}$ paraméterértékekkel.

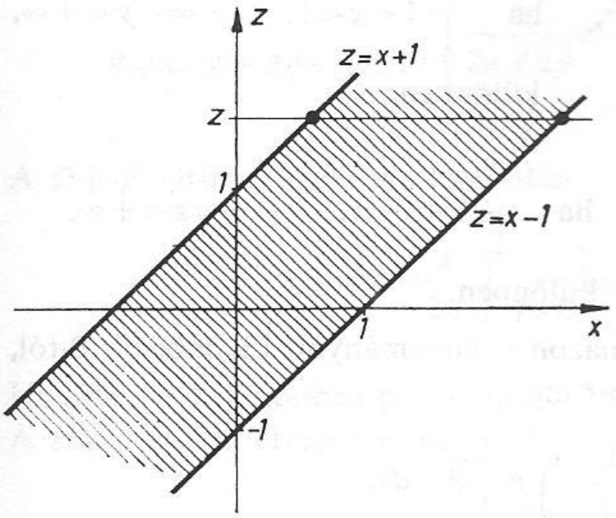
457. A feltételezett függetlenség miatt a $(\xi,\ \eta)$ sűrűségfüggvénye:

$$f(x,\ y)=f_1(x)\cdot f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha}\quad -\infty<x<+\infty,\ -1<y<1,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ebből viszont:

$$f(x,\ z-x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha}\quad -\infty<x<+\infty,\quad x-1<z<x+1,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Eszerint az $f(x, z-x)$ függvény az XZ síkon a 49. ábrán megrajzolt és besatírozott tartomány fölött lesz 0-tól különböző.



49. ábra

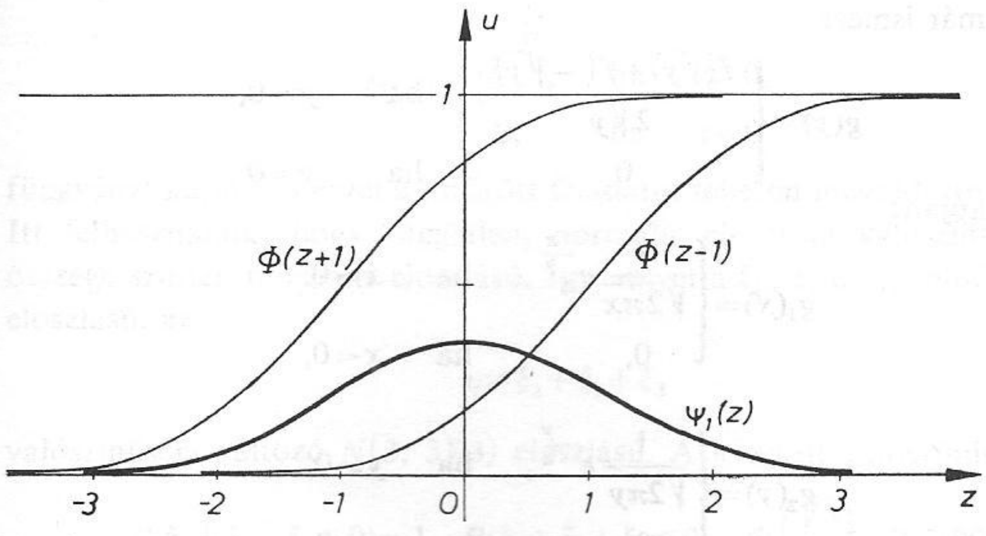
A $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét adó integrál tehát:

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{z-1}^{z+1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\,[\Phi(z+1)-\Phi(z-1)],$$

ahol $-\infty<z<+\infty$. A kapott függvényt nem lehet zárt alakban kifejezni, görbéjét viszont egyszerűen megszerkeszthetjük, hiszen a

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

függvény görbéjét jól ismerjük. A 50. ábrán látható ez a $\psi_1(z)$ sűrűségfüggvény. Természetesen ugyanezt az eredményt kell kapnunk akkor is, ha az $f(x, y)$



50. ábra

felírásakor a ξ-t tekintjük egyenletes, és az η-t normális eloszlásúnak. Valóban, ez esetben

$$f(x, y)=f_1(x)f_2(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{ha} \quad -1<x<1, \quad -\infty<y<+\infty, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

innen pedig

$$f(x, z-x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}, & \text{ha} \quad -1<x<1; \quad -\infty<z<+\infty, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát $f(x, z-x)$ ez esetben ugyanazon a tartományon különbözik 0-tól, mint az $f(x, y)$. A kérdéses integrál most már

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx,$$

és ha itt még elvégezzük a $z-x=t$, $dx=-dt$ helyettesítést, akkor

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{z-1}^{z+1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt=\frac{1}{2}[\Phi(z+1)-\Phi(z-1)] \quad (-\infty<z<+\infty)$$

adódik, ugyanúgy, mint az előbb.

458. A találat helyének a célponttól való távolsága legyen τ. Akkor nyilvánvaló, hogy

$$\tau=\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

s a feladat a τ eloszlásának meghatározása.

A számításokat a következőképpen végezzük. Először kiszámítjuk a ξ^2 és η^2 eloszlását, aztán a $\zeta=\xi^2+\eta^2$ eloszlását, végül a $\tau=\sqrt{\zeta}$ eloszlását.

Jelöljük a ξ^2 sűrűségfüggvényét $g_1(x)$-szel, az η^2 sűrűségfüggvényét $g_2(y)$-nal, akkor a már ismert

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0 \end{cases}$$

képlet alapján:

$$g_1(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0, \end{cases}$$

és

$$g_2(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0. \end{cases}$$

Vegyük most figyelembe, hogy ξ és η függetlenségéből a ξ^2 és η^2 függetlensége is következik, így a (ξ^2, η^2) együttes sűrűségfüggvénye

$$g_{12}(x, y)=g_1(x)g_2(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{xy}}e^{-\frac{x+y}{2}}, & \text{ha} \quad x>0, \quad y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A $\xi^2+\eta^2$ sűrűségfüggvénye ezek után

$$\psi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^z \frac{1}{\sqrt{x(z-x)}}e^{-\frac{x+z-x}{2}}dx$$

lesz, ha $z>0$, különben pedig $\psi_1(z)=0$.
A számításokat elvégezve:

$$\psi_1(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & \text{ha} \quad z>0, \\ 0, & \text{ha} \quad z<0. \end{cases}$$

Itt felhasználtuk, hogy a $\psi_1(z)$ kiszámításához szükséges integrál:

$$\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{x(z-x)}}=\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{\frac{z^2}{4}-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}}=\frac{2}{z}\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-z}{z}\right)^2}}=$$

$$=\left[\arcsin\frac{2x-z}{z}\right]_0^z=\pi.$$

Most a harmadik lépést kell elvégeznünk. Mivel, mint ismeretes, egy valószínűségi változó négyzetgyökének sűrűségfüggvénye a 347. feladatban látott módon kiszámítható, így a τ sűrűségfüggvényére végül is a

$$h(t)=\begin{cases} te^{-\frac{t^2}{2}}, & \text{ha} \quad t>0, \\ 0, & \text{ha} \quad t<0 \end{cases}$$

függvényt kapjuk, s ezzel a kitűzött feladatot teljesen megoldottuk.

459. Itt felhasználjuk, hogy független, normális eloszlású valószínűségi változók összege szintén normális eloszlású. Így, mivel a ξ_1, ξ_2 és ξ_3 mindegyike $N(1, 3)$ eloszlású, az

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\xi_3$$

valószínűségi változó $N(3, 3\sqrt{3})$ eloszlású. A keresett valószínűség:

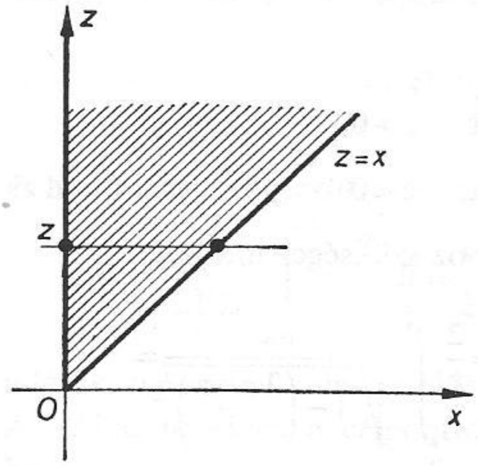
$$P(\xi_1+\xi_2+\xi_3>0)=1-P(\xi_1+\xi_2+\xi_3\leq 0)=\Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0{,}7190.$$

460. Ez esetben

$$f(x, z-x)=\begin{cases} e^{-z}, & \text{ha} \quad x \geqq 0, \quad z \geqq x, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

az integrálást tehát annak figyelembevételével végezzük, hogy e függvény csak az 51. ábrán feltüntetett tartományon különbözik 0-tól. Így a keresett sűrűségfüggvény:

$$\psi_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\, dx=\begin{cases} \int_0^z e^{-z}\, dx=ze^{-z}, & \text{ha} \quad z \geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad z<0. \end{cases}$$



51. ábra

461. Legyen ξ az első, η a második alkatrész élettartama. Akkor a ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{10^3} e^{-\frac{x}{10^3}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0, \end{cases}$$

az η-é pedig a feltevés szerint ugyanez, (x helyett y-nal). A ξ és η együttes sűrűségfüggvénye, feltételezve, hogy a ξ és η függetlenek:

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{10^6} e^{-\frac{x+y}{10^3}}, & \text{ha} \quad x>0, \quad y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Most a $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét kell meghatározni. Ugyanúgy számolva, mint az előző feladatban, erre

$$\psi_1(z)=\begin{cases} \frac{1}{10^6} ze^{-\frac{z}{10^3}}, & \text{ha} \quad z>0, \\ 0, & \text{ha} \quad z<0 \end{cases}$$

adódik eredményül.

462. Mivel most $\lambda > 0$ és $\mu > 0$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

továbbá

$$g(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y}, & \text{ha} \quad y > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y < 0, \end{cases}$$

és ξ és η függetlenek, így

$$\psi_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(z-x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda z} - e^{-\mu z}), & \text{ha} \quad z > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad z < 0. \end{cases}$$

463. Legyen a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$. Tekintsük a

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \xi - \eta, \\ \zeta_2 &= \quad\ \eta \end{aligned}\right\}$$

valószínűségi változókat. A $(\zeta_1\, \zeta_2)$ együttes sűrűségfüggvénye az általános képlet szerint, mivel most

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x - y, \\ z_2 &= \quad\ y. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= z_1 + z_2, \\ y &= \quad\ \ z_2, \end{aligned}\right\} \qquad J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

a következő lesz:

$$g(z_1, z_2) = f(z_1 + z_2, z_2).$$

A $\zeta_1 = \xi - \eta$ sűrűségfüggvénye ebből, a ζ_1 perem-sűrűségfüggvényének kiszámításával:

$$\psi(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1 + z_2, z_2)\, dz_2,$$

vagy egyszerűbben írva:

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z+x, x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, t-z)\, dt.$$

A legutolsó alakot az előtte levőből akkor kapjuk, ha a $z + x = t$ helyettesítést elvégezzük.
Ha ξ és η függetlenek, akkor a fenti képletet így is írhatjuk:

$$\psi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t-z)\, dt.$$

464. Jelölje $\psi(t)$ a τ sűrűségfüggvényét. Az előző feladat szerint:

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-t) dx.$$

Az integrandus:

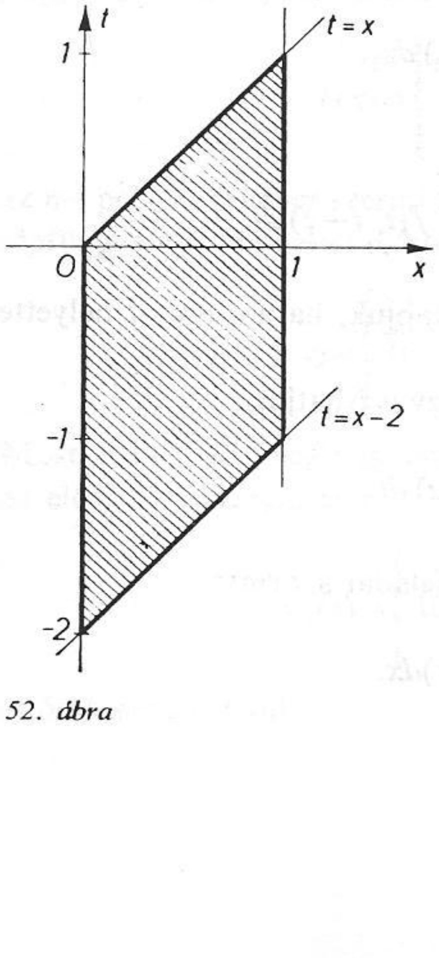
$$f(x, x-t)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq x-t \leqq 2, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

vagyis az egyenlőtlenségek rendezésével:

$$f(x, x-t)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \quad x-2 \leqq t \leqq x, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ez a függvény az 52. ábrán feltüntetett tartományon különbözik 0-tól. Az integráláskor erre az ábrára figyelemmel vagyunk. Eredményül a következőt kapjuk:

$$\psi(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_t^1 dx=\frac{1}{2}(1-t), & \text{ha} \quad 0 \leqq t \leqq 1, \\ \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx=\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \leqq t \leqq 0, \\ \frac{1}{2}\int\limits_0^{t+2} dx=\frac{1}{2}(t+2), & \text{ha} \quad -2 \leqq t \leqq -1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$



52. ábra

Hasonlítsuk össze az eredményt a 451. *c)* feladat eredményével! (Számítsuk ki a τ sűrűségfüggvényét a

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t,\, x)\, dx$$

képlet felhasználásával is!)

465. Jelentse ξ az egyik személy érkezésének időpontját, η pedig a másik személyét. A feltétel szerint ekkor a ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,\, y)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad 0\leqq y\leqq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A feladat most az, hogy meghatározzuk a következő valószínűséget:

$$P\left(|\xi-\eta|<\frac{1}{3}\right)=P\left(-\frac{1}{3}<\xi-\eta<\frac{1}{3}\right).$$

A $\tau=\xi-\eta$ sűrűségfüggvénye legyen $\psi(t)$. A 463. feladatban levezetett képlet szerint

$$\psi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, x-t)\, dx.$$

Mivel most

$$f(x,\, x-t)=\begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0\leqq x\leqq 1, \quad x-1\leqq t\leqq x, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ezért

$$\psi(t)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{t+1} dx=t+1, & \text{ha} \quad -1\leqq t\leqq 0, \\ \displaystyle\int_t^{1} dx=1-t, & \text{ha} \quad 0\leqq t\leqq 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ennek felhasználásával most már

$$P\left(|\xi-\eta|<\frac{1}{3}\right)=P\left(-\frac{1}{3}<\tau<\frac{1}{3}\right)=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \psi(t)\, dt=$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{0} (t+1)\, dx+\int_{0}^{\frac{1}{3}} (1-t)\, dt=\frac{5}{9}.$$

Az eredmény megegyezik a 188. feladatban kapott eredménnyel.

466. *a)* A $\zeta_1=\xi+\eta$ sűrűségfüggvénye:

$$\psi_1(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{(\sigma\sqrt{2})^2}},$$

a ζ_1 tehát szintén normális eloszlású, $m_1=0$, $\sigma_1=\sigma\sqrt{2}$ paraméterértékekkel.

b) $\zeta_2=\xi-\eta$. Ennek eloszlása ugyanaz, mint az előbbi ζ_1 valószínűségi változóé.

c) $\zeta_3=\dfrac{\xi+\eta}{2}$. Ennek sűrűségfüggvénye:

$$g(x)=\frac{1}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}},$$

tehát ζ_3 $N\left(0, \dfrac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)$ eloszlású.

d) $\zeta_4=|\zeta_2|$. Felhasználva az ismert

$$g(z)=\begin{cases} f(z)+f(-z), & \text{ha} \quad z>0,\\ 0, & \text{ha} \quad z<0\end{cases}$$

képletet, a következőt kapjuk:

$$g(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}, & \text{ha} \quad z>0,\\ 0, & \text{ha} \quad z<0.\end{cases}$$

Ez természetesen nem normális eloszlás.

467. A $\xi\cdot\eta$ sűrűségfüggvényét a

$$\psi_3(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}\,f\left(x, \frac{z}{x}\right)dx$$

képlet alapján számítjuk ki. Most

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<2,\\ 0 & \text{különben},\end{cases}$$

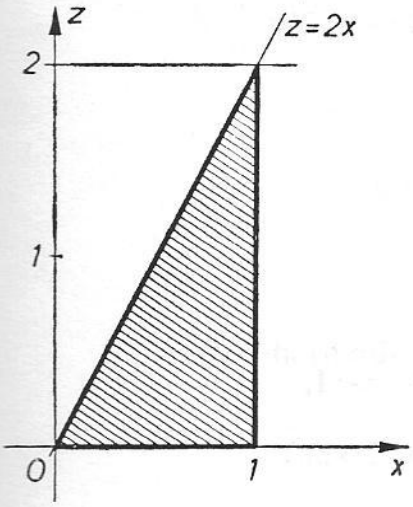
így

$$f\left(x, \frac{z}{x}\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<z<2x,\\ 0 & \text{különben}.\end{cases}$$

Könnyen belátható, hogy ez utóbbi függvény az 53. ábrán besatírozott tartományon vesz fel 0-tól különböző értékeket.

Ezt figyelembe véve, a keresett sűrűségfüggvény:

$$\psi_3(z)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\frac{z}{2}}^{1}\frac{1}{2x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{2}{z}, & \text{ha} \quad 0<z<2,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$



53. ábra

468. Most már könnyű gyakorlásként kapjuk a $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét:

$$\psi_1(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{4}, & \text{ha} \quad 0\leqq z\leqq 2,\\ 1-\dfrac{z}{4}, & \text{ha} \quad 2\leqq z\leqq 4,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

A $\tau=\dfrac{\xi}{\eta}$ sűrűségfüggvényét jelöljük $\psi_4(z)$-vel. Akkor

$$\psi_4(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(xz,x)\,dx.$$

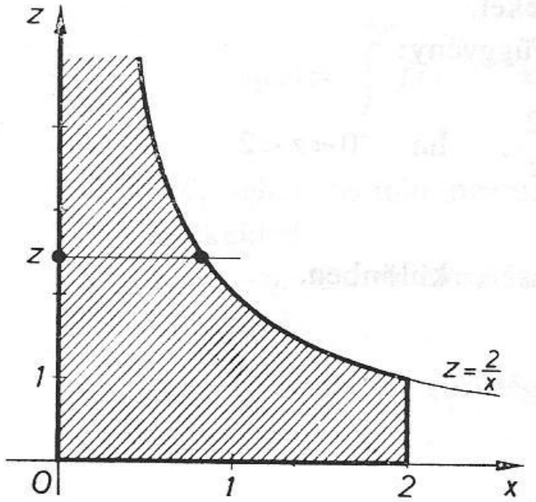
Az integrandus második tényezője:

$$f(xz,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{ha} \quad 0<xz<2, \quad 0<x<2,\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

vagy pedig, átalakítva az egyenlőtlenségeket:

$$f(xz,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & \text{ha} \quad 0<x<2, \quad 0<z<\dfrac{2}{x},\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Ez a tényező az 54. ábrán besatírozott tartományon különbözik 0-tól.



54. ábra

Ezt figyelembe véve, a keresett sűrűségfüggvény:

$$\psi_4(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^2 x\,dx=\dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<z<1, \\ \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{2}{z}} x\,dx=\dfrac{1}{2z^2}, & \text{ha} \quad 1<z, \\ 0, & \text{ha} \quad z<0. \end{cases}$$

469. Most is a

$$\psi_4(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(xz, x)\,dx$$

képletet használjuk. Az integrandus második tényezője:

$$f(xz, x)=\begin{cases} e^{-x(z+1)}, & \text{ha} \quad z>0, \quad x>0, \\ 0 & \text{különben}; \end{cases}$$

így a keresett sűrűségfüggvény:

$$\psi_4(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2}, & \text{ha} \quad z>0, \\ 0, & \text{ha} \quad z<0. \end{cases}$$

470. *a)* A $\xi+\eta$ sűrűségfüggvénye, mint azt a 468. feladatban láttuk:

$$\psi_1(z)=\begin{cases} \dfrac{z}{4}, & \text{ha} \quad 0\leqq z\leqq 2, \\ 1-\dfrac{z}{4}, & \text{ha} \quad 2\leqq z\leqq 4, \\ 0 & \text{különben}. \end{cases}$$

Így a keresett valószínűségek:

$$P(\xi+\eta\leqq 1)=\int_0^1 \frac{z}{4}\,dz=\frac{1}{8},$$

$$P(\xi+\eta\geqq 2)=\int_2^4 \left(1-\frac{z}{4}\right)dz=\frac{1}{2}.$$

A $\frac{\xi}{\eta}$ sűrűségfüggvénye, ugyancsak a 468. feladatból:

$$\psi_4(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<z<1, \\ \frac{1}{2z^2}, & \text{ha} \quad 1<z, \\ 0, & \text{ha} \quad z<0; \end{cases}$$

így a harmadik valószínűségre

$$P(\xi<2\eta)=P\left(\frac{\xi}{\eta}<2\right)=\int_0^1 \frac{1}{2}\,dz+\int_1^2 \frac{1}{2z^2}\,dz=\frac{3}{4}$$

adódik. Végül a negyedik valószínűség:

$$P(\xi=\eta)=P(\xi-\eta=0)=0,$$

mert a $\xi-\eta$ folytonos valószínűségi változó.

b) Hasonlóképpen számolunk, mint az előbb. Itt a 460. és a 469. feladat eredményét használjuk fel. A következőket kapjuk:

$$P(\xi+\eta\leqq 1)=\int_0^1 ze^{-z}\,dz=1-2e^{-1},$$

$$P(\xi+\eta\geqq 2)=\int_2^\infty ze^{-z}\,dz=3e^{-2},$$

$$P(\xi<2\eta)=P\left(\frac{\xi}{\eta}<2\right)=\int_0^2 \frac{dz}{(z+1)^2}=\frac{2}{3},$$

$$P(\xi=\eta)=0.$$

471. A várható értékre és szórásra vonatkozó tételek felhasználásával, az összeszerelt alkatrészek összhosszának várható értéke 100 cm, és szórása 0,63 cm.

472. Legyen ξ_1 a lőszerszükséglet az első találat eléréséig; ξ_2 jelentse az első és második találat közötti és ξ_3 a második és harmadik találat közötti lőszerszükségletet.

Ekkor az összes elhasznált lőszer:

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

A várható lőszerszükséglet az η várható értéke. Tehát

$$M(\eta) = M(\xi_1) + M(\xi_2) + M(\xi_3).$$

Feltehető, hogy az itt szereplő ξ_i valószínűségi változók egyenlő várható értékűek. (Ez azt jelenti, hogy a belövés során elhasznált lőszer mennyiségét nem vesszük tekintetbe.) Mivel a ξ_i lehetséges értékei: 1, 2, 3, ..., és minden lövésnél 0,05 a találat elérésének valószínűsége, továbbá az is feltehető, hogy a találatok egymástól függetlenek, így a ξ_i eloszlása ($i = 1, 2, 3$):

$$P(\xi_i = k) = 0{,}95^{k-1} \cdot 0{,}05 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

A ξ_i várható értéke tehát, felhasználva a 354. feladat egyik eredményét is:

$$M(\xi_i) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}95^{k-1} \cdot 0{,}05 = \frac{1}{0{,}05} = 20 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ebből viszont

$$M(\eta) = 3M(\xi_i) = 60,$$

tehát a várható lőszerszükséglet három találat eléréséig: 60 darab lőszer.

473. A keresett várható értékek:

$$M(\xi + \eta) = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)(x+y)\, dx\, dy = \frac{7}{6}.$$

$$M(\xi\eta) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y) dx\, dy = \frac{1}{3}.$$

474. A ξ és η szorzatának várható értéke:

$$M(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} dx \right) dy.$$

A belső integrált az $x - y = t$, $dx = dt$ helyettesítéssel számítjuk ki, erre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\frac{(x-y)^2}{2}} dx = y$$

adódik. Ezek után:

$$M(\xi\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Ha most ezt az integrált az

$$u=y, \qquad v'=-ye^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad v=e^{-\frac{y^2}{2}}$$

választással parciálisan integráljuk, adódik a végeredmény:

$$M(\xi\eta)=1.$$

475. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y)=\begin{cases} 2, & \text{ha} \quad 0<x<1, \quad 0<y<x, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A keresett várható értékek:

$$M(\xi^n \eta^k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n y^k f(x, y)\,dx\,dy=$$

$$=2\int_0^1\int_0^x x^n y^k\,dy\,dx=\frac{2}{(k+1)(n+k+2)} \qquad (n\geqq 0,\ k\geqq 0).$$

Itt természetesen az n és k számok egész számok.
Ehhez hasonló számításokkal — de az itt nyert eredményből speciális esetként is — megkapjuk a másik két várható értéket:

$$M(\xi^n)=\frac{2}{n+2} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$M(\eta^k)=\frac{2}{k^2+3k+2} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

476. A feladatban szereplő egyenlőséget a

$$D^2(\xi-\eta)=M((\xi-\eta)^2)-M^2(\xi-\eta)$$

képlet felhasználásával könnyen bebizonyíthatjuk.

477. A bizonyítandó összefüggést pl. úgy láthatjuk be, hogy a jobb oldalon a

$$D^2(\zeta)=M(\zeta^2)-M^2(\zeta)$$

összefüggésnek megfelelően elvégezzük a helyettesítéseket, majd az egész kifejezést egyszerűbb alakra hozzuk.
A bebizonyított egyenlőségből nyilvánvalóan következik független ξ és η esetére a

$$D^2(\xi\eta)\geqq D^2(\xi)D^2(\eta)$$

egyenlőtlenség, mert a második és harmadik tag nem negatív. Ez utóbbi megjegyzésből az is következik, hogy az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha

$$M^2(\xi)=M^2(\eta)=0,$$

[mert $D^2(\xi)\neq 0$, és $D^2(\eta)\neq 0$ a feltevés szerint], vagyis ha

$$M(\xi)=M(\eta)=0,$$

s ez volt bizonyítandó.

478. Könnyen belátható, hogy

$$D^2(\xi+\eta)=D^2(\xi)+D^2(\eta)+2[M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)].$$

Mivel pedig a korrelációs együttható definíciójából

$$M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=D(\xi)D(\eta)R(\xi,\eta),$$

így az igazolandó egyenlőség valóban fennáll.

479. Legyen a két vizsgált karakterisztikus valószínűségi változó ξ és η. Ezek valószínűségeloszlása:

$$P(\xi=1)=p_1,\quad P(\xi=0)=1-p_1=q_1,$$

illetőleg

$$P(\eta=1)=p_2,\quad P(\eta=0)=1-p_2=q_2.$$

Az is nyilvánvaló, hogy ez esetben

$$M(\xi)=p_1 \quad \text{és} \quad M(\eta)=p_2.$$

Mivel pedig a ξ és η korrelálatlansága ekvivalens azzal, hogy a ξ, η kovarianciája 0 (nem 0 szórású, azaz: nem elfajult valószínűségi változókról van szó), így

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=M(\xi\eta)-p_1p_2=0,$$

vagyis

$$M(\xi\eta)=P(\xi=1,\eta=1)=p_1p_2.$$

Ezek alapján már elkészíthetjük a (ξ,η) eloszlásának táblázatát:

ξ \ η	0	1	ξ peremeloszlása
0	q_1q_2	$p_2q_1=p_2-p_1p_2$	q_1
1	$p_1-p_1p_2=p_1q_2$	p_1p_2	p_1
η peremeloszlása	q_2	p_2	1

Innen pedig leolvasható, hogy ξ és η függetlenek.

480. A felelet igen egyszerű:

$$R(\zeta_1,\zeta_2)=\frac{M\big((\zeta_1-M(\zeta_1))(\zeta_2-M(\zeta_2))\big)}{D(\zeta_1)D(\zeta_2)}=M(\zeta_1\cdot\zeta_2),$$

hiszen most $M(\zeta_1)=M(\zeta_2)=0$, és $D(\zeta_1)=D(\zeta_2)=1$.

481. $R(\zeta_1,\zeta_2)=-\dfrac{1}{2}$.

482. Könnyű számolással belátható, hogy

$$R(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{ac[M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)]}{|a|\,|c|\,D(\xi)D(\eta)} = \frac{ac}{|ac|} R(\xi, \eta),$$

és ebből állításunk következik.

483. Számítsuk ki először a τ_1 és ζ korrelációs együtthatóját.

$$R(\tau_1, \zeta) = R(\xi+\zeta, \zeta) = \frac{M((\xi+\zeta)\zeta) - M(\xi+\zeta)M(\zeta)}{D(\xi+\zeta) - D(\zeta)} =$$

$$= \frac{[M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta)] + [M(\zeta)^2 - M^2(\zeta)]}{D(\xi+\zeta)D(\zeta)}.$$

A számlálóban álló első tag 0, mert a ξ és ζ korrelálatlanok. A második tag a ζ szórásnégyzetével egyenlő.

Vegyük most figyelembe, hogy a 478. feladatban bebizonyított tételből következik, hogy korrelálatlan valószínűségi változók összegének szórásnégyzete egyenlő a valószínűségi változók szórásnégyzetének összegével.

A tett észrevételek felhasználásával most már

$$R(\tau_1, \zeta) = \frac{D^2(\zeta)}{D(\zeta)\sqrt{D^2(\xi) + D^2(\zeta)}}.$$

Egyszerűsítsünk itt $D(\zeta)$-val, majd használjuk fel, hogy a feladatban szereplő ξ, η, ζ valószínűségi változók mind egyenlő szórásúak, akkor

$$R(\tau_1, \zeta) = \frac{D(\zeta)}{\sqrt{2D^2(\zeta)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az első állítást így igazoltuk.

Pontosan ugyanígy igazolható az is, hogy

$$R(\tau_2, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Ez az előzőből is rögtön következik, csak a ξ helyére kell η-t írnunk, s felhasználni a feltevéseket.)

Számítsuk ki most a τ_1 és τ_2 korrelációs együtthatóját. Az

$$R(\tau_1, \tau_2) = \frac{M((\xi+\zeta)(\eta+\zeta)) - M(\xi+\zeta)M(\eta+\zeta)}{D(\xi+\zeta)D(\eta+\zeta)}$$

egyenlőségből, felhasználva, hogy a (ξ, η) a (ξ, ζ) és az (η, ζ) valószínűségi változók korrelálatlanok, könnyen adódik a következő:

$$R(\tau_1, \tau_2) = \frac{D^2(\zeta)}{\sqrt{D^2(\xi) + D^2(\zeta)}\sqrt{D^2(\eta) + D^2(\zeta)}} = \frac{1}{2}.$$

Az utolsó lépésben azt is figyelembe vettük, hogy $D(\xi) = D(\eta) = D(\zeta)$.

484. Tegyük fel először, hogy ξ_1 és ξ_2 között fennáll egy

$$\xi_2 = a\xi_1 + b \qquad a \neq 0$$

alakú összefüggés. Akkor a (ξ_1, ξ_2) kovarianciamátrixa:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 r_{12}\sigma_2 \\ \sigma_2 r_{21}\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Itt $c_{ik}=\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_k)$, $r_{ik}=R(\xi_i, \xi_k)$ és $\sigma_i=D(\xi_i)$, ahol $i=1, 2$; $k=1, 2$. Mivel a ξ_1 és ξ_2 között lineáris összefüggés áll fenn, ezért $r_{ik}=1$, a $\mathbf{C}$ mátrix tehát így írható:

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}=\left[\sigma_1\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \sigma_2\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}\right].$$

Látjuk tehát, hogy a $\mathbf{C}$ mindkét oszlopvektora ugyanazon vektor valamilyen konstansszorosa, így $\mathbf{C}$ valóban szinguláris.

Fordítva, tegyük fel most, hogy a

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 r_{12}\sigma_2 \\ \sigma_2 r_{21}\sigma_1 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

kovarianciamátrix szinguláris. Ez esetben van olyan a_1 és a_2 szám, hogy $a_1\neq 0$ és $a_2\neq 0$, s fennáll az

$$a_1\begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_2 r_{21}\sigma_1 \end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix} \sigma_1 r_{12}\sigma_2 \\ \sigma_2^2 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

egyenlőség. Ez azonban ekvivalens az

$$\begin{matrix} a_1\sigma_1^2+a_2\sigma_1\sigma_2 r_{12}=0, \\ a_1\sigma_1\sigma_2 r_{21}+a_2\sigma_2^2=0 \end{matrix} \qquad a_1\neq 0,\ a_2\neq 0,\ \sigma_1\neq 0,\ \sigma_2\neq 0$$

egyenletrendszerrel. Az elsőből azt kapjuk, hogy

$$r_{12}=-\frac{a_1\sigma_1^2}{a_2\sigma_1\sigma_2}=-\frac{a_1\sigma_1}{a_2\sigma_2}.$$

A másodikból viszont, figyelembe véve, hogy $r_{12}=r_{21}$, azt kapjuk, hogy

$$r_{12}=-\frac{a_2\sigma_2}{a_1\sigma_1}=\frac{1}{r_{12}}.$$

Ez utóbbi egyenlőség azonban csak úgy állhat fenn, ha $r_{12}^2=1$, vagyis, ha $r_{12}=\pm 1$; ez azonban azt jelenti, hogy a ξ_1 és ξ_2 között lineáris kapcsolat áll fenn, s ezt kellett bizonyítani.

485. Az adott táblázatot kiegészítjük a peremeloszlásokkal:

ξ \ η	1	0	ξ perem-eloszlása
1	0,50	0,04	0,54
0	0,06	0,40	0,46
η perem-eloszlása	0,56	0,44	1

Ebből a táblázatból:

$$M(\xi\eta)=1\cdot 1\cdot 0{,}5+1\cdot 0\cdot 0{,}04+0\cdot 1\cdot 0{,}06+0\cdot 0\cdot 0{,}4=0{,}5;$$

$$M(\xi)=1\cdot 0{,}54+0\cdot 0{,}46=0{,}54;$$

hasonlóképpen

$$M(\eta)=0{,}56; \quad M(\xi^2)=0{,}54; \quad M(\eta^2)=0{,}56; \quad D(\xi)=0{,}498; \quad D(\eta)=0{,}496.$$

Ezekből a korrelációs együttható:

$$R(\xi, \eta)=\frac{M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=0{,}802.$$

A ξ és η közötti kapcsolat tehát elég erősnek mondható.

486. Az adatokból könnyen kiszámítható, hogy

$$P(A)=\frac{1}{4}, \quad P(\bar{A})=\frac{3}{4}, \quad P(B)=\frac{1}{2}, \quad P(\bar{B})=\frac{1}{2}$$

és

$$P(A\cap B)=\frac{1}{8}.$$

A valószínűségi változókkal felírva e valószínűségeket:

$$P(\xi=1)=\frac{1}{4}, \quad P(\xi=0)=\frac{3}{4}, \quad P(\eta=1)=\frac{1}{2}, \quad P(\eta=0)=\frac{1}{2},$$

$$P(\xi=1,\ \eta=1)=\frac{1}{8}.$$

Ezek alapján már felírható (ξ, η) eloszlásának táblázata:

ξ \ η	0	1	ξ peremeloszlása
0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
η peremeloszlása	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Innen $M(\xi)=\frac{1}{4}$, $M(\eta)=\frac{1}{2}$, $M(\xi\eta)=\frac{1}{8}$, s ezekből máris látható, hogy $R(\xi, \eta)=0$. A táblázatból azt is látjuk, hogy minden p_{ik} valószínűség egyenlő a peremeloszlások megfelelő tagjainak szorzatával, a ξ és η tehát függetlenek is.

487. Először a (ξ, η) valószínűségeloszlását számítjuk ki; így pl.

$$p_{00} = P(\xi=0,\ \eta=0) = P(\xi=0)P(\eta=0 \mid \xi=0) = 0{,}3 \cdot 0{,}56 = 0{,}168.$$

Hasonlóképpen számíthatjuk ki a valószínűségeloszlás többi tagját is. Ezeket — és a peremeloszlásokat is — a következő táblázatban foglaljuk össze:

ξ \ η	0	1	2	ξ peremeloszlása
0	0,168	0,075	0,057	0,3
1	0,245	0,350	0,105	0,7
η peremeloszlása	0,413	0,425	0,162	1

A táblázatból meghatározzuk a következőket:

$$M(\xi\eta) = 1 \cdot 0{,}350 + 2 \cdot 0{,}105 = 0{,}560;$$

$$M(\xi) = 0{,}7; \quad M(\xi^2) = 0{,}7; \quad D(\xi) = \sqrt{0{,}21} = 0{,}458;$$

$$M(\eta) = 0{,}749; \quad \mathrm{M}(\eta^2) = 1{,}073, \quad D(\eta) = \sqrt{0{,}512} = 0{,}716.$$

Ezekből a korrelációs együttható:

$$R(\xi,\ \eta) = 0{,}1098 \approx 0{,}11.$$

A ξ és η változók közötti kapcsolat igen laza, a változók gyakorlatilag korrelálatlanoknak tekinthetők.

488. Táblázatot készítünk:

ξ \ η	0	1	ξ peremeloszlása
0	0,32	0,20	0,52
1	0,20	0,28	0,48
η peremeloszlása	0,52	0,48	1

A korrelációs együttható: $R(\xi,\ \eta) \approx 0{,}2$. A két valószínűségi változó tehát nem tekinthető függetlennek, bár a kapcsolat nem szoros.

489. *a)* Mivel a valószínűségeloszlás tagjainak összege 1, tehát $60p=1$, így $p=\frac{1}{60}$.

Egészítsük ki az eloszlás táblázatát a peremeloszlásokkal:

ξ \ η	-1	0	1	ξ perem-eloszlása
-1	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{5}{60}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{30}{60}$	$\frac{5}{6}$
η perem-eloszlása	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	1

A valószínűségeloszlás tagjai mind megegyeznek a peremeloszlások megfelelő tagjainak szorzatával, tehát ξ és η függetlenek.

b) A peremeloszlások felhasználásával:

$$M(\xi)=(-1)\frac{1}{6}+1\cdot\frac{5}{6}=\frac{4}{6},\quad M(\xi^2)=(-1)^2\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{5}{6}=1,$$

$$D^2(\xi)=1-\frac{16}{36}=\frac{5}{9},$$

és hasonló számolással: $D^2(\eta)=\frac{9}{20}$. A ξ és η függetlensége miatt ezek után:

$$D(\xi+\eta)=\sqrt{D^2(\xi)+D^2(\eta)}=\sqrt{\frac{181}{180}}\approx 1.$$

c) $$P(\eta\geqq 0)=P(\eta=0)+P(\eta=1)=\frac{3}{10}+\frac{6}{10}=\frac{9}{10}.$$

490. *a)* A valószínűségeloszlás táblázatának elemeit a valószínűségek szorzási szabálya alapján számítjuk ki. Például:

$$p_{00}=P(\xi=0,\ \eta=0)=P(\xi=0)P(\eta=0\mid\xi=0)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15},$$

s a többbit hasonlóképpen.

Felírjuk a peremeloszlásokat is:

ξ \ η	0	1	2	ξ peremeloszlása
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{10}$
η peremeloszlása	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

b) A ξ és η nem függetlenek, hiszen pl. $p_{00}=\frac{1}{15}\neq p_0q_0=\left(\frac{3}{10}\right)^2$.

c) A ξ első- és másodrendű momentuma: $M(\xi)=\frac{11}{10}$, $M(\xi^2)=\frac{19}{10}$; a ξ szórása tehát: $D(\xi)=\frac{\sqrt{69}}{10}$.

d) A keresett valószínűség: $p=p_{00}+p_{22}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$.

491. *a)* Az eloszlás táblázatát egyszerű számolással kapjuk, a peremeloszlásokat is felírjuk:

ξ \ η	1	2	3	ξ peremeloszlása
0	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{8}{18}$
1	$\frac{65}{180}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{180}$	$\frac{10}{18}$
η peremeloszlása	$\frac{115}{180}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{15}{180}$	1

Rögtön látjuk, hogy ξ és η nem függetlenek.

b) A korrelációs együttható kiszámításához szükséges adatok:

$$M(\xi\eta)=\frac{7}{9},\quad M(\xi)=\frac{5}{9},\quad M(\eta)=\frac{13}{9},$$

$$D(\xi)=\frac{2\sqrt{5}}{9},\quad D(\eta)=\frac{1}{9}\sqrt{\frac{67}{2}}.$$

A korrelációs együttható ezek után:

$$R(\xi, \eta)=\frac{M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{335}}.$$

c) A $\xi+\eta$ szórását a 478. feladatban adott képlet segítségével számítjuk ki. Eszerint:

$$D^2(\xi+\eta)=D^2(\xi)+D^2(\eta)+2D(\xi)D(\eta)R(\xi, \eta)=$$

$$=\frac{20}{81}+\frac{67}{162}+2\frac{2\sqrt{5}}{9}\frac{1}{9}\sqrt{\frac{67}{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{335}}\right)=\frac{11}{18}.$$

492. A táblázatot kiegészítjük:

ξ \ η	0	1	ξ peremeloszlása
0	p_1	p_2	p_1+p_2
1	p_2	p_3	p_2+p_3
η peremeloszlása	p_1+p_2	p_2+p_3	1

Innen

$$M(\xi\eta)=p_3; \quad M(\xi)=M(\eta)=p_2+p_3;$$

$$M(\xi^2)=M(\eta^2)=p_2+p_3; \quad D^2(\xi)=D^2(\eta)=(p_2+p_3)(1-p_2-p_3).$$

A korrelációs együtthatóból, felhasználva, hogy ez 1-gyel egyenlő, a következő egyenletet nyerjük:

$$R(\xi, \eta)=\frac{p_3-(p_2+p_3)^2}{(p_2+p_3)(1-(p_2+p_3))}=1.$$

Innen $p_2=0$ és $p_3=1-p_1$ adódik, p_1 pedig tetszőleges szám a $(0, 1)$ intervallumból.

493. Az adott táblázatot kiegészítjük a peremeloszlásokkal.

ξ \ η	2	0	-1	ξ peremeloszlása
1	p_1	p_2	p_1	$2p_1+p_2$
0	p_2	p_1	p_2	$2p_2+p_1$
-2	p_1	p_2	p_1	$2p_1+p_2$
η peremeloszlása	$2p_1+p_2$	$2p_2+p_1$	$2p_1+p_2$	1

Mivel a valószínűségeloszlás tagjainak összege 1, a p_1 és p_2 között fennáll a következő összefüggés:

$$p_2=\frac{1-5p_1}{4}.$$

A táblázatból

$$M(\xi)=-2p_1-p_2; \quad M(\eta)=2p_1+p_2;$$
$$M(\xi\eta)=-p_1.$$

A ξ és η kovarianciája:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta)=-p_1+(2p_1+p_2)^2=0.$$

Ebből az egyenletből $p_1=1$, ill. $p_1=\frac{1}{9}$ adódik. Az első eset nem jön számításba, ekkor ugyanis p_2 negatív lenne. Marad tehát a második eset, így

$$p_1=\frac{1}{9}, \quad \text{ebből pedig} \quad p_2=\frac{1}{9}.$$

Ha a táblázatban p_1 és p_2 helyére ezeket beírjuk, azt is látjuk, hogy ξ és η függetlenek.

494. Az adatok alapján készült táblázat:

ξ \ η	1	2	3	ξ perem-eloszlása
1	p	p	p	$3p$
2	p	$4p$	p	$6p$
3	p	p	p	$3p$
η perem-eloszlása	$3p$	$6p$	$3p$	1

Könnyen megállapítható, hogy $p=\frac{1}{12}$. Ezek után egyszerű számítással adódik, hogy $R(\xi, \eta)=0$, vagyis a ξ és η korrelálatlanok. Mivel pedig pl.

$$P(\xi=1, \ \eta=1)=p\neq P(\xi=1)P(\eta=1)=9p^2,$$

ezért a ξ és η nem függetlenek.

Ez is példa arra, hogy *a korrelálatlanság nem jelent függetlenséget!*

495. Mivel a ξ és η lehetséges értékei: 1, 0, -1, és mert a feladatban adott számpárokat a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó $\frac{1}{4}$ valószínűséggel veszi fel (a többit pedig nyilván 0 valószínűséggel), így ξ és η együttes eloszlását és a peremeloszlásokat a következő táblázatban foglaljuk össze:

ξ \ η	1	0	-1	ξ peremeloszlása
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
η peremeloszlása	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

A táblázatból rögtön látható, hogy ξ és η nem függetlenek, mert például:

$$P(\xi=1,\ \eta=1)=0\neq P(\xi=1)P(\eta=1)=\frac{1}{16}.$$

A korrelációs együttható pedig:

$$R(\xi,\ \eta)=0.$$

A most vizsgált valószínűségi változók is korrelálatlanok, de nem függetlenek.

496. Már tudjuk, hogy a kétdimenziós polinomiális eloszlású $(\xi,\ \eta)$ valószínűségi változó peremeloszlásai binomiális eloszlások, így

$$P(\xi=i)=\binom{n}{i}p_1^i(1-p_1)^{n-i}\qquad(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

és

$$P(\eta=j)=\binom{n}{j}p_2^j(1-p_2)^{n-j}\qquad(j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

A korrelációs együttható kiszámításához szükséges adatok közül ezek alapján ismertek a következők:

$$M(\xi)=np_1,\qquad D(\xi)=\sqrt{np_1(1-p_1)},$$
$$M(\eta)=np_2,\qquad D(\eta)=\sqrt{np_2(1-p_2)}.$$

Még meg kell határozni a ξ és η szorzatának várható értékét. Ennek megkönnyítésére nézzük meg, hogyan helyezkednek el a

$$p_{ij}=P(\xi=i,\ \eta=j)=\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}\,p_1^ip_2^j(1-p_1-p_2)^{n-i-j}$$

valószínűségek az eloszlás táblázatában. Mivel, mint tudjuk, $0\leqq i+j\leqq n$ esetén különböznek e valószínűségek 0-tól, különben pedig $p_{ij}=0$, ezért a táblázat ilyen:

$\xi \backslash \eta$	0	1	2	...	$n-1$	n
0	p_{00}	p_{01}	p_{02}	...	$p_{0,n-1}$	p_{0n}
1	p_{10}	p_{11}	p_{12}	...	$p_{1,n-1}$	0
2	p_{20}	p_{21}	p_{22}	...	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$p_{n-1,0}$	$p_{n-1,1}$	0	...	0	0
n	p_{n0}	0	0	...	0	0

A ξ, η várható értékét a táblázat bekeretezett része alapján írjuk fel. A rövidebb írásmód kedvéért itt $1-p_1-p_2$ helyett p_3-at írunk, így a következőt kapjuk:

$$M(\xi\eta)=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} ijp_{ij}=$$

$$=n(n-1)p_1p_2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}\frac{(n-2)!}{(i-1)!(j-1)!(n-i-j)!}p_1^{i-1}p_2^{j-1}p_3^{n-i-j}.$$

Cseréljük ki itt az összegező változókat az $i-1=k$ és $j-1=l$ egyenlőségek alapján, akkor

$$M(\xi\eta)=n(n-1)p_1p_2\sum_{l=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2-l}\frac{(n-2)!}{k!\,l!\,(n-2-k-l)!}p_1^k p_2^l p_3^{n-2-k-l}.$$

Vegyük észre, hogy az itt szereplő kettős szumma a polinomiális tétel szerint éppen a $p_1+p_2+p_3$ összeg $n-2$-edik hatványának kifejtése, így $p_1+p_2+p_3=1$ alapján 1-gyel egyenlő. Azt kaptuk tehát, hogy

$$M(\xi\eta)=n(n-1)p_1p_2.$$

A keresett korrelációs együttható ezek után:

$$R(\xi,\eta)=\frac{n(n-1)p_1p_2-np_1np_2}{n\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}}=-\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}.$$

Látjuk, hogy ξ és η között negatív korreláció áll fenn. Ez várható is volt, hiszen ha a ξ által felvett érték nagy, akkor az η-nak szükségképpen kicsinek kell lennie.

497. *a)* A ξ perem-sűrűségfüggvénye az

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\, y)\, dy$$

képlet alapján számolva:

$$f_1(x)=\begin{cases} \frac{6}{5}\left(x+\frac{1}{3}\right), & \text{ha} \quad 0<x<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az η sűrűségfüggvényét hasonlóképpen számítva:

$$f_2(y)=\begin{cases} \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}+y^2\right), & \text{ha} \quad 0<y<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

b) A korrelációs együttható kiszámításához a következőkre van szükségünk:

$$M(\xi\eta)=\frac{6}{5}\int_0^1\int_0^1 xy(x+y^2)\, dx\, dy=\frac{7}{20},$$

továbbá a perem-sűrűségfüggvények ismeretében kiszámítható

$$M(\xi)=\frac{6}{5}\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{3}\right) dx=\frac{3}{5},$$

$$M(\xi^2)=\frac{6}{5}\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{3}\right) dx=\frac{13}{30},$$

$$D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}\approx 0{,}271,$$

és az η sűrűségfüggvénye felhasználásával adódó

$$M(\eta)=\frac{6}{5}\int_0^1 y\left(\frac{1}{2}+y^2\right) dy=\frac{3}{5},$$

$$M(\eta^2)=\frac{6}{5}\int_0^1 y^2\left(\frac{1}{2}+y^2\right) dy=\frac{11}{25}.$$

$$D(\eta)=\sqrt{M(\eta^2)-M^2(\eta)}\approx 0{,}283$$

mennyiségekre. A korrelációs együttható ezek után:

$$R(\xi,\, \eta)=0{,}522.$$

498. *a)* A 433. feladatban már kiszámítottuk a ξ és η perem-sűrűségfüggvényét. Láttuk, hogy ξ és η mindegyike standard normális eloszlású, azaz:

$$m_1 = M(\xi) = 0, \qquad \sigma_1 = D(\xi) = 1,$$

$$m_2 = M(\eta) = 0, \qquad \sigma_2 = D(\eta) = 1.$$

A korrelációs együttható felírásához még a $\xi \cdot \eta$ szorzat várható értékét kell kiszámítanunk:

$$M(\xi\eta) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}.$$

A ξ és η korrelációs együtthatója tehát

$$r = R(\xi, \eta) = \frac{1}{2}.$$

b) Annak igazolására, hogy (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású, azt kell megmutatni, hogy a fentiekben kiszámított m_1, m_2, σ_1, σ_2 és r értékek felhasználásával a kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvényének általános alakja, tehát az

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

függvény az általunk megadott

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$$

függvénnyel azonos. Könnyen belátható, hogy ez igaz.

499. A 433. *b)* feladatban láttuk, hogy a ξ $N(0, \sqrt{2})$ eloszlású, az η pedig $N(0, 1)$ eloszlású. A 474. feladatban már kiszámítottuk a $\xi\eta$ szorzat várható értékét is, erre $M(\xi\eta) = 1$ adódott. A korrelációs együttható ezek után:

$$r = R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi\eta) - m_1 m_2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

500. Az előző feladat, és a 433. *b)* feladat eredményeinek felhasználásával, a 478. feladatban adott képlet szerint:

$$D^2(\xi + \eta) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 r = 2 + 1 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5.$$

A 456. feladatban kiszámítottuk a ξ és η összegének sűrűségfüggvényét. Ebből megállapítottuk, hogy $\xi+\eta$ is normális eloszlású $m=0$ és $\sigma=\sqrt{5}$ paraméterértékekkel, vagyis a $\xi+\eta$ szórásnégyzete valóban 5-tel egyenlő.

501. Legyen ξ a vizsgált méretnek a várható értéktől való eltérése, η pedig ennek négyzete vagyis $\eta=\xi^2$. A ξ és η korrelációs együtthatója:

$$R(\xi,\eta)=\frac{M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=\frac{M(\xi^3)-M(\xi)M(\xi^2)}{D(\xi)D(\xi^2)}.$$

Mivel a feltevés szerint ξ normális eloszlású, és $m=M(\xi)=0$, $\sigma=1$, ezért

$$M(\xi^3)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx.$$

Az integrál értéke, mint az a

$$v'=-xe^{-\frac{x^2}{2}},\qquad v=e^{-\frac{x^2}{2}}$$

választás esetén parciális integrálással könnyen belátható, 0-val egyenlő. Könnyen igazolható az is, hogy $D(\xi^2)\neq 0$. A ξ és η korrelációs együtthatója ezek szerint

$$R(\xi,\eta)=R(\xi,\xi^2)=0.$$

A ξ és η tehát korrelálatlanok, de nyilvánvalóan nem függetlenek, hiszen köztük függvénykapcsolat áll fenn. (Ez újabb példa arra, hogy a korrelálatlanság még közelítőleg sem jelent függetlenséget!)

502. Az elszakadt szálak megkötözésére fordított időmennyiség: $\frac{1}{4}\xi$ perc. Az az időmennyiség, amelyet a munkás 1 órán belül nem szálkötözésre fordít, nyilván

$$\eta=60-\frac{1}{4}\xi \text{ perc.}$$

Mivel ξ és η között lineáris függvénykapcsolat áll fenn, és ξ együtthatója negatív, ezért

$$R(\xi,\eta)=-1.$$

503. Jelentse ξ a tárolt ládák számát, η legyen ezek össztérfogata és ζ a raktározási költség. A feladat feltételei értelmében nyilván

$$\eta=V\cdot\xi,$$

továbbá

$$\zeta=a+b\xi,$$

és itt a b nyilván pozitív. A raktározási költséget az η segítségével is kifejezhetjük, ez

$$\zeta=a+\frac{b}{V}\eta.$$

Ebből következik, hogy a keresett korrelációs együttható:

$$R(\eta, \zeta)=1,$$

mert a feltevés értelmében a $\frac{b}{V}$ együttható pozitív.

504. *a)* A perem-sűrűségfüggvények:

$$f_1(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{ha } -2<x<6, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$f_2(y)=\begin{cases} 2, & \text{ha } 2<y<2{,}5, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A peremeloszlások tehát egyenletes eloszlások. Mivel pedig az

$$f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

fennáll bármilyen (x, y) számpárra, ezért ξ és η függetlenek.

b) $P(0\leqq\xi\leqq 3,\ 0\leqq\eta\leqq 3)=P(0\leqq\xi\leqq 3)P(0\leqq\eta\leqq 3)=\frac{3}{8}$.

505. *a)* A perem-sűrűségfüggvények:

$$f_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}} \quad \text{és} \quad f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}}.$$

Ezek szerint ξ és η normális eloszlásúak, $M(\xi)=M(\eta)=0$, $D(\xi)=2$, $D(\eta)=\sqrt{2}$. Rögtön látjuk, hogy ξ és η függetlenek is.

b) $P(|\xi|\leqq 4)=P(-4\leqq\xi\leqq 4)=2\Phi(2)-1$,

$P(|\eta|\leqq 2\sqrt{2})=P(-2\sqrt{2}\leqq\eta\leqq 2\sqrt{2})=2\Phi(2)-1$,

a két valószínűség valóban egyenlő.

c) A ξ és η függetlensége miatt $M(\xi\cdot\eta)=M(\xi)M(\eta)=0$.

506. *a)* A c állandó értékét a következő egyenletből kapjuk:

$$\int_0^{+\infty}\int_1^4 ce^{-2x}\,dy\,dx=1.$$

Egyszerű számítással adódik: $c=\frac{2}{3}$. A perem-sűrűségfüggvények:

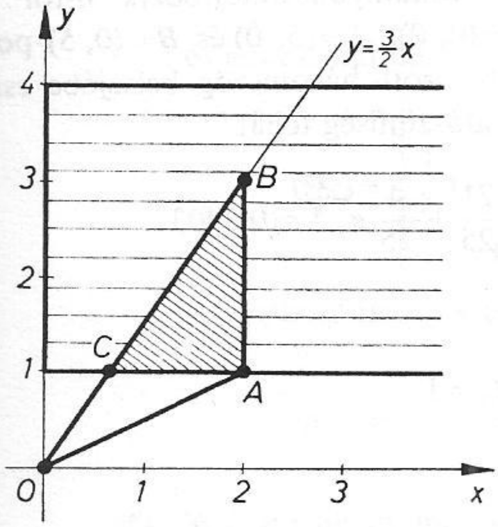
$$f_1(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ha } x>0, \\ 0, & \text{ha } x<0, \end{cases}$$

és

$$f_2(y)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ha } 1<y<4, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A ξ tehát exponenciális eloszlású, $M(\xi)=\frac{1}{2}$ várható értékkel; az η egyenletes eloszlású az (1, 4) intervallumon, $M(\eta)=\frac{5}{2}$. Azt is látjuk, hogy ξ és η függetlenek.

b) A kérdéses valószínűség kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $f(x, y)$ csak az $x>0$, $1<y<4$ egyenlőtlenségek által meghatározott tartományon különbözik 0-tól. Ezt a tartományt szemlélteti az 55. ábra, és feltünteti azt a háromszöget is, amelyre a kérdés vonatkozik.



55. ábra

A keresett valószínűséget az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény OAB háromszögre vonatkozó kettős integrálja adja. Ez azonban megegyezik az $u(x, y)=\frac{2}{3}e^{-2x}$ függvény ABC háromszögre vonatkozó kettős integráljával. Ha tehát P-vel jelöljük a keresett valószínűséget, akkor

$$P=\int_{1}^{3}\int_{\frac{2}{3}y}^{2}\frac{2}{3}e^{-2x}\,dx\,dy=\frac{1}{4}e^{-\frac{4}{3}}-\frac{5}{12}e^{-4}.$$

Felhasználva az exponenciális függvény értékeit tartalmazó táblázatot, P-re a következőt kapjuk:

$$P\approx 0{,}0585.$$

c) A ξ és η kovarianciájára, figyelembe véve az *a)* alatti észrevételeket, ezt kapjuk:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)=M(\xi)M(\eta)-M(\xi)M(\eta)=0.$$

507. Könnyen belátható, hogy a perem-sűrűségfüggvények normális eloszlásokat jellemeznek, $M(\xi)=0$, $D(\xi)=1$, $M(\eta)=1$, $D(\eta)=2$, és a két valószínűségi változó független.

Így $D(\xi+\eta)=\sqrt{D^2(\xi)+D^2(\eta)}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

508. *a)* A ξ, η együttes sűrűségfüggvénye a perem-sűrűségfüggvények szorzatával egyenlő, tehát

$$f(x, y)=\begin{cases} \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{4}y}, & \text{ha} \quad 0<x<5, \quad y>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

b) Az $\eta<5-\xi$ esemény — figyelembe véve, hogy ξ és η együttes sűrűségfüggvénye csak a $0<x<5$, $y>0$ tartományon különbözik 0-tól — ekvivalens azzal, hogy (ξ, η) az $O=(0, 0)$, $A=(5, 0)$ és $B=(0, 5)$ pontokkal mint csúcspontokkal meghatározott háromszög belsejébe esik. (Készítsünk vázlatot!) A keresett valószínűség tehát

$$P(\eta<5-\xi)=\int_0^5\int_0^{5-y}\frac{1}{4}e^{-\frac{5}{4}y}\,dx\,dy=\frac{21}{25}+\frac{4}{25}e^{-\frac{25}{4}}\approx 0{,}8403.$$

509. *a)* Az A értéke az

$$A\int_0^1\int_0^2\left(x+\frac{y}{2}\right)dy\,dx=1$$

egyenletből: $A=\frac{1}{2}$.

b) A perem-sűrűségfüggvények:

$$f_1(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0<x<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases} \frac{1}{4}(y+1), & \text{ha} \quad 0<y<2, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezekből rögtön látható, hogy ξ és η nem függetlenek, hiszen $f_1(x)f_2(y)=$ $=f(x, y)$ nem teljesül.

c) A perem-eloszlásfüggvények:

$$F_1(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 0, \\ \frac{x^2+x}{2}, & \text{ha} \quad 0<x\leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1<x. \end{cases}$$

$$F_2(y)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad y\leqq 0, \\ \frac{y^2+2y}{8}, & \text{ha} \quad 0<y\leqq 2, \\ 1, & \text{ha} \quad 2<y. \end{cases}$$

d) A keresett valószínűség:

$$P(\xi<1,\eta>1)=\frac{1}{2}\int_0^1\int_1^2\left(x+\frac{y}{2}\right)dy\,dx=\frac{5}{8},$$

vagy egyszerűbben:

$$P(\xi<1,\ \eta>1)=P(\eta>1)=1-P(\eta\leqq 1)=1-F_2(1)=\frac{5}{8}.$$

e) Legyen $G(z)$ a ζ eloszlásfüggvénye. Akkor

$$G(z)=P(2\xi-1<z)=P\left(\xi<\frac{z+1}{2}\right)=F_1\left(\frac{z+1}{2}\right),$$

és ennek alapján

$$G(z)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad z\leqq -1,\\ \frac{1}{8}(z^2+4z+3), & \text{ha} \quad -1<z\leqq 1,\\ 1, & \text{ha} \quad 1<z.\end{cases}$$

A sűrűségfüggvény ebből:

$$g(z)=G'(z)=\begin{cases}\frac{z+2}{4}, & \text{ha} \quad -1<z<1,\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

f) A ζ n-edik momentuma:

$$M(\zeta^n)=\int_{-1}^{1}z^n\frac{z+2}{4}\,dz=\frac{1}{4}\left[\frac{z^{n+2}}{n+2}+2\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{n+1}, & \text{ha} \quad n \text{ páros},\\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+2}, & \text{ha} \quad n \text{ páratlan}.\end{cases}$$

Ebből a várható érték és a szórás:

$$M(\zeta)=\frac{1}{6},\quad M(\zeta^2)=\frac{1}{3},\quad D^2(\zeta)=\frac{11}{36},\quad D(\zeta)=\frac{\sqrt{11}}{6}.$$

510. Az η várható értéke a $\xi\geqq x$ feltétel mellett:

$$M(\eta|\xi\geqq x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y|\xi\geqq x)\,dy=-\frac{1}{l(x)}\int_0^{\infty}y\frac{\partial l(x+y)}{\partial y}\,dy.$$

Alkalmazzuk most a parciális integrálás módszerét a

$$v'_y=\frac{\partial l(x+y)}{\partial y},\quad v=l(x+y)$$

választással, akkor a következőt kapjuk:

$$M(\eta|\xi \geqq x) = \frac{1}{l(x)} \int_0^\infty l(x+y)\,dy,$$

s ezt kellett megmutatni.

511. Jelentse ξ a megjelent látogatók számát, η pedig az előadáson megjelent nők számát. Az $M(\eta)$-t kell meghatároznunk. Ezt most az

$$M(\eta) = M(M(\eta|\xi))$$

képlet felhasználásával fogjuk elvégezni.

A $\xi = n$ feltétel mellett az η eloszlása nyilvánvalóan binomiális eloszlás, így

$$M(\eta|\xi = n) = np = 0{,}8n.$$

A keresett várható érték tehát

$$M(\eta) = \sum_{n=0}^{N} M(\eta|\xi = n)P(\xi = n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} 0{,}8n = 0{,}8\frac{N+1}{2}.$$

512. *a)* Az η várható értékét az előző feladatban követett módszer szerint számítjuk ki:

$$M(\eta) = M(M(\eta|\nu)) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\eta|\nu = n)P(\nu = n).$$

Mivel az η a $\nu = n$ feltétel teljesülése esetén n azonos eloszlású, — s így azonos várható értékkel rendelkező — valószínűségi változó összege, ezért az

$$M(\xi_j) = M(\xi) \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

jelöléssel:

$$M(\eta|\nu = n) = \sum_{j=1}^{n} M(\xi_j) = nM(\xi).$$

Az η várható értéke tehát

$$M(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} nM(\xi)P(\nu = n) = M(\xi)\sum_{n=1}^{\infty} nP(\nu = n) = M(\xi)M(\nu),$$

vagyis az η várható értéke a ξ várható értékének és a ν várható értékének szorzatával egyenlő.

b) A 447. feladatban definiált valószínűségi változókra alkalmazva ezt az eredményt, mivel ezekre

$$M(\xi_j) = M(\xi) = p \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

és

$$M(\nu) = \lambda,$$

az η várható értéke:

$$M(\eta) = M(\xi)M(\nu) = \lambda p.$$

(Ez az eredmény persze a 447. feladatra adott válaszból is következik, hiszen ott azt mutattuk meg, hogy az η Poisson-eloszlású λp paraméterrel. Vegyük azonban észre, hogy a most követett meggondolásokat követve, az η eloszlását nem is kellett meghatározni. Az alkalmazott képletnek ez az egyik igen nagy előnye.)

513. Ugyanúgy indulunk el, mint az előző feladatban.

$$M(\eta)=M(M(\eta|\nu))=\sum_{n=1}^{\infty} M(\eta|\nu=n)\,P(\nu=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} M(\xi_j)P(\nu=n).$$

Cseréljük föl itt az összegezés sorrendjét! Ezt úgy végezzük el, hogy sorban felírjuk a kettős szumma tagjait, az első sorba az $n=1$-nek, a másodikba az $n=2$-nek, majd a harmadikba az $n=3$-nak megfelelő tagokat, és így tovább; végül ezeket összegezzük „függőleges" irányban. A következőket kapjuk:

$$M(\eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} M(\xi_j)P(\nu=n)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} M(\xi_j)P(\nu=n)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j)\sum_{n=j}^{\infty} P(\nu=n)=\sum_{j=1}^{\infty} M(\xi_j)P(\nu\geqq j).$$

Ezt kellett bizonyítani.

Tegyük fel most, hogy a feladatban szereplő ξ_j valószínűségi változók mind azonos eloszlásúak, s így

$$M(\xi_j)=M(\xi) \qquad (j=1,\,2,\,\ldots).$$

Ez esetben

$$M(\eta)=M(\xi)\sum_{j=1}^{\infty} P(\nu\geqq j)=M(\xi)\sum_{i=1}^{\infty} iP(\nu=i)=M(\xi)M(\nu).$$

Itt a második lépésben szintén egy összeg átrendezését végeztük el ugyanúgy, mint az előbb, ugyanis

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\nu\geqq j)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty} P(\nu=i)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i} P(\nu=i)=\sum_{i=1}^{\infty} iP(\nu=i).$$

(Írjuk ki részletesen az összeg tagjait, akkor az átrendezés módja teljesen világossá válik!)

514. A 433. *b)* feladatban láttuk, hogy a ξ $N(0,\sqrt{2})$ eloszlású, tehát $M(\xi)=0$. Most azt kell megmutatnunk, hogy

$$M(M(\xi|\eta))=0$$

is fennáll. Ehhez újra felhasználjuk a 433. *b)* feladat egyik eredményét, mely szerint

$$f(x|y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-y)^2},$$

ezzel ugyanis

$$M(\xi|\eta=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x|y)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{1}{2}(x-y)^2}\,dx=y,$$

és így a keresett várható érték:

$$M(M(\xi|\eta))=\int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi|\eta=y)f_2(y)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=0,$$

s ezt kellett megmutatni. (Az η sűrűségfüggvényét szintén a 433. *b*) feladatból vettük.)

515. A (ξ, η) valószínűségeloszlásának táblázatát kiegészítjük a peremeloszlásokkal:

ξ \ η	0	1	ξ peremeloszlása
0	p	p	$2p$
1	p	$3p$	$4p$
2	$2p$	$4p$	$6p$
η peremeloszlása	$4p$	$8p$	1

$$p=\frac{1}{12}.$$

A táblázatból a ξ feltételes eloszlásai könnyen kiolvashatók. A következőket kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} P(\xi=0|\eta=0)&=\frac{1}{4},\\ P(\xi=1|\eta=0)&=\frac{1}{4},\\ P(\xi=2|\eta=0)&=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned} P(\xi=0|\eta=1)&=\frac{1}{8},\\ P(\xi=1|\eta=1)&=\frac{3}{8},\\ P(\xi=2|\eta=1)&=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right\}$$

A feltételes várható értékek:

$$M(\xi|\eta=0)=\frac{5}{4},\qquad M(\xi|\eta=1)=\frac{11}{8}.$$

A ξ-nek η-ra vonatkoztatott regressziós függvénye a következő táblázatban adott függvény:

y_k	0	1
$x=m_2(y_k)$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{8}$

Az η-nak ξ-re vonatkoztatott regressziós függvényét ugyanígy számítjuk ki.

A táblázatból:

$$\left.\begin{aligned} P(\eta=0|\xi=0)&=\frac{1}{2},\\ P(\eta=1|\xi=0)&=\frac{1}{2},\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} P(\eta=0|\xi=1)&=\frac{1}{4},\\ P(\eta=1|\xi=1)&=\frac{3}{4},\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} P(\eta=0|\xi=2)&=\frac{1}{3},\\ P(\eta=1|\xi=2)&=\frac{2}{3}.\end{aligned}\right\}$$

A feltételes várható értékek:

$$M(\eta|\xi=0)=\frac{1}{2}, \qquad M(\eta|\xi=1)=\frac{3}{4}, \qquad M(\eta|\xi=2)=\frac{2}{3}.$$

Így az η-nak ξ-re vonatkoztatott regressziós függvénye:

x_i	0	1	2
$y=m_1(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$

516. Felhasználva a 438. *b)* feladat eredményeit, a ξ-nek η-ra vonatkoztatott regressziós függvénye:

$$x=M(\xi|\eta=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)\,dx=\int_{0}^{\frac{y}{2}-1}\frac{2x}{2-y}\,dx=\frac{2-y}{4},$$

hacsak $0\leqq y\leqq 2$; vagy explicit alakban:

$$y=-4x+2 \qquad (0\leqq y\leqq 2).$$

Hasonlóképpen az η-nak ξ-re vonatkoztatott regressziós függvénye:

$$y=M(\eta|\xi=x)=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y|x)\,dy=\int_{0}^{2-2x}\frac{y}{2-2x}\,dy=1-x,$$

hacsak $0\leqq x\leqq 1$.

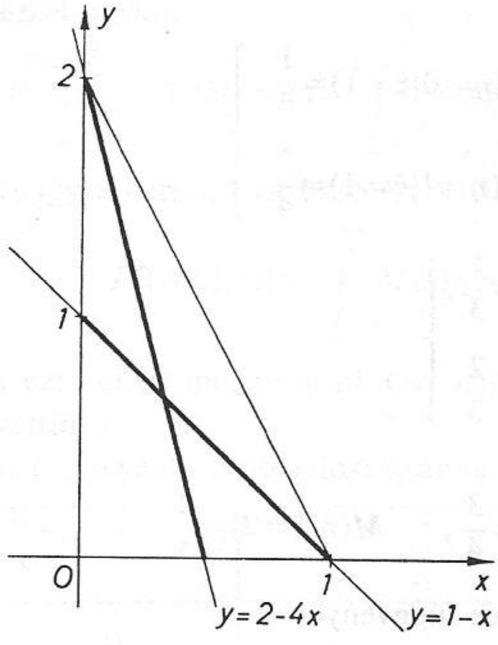
Az 56. ábrán ezeket a regressziós függvényeket is megrajzoltuk.

517. A $(\xi,\ \eta)$ most nyilvánvalóan egyenletes eloszlású az

$$x^2+y^2\leqq r^2, \qquad x\geqq 0, \qquad y\geqq 0$$

egyenlőtlenségekkel meghatározott negyedkörön. A ξ-nek η-ra vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}, \quad \text{ha} \quad x^2+y^2\leqq r^2, \quad x\geqq 0, \quad y\geqq 0,$$



56. ábra

és 0 vagy értelmetlen különben. Így a ξ-nek η-ra vonatkoztatott regressziós függvénye:

$$x=M(\xi|\eta=y)=\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} x\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}\,dx=\frac{\sqrt{r^2-y^2}}{2},\quad \text{ha}\quad 0\leqq y\leqq r,$$

és máshol nyilván nincs értelmezve.

Ezt a függvényt a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{r^2}=1\qquad (0\leqq y\leqq r,\ x\geqq 0),$$

s ebből látható, hogy a ξ-nek η-ra vonatkoztatott regressziós függvényét egy $\frac{r}{2}$, ill. r féltengelyű ellipszisív egy része ábrázolja.

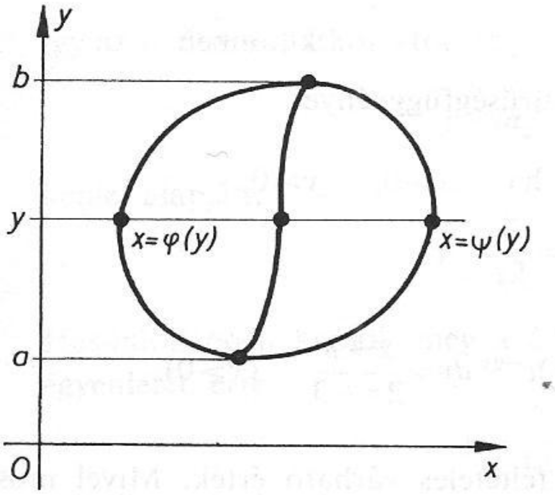
A másik regressziós függvényt ugyanígy meghatározhatjuk, grafikonjául ugyancsak egy ellipszisívet kapunk.

518. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye, $|T|$-vel jelölve a tartomány területét, a következő:

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|T|}, & \text{ha}\quad (x, y)\in T,\\ 0, & \text{ha}\quad (x, y)\notin T.\end{cases}$$

Jelöljük $x=\varphi(y)$-nal, ill. $x=\psi(y)$-nal a T tartományt határoló görbék egyenletét ($a \leqq y \leqq b$). Az η perem-sűrűségfüggvénye az 57. ábra alapján:

$$f_2(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{|T|}\displaystyle\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx=\dfrac{1}{|T|}[\psi(y)-\varphi(y)], & \text{ha} \quad a\leqq y\leqq b, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$



57. ábra

Az $f(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény pedig:

$$f(x|y)=\frac{f(x,\,y)}{f_2(y)}=\begin{cases} [\psi(y)-\varphi(y)]^{-1}, & \text{ha} \quad (x,\,y)\in T, \\ 0 \text{ vagy értelmetlen különben.} \end{cases}$$

A keresett feltételes várható érték tehát:

$$M(\xi|\eta=y)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)\,dx=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} x\frac{1}{\psi(y)-\varphi(y)}\,dx=\frac{\psi(y)+\varphi(y)}{2},$$

hacsak $a\leqq y\leqq b$, máskülönben nincs értelmezve. A feladat állítása innen már leolvasható.

Egyúttal megkaptuk a ξ-nek η-ra vonatkoztatott regressziós függvényét is, ennek egyenlete:

$$x=\frac{\psi(y)+\varphi(y)}{2} \qquad (a\leqq y\leqq b).$$

Az 57. ábrán ennek görbéjét is megrajzoltuk.

519. Most

$$f(x|y)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi}}e^{-\frac{2}{3}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2},$$

így a keresett regressziós függvény:

$$x=\frac{y}{2}, \quad \text{vagy} \quad y=2x.$$

520. A 433. *b)* feladat megoldásából:

$$x=m_1(y)=y, \quad \text{ill.} \quad y=m_2(x)=\frac{x}{2}.$$

521. A ξ perem-sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{5}\displaystyle\int_0^{\infty}(x+3y)e^{-x-2y}\,dy=\dfrac{e^{-x}}{5}(2x+3), & \text{ha} \quad x>0, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A η-nak ξ-re vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f(y|x)=\frac{4x+12y}{2x+3}e^{-2y}, \quad \text{ha} \quad x>0, \quad y>0,$$

így a keresett feltételes várható érték:

$$M(\eta|\xi=x)=\frac{4}{2x+3}\int_0^{\infty}(xy+3y^2)e^{-2y}\,dy=\frac{x+3}{2x+3} \quad (x>0).$$

522. Meghatározandó az $M(\xi|\eta=y,\ \zeta=z)$ feltételes várható érték. Mivel most a ξ, η és ζ függetlensége miatt

$$f(x|y,z)=\frac{f(x,y,z)}{f_2(y)f_3(z)}=f_1(x),$$

ezért

$$M(\xi|\eta=y,\ \zeta=z)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x|y,z)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=0.$$

A keresett regressziós függvény egyenlete tehát

$$x=0,$$

s ez az (Y,Z) tengelyek által meghatározott sík egyenlete.

523. Tekintsük az 515. feladat megoldásánál szereplő táblázatot. Ennek alapján

$$M(\xi\eta)=\frac{11}{12},$$

$$M(\xi)=\frac{16}{12}, \quad M(\xi^2)=\frac{28}{12}, \quad D(\xi)=\frac{4\sqrt{5}}{12},$$

$$M(\eta)=\frac{8}{12}, \quad M(\eta^2)=\frac{8}{12}, \quad D(\eta)=\frac{4\sqrt{2}}{12},$$

így a ξ, η korrelációs együtthatója:

$$R(\xi, \eta) = \frac{1}{4\sqrt{10}}.$$

Az adatok alapján a regressziós együttható:

$$r\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1}{20},$$

így az η ξ-re vonatkoztatott regressziós egyenesének egyenlete az

$$y - m_2 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$$

képlet alapján:

$$y - \frac{8}{12} = \frac{1}{20}\left(x - \frac{16}{12}\right).$$

Hasonlóképpen kapjuk meg a ξ η-ra vonatkoztatott regressziós egyenesének egyenletét, erre

$$y - \frac{8}{12} = 8\left(x - \frac{16}{12}\right)$$

adódik eredményül.

525. A 449. feladatban láttuk, hogy ζ és τ függetlenek. Mit mondhatunk ez esetben a regressziós függvényekről?

526. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$M(\xi) = m_1, \quad M(\eta) = m_2, \quad D(\xi) = \sigma_1, \quad D(\eta) = \sigma_2,$$
$$R(\xi, \eta) = r \quad \text{és} \quad \operatorname{cov}(\xi, \eta) = c = r\sigma_1\sigma_2,$$

akkor a regressziós egyenes együtthatói:

$$a = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \quad \text{és} \quad b = m_2 - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1.$$

A keresett várható érték tehát:

$$M(\zeta) = M(\eta - a\xi - b) = 0,$$

a ζ szórásnégyzete:

$$D^2(\zeta) = M(\zeta^2) = M\left[\left(\eta - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\xi - m_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}m_1\right)^2\right] = \sigma_2^2(1 - r^2),$$

így a ζ szórása:

$$D(\zeta) = \sigma_2\sqrt{1 - r^2}.$$

527. Most azt az a értéket kell megkeresnünk, amelyre

$$M((\eta - a\xi^2)^2) \to \text{minimális}.$$

Egyszerű számolással adódik az

$$S(a) = M((\eta - a\xi^2)^2) = M(\eta^2) - 2aM(\xi^2\eta) + a^2M(\xi^4)$$

függvény, amelyből a szerinti differenciálás után kapjuk meg azt az értéket, amelyre $S(a)$ minimális lesz. Erre

$$a=\frac{M(\xi^2\eta)}{M(\xi^4)}$$

adódik. A 475. feladat alapján

$$M(\xi^2\eta)=\frac{1}{5} \quad \text{és} \quad M(\xi^4)=\frac{1}{3},$$

így $a=\frac{3}{5}$, a keresett *regressziós parabola* egyenlete tehát:

$$y=\frac{3}{5}x^2.$$

528. *a)* Az empirikus regressziós egyenes felírásához szükséges adatokat a megadott táblázatban foglaljuk össze, ill. számítjuk ki.

Az $y=ax+b$ egyenes meghatározására szolgáló normálegyenletek:

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} x_i+nb&=\sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2+b\sum_{i=1}^{n} x_i&=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \end{aligned}\right\}$$

A táblázatban kiszámított adatokat felhasználva:

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i^2
1	0,4	8,5	0,16	3,40	72,25
2	0,7	9,0	0,49	6,30	81,00
3	0,9	8,6	0,81	7,74	73,96
4	1,2	8,0	1,44	9,60	64,00
5	1,2	7,8	1,44	9,36	60,84
6	1,1	7,5	1,21	8,25	56,25
7	1,4	6,9	1,96	9,66	47,61
8	1,5	6,5	2,25	9,75	42,25
9	1,5	6,6	2,25	9,90	43,56
10	1,3	6,5	1,69	8,45	42,25
Összesen:	11,2	75,9	13,70	82,41	583,97

$$\left.\begin{aligned} 11{,}2a+10b&=75{,}9, \\ 13{,}7a+11{,}2b&=82{,}41. \end{aligned}\right\}$$

Innen

$$a=-2{,}25 \quad \text{és} \quad b=10{,}11.$$

A regressziós egyenes egyenlete tehát:

$$y = -2{,}25x + 10{,}11.$$

b) Az empirikus korrelációs együttható kiszámításához előbb átalakítjuk a

$$\varrho(\xi, \eta) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[\Sigma(x_i - \bar{x})^2][\Sigma(y_i - \bar{y})^2]}}$$

képletet. Innen egyszerű számolással adódik a következő:

$$\varrho(\xi, \eta) = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2)(\Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2)}}.$$

Az összegezés mindkét képletben természetesen minden szóba jövő i értékre vonatkozik.

A táblázatban szereplő adatok alapján ebből

$$\varrho(\xi, \eta) = -0{,}8617$$

adódik, tehát a felhozatal és az egységár alakulása között — a jelen esetben — igen erős negatív kapcsolat áll fenn.

529. Legyen $\mathbf{x}^* = [x, y]$, $\mathbf{m}^* = [m_1, m_2]$, továbbá

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

a (ξ, η) kovarianciamátrixa. Mivel $c_{11} = D^2(\xi) = \sigma_1^2$, $c_{22} = \sigma_2^2$ és $c_{12} = c_{21} = \sigma_1\sigma_2 r$, ahol $r = R(\xi, \eta)$, ezért a kovarianciamátrix írható így is:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 r \\ \sigma_1\sigma_2 r & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó determináns:

$$|\mathbf{C}| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - r^2), \qquad \text{tehát} \qquad \sqrt{|\mathbf{C}|} = \sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r^2}.$$

A kovarianciamátrix inverzét az $|\mathbf{A}| \neq 0$ mellett érvényes, ismert

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

összefüggések alapján írhatjuk föl:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1 - r^2)}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_1\sigma_2 r \\ -\sigma_1\sigma_2 r & \sigma_1^2 \end{bmatrix}.$$

Ezek után

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}^* - \mathbf{m}^*)\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) = \frac{1}{2(1 - r^2)}\left[\frac{(x - m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x - m_1)(y - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y - m_2)^2}{\sigma_2^2}\right],$$

és így $n=2$-re valóban

$$f(\mathbf{x}^*)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\mathbf{C}|}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^*-\mathbf{m}^*)\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

Ezt kellett megmutatni.

530. Jelentse B_1 azt az eseményt, hogy a kivett termék az első napon készült, B_2 azt, hogy a második napon készült, és A jelentse azt, hogy a termék jó. A feltételekből ismertek a következő valószínűségek:

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2},$$

$$P(A|B_1)=0{,}90,\quad P(A|B_2)=0{,}96.$$

A teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot 0{,}90+\frac{1}{2}\cdot 0{,}96=0{,}93,$$

így

$$P(\bar{A})=1-P(A)=0{,}07.$$

Legyen most $\xi=1$, ha A teljesül, és legyen $\xi=0$, ha $\bar{A}$ teljesül. A ξ eloszlása ekkor

$$P(\xi=1)=0{,}93;\qquad P(\xi=0)=0{,}07.$$

A ξ eloszlásfüggvénye pedig:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha}\quad x\leqq 0,\\ 0{,}07, & \text{ha}\quad 0<x\leqq 1,\\ 1, & \text{ha}\quad 1<x.\end{cases}$$

A valószínűségeloszlás és az eloszlásfüggvény ábrája ugyanúgy készíthető, mint pl. a 301. feladat esetében.

531. Jelentse ξ a 20 elemű mintában szereplő selejtes darabok számát. A ξ nyilván hipergeometriai eloszlású, így

$$P(\xi=2)=\frac{\binom{0{,}05N}{2}\binom{0{,}95N}{18}}{\binom{N}{20}}.$$

Ha $N=20$, akkor a keresett valószínűség 0. Ha pedig $N=40$, akkor

$$P(\xi=2)=\frac{\binom{38}{18}}{\binom{40}{20}}=\frac{19}{78}=0{,}243.$$

532. A nyerés valószínűsége egy szelvénnyel: $p_1=\frac{n}{N}$. Két szelvénnyel játszva akkor nyerünk, ha legalább az egyikkel nyerünk. Ennek valószínűsége:

$$p_2=\frac{\binom{n}{2}+\binom{n}{1}\binom{N-n}{1}}{\binom{N}{2}}=p_1\frac{2N-n-1}{N-1}.$$

(Ezt a valószínűséget a

$$p_2=\frac{\binom{2}{1}\binom{N-2}{n-1}+\binom{2}{2}\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}}$$

képlettel is kiszámíthatjuk.)

Két szelvénnyel való játék esetén a nyerés valószínűsége kétszerese lesz az egy szelvénnyel való nyerés valószínűségének, ha

$$\frac{2N-n-1}{N-1}=2,$$

vagyis, ha $n=1$. Máskülönben a valószínűségek aránya mindig kisebb, mint 2.

533. Jelöljük p_i-vel annak valószínűségét, hogy egy lottózó egy szelvényen i találatot ér el ($i=0, 1, \ldots, 5$). Akkor annak valószínűsége, hogy ez a játékos egy szelvénnyel nem nyer: p_0+p_1. Annak valószínűsége, hogy 50 szelvénnyel nem nyer — feltételezve, hogy a szelvényeket egymástól függetlenül tölti ki — a következő lesz: $(p_0+p_1)^{50}$.

Annak valószínűsége tehát, hogy a játékos az 50 szelvény közül legalább az egyikkel nyer:

$$p=1-(p_0+p_1)^{50}=1-\left[\frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}+\frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}\right]^{50}.$$

534. Egy szelvénnyel való játék esetén a 2 találat valószínűsége:

$$p=\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Annak valószínűsége, hogy 10 szelvény közül hármon 2 találat lesz, s a többin nem két találat, a Bernoulli-probléma megoldása értelmében:

$$p=\binom{10}{3}p^3(1-p)^7=\binom{10}{3}\left[\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}\right]^3\cdot\left[1-\frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}\right]^7.$$

535. Jelentse ξ a 10 elemű mintában levő hibás üveglapok számát, az η pedig legyen 0, ha a minta az első szállítmányból származik, és legyen 1, ha a másodikból. Feltehetjük, hogy

$$P(\eta=1)=P(\eta=0)=\frac{1}{2},$$

hiszen mindkét szállítmányból ugyanannyi üveg van raktáron.

Meghatározandó a $P(\xi=0)$ valószínűség. A teljes valószínűség tétele szerint ez:

$$P(\xi=0)=P(\xi=0\,|\,\eta=0)P(\eta=0)+P(\xi=0\,|\,\eta=1)P(\eta=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{30}{10}+\binom{40}{10}}{\binom{50}{10}}.$$

536. Számításaink során először az

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

azonosságot használjuk fel. Mivel hipergeometriai eloszlásról van szó,

$$M(\xi^2)=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{\binom{s}{k}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}=s\sum_{k=1}^{n}k\frac{\binom{s-1}{k-1}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}=$$

$$=s\sum_{k=1}^{n}[(k-1)+1]\frac{\binom{s-1}{k-1}\binom{N-s}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Az utolsó összeget bontsuk két részre, és alkalmazzuk az előbbi azonosságot és a 99. feladat első képletét, akkor:

$$M(\xi^2)=s(s-1)\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=2}^{n}\binom{s-2}{k-2}\binom{N-s}{n-k}+s\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{s-1}{k-1}\binom{N-s}{n-k}=$$

$$=s(s-1)\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}}+s\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=s(s-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)}+s\frac{n}{N}.$$

Ismeretes viszont, hogy

$$M(\xi)=n\frac{s}{N},$$

így a hipergeometriai eloszlás szórásnégyzete:

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)=n\frac{s}{N}\left[(s-1)\frac{n-1}{N-1}-n\frac{s}{N}+1\right]=$$

$$=n\frac{s}{N}\left(1-\frac{s}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}=npq\frac{N-n}{N-1}.$$

Az utolsó lépésnél bevezettük a $p=\frac{s}{N}$ és $q=1-p$ jelöléseket, s ezzel megkaptuk a hipergeometriai eloszlás szórásnégyzetének ismert képletét.

537. *a)* Visszatevés nélküli mintavétel esetén a mintában levő selejtesek száma hipergeometriai eloszlású. Mivel most $s=4$, ezért az eloszlás várható értékére fennáll az

$$np=\frac{ns}{N}=\frac{4n}{N}=2$$

egyenlőség, ebből pedig $n=\frac{N}{2}$ következik. A szórásnégyzetre vonatkozólag a feltevés szerint

$$npq\frac{N-n}{N-1}=2\left(1-\frac{4}{N}\right)\frac{N}{2(N-1)}=\frac{2}{3},$$

innen pedig $N=10$, tehát $n=5$.

A keresett valószínűség most már:

$$P(\xi\leqq 2)=1-P(\xi>2)=1-P(\xi=3)-P(\xi=4)=$$

$$=1-\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{2}+\binom{4}{4}\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}}=\frac{31}{42}.$$

b) Ha visszatevéses mintavételről van szó, akkor az

$$np=n\frac{s}{N}=n\frac{4}{N}=2 \quad \text{és} \quad npq=2\left(1-\frac{4}{N}\right)=\frac{2}{3}$$

egyenletekből $N=6$, $n=3$, és így $P(\xi\leqq 2)=\frac{19}{27}$.

538. Vizsgáljuk meg a

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}=\frac{(s-k+1)(n-k+1)}{k(N-s-n+k)}$$

hányadost. A p_k számsorozat nő azokra a k értékekre, amelyekre e hányados 1-nél nagyobb, fogy, ha ez a hányados 1-nél kisebb, és egyenlő azokra a k értékekre, amelyekre e hányados 1-gyel egyenlő. A

$$\frac{p_k}{p_{k-1}}\gtreqless 1$$

egyenlőtlenségekből a

$$k \lesseqgtr \frac{(n+1)(s+1)}{N+2}$$

egyenlőtlenségek adódnak.

Most két esetet különböztetünk meg.

1° Ha $\frac{(n+1)(s+1)}{N+2}=k_0$ egész szám, akkor $\frac{p_{k_0}}{p_{k_0-1}}=1$, vagyis $p_{k_0}=p_{k_0-1}$. Ekkor mindkét tag a maximális értéket jelenti, hiszen a p_k sorozat a k_0-1 indexig nő, a k_0-1-edik és k_0-adik tag egyenlő, és a k_0-nál nagyobb indexekre fogy.

2° Ha viszont $\frac{(n+1)(s+1)}{N+2}$ nem egész szám, akkor mindazokra a k értékekre, amelyekre

$$k \leqq \left[\frac{(n+1)(s+1)}{N+2}\right]$$

— itt a szögletes zárójel az egész rész-függvény jele —, $p_k > p_{k-1}$, azokra a k értékekre pedig, amelyekre

$$k > \left[\frac{(n+1)(s+1)}{N+2}\right],$$

$p_k < p_{k-1}$, így ez esetben a sorozat a

$$k_0 = \left[\frac{(n+1)(s+1)}{N+2}\right]$$

helyen veszi fel maximális értékét.

539. Most $N=100$, $s=9$, $n=50$. Mivel az

$$\frac{(n+1)(s+1)}{N+2}=5$$

egész szám, ezért a hipergeometriai eloszlás tagjai között két legnagyobb is van; mégpedig az előző feladat értelmében a $k=4$ és $k=5$ selejtszám fordul elő a legnagyobb valószínűséggel.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $p_4=p_5$, ugyanis

$$\frac{\binom{9}{4}\binom{91}{46}}{\binom{100}{50}} = \frac{\binom{9}{5}\binom{91}{45}}{\binom{100}{50}},$$

hiszen a binomiális együtthatók szimmetriatulajdonsága értelmében

$$\binom{9}{4}=\binom{9}{5}, \quad \text{és} \quad \binom{91}{46}=\binom{91}{45}.$$

540. Legyen ξ a dobozban levő csavarok száma, akkor ξ lehetséges értékei: 51, 52, ..., 80 és a ξ valószínűségeloszlása:

$$P(\xi=N)=\frac{1}{30} \quad (N=51,\ 52,\ \ldots,\ 80).$$

Jelentse η a 20 elemű mintában levő selejtesek számát. Az η várható értékét kell meghatározni. Ehhez az

$$M(\eta)=M(M(\eta|\xi))$$

képletet használjuk fel, mert a dobozokban levő csavarok száma is valószínűségi változó.

Az η eloszlása a $\xi=N$ feltétel mellett:

$$P(\eta=k|\xi=N)=\frac{\binom{10}{k}\binom{N-10}{20-k}}{\binom{N}{20}} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 10),$$

tehát hipergeometriai eloszlás, így az η feltételes várható értéke:

$$M(\eta|\xi=N)=20\frac{10}{N}=\frac{200}{N} \quad (N=51,\ 52,\ \ldots,\ 80).$$

Az η feltétel nélküli várható értéke pedig az előbb említett képlet felhasználásával:

$$M(\eta)=M(M(\eta|\xi))=\sum_{N=51}^{80} M(\eta|\xi=N)P(\xi=N)=$$

$$=\frac{1}{30}\sum_{N=51}^{80}\frac{200}{N}=\frac{20}{3}\sum_{N=51}^{80}\frac{1}{N}.$$

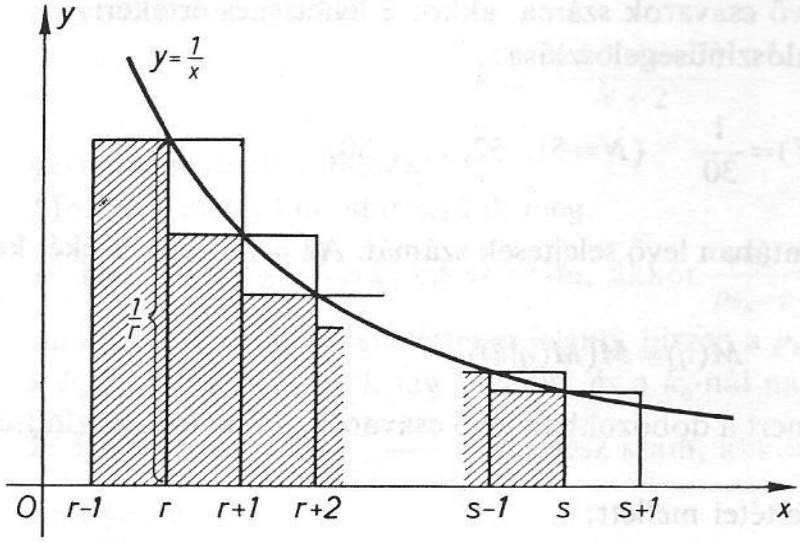
Az e kifejezésben szereplő összeget numerikusan pl. kézi számológép segítségével kiszámíthatjuk.

Számítás helyett jó becslést kaphatunk rá az 58. ábra alapján is. Erről ugyanis leolvasható, hogy

$$\int^{s+1}\frac{dx}{x}<\sum_{N=r}^{s}\frac{1}{N}<\int_{r-1}^{s}\frac{dx}{x},$$

tehát

$$\int_{51}^{81}\frac{dx}{x}<\sum_{N=51}^{80}\frac{1}{N}<\int_{50}^{80}\frac{dx}{x}.$$



58. ábra

Mivel pedig $\ln 80-\ln 50=\ln\frac{8}{5}\approx 0{,}47$, és $\ln 81-\ln 51=\ln\frac{27}{17}\approx 0{,}46$, ezért

$$0{,}46<\sum_{N=51}^{80}\frac{1}{N}<0{,}47.$$

Tehát

$$3{,}16<M(\eta)<3{,}22.$$

541. Tegyük fel, hogy a két gépen készült termékeket összekeverték. Akkor az elkészült munkadarabok száma 260, ezek között selejtes 10, így annak valószínűsége, hogy a 20 elemű mintában 2 selejtes lesz:

$$p_2=\frac{\binom{10}{2}\binom{250}{18}}{\binom{260}{20}}.$$

Ha azt feltételezzük, hogy az elkészült munkadarabokat a műszak után nem keverik össze, és a 20 elemű mintát csak az egyik vagy csak a másik gép termékeiből húzzuk, akkor a kérdéses valószínűséget a teljes valószínűség tételével számíthatjuk ki.

A feladat megoldásához binomiális eloszlást is feltételezhetünk, mert elég sok elemet tartalmazó halmazból vesszük a mintát.

543. *a)* Jelentse ξ a zavartalan nyersanyagellátású napok számát. Akkor

$$P(\xi=3)=\binom{6}{3}0{,}75^3\cdot 0{,}25^3.$$

b) Az egy heti zavartalan ellátású napok számának várható értéke $6\cdot 0{,}75=$ $=4{,}5$ (nap).

544. Legyen ξ a fiúk száma egy 6 gyermekes családban. Akkor

$$P(\xi \geqq 3) = \sum_{k=3}^{6} \binom{6}{k} 0{,}516^k \cdot 0{,}484^{6-k}.$$

546. Annak valószínűsége, hogy egy 5 elemű minta hibátlan:

$$P_0 = \frac{\binom{98}{5}}{\binom{100}{5}}.$$

Így annak valószínűsége, hogy mind az öt minta hibátlan alkatrészeket tartalmaz:

$$P = p_0^5 = \left(\frac{95 \cdot 94}{100 \cdot 99}\right)^5.$$

547. A keresett valószínűség:

$$P = \sum_{k=0}^{4} \binom{20}{k} 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{20-k}.$$

548. Nem megfelelő egy alkatrész, ha mérete a tűréshatárokon kívülre esik. Ennek valószínűsége:

$$p = 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}08,$$

ez tehát a selejtarány. A keresett valószínűség pedig:

$$P = \binom{50}{6} 0{,}08^6 \cdot 0{,}92^{44}.$$

549. Mivel visszatevéses mintavételről van szó, a feltétel szerint fennáll a

$$\binom{6}{3} p^3 (1-p)^3 = \frac{4}{25}$$

egyenlet. A rendezés és köbgyökvonás után adódó egyenletből:

$$p_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} = \begin{cases} 0{,}73, \\ 0{,}27. \end{cases}$$

550. *a)* Jelentse ξ az egy nap alatt készült selejtes darabok számát. Ekkor ξ binomiális eloszlású, így

$$M(\xi) = 12 = np,$$

$$D^2(\xi) = 3{,}41^2 = 11{,}63 = npq.$$

Ezekből az egyenletekből

$$q = 0{,}97; \quad p = 0{,}03; \quad n = 400.$$

b) A kérdéses valószínűség:

$$P(\xi < 10) = \sum_{k=0}^{9} \binom{400}{k} 0{,}03^k \cdot 0{,}97^{400-k}.$$

Mivel a p elég kicsi, és n elég nagy, alkalmazhatjuk a Poisson-eloszlással való közelítést. Ekkor

$$P(\xi < 10) = \sum_{k=0}^{9} \frac{12^k}{k!} e^{-12} = 0{,}2424.$$

551. A ξ valószínűségeloszlása:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Tegyük fel, hogy e sorozat elemei közül a k_0 indexű a legnagyobb. Ekkor

$$p_{k_0-1} \leqq p_{k_0} \qquad \text{és} \qquad p_{k_0+1} \leqq p_{k_0}.$$

Az első esetben:

$$\frac{p_{k_0}}{p_{k_0-1}} = \frac{n-k_0+1}{k_0}\,\frac{p}{q} \geqq 1, \qquad \text{vagyis} \qquad k_0 \leqq (n+1)p.$$

A második esetben:

$$\frac{p_{k_0}}{p_{k_0+1}} = \frac{k_0+1}{n-k_0}\,\frac{q}{p} \geqq 1, \qquad \text{vagyis} \qquad k_0 \geqq (n+1)p-1.$$

A két egyenlőtlenségből k_0-ra a következő korlátokat kapjuk:

$$(n+1)p-1 \leqq k_0 \leqq (n+1)p.$$

Most két esetet különböztetünk meg.

1. Ha $(n+1)p$ nem egész szám, akkor mivel az $[(n+1)p-1\,;\,(n+1)p]$ intervallum egységnyi hosszúságú, a k_0 érték egyértelműen:

$$k_0 = [(n+1)p].$$

Itt a szögletes zárójel az egészrész-függvény jele, k_0 tehát egyenlő az $(n+1)p$ számot közvetlenül megelőző egész számmal.

2. Ha $(n+1)p$ egész szám, akkor a k_0-ra kapott egyenlőtlenség két értéket is „engedélyez". Mivel ebben az esetben

$$\frac{p_{(n+1)p}}{p_{(n+1)p-1}} = \frac{n-(n+1)p+1}{(n+1)p}\,\frac{p}{1-p} = 1,$$

ezért a két érték egyenlő valószínűséggel következik be, a többi valószínűség viszont ezeknél mind kisebb.

552. Az előző feladat értelmében a maximális valószínűséget a

$$k_0 = [(n+1)p] = \left[(n+1)\frac{s}{N}\right]$$

értékre kapjuk, ha $(n+1)p$ nem egész szám. A jelen esetben

$$(n+1)p = 5!\,\frac{9}{100} = 4{,}59,$$

így a legnagyobb valószínűséggel a $k_0 = 4$ selejtszám fog előfordulni a kérdéses mintában.

553. Tegyük fel, hogy n lövést kell leadni. Annak valószínűsége, hogy legalább 10 lövés találjon:

$$p_{10} = \sum_{k=10}^{n} \binom{n}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{n-k}.$$

Ezt az esemény komplementerére vonatkozó tétel szerint így is írhatjuk:

$$p_{10} = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{n}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{n-k}.$$

A feltétel szerint ennek nagyobbnak kell lennie 0,9-nél, vagy egyenlőnek kell lennie vele, tehát

$$1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{n}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{n-k} \geqq 0{,}9.$$

Ebből az egyenlőtlenségből az összeget kifejezzük, és átalakítjuk, hogy a binomiális eloszlásra adott táblázatot használni tudjuk. Ekkor

$$\sum_{k=0}^{9} \binom{n}{k} 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{n-k} = \sum_{k=0}^{9} \binom{n}{n-k} 0{,}2^{n-k} \cdot 0{,}8^k \leqq 0{,}1.$$

További egyszerűsítés végett vezessük be az $n-k=i$ helyettesítést. Ekkor

$$\sum_{i=n-9}^{n} \binom{n}{i} 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{n-i} \leqq 0{,}1$$

adódik. Ezt az egyenlőtlenséget a táblázatból való visszakereséssel oldjuk meg. Ehhez azt kell megnézni, melyik az az első n szám, amelyre a $p=0{,}2$ oszlopban álló utolsó 10 szám összege kisebb 0,1-nél, vagy egyenlő vele.
Azt találjuk, hogy $n=14$-re a kérdéses összeg még 0,1297, és $n=15$-re már 0,0611, így tehát legalább 15 lövést kell leadni ahhoz, hogy 90% biztonsággal legalább 10 találatot érjen el a löveg.

554. Dobjuk fel a kockát n-szer. Akkor annak valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk 6-ost:

$$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Annak valószínűsége, hogy egyszer dobunk 6-ost:

$$\binom{n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

Így annak a valószínűsége, hogy legalább kétszer 6-ost dobunk, a komplementer eseményre vonatkozó tétel alapján:

$$p=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\geqq\frac{1}{2}.$$

Ebből a következőket kapjuk:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n+n\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{n}{6}\right)\leqq\frac{1}{2},$$

illetve:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\leqq\frac{3}{n+5}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget pl. grafikus úton megoldva $\left[\text{az } y=\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\right.$ és $y=\frac{3}{x+1}$ függvények ábrázolásával], $n\geqq 10$ adódik.

555. A keresett valószínűség:

$$P=\sum_{k=90}^{100}\binom{100}{k}0{,}95^k\cdot 0{,}05^{100-k}.$$

A binomiális együtthatók szimmetriatulajdonságát felhasználva és a $100-k=i$ új változót bevezetve,

$$P=\sum_{i=0}^{10}\binom{100}{i}0{,}05^i\cdot 0{,}95^{100-i}$$

adódik. Ezt az összeget a Poisson-eloszlással való közelítéssel a következőképpen számíthatjuk ki:

$$P=\sum_{i=0}^{10}\frac{5^i}{i!}e^{-5}=0{,}9864.$$

556. Legyen ξ_1 az első napi termésből vett mintában levő selejtesek száma, a ξ_2 jelentse ugyanezt a második napi termésből vett mintára vonatkozólag. Nyilvánvaló, hogy a ξ_1 binomiális eloszlású p és n_1 paraméterekkel, a ξ_2 pedig szintén binomiális eloszlású, p és n_2 paraméterekkel. Ezek összege tehát p, n_1+n_2 paraméterekkel rendelkező binomiális eloszlás, tehát

$$P(\xi_1+\xi_2=k)=\binom{n_1+n_2}{k}p^k(1-p)^{n_1+n_2-k},$$

ahol $k=0, 1, 2, \ldots, n_1+n_2$.

Tekintsük most a második napon készült termékek halmazát. Ha ebből egy n_1+n_2 elemű mintát veszünk, akkor

$$P(\eta=k)=\binom{n_1+n_2}{k}p^k(1-p)^{n_1+n_2-k}$$

adódik ($k=0, 1, 2, \ldots, n_1+n_2$). Itt η az n_1+n_2 elemű mintában levő selejtesek számát jelenti.

A két kiszámított valószínűség egyenlő. Mi következik ebből?

557. A feladatot a teljes valószínűség tétele segítségével oldjuk meg. Legyen

B_i: az i-edik gépet választják ki ($i=1, 2, \ldots, N$).

A_k: a mintában k selejtes van ($k=0, 1, 2, \ldots, n$).

Ekkor

$$P(A_k)=\sum_{i=1}^{N} P(B_i)P(A_k|B_i)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\binom{n}{k}p_i^k(1-p_i)^{n-k}.$$

558. Annak valószínűsége, hogy 2000 lövés közül k számú talál, és a többi nem:

$$p_k=\binom{2000}{k}0{,}001^k\cdot 0{,}999^{2000-k}\qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 2000).$$

A keresett valószínűség tehát:

$$P=1-p_0-p_1=1-\sum_{k=0}^{1}\binom{2000}{k}0{,}001^k\cdot 0{,}999^{2000-k}.$$

A Poisson-közelítést alkalmazva, mivel $np=2$, a táblázat alapján:

$$P=1-\sum_{k=0}^{1}\frac{2^k}{k!}e^{-2}=1-0{,}1353-0{,}2707=0{,}5940.$$

559. A befizetett összeg: 120 000 Ft.

a) A társaságnak nem lesz nyeresége, ha a biztosítottak közül legalább

$$k=\frac{120\,000}{4000}=30$$

személy meghal. Ennek valószínűsége:

$$P=\sum_{k=30}^{10\,000}\binom{10\,000}{k}0{,}002^k\cdot 0{,}998^{10\,000-k}.$$

Poisson-eloszlással közelítve:

$$P=\sum_{k=30}^{10\,000}\frac{20^k}{k!}e^{-20}=0{,}0218.$$

b) Hogy a társaságnak 40 000 Ft-ja megmaradjon, legfeljebb

$$\frac{120\,000-40\,000}{4000}=20$$

ember halhat meg. Ennek valószínűsége — ugyanúgy számolva, mint az előbb — a Poisson-eloszlás táblázatából: 0,5590.

560. Tegyük fel, hogy a megbetegedések egymástól függetlenek (pl. azért, mert nincs járvány). Akkor annak valószínűsége, hogy az 1200 lakó közül k számú a meghatározott napon beteg lesz:

$$p_k=\binom{1200}{k}0{,}002^k\cdot 0{,}998^{1200-k}\qquad (k=0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 1200).$$

Jelöljük n-nel a betegágyak számát. Az a kikötés, hogy legfeljebb 1% legyen annak valószínűsége, hogy egy beteg ne kapjon ágyat, azt jelenti, hogy az n számnak olyannak kell lennie, hogy a

$$P(\xi>n)=\sum_{k=n+1}^{1200}\binom{1200}{k}0{,}002^k\cdot 0{,}998^{1200-k}\leqq 0{,}01$$

teljesüljön. Itt ξ a betegek számát jelenti.
Most is alkalmazhatjuk a Poisson-eloszlással való közelítést. Ekkor

$$P(\xi>n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2{,}4^k}{k!}e^{-2{,}4}.$$

Ez a valószínűség $n=7$ esetén 0,0034-del egyenlő, $n=6$ esetén 0,0117, így tehát legalább 7 betegágyat kell biztosítani az adott körülmények között.

561. Legyen a naponta feladott levelek száma N. Annak valószínűsége, hogy egy levelet címzés nélkül adtak fel, legyen p. Annak valószínűsége, hogy egy nap alatt k számú címzetlen levelet adtak föl, a binomiális eloszlás szerint:

$$p_k=\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}.$$

Ha N elég nagy, és p természetesen elég kicsi (ez nyilván feltehető), akkor ez a valószínűség jól közelíthető Poisson-eloszlással. Mivel most

$$Np\approx\frac{1017}{365}\approx 2{,}8=\lambda,$$

így annak valószínűsége, hogy 2-nél több címzés nélküli levelet adtak fel egy napon:

$$P=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{2{,}8^k}{k!}e^{-2{,}8}=0{,}531.$$

562. Számítsuk ki a polinomiális eloszlás határértékét a feladatban adott feltételek mellett. Ekkor, ha $np_1=\lambda$ és $np_2=\mu$ pozitív állandók:

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{i!\,j!\,(n-i-j)!}p_1^i p_2^j(1-p_1-p_2)^{n-i-j}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^i n^j(n-i-j)!}\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\cdot\frac{\mu^j}{j!}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{n}\right)^{n-i-j}.$$

Az így kapott szorzat első tényezője nyilván 1-hez tart, ha n tart a végtelenhez, ugyanis a számláló az $(n-i-j)!$-sal való egyszerűsítés után n-ben $i+j$-edfokú polinom, és ebben n^{i+j} együtthatója 1, a nevező pedig n^{i+j}-nel egyenlő, s ezek hányadosa valóban 1-hez tart.
A második és harmadik tényező állandó, n-től független.

A harmadik tényező a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n+b}=e^{a} \quad (a \text{ és } b \text{ állandók})$$

reláció szerint $e^{-(\lambda+\mu)}$-höz tart, tehát

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}=\frac{\lambda^{i}}{i!}\,\frac{\mu^{j}}{j!}\,e^{-(\lambda+\mu)},$$

s ezt kellett bizonyítani.

563. Feltételezzük, hogy a csillaghullások száma Poisson-eloszlású. Akkor, ha 10 percenként átlagosan 1 csillaghullás észlelhető, 15 percenként 1,5 lesz a „lehullott" csillagok átlagos száma, tehát $\lambda=1{,}5$. Annak valószínűsége, hogy ez alatt az idő alatt két csillaghullást látunk:

$$p=\frac{1{,}5^{2}}{2!}\,e^{-1{,}5}=0{,}2510.$$

564. Jelentse ξ a selejtes üvegek számát. Ekkor

$$a)\quad P(\xi=10)=\binom{1000}{10}\left(\frac{3}{200}\right)^{10}\left(\frac{197}{200}\right)^{990}\approx\frac{15^{10}}{10!}\,e^{-15}.$$

$$b)\quad P(\xi\geqq 10)=1-P(\xi<10)=1-\sum_{k=0}^{9}\frac{15^{k}}{k!}\,e^{-15}.$$

565. Poisson-eloszlást feltételezünk.

Egy 5 dkg-os tésztába átlagosan $\frac{30}{20}=1{,}5$ mazsolaszem jut, így annak valószínűsége, hogy a mazsolaszemek száma 2-nél nagyobb:

$$P=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1{,}5^{k}}{k!}\,e^{-1{,}5}=1-\sum_{k=0}^{2}\frac{1{,}5^{k}}{k!}\,e^{-1{,}5}=0{,}1912.$$

566. Az egy lapra eső sajtóhibák száma átlagosan $\frac{200}{500}=\frac{2}{5}$. Így 10 lapra átlagosan 4 sajtóhiba jut. Tehát annak valószínűsége, hogy 10 lapra nem kerül sajtóhiba:

$$P_{0}=\frac{4^{0}}{0!}\,e^{-4}=e^{-4}.$$

567. Mivel 100 méterben a hibák száma 5, így 3 méterben átlagosan 0,15 hiba található. Annak valószínűsége, hogy egy 3 méteres darabban nincs hiba:

$$p_{0}=e^{-0{,}15}\approx 0{,}86,$$

így a 100 darab 3 méteres anyagban előreláthatóan 86 lesz a hibátlan darabok száma.

568. Mivel egy lemezből 25 darab egyenlő nagyságú idomot vágnak ki, és a hulladék elhanyagolható, ezért egy idomra átlagosan

$$\lambda_1 = \frac{3{,}5}{25} = 0{,}14$$

hiba jut. Annak valószínűsége, hogy egy ilyen idom hibátlan lesz:

$$P_0 = e^{-0{,}14} = 0{,}8694,$$

vagyis az összes idomok között átlag 87% lesz a hibátlanok száma. Ezek szerint ahhoz, hogy 500 000 hibátlan idomot kapjanak a szállított lemezekből, körülbelül 23 000 lemezt kell megrendelni.

569. *a)* A hibák száma Poisson-eloszlású, így a k hibát tartalmazó táblák száma várhatóan $1000P(\xi=k)$, ahol ξ jelenti a hibák számát. Eszerint 1000 táblára vonatkozóan:

Hibaszám	Táblák száma
0	449
1	360
2	144
3	38
4	8
5	1
6	0

b) Ha a két hibánál többet tartalmazó táblákat az üveggyárban kiselejtezik, akkor a k számú hibát tartalmazó üvegtáblák száma $1000\,P(\xi=k|0\leqq\xi\leqq 2)$. Az itt szereplő feltételes eloszlás így is írható:

$$P(\xi=k|0\leqq\xi\leqq 2) = \frac{P(\xi=k,\ 0\leqq\xi\leqq 2)}{P(0\leqq\xi\leqq 2)} = \frac{P(\xi=k)}{0{,}9526},$$

ahol $k=0,\ 1,\ 2$. Ennek felhasználásával 1000 üvegtáblára vonatkozóan:

Hibaszám	Táblák száma
0	472
1	377
2	151

570. A feltételek alapján η Poisson-eloszlásúnak tekinthető. Mivel 10 000 óra alatt átlagosan 10 berendezés romlik el, ezért

$$P(\eta=k)=\frac{10}{k!}e^{-10} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

és így $P(\eta\leqq 10)=0{,}583$.

571. Az adott, és számított adatokat a következő táblázatban foglaltuk össze (az utolsó oszlopot a Poisson-eloszlás táblázatából vettük, interpolációt végezve):

Az aranyszemcsék száma	Az aranyszemcsék gyakorisága	Az aranyszemcsék relatív gyakorisága	Az $\frac{1{,}55^k}{k!}e^{-1{,}55}$ eloszlás tagjai
0	112	$\frac{112}{518}\approx 0{,}216$	0,213
1	168	$\frac{168}{518}\approx 0{,}325$	0,328
2	130	$\frac{130}{518}\approx 0{,}251$	0,254
3	69	$\frac{69}{518}\approx 0{,}131$	0,132
4	32	$\frac{32}{518}\approx 0{,}062$	0,051
5	5	$\frac{5}{518}\approx 0{,}010$	0,016
6	1	$\frac{1}{518}\approx 0{,}002$	0,004
7	1	$\frac{1}{518}\approx 0{,}002$	0,001

572. *a)* Jelöljük a ξ_t eloszlását $P_t(k)$-val, vagyis legyen

$$P_t(k)=P(\xi_t=k) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

és hasonlóképpen legyen

$$Q_t(j)=P(\eta_t=j) \quad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

és

$$R_{2t}(i)=P(\zeta_{2t}=i) \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

A feltételekből nyilvánvaló, hogy

$$\zeta_{2t}=\xi_t+\eta_t,$$

így, mivel az összeg tagjai függetlenek:

$$R_{2t}(i)=\sum_{k=0}^{i} P_t(k)\cdot Q_t(i-k) \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

b) Ha ξ_t és η_t Poisson-eloszlású, és egységnyi idő alatt átlagosan λ számú hívás fut be, akkor a t idő alatt befutó hívások átlagos száma: λt. A ξ_t és η_t eloszlása tehát:

$$P_t(k)=Q_t(k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

A $2t$ hosszúságú időtartam alatt befutó hívások számának eloszlása pedig, mivel Poisson-eloszlású független valószínűségi változók összegének eloszlása szintén Poisson-eloszlás, a következő lesz:

$$R_{2t}(i)=\frac{(2\lambda t)^i}{i!}e^{-2\lambda t} \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

573. Jelölje η az áruházban levő látogatók számát, s legyen ξ a vásárlók száma. Kérdés: mekkora a $P(\xi=k)$ valószínűség. Ezt a teljes valószínűség tétele alapján írhatjuk fel:

$$P(\xi=k)=\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi=k\,|\,\eta=n)P(\eta=n).$$

A feltevésből következik, hogy

$$P(\eta=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

A feltételes valószínűséget viszont a binomiális eloszlással fejezhetjük ki. Annak valószínűsége ugyanis, hogy n személy közül éppen k számú vásárol valamit és $n-k$ nem, a következő:

$$p(\xi=k\,|\,\eta=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

A keresett valószínűség most már:

$$P(\xi=k)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

Ennek kiszámításához vegyük figyelembe, hogy az összegnek azok a tagjai, amelyekre n a k-nál kisebb, 0-val egyenlők, ezért az összegezést elég $n=k$-tól kezdődően végezni. Így

$$P(\xi=k)=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Használjuk fel, hogy a jobb oldali kifejezésben szereplő összeg az $n-k=j$ helyettesítéssel és az e^x hatványsorának felhasználásával:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^j}{j!} = e^{\lambda-\lambda p},$$

akkor végeredményül a következőt kapjuk:

$$P(\xi=k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Az adott pillanatban vásárló vevők száma tehát szintén Poisson-eloszlású.

574. Mivel, mint az előző feladatban láttuk, a ξ Poisson-eloszlású λp paraméterrel, így

$$M(\xi) = \lambda p.$$

Használjuk most az adott képletet. Az η lehetséges értékei nyilván 0, 1, 2, ... Mivel pedig a ξ az $\eta=n$ feltétel mellett binomiális eloszlású p paraméterrel, ezért

$$M(\xi \mid \eta=n) = np.$$

Így

$$M(\xi) = M(M(\xi \mid \eta)) = \sum_{n=0}^{\infty} M(\xi \mid \eta=n) P(\eta=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} np \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda p.$$

A ξ valószínűségeloszlását itt nem használtuk fel, így a várható érték kiszámításához nem szükséges az előző feladatot először megoldani.

575. Jelentse η az egy műszak alatt elkészült termékek számát, ξ pedig az egy műszak alatt készült selejtes termékek számát. Először azt határozzuk meg, hogy mekkora valószínűséggel készül k számú selejtes termék. Az 573. feladat megoldása során megismert módon számolva:

$$P(\xi=k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(\xi=k \mid \eta=n) P(\eta=n) =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} 0.02^k \cdot 0.98^{n-k} \cdot \frac{10^{3n}}{n!} e^{-10^3} = \frac{20^k}{k!} e^{-20},$$

és itt $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Ezek után annak valószínűsége, hogy az egy műszak alatt elkészült termékek között a selejtesek száma legfeljebb 15, a következő lesz:

$$P(\xi \leqq 15) = \sum_{k=0}^{15} \frac{20^k}{k!} e^{-20} = 0{,}1564.$$

Ezek szerint annak valószínűsége, hogy egy napon 15-nél *több* selejtes termék készül, kb. 84%.

577. Ebben az esetben $M(\xi)=0$, $D(\xi)=1$, igy

$$P(|\xi-0|>1)=1-P(-1\leqq\xi\leqq 1)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

578. A feltételek szerint fennállnak az

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2}=4 \quad \text{és} \quad D^2(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12}=4$$

egyenletek. Ezekben az a és b annak az intervallumnak a határait jelenti, amelyben ξ egyenletes eloszlású. Nyilvánvalóan feltételezhetjük, hogy $a<b$. Ekkor egyenleteinkből a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} b+a&=8,\\ b-a&=4\sqrt{3}.\end{aligned}\right\}$$

Megoldásul $a=4-2\sqrt{3}$, $b=4+2\sqrt{3}$ adódik. A ξ eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x\leqq 4-2\sqrt{3},\\ \dfrac{x-4+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, & \text{ha} \quad 4-2\sqrt{3}<x\leqq 4+2\sqrt{3},\\ 1 & \text{ha} \quad 4+2\sqrt{3}<x.\end{cases}$$

579. Az η így is írható:

$$\eta=\frac{1}{b-a}\xi-\frac{a}{b-a}.$$

Az η sűrűségfüggvénye a

$$g(y)=f(h(y))|h'(y)|$$

általános képlet alapján, mivel most $b>a$,

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}(b-a)=1, & \text{ha} \quad 0<y<1,\\ 0 & \text{különben},\end{cases}$$

tehát η valóban egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon.

580. Ismeretes, hogy ha ξ egyenletes eloszlású az $(a, 5)$ intervallumon, akkor

$$M(\xi)=\frac{a+5}{2} \quad \text{és} \quad M(\xi^2)=\frac{a^2+5a+25}{3}.$$

Ezeket felhasználva:

$$M(\xi^2-2\xi+1)=M(\xi^2)-2M(\xi)+1=\frac{a^2+2a+13}{3}.$$

Az adott valószínűségből a

$$P\left(\xi \geqq \frac{a^2+2a+13}{3}\right) = \frac{5-\frac{a^2+2a+13}{3}}{5-a} = \frac{1}{6}$$

egyenletet kapjuk, és ebből a-ra két értéket, az $a=-1$-et és az $a=-\frac{1}{2}$-et.

a) Legyen először $a=-1$. Akkor $M(\xi-1)=M(\xi)-1=1$, és így

$$P(\xi \geqq 1) = \frac{2}{3}.$$

b) Ha $a=-\frac{1}{2}$, akkor $M(\xi-1)=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$, tehát

$$P\left(\xi \geqq \frac{5}{4}\right) = \frac{15}{22}.$$

581. A ξ eloszlásfüggvénye most

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq 0, \\ x, & \text{ha} \quad 0 < x \leqq 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x. \end{cases}$$

Ennek alapján

a) $P(0{,}2 \leqq \xi \leqq 0{,}3) = 0{,}1$.

b) Ez az esemény a következő, egymást kizáró módokon jöhet létre: az első tizedesjegy 0, a második 2; az első jegy 1, a második 2; és így tovább. A keresett valószínűség tehát:

$$P_2 = P(0{,}02 \leqq \xi \leqq 0{,}03) + P(0{,}12 \leqq \xi \leqq 0{,}13) + \ldots$$

$$\ldots + P(0{,}92 \leqq \xi \leqq 0{,}93) = 0{,}1,$$

mert az egyes összeadandók mind 0,01-dal egyenlők.

c) Ebben az esetben nyilván $k-1$ tizedesjegy előzi meg a k-adik helyen álló 2-est minden lehetséges variációban. Egy-egy ilyen $k-1$-ed osztályú ismétléses variáció után álló 2-es egy 10^{-k} hosszúságú intervallum számai között szerepelhet, pl. a

$$0{,}\, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} 2 \quad \text{és} \quad 0{,}\, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} 3$$

tizedestörtek közé eső számok között. Mivel 10^{k-1} számú ilyen intervallum van (mert ennyi a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek $k-1$-ed osztályú ismétléses variációinak száma), a keresett valószínűség:

$$P_k = \frac{10^{k-1}}{10^k} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

582. Legyen ξ a hívás beérkezésének időpontja. A feltevés szerint ez egyenletes eloszlású a $(8, b)$ intervallumon, ahol b ismeretlen. A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-8}, & \text{ha} \quad 8<x<b, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ismeretes, hogy

$$P(8\leqq\xi\leqq 10)=\frac{1}{b-8}\int_{8}^{10} dx=\frac{2}{b-8}=0{,}8,$$

s innen $b=10{,}5$.

A feltett kérdésekre most már könnyen felelhetünk:

a) $P(9{,}5\leqq\xi\leqq 10)=\dfrac{1}{5}$.

b) $P(9{,}5\leqq\xi\leqq 10|\xi\geqq 9{,}5)=\dfrac{P(9{,}5\leqq\xi\leqq 10)}{P(\xi\geqq 9{,}5)}=\dfrac{1}{2}$.

583. A ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha} \quad a<x<b, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Az ismert valószínűség:

$$P(2\leqq\xi\leqq 5)=\frac{1}{b-a}\int_{2}^{5} dx=\frac{3}{b-a}=\frac{1}{3},$$

s innen $b-a=9$. Az (a, b) intervallum hossza tehát 9 egység.

a) A keresett valószínűség:

$$P(3\leqq\xi\leqq 5)=\frac{1}{9}\int_{3}^{5} dx=\frac{2}{9}.$$

b) Az a minimális értéke nyilván -4 lehet (ekkor $b=5$), a b maximális értéke pedig 11 lehet (ekkor $a=2$).

c) A $P(1\leqq\xi\leqq 3)$ valószínűség legnagyobb értéke nyilván $\dfrac{2}{9}$, s ez akkor következik be, ha az egész $(1, 3)$ intervallum az (a, b) intervallumon fekszik. E valószínűség legkisebb értéke viszont $\dfrac{1}{9}$, mert a $(2, 3)$ intervallum a feltevés értelmében biztosan az (a, b) intervallumon fekszik. A keresett becslés tehát:

$$\frac{1}{9}\leqq P(1\leqq\xi\leqq 3)\leqq\frac{2}{9}.$$

584. A következőképpen számolunk:

$$P(2 \leqq \xi \leqq A) = F(A) - F(2) = \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-3}{2}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \geqq \frac{1}{2}.$$

Itt az $F(x)$ függvény természetesen a ξ eloszlásfüggvényét jelenti, a $\Phi(x)$ függvény pedig a standard normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. (A következőkben is így használjuk e függvényeket, anélkül, hogy ezt említenénk.)

A kapott egyenlőtlenségből:

$$\Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) \geqq \frac{3}{2} - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}8085,$$

visszakeresve a normális eloszlás táblázatából:

$$\frac{A-3}{2} \geqq \Phi^{-1}(0{,}8085) = 0{,}87,$$

innen pedig $A \geqq 4{,}74$.

585. Most ismerjük a következő valószínűséget:

$$P = P(|\xi - m| < 1) = 0{,}95.$$

Innen sorban adódnak a következők:

$$P = P(m-1 < \xi < m+1) = F(m+1) - F(m-1) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}95.$$

Ebből az egyenletből

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}975,$$

s végül a táblázatból

$$\frac{1}{\sigma} = 1{,}96, \quad \text{vagyis} \quad \sigma = 0{,}51.$$

A kérdéses valószínűségi változók tehát mind 0,51 szórásúak.

586. Az első 900 órában a lámpáknak kb. 16%-a megy tönkre.

588. *a)* A kiszámítandó valószínűség:

$$P(19{,}7 < \xi < 20{,}3) = F(20{,}3) - F(19{,}7) =$$

$$= \Phi(1{,}5) - \Phi(-1{,}5) = 2\Phi(1{,}5) - 1 = 0{,}8664.$$

b) Tegyük fel, hogy a munkadarabnak az $m = 20$ cm-es mérettől való eltérése A cm. Akkor a feltétel szerint

$$P(20 - A < \xi < 20 + A) = 2\Phi\left(\frac{A}{0{,}2}\right) - 1 = 0{,}95.$$

Ebből

$$\Phi\left(\frac{A}{0,2}\right)=0,9750,$$

majd a táblázatból visszakeresve:

$$\frac{A}{0,2}=1,96,$$

vagyis

$$A=0,392\approx 0,4.$$

Tehát 95% valószínűséggel állíthatjuk, hogy a hosszeltérés 4 mm-nél nem lesz nagyobb.

589. Nyilvánvaló, hogy az 1200 méter tekintendő az itt szereplő valószínűségi változó várható értékének (ξ jelenti a lőtávolságot), tehát

$$m=M(\xi)=1200, \qquad \sigma=D(\xi)=40.$$

Meg kell határozni a következő valószínűséget (a számítást is rögtön elvégezzük):

$$P(1150<\xi<1250)=2\Phi(1,25)-1=0,7888.$$

A lövéseknek átlag 79%-a lesz tehát hatásos, így 21%-a lesz hatástalan.

592. Mivel 15-nek az 5%-a 0,75, ezért

$$P(|\xi-15|>0,75)=1-P(14,25\leqq\xi\leqq 15,75)=$$

$$=2-2\Phi(1,5)=0,1336.$$

593. A

$$P(\xi<20)=\Phi\left(\frac{20-m}{10}\right)=1-\Phi\left(\frac{m-20}{10}\right)=0,1$$

egyenletből $m=28,16$.

594. Mivel a ξ_i valószínűségi változók mind $N(m, \sigma)$ eloszlásúak $(i=1, 2, \ldots, n)$, ezért a $\bar{\xi}$ $N\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ eloszlású. Így adott p-vel az A-ra nézve fennáll a

$$P(|\bar{\xi}-m|<A)=p$$

egyenlőség, vagy más formában:

$$P(|\bar{\xi}-m|<A)=2\Phi\left(\frac{A\sqrt{n}}{\sigma}\right)-1=p.$$

Innen — a $\Phi(x)$ függvény $\Phi^{-1}(x)$ inverze segítségével — az A értéke:

$$A=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

595. Az előző feladat alapján nyilvánvaló, hogy a

$$P(|\xi-m|<A)\geqq p$$

egyenlőség fennállásához szükséges és elégséges, hogy

$$A\geqq\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

legyen. Innen pedig n-re

$$n\geqq\frac{\sigma^2}{A^2}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\right]^2$$

adódik.

596. A feladatban adott egyenlőséget a $\Phi(x)$ függvény segítségével a következőképpen írjuk fel:

$$P(m\leqq\xi<m+x)=\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)-\Phi(0)=\alpha.$$

Innen

$$\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right)=\alpha+\frac{1}{2}.$$

Mivel minden t-re fennáll a

$$0<\Phi(t)<1$$

egyenlőtlenség, így α-ra nyilván csak a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ intervallum számai jöhetnek számításba. Ebben az esetben

$$x=\sigma\Phi^{-1}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$$

a keresett megoldás. Ha viszont $\alpha\geqq\frac{1}{2}$, akkor a feladatnak nincs megoldása.

597. A jelen esetben előre adott α-ra $(0<\alpha<1)$:

$$P(\xi>K_\alpha)=1-P(\xi\leqq K_\alpha)=1-\Phi\left(\frac{K_\alpha-m}{\sigma}\right)=\alpha.$$

Innen

$$K_\alpha=m+\sigma\Phi^{-1}(1-\alpha).$$

A többi kérdésre egyszerű behelyettesítéssel adhatjuk meg a feleletet.

598. Jelentse ξ a csövek működési idejét órákban, akkor a feladat a

$$P(\xi<A)=0{,}05$$

egyenletből az A meghatározása. A szokásos módon számolva,

$$P(\xi<A)=\Phi\left(\frac{A-1170}{100}\right)=0{,}05$$

adódik; a táblázatban azonban a $\Phi(x)$ függvényre ilyen kis érték nincs, mivel

$$\frac{A-1170}{100}<0.$$

Ekkor azonban a $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ képlet segítségével:

$$P(\xi<A)=1-\Phi\left(\frac{1170-A}{100}\right)=0{,}05.$$

Ebből

$$\Phi\left(\frac{1170-A}{100}\right)=0{,}95,$$

vagyis $A=1005$ óra. Annak valószínűsége tehát, hogy egy adócső 1005 óránál rövidebb ideig működik, 0,05-dal egyenlő, így például, ha a gyár 1000 órára vállal garanciát, akkor a garanciaigények száma kisebb lesz, mint 5%.

599. Annak valószínűsége, hogy egy cső működési ideje 180 óránál nagyobb lesz:

$$P(\xi>180)=1-P(\xi\leqq 180)=1-\Phi(1)=0{,}1587.$$

Az *a)* és *b)* kérdésekre adandó felelethez vegyük figyelembe, hogy a 4 cső között azok száma, amelyeknek működési ideje 180 óránál nagyobb, binomiális eloszlású, így

a) $p_4=\binom{4}{4}0{,}1587^4\cdot 0{,}8413^0.$

b) $p_1=\binom{2}{1}0{,}1587\cdot 0{,}8413.$

600. Legyen ξ az üvegbe töltött mennyiség. Azt kívánjuk, hogy a szórás akkora legyen, hogy

$$P(98\leqq\xi\leqq 102)=0{,}98$$

teljesüljön. Ez az egyenlőség, mivel normális eloszlást tételezünk fel, így írható:

$$P(98\leqq\xi\leqq 102)=2\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-1=0{,}98.$$

Ebből viszont a táblázat felhasználásával a megengedhető szórásra

$$\sigma=0{,}86 \text{ (gramm)}$$

adódik.

601. Legyen ξ a henger hosszmérete, η az átmérője. Jelentse A a $11{,}9\leqq\xi\leqq 12{,}1$ eseményt, B pedig az $5{,}95\leqq\eta\leqq 6{,}05$ eseményt. A ξ és η valószínűségi változókat függetleneknek tekinthetjük, tehát A és B is függetlenek.
Az A esemény valószínűsége:

$$P(A)=P(11{,}9\leqq\xi\leqq 12{,}1)=2\Phi(1{,}82)-1=0{,}9312.$$

Annak valószínűsége tehát, hogy a henger hosszmérete miatt lesz selejtes:

$$P(\bar{A})=0{,}0688.$$

Hasonlóképpen számítható ki, hogy

$$P(\bar{B})=0{,}0750.$$

A görgő selejtes lesz, ha $\bar{A}\cup\bar{B}$ teljesül. Ennek valószínűsége:

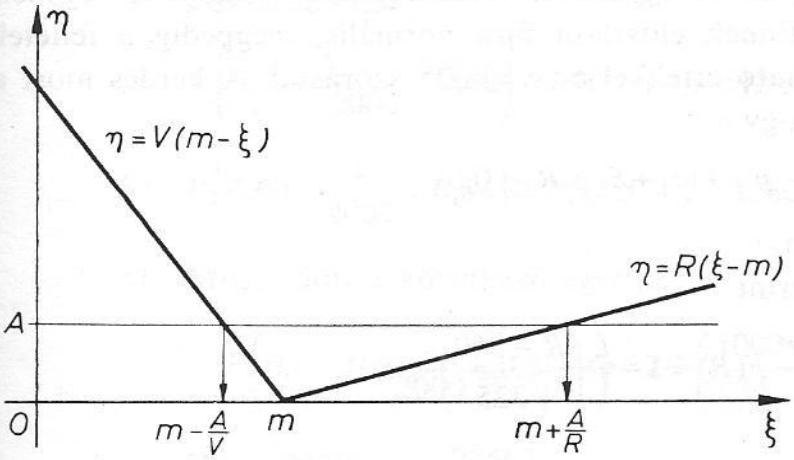
$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)=1-P(A)P(B)=0{,}1387.$$

602. Jelentse ξ az adott időszakban termelt alapanyag-mennyiséget, η pedig a veszteségből, ill. raktárköltségből származó többletköltséget. Nyilván $\eta\geqq 0$, és

$$\eta=\begin{cases} V(m-\xi), & \text{ha} \quad 0\leqq\xi\leqq m,\\ R(\xi-m), & \text{ha} \quad m<\xi.\end{cases}$$

Az η-nak a ξ-től való függését az 59. ábra szemlélteti. A kérdéses valószínűség:

$$P(\eta<A)=P\left(m-\frac{A}{V}<\xi<m+\frac{A}{R}\right)=\Phi\left(\frac{A}{\sigma R}\right)+\Phi\left(\frac{A}{\sigma V}\right)-1.$$



59. ábra

603. Jelentse ξ az első gép által üvegbe töltött mennyiséget, és η ugyanezt a második gépre. Jelentse B_1 azt az eseményt, hogy a kivett üveg az első gép által töltöttekből való, és B_2 ugyanezt a második gépre vonatkozóan. Legyen A az az esemény, hogy a kiválasztott üvegben talált anyag mennyisége 1,9 dl és 2,1 dl közé esik.

Ekkor a teljes valószínűség tétele értelmében:

$$P(A)=P(A\,|\,B_1)P(B_1)+P(A\,|\,B_2)P(B_2)=$$
$$=P(1{,}9<\xi<2{,}1)P(B_1)+P(1{,}9<\eta<2{,}1)P(B_2).$$

Azonban

$$P(1{,}9<\xi<2{,}1)=2\Phi(0{,}71)-1=0{,}5222,$$

és

$$P(1{,}9<\eta<2{,}1)=2\Phi(1{,}25)-1=0{,}7888,$$

továbbá

$$P(B_1)=0{,}6, \quad \text{és} \quad P(B_2)=0{,}4,$$

így

$$P(A)=0{,}6288.$$

604. Legyen ξ a vegyszer tömege és η a zacskóé. Ekkor $\xi+\eta$ egy csomag tömegét jelenti. Ennek várható értéke:

$$M(\xi+\eta)=25+5=30 \text{ (gramm)}.$$

Feltehetjük, hogy ξ és η függetlenek. Ezt felhasználva, mivel

$$D^2(\xi)=0{,}16; \quad D^2(\eta)=0{,}04, \quad \text{és így} \quad D^2(\xi+\eta)=0{,}20,$$

ezért

$$D(\xi+\eta)=\sqrt{0{,}20}=0{,}447 \text{ (gramm)}.$$

Tíz csomag tömegének várható értéke 300 gramm. A dobozzal együtt egy doboz vegyszer tömegének várható értéke 330 gramm. Mivel $D^2(\xi+\eta)=0{,}2$, így 10 csomag tömegének szórásnégyzete $10\cdot 0{,}2=2$ gramm, egy megtöltött doboz tömegének szórásnégyzete tehát 3 gramm, így szórása $\sqrt{3}=1{,}7321$ gramm.

605. Ha ξ_1 jelenti az A üzem által felhasznált anyagmennyiséget, és ξ_2 ugyanezt a B üzemre vonatkozólag, akkor együttesen felhasználnak havonta $\xi_1+\xi_2$ mennyiségű nyersanyagot. Ennek eloszlása újra normális, mégpedig a feltételek értelmében $m=360$ várható értékkel és $\sigma=\sqrt{325}$ szórással. A kérdés most az, mekkora legyen az R, hogy a

$$p=P(\xi_1+\xi_2\geqq R)<0{,}01$$

egyenlőtlenség fennálljon.

Mivel a fenti adatok szerint

$$p=1-F(R)=1-\Phi\left(\frac{R-360}{\sqrt{325}}\right)<0{,}01,$$

így ebből

$$R>360+2{,}33\sqrt{325}\approx 402.$$

606. Legyen ξ a zacskókba töltött mennyiség. Annak valószínűsége, hogy ez 95 gramm és 105 gramm közé esik:

$$P(95\leqq\xi\leqq 105)=2\Phi\left(\frac{5}{2}\right)-1=0{,}9876,$$

ezért annak valószínűsége, hogy egy zacskóba nem a 95 és 105 gramm közé eső mennyiség került

$$p=0{,}0124.$$

Legyen η az egy nap alatt elkészített csomagok száma. A feltevés szerint ez Poisson-eloszlású $\lambda=1000$ várható értékkel.

Jelöljük ζ-val az egy nap alatt elkészült csomagok közül azok számát, amelyek nem az előírt mennyiséget tartalmazzák. Ekkor, ha egy nap alatt n csomag készült el:

$$P(\zeta=k\,|\,\eta=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

ahol p az előbb kiszámított valószínűség. A teljes valószínűség tétele értelmében, felhasználva az 573. feladatban nyert általános érvényű eredményt:

$$P(\zeta=k)=\sum_{n=k}^{\infty} P(\zeta=k\,|\,\eta=n)P(\eta=n)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}=\frac{12{,}4^k}{k!}e^{-12{,}4}.$$

A felvetett kérdésre végül a felelet:

$$P(\zeta\leqq 20)=1-\sum_{k=21}^{\infty}\frac{12{,}4^k}{k!}e^{-12{,}4}=0{,}9833.$$

Annak valószínűsége tehát, hogy a „hibásan" töltött csomagok száma legfeljebb 20, kb. 98%.

607. *a)* Jelentse ξ az A esemény bekövetkezéseinek számát. A ξ nyilván binomiális eloszlású $np=1200$ várható értékkel és $\sqrt{npq}=22$ szórással. A keresett valószínűség a Laplace—Moivre-tétel felhasználásával a következő lesz:

$$P\left(0{,}58<\frac{\xi}{2000}<0{,}62\right)=P(1160<\xi<1240)=2\Phi\left(\frac{40}{22}\right)-1=0{,}9312.$$

b) $$P\left(0{,}60<\frac{\xi}{2000}<0{,}64\right)=P(1200<\xi<1280)=0{,}49986.$$

c) Most adott a következő egyenlet:

$$P\left(0{,}6-\varepsilon<\frac{\xi}{2000}<0{,}6+\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{1000\varepsilon}{11}\right)-1=0{,}98,$$

ebből pedig $\varepsilon=0{,}02563$.

d) Tegyük fel, hogy legalább n kísérletet kell végeznünk. Ekkor

$$P\left(0{,}59<\frac{\xi}{n}<0{,}61\right)=P(0{,}59n<\xi<0{,}61n)=$$

$$=\Phi\left(\frac{0{,}61n-0{,}60n}{\sqrt{n\cdot 0{,}24}}\right)-\Phi\left(\frac{0{,}59n-0{,}60n}{\sqrt{n\cdot 0{,}24}}\right)=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{49}\right)-1=0{,}95.$$

Ebből a normális eloszlás táblázatának felhasználásával $n=9216$, tehát legalább ennyi kísérlet szükséges a kívánt pontosság eléréséhez.

608. Itt is a Laplace—Moivre-tétel alapján számolunk.

$$\sum_{k=680}^{720}\binom{1000}{k}0{,}7^k\cdot 0{,}3^{1000-k}=2\Phi\left(\frac{20}{14{,}5}\right)-1=0{,}8294.$$

609. Annak valószínűsége, hogy 200 dobásból k dobás ad „fej" eredményt (és így $200-k$ dobás ad „írást"):

$$p_k=\binom{200}{k}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2^{200-k}}=\binom{200}{k}\frac{1}{2^{200}}.$$

Alkalmazzuk most a Laplace—Moivre-tételt:

$$\sum_{k=95}^{105} \binom{200}{k} \frac{1}{2^{200}} = 2\Phi\left(\frac{5}{7}\right) - 1 = 0{,}5222.$$

610. Az első kifejezés egy esemény valószínűségeként is felfogható. Ha ugyanis egy pénzdarabot 500-szor feldobunk, és $\frac{1}{2}$ annak valószínűsége, hogy írást dobunk, akkor annak valószínűsége, hogy az írásdobások száma 220 és 260 közé esik, ξ-vel jelölve az írásdobások számát:

$$P(220 \leqq \xi \leqq 260) = \frac{1}{2^{500}} \sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k}.$$

Mivel most $np = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250$, és $npq = 125$, így a Laplace—Moivre-tétel értelmében:

$$P(220 \leqq \xi \leqq 260) = \Phi\left(\frac{10}{11{,}2}\right) + \Phi\left(\frac{30}{11{,}2}\right) - 1 = 0{,}8096.$$

A feladatban szereplő második összeg közelítőleg a most kapott valószínűség és a 2^{500}-nak szorzata. Négyjegyű logaritmussal számolva, a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=220}^{260} \binom{500}{k} \approx 2^{500} \cdot 0{,}8096 \approx 2{,}555 \cdot 10^{150}.$$

611. Jelöljük ξ-vel a dobozokba került elsőosztályú termékek számát, ami nyilván binomiális eloszlású, tehát

a) $\binom{50}{0} 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^{50} = 0{,}3^{50}$,

b) $\sum_{k=30}^{50} \binom{50}{k} 0{,}7^k \cdot 0{,}3^{50-k} \approx \Phi\left(\frac{50-35}{3{,}24}\right) - \Phi\left(\frac{30-35}{3{,}24}\right) = \Phi(1{,}54) = 0{,}9382.$

612. Legyen ξ a találatok száma. Ez nyilván binomiális eloszlású, amelynek valószínűségeloszlása:

$$p_k = \binom{200}{k} 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{200-k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 200).$$

A ξ várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = np = 80, \qquad D(\xi) = \sqrt{npq} = 6{,}9.$$

Annak valószínűsége tehát, hogy a találatszám a várható érték r sugarú környezetébe esik:

$$P(80 - r < \xi < 80 + r) = \sum_{k=80-r}^{80+r} \binom{200}{k} 0{,}4^k \cdot 0{,}6^{200-k}.$$

A Laplace—Moivre-tétel alapján a normális eloszlással közelítve ez így írható:

$$P(80 - r < \xi < 80 + r) = 2\Phi\left(\frac{r}{6{,}9}\right) - 1.$$

Azt kívánjuk, hogy ez a valószínűség 0,9-nél nagyobb legyen. Ez teljesül, ha

$$2\Phi\left(\frac{r}{6,9}\right)-1>0,9,$$

vagyis ha

$$\Phi\left(\frac{r}{6,9}\right)>0,95.$$

A táblázatból visszakeresve:

$$\frac{r}{6,9}\geqq 1,645,$$

tehát

$$r\geqq 6,9\cdot 1,645\approx 12.$$

Ennek alapján a találatszám 0,9 valószínűséggel a

$$68<\xi<92$$

intervallumba esik.

Látjuk, hogy az eloszlás ismeretében a 406. feladatra jobb megoldást is kaptunk, mint az általánosabb, nagy számok törvényének alkalmazásával.

613. A ξ nyilván binomiális eloszlású. A Laplace—Moivre-tétel felhasználásával, mivel most $np=0,5n$; $\sqrt{npq}=0,5\sqrt{n}$,

$$P(0,5n-0,98\sqrt{n}\leqq\xi\leqq 0,5n+0,98\sqrt{n})=$$
$$=\Phi(1,96)-\Phi(-1,96)=2\Phi(1,96)-1=0,9500,$$

s ezt kellett belátni.

614. Jelentse ξ_i az i-edik üzletben 11 és 12 óra között megjelenő vevők számát ($i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$). Ha a 100 üzletben az adott időszakban megjelenő vevők számának összegét η-val jelöljük, vagyis

$$\eta=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{100},$$

akkor meghatározandó a

$$P(3000<\eta<3100)$$

valószínűség.

Tegyük fel, hogy a ξ_i valószínűségi változók függetlenek. Mivel

$$P(\xi_i=k)=\frac{30^k}{k!}e^{-30}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

így nyilván

$$M(\xi_i)=30,\quad D(\xi_i)=\sqrt{30},\quad M(\eta)=3000,\quad D(\eta)=10\sqrt{30}.$$

A centrális határeloszlási tétel feltételei a ξ_i valószínűségi változókra teljesülnek, így a

$$\zeta=\frac{\eta-3000}{10\sqrt{30}}$$

valószínűségi változó közelítőleg standard normális eloszlású, tehát

$$P(3000<\eta<3100)=P\left(0<\frac{\eta-3000}{10\sqrt{30}}<\frac{10}{\sqrt{30}}\right)=\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{30}}\right)-\Phi(0)=0,4664.$$

615. *a)* Ha az η eloszlás-, ill. sűrűségfüggvényét $G(y)$-nal, ill. $g(y)$-nal jelöljük, s hasonlóan $F(x)$-szel és $f(x)$-szel a ξ megfelelő jellemzőit, akkor

$$G(y)=P(e^{\xi}<y)=\begin{cases} P(\xi<\ln y)=F(\ln y), & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y\leq 0. \end{cases}$$

Innen differenciálással

$$g(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}f(\ln y), & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0 \end{cases}$$

adódik. Ha most figyelembe vesszük, hogy ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma>0),$$

akkor ebből $g(y)$-ra valóban a feladatban adott sűrűségfüggvényt kapjuk.

b) Az η várható értéke:

$$M(\eta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}\,dy.$$

Az integrál kiszámításához vezessük be az

$$\frac{\ln y-m}{\sigma}=t, \quad dy=\sigma e^{\sigma t+m}\,dt$$

helyettesítést. Ekkor a következőket kapjuk:

$$M(\eta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^m\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\sigma t-\frac{t^2}{2}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}}\,dt=e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Hasonlóképpen számítjuk ki az η másodrendű momentumát is. A számítás során újra alkalmazzuk az előbbi helyettesítést. Ekkor

$$M(\eta^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} ye^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(t^2-4\sigma t-4m)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{2\sigma^2+2m}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2\sigma)^2}{2}}\,dt=e^{2\sigma^2+2m}.$$

Ennek felhasználásával végül a szórásnégyzetre a

$$D^2(\eta)=M(\eta^2)-M^2(\eta)=e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$$

adódik eredményül.

c) A harmadik kérdésben szereplő tételt a következőképpen igazolhatjuk. Mivel most a ξ normális eloszlású, és $m = M(\xi)$, ezért

$$M(e^{\xi}) = M(\eta) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{M(\xi)+\frac{\sigma^2}{2}} = e^{M(\xi)} e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$e^{\frac{\sigma^2}{2}} > 1,$$

s ebből az állítás máris következik.

616. Ez esetben az ábrázolandó sűrűségfüggvény:

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}}, & \text{ha} \quad y > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y < 0. \end{cases}$$

A függvénygörbe alakját a differenciálszámításban tanult függvényvizsgálati módszerekkel határozzuk meg.

A $g(y)$ deriváltja:

$$g'(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{y^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\ln^2 y}{2}} (1 + \ln y), & \text{ha} \quad y > 0, \\ 0, & \text{ha} \quad y < 0. \end{cases}$$

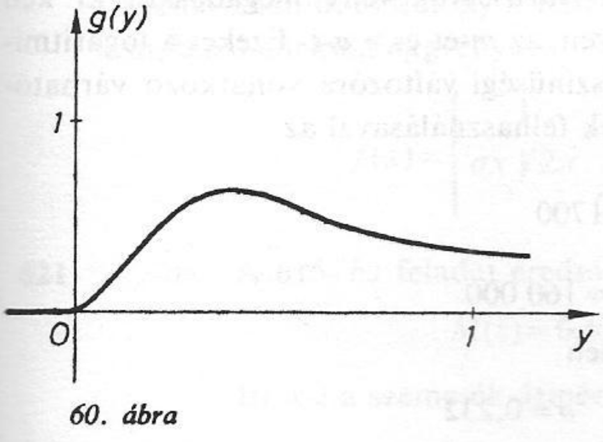
E függvénynek az $y = e^{-1}$ helyen van stacionárius pontja. Könnyen belátható, hogy a derivált a $(0, e^{-1})$ intervallumban pozitív, az $(e^{-1}, +\infty)$ intervallumban negatív, így a függvény az első intervallumban monoton növekvő, a másodikban viszont monoton fogyó. A $g(y)$ függvénynek tehát az $y = e^{-1}$ helyen maximuma van, s e maximum:

$$g(e^{-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}66.$$

A függvény inflexiós pontjait a második derivált segítségével kaphatjuk meg. Ha y_1-gyel, ill. y_2-vel jelöljük az inflexiós pontok abszcisszáját, akkor erre a következők adódnak:

$$y_1 \approx 0{,}07, \quad y_2 \approx 0{,}68.$$

A $g(y)$ függvény görbéjét ezek alapján a 60. ábra szemlélteti.



60. ábra

617. Ahhoz, hogy a kérdésre felelni tudjunk, meg kell oldani a következő egyenletet:

$$G(y_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^{y_0}\frac{1}{y}e^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{1}{2}.$$

Végezzük el itt az

$$\ln y=t, \qquad y=e^t, \qquad dy=e^t\,dt$$

helyettesítést, akkor

$$G(y_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln y_0}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi\left(\frac{\ln y_0-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}$$

adódik, ahol a $\Phi(x)$ függvény a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A normális eloszlás táblázatának felhasználásával innen az

$$y_0=e^{\sigma\Phi^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+m}=e^m$$

értéket kapjuk eredményül.

618. A következő valószínűséget kell kiszámítanunk:

$$P(a<\xi<b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b\frac{1}{x}e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Végezzük el az

$$\ln x=t, \qquad x=e^t, \qquad dx=e^t\,dt$$

helyettesítést, akkor a következőket kapjuk:

$$P(a<\xi<b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\ln a}^{\ln b}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\Phi\left(\frac{\ln b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\ln a-m}{\sigma}\right).$$

Látjuk, hogy logaritmikusan normális eloszlású valószínűségi változók esetén is a normális eloszlás táblázatát használhatjuk valószínűségek tizedestörtekkel való megadására.

619. *a)* A fizetések eloszlását jellemző sűrűségfüggvény megadására ki kell számítani az eloszlás paramétereit, az m-et és a σ-t. Ezeket a logaritmikusan normális eloszlású valószínűségi változóra vonatkozó várhatóérték- és szórásnégyzet-képletek felhasználásával az

$$e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}=1700$$

és

$$e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)=160\,000$$

egyenletekből kapjuk meg. Innen

$$m=7{,}41 \qquad \text{és} \qquad \sigma=0{,}232$$

adódik, így a keresett sűrűségfüggvény:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0{,}232x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-7{,}41)^2}{2\cdot 0{,}0539}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

b) Erre a kérdésre a 618. feladat eredményének felhasználásával felelhetünk. Mivel

$$\ln 1500=7{,}31 \quad \text{és} \quad \ln 1800=7{,}49$$

(két tizedesjegy pontossággal), így

$$P(1500<\xi<1800)=\Phi(0{,}35)+\Phi(0{,}43)-1=0{,}3032,$$

tehát a dolgozóknak kb. 30%-a keres havonta 1500 Ft és 1800 Ft közötti összeget.

c) Most a 617. feladat eredményét használjuk föl. Az előbb kiszámított m értékkel a következőt kapjuk:

$$x_0=e^m=e^{7,41}=1652;$$

tehát 1652 Ft-nál keres kevesebbet a dolgozók 50%-a.

620. Most

$$y=r(x)=ax^n, \quad \text{ha} \quad x>0.$$

Az $r(x)$ nyilván monoton növekvő, és $x>0$ esetén inverze, illetőleg ennek deriváltja:

$$h(y)=x=\sqrt[n]{\frac{y}{a}}, \quad h'(y)=\frac{1}{an}\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1-n}{n}}.$$

Az η sűrűségfüggvénye most már:

$$g(y)=f(h(y))|h'(y)|=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma n y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln y-\ln a-nm)^2}{2(n\sigma)^2}}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0. \end{cases}$$

Ez valóban újra logaritmikusan normális eloszlás sűrűségfüggvénye.
Itt felhasználtuk azt, hogy a feltevés szerint a ξ logaritmikusan normális eloszlású, tehát sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-m)^2}{2\sigma^2}}, & \text{ha} \quad x>0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

621. *a)* A 615. *b)* feladat eredményei alapján számolva:

$$M(\xi)=0{,}63, \quad D^2(\xi)=0{,}036.$$

Itt a ξ a szemcsék átmérőjét jelenti.

b) Jelöljük η-val a szemcsék térfogatát, akkor a szemcséket gömb alakúaknak tekintve,

$$\eta=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\xi}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}\xi^3.$$

Az η sűrűségfüggvényét a 620. feladat eredményei alapján írjuk fel. Mivel most

$$\ln a+nm=\ln\frac{\pi}{6}-\frac{3}{2}=-2{,}15, \quad \text{és} \quad 3\sigma=0{,}9,$$

ezért

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{0{,}9y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y+2{,}15)^2}{2\cdot 0{,}81}}, & \text{ha} \quad y>0.\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

c) Egy 1 mm átmérőjű szemcse térfogata: $V=\frac{\pi}{6}=0{,}524$ mm³. Annak valószínűsége, hogy valamely szemcse térfogata ennél kisebb — tehát átmérője 1 mm-nél kisebb — a következő:

$$P(\eta<0{,}524)=\frac{1}{0{,}9\sqrt{2\pi}}\int_0^{0{,}524}\frac{1}{y}e^{-\frac{(\ln y+2{,}15)^2}{2\cdot 0{,}81}}dy.$$

A $\ln y=t$, $y=e^t$, $dy=e^t\,dt$ helyettesítés elvégzésével ebből:

$$P(\eta<0{,}524)=\frac{1}{0{,}9\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln 0{,}524}e^{-\frac{(t+2{,}15)^2}{2\cdot 0{,}81}}dt=\Phi\left(\frac{\ln 0{,}524+2{,}15}{0{,}9}\right).$$

Mivel pedig

$$\ln 0{,}524=\frac{\lg 0{,}524}{\lg e}=\frac{0{,}7193-1}{0{,}4343}=-0{,}64,$$

így a keresett valószínűség:

$$P(\eta<0{,}524)=\Phi\left(\frac{-0{,}64+2{,}15}{0{,}9}\right)=0{,}9535.$$

A valószínűség fogalma alapján ebből az következik, hogy az 1 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsék össztérfogata az összes homokmennyiségnek kb. 95%-a.

622. Itt exponenciális eloszlásról van szó, és $\lambda=2$, így annak valószínűsége, hogy a könyvekre nem kell negyedévnél tovább várni:

$$p=1-e^{-\frac{1}{2}}.$$

623. Mivel $M(\xi)=\frac{1}{\lambda}$, ezért a ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{2,5}x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

A keresett valószínűség:

$$P(\xi>8)=1-P(\xi\leqq 8)=1-F(8)=e^{-\frac{8}{2,5}}=0,0408.$$

624. Itt először a λ paraméter értékét kell meghatározni. Mivel most a feltevés szerint

$$P(\xi>6)=e^{-6\lambda}=0,1,$$

így az e^x függvény táblázatából:

$$6\lambda=2,3, \quad \text{vagyis} \quad \lambda=0,38.$$

A keresett valószínűség ezek után:

$$P(\xi<3)=F(3)=1-e^{-1,14}\approx 0,68.$$

625. Jelentse ξ_i az i-edik szál élettartamát, akkor

$$P(\xi_i<x)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{1}{150}x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x<0 \end{cases} \quad (i=1,\ 2,\dots,\ 400).$$

A gép akkor áll le, ha van olyan szál, amely 3 órán belül elszakad, azaz ha a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{400}$ valószínűségi változók legkisebbike kisebb 3-nál. Ha η-val jelöljük a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{400}$ valószínűségi változók legkisebbikét, vagyis ha az

$$\eta=\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{400})$$

jelölést bevezetjük, akkor feladatunk a $P(\eta<3)$ valószínűség meghatározása. Vegyük azonban figyelembe, hogy ez a valószínűség így is írható:

$$P(\eta<3)=1-P(\eta\geqq 3),$$

és ha most még a feltételezett függetlenséget is felhasználjuk, akkor

$$\begin{aligned} P(\eta<3)&=1-P(\eta\geqq 3)=1-P(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{400})\geqq 3)= \\ &=1-P(\xi_1\geqq 3,\ \xi_2\geqq 3, \dots, \xi_{400}\geqq 3)= \\ &=1-P(\xi_1\geqq 3)P(\xi_2\geqq 3)\dots P(\xi_{400}\geqq 3), \end{aligned}$$

hiszen a ξ_i-k legkisebbike is nagyobb lesz, mint 3, ha mindegyik nagyobb ennél. Használjuk fel most a kapott adatokat is, akkor $i=1, 2, \dots, 400$-ra:

$$P(\xi_i\geqq 3)=1-P(\xi_i<3)=e^{-\frac{1}{50}},$$

és ezért

$$P(\eta<3)=1-\left(e^{-\frac{1}{50}}\right)^{400}=1-0,9802^{400}=0,9993,$$

azaz a kérdéses esemény gyakorlatilag biztosan bekövetkezik.

626. Az előző feladat gondolatmenetét használjuk fel itt is. A feltétel szerint a gép megáll, ha az n alkatrész valamelyike elromlik. Így, ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ jelöli az egyes alkatrészek élettartamát, annak valószínűsége, hogy a gép adott y időn belül leáll, a következő:

$$P(\eta<y)=P((\min \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)<y)=1-P(\eta\geqq y)=$$
$$=1-\prod_{i=1}^{n} P(\xi_i\geqq y)=\begin{cases}1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)y}, & \text{ha} \quad y\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

Láthatjuk, hogy az η-nak, azaz a gép működési idejének valószínűségeloszlása szintén exponenciális eloszlás, így az η várható értéke:

$$M(\eta)=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

627. Ismeretes, hogy ha valamilyen jelenség bekövetkezéseinek száma λ paraméterű Poisson-eloszlású, akkor a jelenség két egymás utáni bekövetkezése között eltelt időtartam exponenciális eloszlású, ugyancsak λ paraméterrel.

A jelen esetben $\lambda=1$, így ξ-vel jelölve a két egymás utáni vevő érkezése között eltelt időtartamot,

$$P(\xi\geqq 5)=e^{-5}=0{,}0067.$$

628. Tekintsük az óránként érkező vevők számát Poisson-eloszlásúnak, akkor, mivel két vevő érkezése között eltelt idő átlagosan 2 perc, az exponenciális eloszlás paramétere: $\lambda=\frac{1}{2}$. A kérdésekre tehát a következő válaszokat adjuk:

a) $P(\xi\geqq 2)=e^{-1}=0{,}3679;$

b) $P(\xi<3)=1-e^{-\frac{3}{2}}=0{,}7769;$

c) $P(1\leqq\xi\leqq 3)=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{3}{2}}=0{,}3834.$

629. Nyilvánvalóan feltételezhetjük, hogy az alkatrészek élettartamára megállapított 1000 óra várható érték a nem selejtes alkatrészekkel végzett kísérletekből adódott. A feltevés szerint minden alkatrész élettartamának eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-10^{-3}x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

Ezek után

a) $P(\xi_i>1050)=1-P(\xi_i\leqq 1050)=e^{-1{,}05}=0{,}35.$

b) $p_1=\sum_{k=4}^{5}\binom{5}{k}0{,}35^k\cdot 0{,}65^{5-k}.$

c) $p_2=\sum_{k=30}^{40}\binom{100}{k}0{,}35^k\cdot 0{,}65^{5-k}.$

A *b)* alatti valószínűséget táblázatból határozhatjuk meg interpolációval. A *c)* alatti összeg kiszámítására viszont felhasználhatjuk a Laplace—Moivre-tételt.

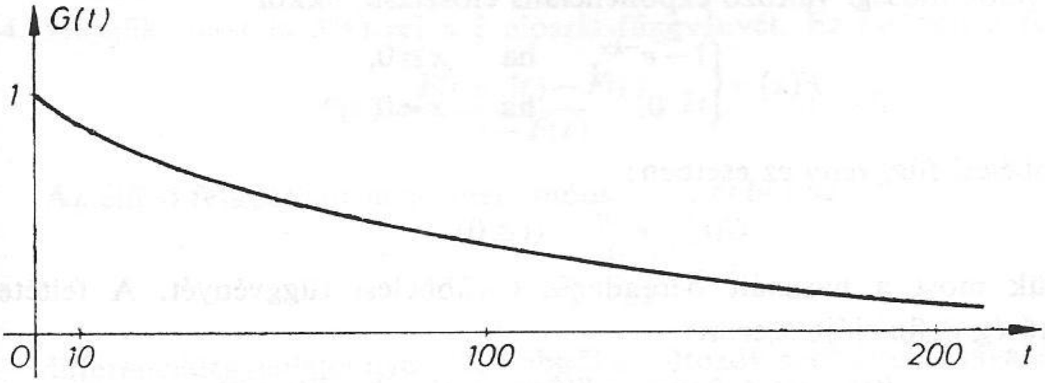
630. *a)* $G(t)=1-F(t)=1-P(\xi<t)=P(\xi\geqq t)$.

b) A $G(t)$ függvény nyilvánvalóan monoton fogy, mert $F(t)$ monoton nő.

c) Nem negatív t értékekre ez esetben:

$$G(t)=e^{-10^{-2}t}.$$

[A $G(t)$ függvényt negatív t-re nem értelmezzük.] A függvény grafikonját a 61. ábra szemlélteti.



61. ábra

d) A keresett valószínűség:

$$P(t_0\leqq\xi<t_1)=F(t_1)-F(t_0)=G(t_0)-G(t_1),$$

ez tehát a továbbélési függvény t_0 helyhez és t_1 helyhez tartozó függvényértékeinek különbsége.

631. Ha a ξ várható értéke létezik, akkor az

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$$

integrál konvergens, tehát

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{+\infty} xf(x)\,dx=0.$$

De fennáll a következő egyenlőtlenség is:

$$\int_{t}^{+\infty} xf(x)\,dx\geqq t\int_{t}^{+\infty} f(x)\,dx=t(1-F(t))\geqq 0$$

Innen pedig:

$$0\leqq\lim_{t\to\infty} t(1-F(t))\leqq\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{+\infty} xf(x)\,dx=0,$$

vagyis a bizonyítandó limeszreláció igaz.

Ha most $G(t)$ a továbbélési függvényt jelenti, akkor mivel $G(t)=1-F(t)$,

$$\int_{0}^{+\infty} G(t)\,dt=\int_{0}^{+\infty}(1-F(t))\,dt.$$

Ebből viszont parciális integrálással — a $v'=1$, $v=t$ választással — a következő adódik:

$$\int_0^{\infty} G(t)\,dt=\Big[t\big(1-F(t)\big)\Big]_0^{\infty}+\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt=M(\xi),$$

s ezt állítottuk.

632. Ha a ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású, akkor

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x\geqq 0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

A továbbélési függvény ez esetben:

$$G(t)=e^{-\lambda t} \qquad (t\geqq 0).$$

Tekintsük most a használt berendezés továbbélési függvényét. A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$G_x(t)=\frac{P(\xi\geqq x+t,\ \xi\geqq x)}{P(\xi\geqq x)}=\frac{P(\xi\geqq x+t)}{P(\xi\geqq x)}=\frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}=$$

$$=\frac{1-1+e^{-\lambda(x+t)}}{1-1+e^{-\lambda x}}=e^{-\lambda t}=G(t),$$

s ez volt bizonyítandó.

633. Jelöljük $F(t)$-vel a ξ eloszlásfüggvényét. Ez esetben

$$P(t)=\frac{P(t\leqq\xi<t+\Delta t,\ \xi\geqq t)}{P(\xi\geqq t)}=\frac{P(t\leqq\xi<t+\Delta t)}{P(\xi\geqq t)},$$

mert a $t\leqq\xi<t+\Delta t$ esemény bekövetkezése maga után vonja a $\xi\geqq t$ esemény bekövetkezését. Innen az eloszlásfüggvény tulajdonságainak felhasználásával

$$P(t)=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}.$$

A feltevés szerint ez a Δt intervallumhosszal arányos. Ha tehát λ jelenti az arányossági tényezőt, akkor

$$P(t)=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda\,\Delta t \qquad (\lambda>0).$$

Osszuk el most az egyenlet mindkét oldalát Δt-vel, majd végezzük el a $\Delta t\to 0$ határátmenetet, akkor $F(t)$-re a következő differenciálegyenletet nyerjük;

$$\frac{1}{1-F(t)}\,\frac{dF(t)}{dt}=\lambda.$$

A változók szétválasztásával innen az

$$F(t)=1-e^{-\lambda t+c}$$

adódik általános megoldásul. Mivel pedig nyilván fenn kell állnia az $F(0)=0$ kezdeti feltételnek (vagyis annak valószínűsége, hogy a berendezés a kezdő időpontban rossz, legyen 0), így az előbbi egyenlőségben $c=0$, tehát

$$F(t)=1-e^{-\lambda t} \quad (t\geqq 0,\ \lambda>0).$$

Ez pedig azt jelenti, az adott feltételek teljesülése esetén a ξ exponenciális eloszlású.

634. Jelöljük most is $F(t)$-vel a ξ eloszlásfüggvényét. Ez esetben a feltétel szerint

$$P(t)=\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda t\cdot\Delta t \quad (\lambda>0).$$

Az előző feladatban megismert módszerrel ebből az

$$\frac{1}{1-F(t)}\,\frac{dF(t)}{dt}=\lambda t$$

differenciálegyenletet nyerjük, s ebből a változók szétválasztásával és az $F(0)=0$ kezdeti feltétel figyelembevételével az

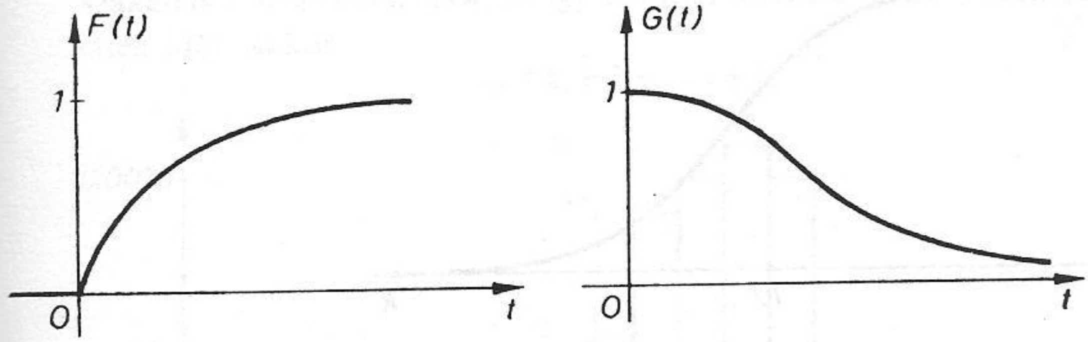
$$F(t)=1-e^{-\frac{\lambda}{2}t^2} \quad (t\geqq 0,\ \lambda>0)$$

eloszlásfüggvényt.

A berendezés továbbélési függvénye:

$$G(t)=P(\xi\geqq t)=e^{-\frac{\lambda}{2}t^2} \quad (t\geqq 0).$$

E függvények grafikonját a 62. ábra szemlélteti.



62. ábra

635. *a)* A továbbélési függvény ismeretében rögtön tudjuk, hogy minden ξ_i élettartam exponenciális eloszlású,

$$M(\xi_i)=1000, \quad \text{ill.} \quad D^2(\xi_i)=1000$$

várható értékkel, ill. szórásnégyzettel ($i=1, 2, \ldots, 100$). A berendezések összélettartama:

$$\eta_{100}=\sum_{i=1}^{100}\xi_i.$$

Ennek várható értéke és szórása:

$$M(\eta_{100}) = 100 M(\xi_i) = 10^5,$$

$$D(\eta_{100}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{100} D^2(\xi_i)} = 100\sqrt{10} \approx 316.$$

b) A centrális határeloszlási tétel értelmében az η_{100} közelítőleg normális eloszlásúnak tekinthető $m = 10^5$ várható értékkel és $\sigma = 100\sqrt{10}$ szórással. Így a kérdés tulajdonképpen az: mekkora az A érték, ha

$$P(10^5 - A < \eta_{100} < 10^5 + A) = 0{,}9\,?$$

Ebből egyszerű átalakításokkal kapjuk a

$$2\Phi\left(\frac{A}{100\sqrt{10}}\right) - 1 = 0{,}9$$

egyenletet, majd a $\Phi(x)$ függvény táblázatából az

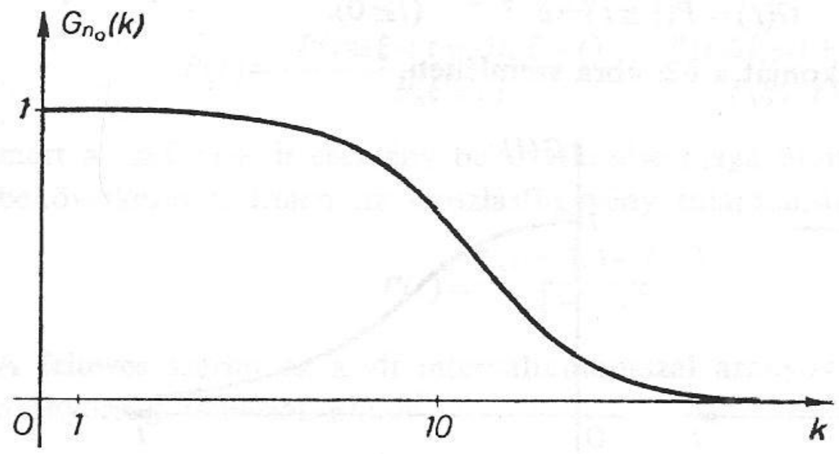
$$A = 522$$

eredményt, tehát 0,9 valószínűséggel igaz a

$$99\,478 \leqq \eta_{100} \leqq 100\,522$$

egyenlőtlenség.

636. *a)* A továbbélési függvényt közelítő függvény grafikonját a 63. ábra mutatja.



63. ábra

b) Annak közelítő valószínűsége, hogy a berendezés a $(k-1, k)$ intervallumban megszűnik működni:

$$P(k-1 \leqq \xi < k) \approx \frac{n_{k-1} - n_k}{n_0} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ezeket a valószínűségeket a táblázatban találjuk meg. A táblázat a hisztogram elkészítéséhez szükséges adatokat is tartalmazza. Osztásköznek most, az egyszerűség kedvéért, $h = 50$-et vettünk.

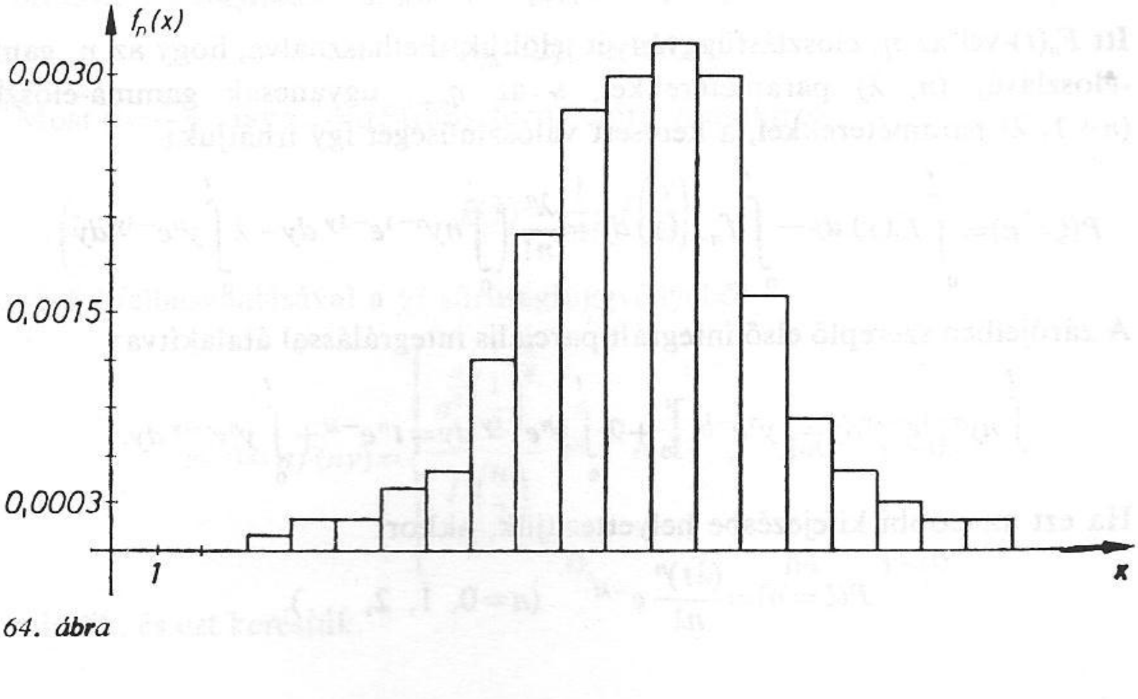
k	n_k	$n_{k-1}-n_k$	$\frac{n_{k-1}-n_k}{n_0}$	$\frac{n_{k-1}-n_k}{n_0 h}$
1	1000	0	0	0
2	1000	0	0	0
3	995	5	0,005	0,0001
4	985	10	0,010	0,0002
5	975	10	0,010	0,0002
6	955	20	0,020	0,0004
7	930	25	0,025	0,0005
8	870	60	0,060	0,0012
9	770	100	0,100	0,0020
10	630	140	0,140	0,0028
11	480	150	0,150	0,0030
12	320	160	0,160	0,0032
13	180	140	0,140	0,0028
14	100	80	0,080	0,0016
15	60	40	0,040	0,0008
16	35	25	0,025	0,0005
17	20	15	0,015	0,0003
18	10	10	0,010	0,0002
19	0	10	0,010	0,0002

A táblázat alapján elkészített hisztogram a 64. ábrán látható.

A ξ a hisztogram alapján normális eloszlásúnak tekinthető.

637. Jelöljük ξ_1-gyel az első szálszakadásig eltelt időt, ξ_2-vel az első és második szakadás között eltelt időt, és így tovább. Jelentse η_n az n-edik szálszakadásig eltelt időt, akkor

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$



64. ábra

A feltevés értelmében a ξ_i valószínűségi változók mind exponenciális eloszlásúak az

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha} \quad x>0,\\ 0, & \text{ha} \quad x<0\end{cases} \qquad (\lambda>0)$$

sűrűségfüggvénnyel, és mind függetlenek, így az η_n eloszlása (n, λ) paraméterű gamma-eloszlás; sűrűségfüggvénye tehát:

$$g_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda y}, & \text{ha} \quad y>0,\\ 0, & \text{ha} \quad y<0.\end{cases}$$

638. Jelöljük ζ-val a $(0, t)$ intervallumban történt szálszakadások számát. A ζ lehetséges értékei nyilván: $0, 1, 2, \ldots$. Határozzuk meg, mekkora a valószínűsége annak, hogy a $(0, t)$ intervallumban a szálszakadások száma éppen n lesz.

A $\zeta=n$ esemény nyilván akkor következik be, ha az előző feladatban definiált

$$\eta_n=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n$$

valószínűségi változó t-nél kisebb értéket vesz fel, de az η_{n+1} már t-nél nem kisebbet, vagyis ha az

$$\eta_n<t, \quad \text{és} \quad \eta_{n+1}\geqq t$$

események mindegyike bekövetkezik. Ez azonban azt jelenti, hogy az $\eta_n<t$ esemény bekövetkezik, de ugyanakkor az $\eta_{n+1}<t$ nem. A

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

képlet felhasználásával (ha A jelenti az $\eta_n<t$ és B az $\eta_{n+1}<t$ eseményt), azt is felhasználva, hogy a jelen esetben $B\subset A$, a $\zeta=n$ valószínűségét a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(\zeta=n)=P(\eta_n<t)-P(\eta_n<t,\ \eta_{n+1}<t)=$$
$$=P(\eta_n<t)-P(\eta_{n+1}<t)=F_n(t)-F_{n+1}(t).$$

Itt $F_n(t)$-vel az η_n eloszlásfüggvényét jelöltük. Felhasználva, hogy az η_n gamma-eloszlású, (n, λ) paraméterekkel, s az η_{n+1} ugyancsak gamma-eloszlású, $(n+1, \lambda)$ paraméterekkel, a keresett valószínűséget így írhatjuk:

$$P(\zeta=n)=\int_0^t f_n(y)\,dy-\int_0^t f_{n+1}(y)\,dy=\frac{\lambda^n}{n!}\left(\int_0^t ny^{n-1}e^{-\lambda y}\,dy-\lambda\int_0^t y^n e^{-\lambda y}\,dy\right).$$

A zárójelben szereplő első integrált parciális integrálással átalakítva:

$$\int_0^t ny^{n-1}e^{-\lambda y}dy=\left[y^n e^{-\lambda y}\right]_0^t+\lambda\int_0^t y^n e^{-\lambda y}\,dy=t^n e^{-\lambda t}+\int_0^t y^n e^{-\lambda y}\,dy.$$

Ha ezt az előbbi kifejezésbe helyettesítjük, akkor:

$$P(\zeta=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Azt az eredményt kaptuk — és ez nemcsak a szövőgépre vonatkozó feladatra érvényes —, hogy minden esetben, amikor az egymás után következő véletlen események közti időtartamok függetlenek és ugyanazon λ paraméterű exponenciális eloszlásúak, akkor egy meghatározott $(0, t)$ időtartam alatt a véletlen esemény bekövetkezései számának eloszlása Poisson-eloszlás λt paraméterrel.

639. Legyen ξ_i az i-edik gép javítására fordított idő. Akkor a negyedik gép megjavítását váró személy várakozási ideje:

$$\eta_4=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4.$$

Feltehetjük, hogy a ξ_i valószínűségi változók függetlenek. Ez esetben az η_4 gamma-eloszlású $(4, \lambda)$ paraméterrel, s mivel most $\lambda=2$, így η_4 sűrűségfüggvénye:

$$f_4(t)=\begin{cases} \dfrac{2^4}{3!}t^3e^{-2t}, & \text{ha} \quad t>0, \\ 0, & \text{ha} \quad t<0. \end{cases}$$

A keresett valószínűség ezek után:

$$P(\eta_4<2)=\frac{2^4}{3!}\int_0^2 x^3e^{-2x}\,dx.$$

Ha elvégezzük a $2x=t$, $dx=\frac{1}{2}\,dt$ helyettesítést, akkor

$$P(\eta_4<2)=\frac{1}{3!}\int_0^4 t^3e^{-t}\,dt.$$

Ezt a valószínűséget a nem teljes gamma-függvényre készített táblázatból kiolvasva a következőt kapjuk:

$$P(\eta_4<2)=0{,}5665.$$

640. Most $\eta=\frac{1}{n}\chi^2$, így a $\zeta=a\xi$ transzformációra vonatkozó

$$g(y)=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{y}{a}\right)$$

képlet felhasználásával a χ^2 sűrűségfüggvényéből

$$g(y)=nf(ny)=\begin{cases} \dfrac{n^{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}ny}, & \text{ha} \quad y>0, \\ 0, & \text{ha} \quad y<0 \end{cases}$$

adódik, és ezt kerestük.

Felhasznált és javasolt irodalom

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás. Budapest, Tankönyvkiadó, 1954, 1968.

Medgyessy Pál—Takács Lajos: Valószínűségszámítás. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957. (Műsz. Mat. Gyak. C. V. kötet).

Prékopa András: Valószínűségelmélet. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1962.

M. Fisz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1958.

TÁBLÁZATOK

10-es alapú logaritmusok

$\lg \pi = 0{,}4971$ $\lg 2\pi = 0{,}7982$

Sz.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
101	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082
102	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124
103	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166
104	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208
105	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249
106	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290
107	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330
108	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370
109	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
Sz.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} \approx \frac{\lg x}{0{,}4343} \approx 2{,}3026 \lg x$$

10-es alapú logaritmusok

$\lg 4\pi = 1{,}0992$ $\lg \frac{4\pi}{3} = 0{,}6221$ (folytatás)

Sz.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
Sz.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Faktoriálisok logaritmusa

n	lg $n!$	n	lg $n!$	n	lg $n!$
1	0,0000	36	41,5705	71	101,9297
2	0,3010	37	43,1387	72	103,7870
3	0,7782	38	44,7185	73	105,6503
4	1,3802	39	46,3096	74	107,5196
5	2,0792	40	47,9116	75	109,3946
6	2,8573	41	49,5244	76	111,2754
7	3,7024	42	51,1477	77	113,1619
8	4,6055	43	52,7811	78	115,0540
9	5,5598	44	54,4246	79	116,9516
10	6,5598	45	56,0778	80	118,8547
11	7,6012	46	57,7406	81	120,7632
12	8,6803	47	59,4127	82	122,6770
13	9,7943	48	61,0939	83	124,5961
14	10,9404	49	62,7841	84	126,5204
15	12,1165	50	64,4831	85	128,4498
16	13,3206	51	66,1906	86	130,3843
17	14,5511	52	67,9066	87	132,3238
18	15,8063	53	69,6309	88	134,2683
19	17,0851	54	71,3633	89	136,2177
20	18,3861	55	73,1037	90	138,1719
21	19,7083	56	74,8519	91	140,1310
22	21,0508	57	76,6077	92	142,0948
23	22,4125	58	78,3712	93	144,0632
24	23,7927	59	80,1420	94	146,0364
25	25,1906	60	81,9202	95	148,0141
26	26,6056	61	83,7055	96	149,9964
27	28,0370	62	85,4979	97	151,9831
28	29,4841	63	87,2972	98	153,9744
29	30,9465	64	89,1034	99	155,9700
30	32,4237	65	90,9163	100	157,9700
31	33,9150	66	92,7359		
32	35,4202	67	94,5619		
33	36,9387	68	96,3945		
34	38,4702	69	98,2333		
35	40,0142	70	100,0784		

Binomiális eloszlás

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p					
n	*k*	*0,05*	*0,10*	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,30*	*0,35*	*0,40*	*0,45*	*0,50*
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	00,078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1875	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039

Binomiális eloszlás

(folytatás)

		p									
n	*k*	*0,05*	*0,10*	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,30*	*0,35*	*0,40*	*0,45*	*0,50*
9	0	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,0407	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0867	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	9,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3012	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,1088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2397	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0.0002

Binomiális eloszlás

(folytatás

		p									
n	*k*	*0,05*	*0,10*	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,30*	*0,35*	*0,40*	*0,45*	*0,50*
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0012	0,0036	0,0095
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0832	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009
	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,2252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0245	0,0515	0,0916
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

(folytatás)

		p									
n	*k*	*0,05*	*0,10*	*0,15*	*0,20*	*0,25*	*0,30*	*0,35*	*0,40*	*0,45*	*0,50*
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0535	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1465	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278
	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031
	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117
	5	0,0014	0,0218	0,0787	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327
	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708
	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214
	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669
	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214

Binomiális eloszlás

(folytatás)

n	k	p = 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0031
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0685	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000
	2	0,1787	0,2852	0,2428	0,1540	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003
	3	0,0533	0,1796	0,2428	0,2182	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018
	4	0,0112	0,0798	0,1714	0,2182	0,2023	0,1491	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074
	5	0,0018	0,0266	0,0907	0,1636	0,2023	0,1916	0,1468	0,0933	0,0497	0,0222
	6	0,0002	0,0069	0,0374	0,0955	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518
	7	0,0000	0,0014	0,0122	0,0443	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961
	8	0,0000	0,0002	0,0032	0,0166	0,0487	0,0981	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442
	9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0051	0,0198	0,0514	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011
	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Poisson-eloszlás

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k	λ: *0,1*	*0,2*	*0,3*	*0,4*	*0,5*	*0,6*	*0,7*	*0,8*	*0,9*	*1,0*
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ: *1,1*	*1,2*	*1,3*	*1,4*	*1,5*	*1,6*	*1,7*	*1,8*	*1,9*	*2,0*
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k	λ: *2,1*	*2,2*	*2,3*	*2,4*	*2,5*	*2,6*	*2,7*	*2,8*	*2,9*	*3,0*
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ: *3,1*	*3,2*	*3,3*	*3,4*	*3,5*	*3,6*	*3,7*	*3,8*	*3,9*	*4,0*
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132

(folytatás)

k	λ = 3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ = 4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1188	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1687	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k	λ = 5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0659	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1082	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1752	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1601	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1234	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

Poisson-eloszlás

(folytatás)

k	λ = 6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1162	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1487	0,1454	0,1420	0,1385	0,1349	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1304
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0858	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0588	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0245	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0264
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071
15	0,0010	0,0012	0,0014	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

k	λ = 7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0059	0,0054	0,0049	0,0045	0,0041	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029	0,0027
2	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0125	0,0116	0,0107
3	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286
4	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573
5	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916
6	0,1468	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221
7	0,1489	0,1486	0,1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396
8	0,1321	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1382	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396
9	0,1042	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1224	0,1241
10	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993
11	0,0478	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0667	0,0695	0,0722
12	0,0283	0,0303	0,0323	0,0344	0,0366	0,0388	0,0411	0,0434	0,0457	0,0481
13	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296
14	0,0078	0,0086	0,0095	0,0104	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169
15	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090
16	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0045
17	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021
18	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
19	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

Poisson-eloszlás

(folytatás)

	λ									
k	*8,1*	*8,2*	*8,3*	*8,4*	*8,5*	*8,6*	*8,7*	*8,8*	*8,9*	*9,0*
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0092	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0252	0,0237	0,0222	0,0208	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150
4	0,0544	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337
5	0,0882	0,0849	0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	0,1034	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,1382	0,1375	0,1366	0,1356	0,1344	0,1332	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0925	0,0948	0,0970
12	0,0505	0,0530	0,0555	0,0579	0,0604	0,0629	0,0654	0,0679	0,0703	0,0728
13	0,0315	0,0334	0,0354	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0481	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0,0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	0,0079	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014
20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

	λ									
k	*9,1*	*9,2*	*9,3*	*9,4*	*9,5*	*9,6*	*9,7*	*9,8*	*9,9*	*10*
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0398	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0764	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0752	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0888	0,0908	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0685	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0361	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0265	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0088	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0128
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037

Poisson-eloszlás

(folytatás)

k	λ = 9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

k	λ = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0411	0,0255	0,0452	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0018	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0885	0,0989	0,1024	0,0992	0,0906	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0367	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0772	0,0646
17	0,0237	0,0383	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0256	0,0397	0,0554	0,0706	0,0830	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0887	0,0911	0,0888
20	0,0046	0,0097	0,0177	0,0286	0,0418	0,0559	0,0692	0,0798	0,0866	0,0888
21	0,0024	0,0055	0,0109	0,0191	0,0299	0,0426	0,0560	0,0684	0,0783	0,0846
22	0,0012	0,0030	0,0065	0,0121	0,0204	0,0310	0,0433	0,0560	0,0676	0,0769
23	0,0006	0,0016	0,0037	0,0074	0,0133	0,0216	0,0320	0,0438	0,0559	0,0669
24	0,0003	0,0008	0,0020	0,0043	0,0083	0,0144	0,0226	0,0328	0,0442	0,0557
25	0,0001	0,0004	0,0010	0,0024	0,0050	0,0092	0,0154	0,0237	0,0336	0,0446
26	0,0000	0,0002	0,0005	0,0013	0,0029	0,0057	0,0101	0,0164	0,0246	0,0343
27	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0034	0,0063	0,0109	0,0173	0,0254
28	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009	0,0019	0,0038	0,0070	0,0117	0,0181
29	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0011	0,0023	0,0044	0,0077	0,0125
30	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0013	0,0026	0,0049	0,0083
31	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0015	0,0030	0,0054
32	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0034
33	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0010	0,0020
34	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0012
35	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007
36	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
37	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
38	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
39	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

A nem teljes gamma-függvény

$$\Gamma_n(\lambda)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\lambda t^{n-1}e^{-t}dt=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

n	$\lambda=0{,}01$	$\lambda=0{,}05$	$\lambda=0{,}10$	$\lambda=0{,}20$
1	0,009950	0,048771	0,095163	0,181269
2	0,000050	0,001209	0,004679	0,017523
3		0,000020	0,000155	0,001149
4			0,000003	0,000057
5				0,000002

n	$\lambda=0{,}30$	$\lambda=0{,}40$	$\lambda=0{,}50$	$\lambda=1{,}00$
1	0,259182	0,329680	0,393469	0,63212
2	0,036936	0,061551	0,090204	0,26424
3	0,003600	0,007926	0,014388	0,08030
4	0,000266	0,000776	0,001752	0,01899
5	0,000015	0,000061	0,000173	0,00366
6	0,000001	0,000004	0,000014	0,00059
7		0,000001	0,000001	0,00008
8				0,00001
9				0,00001

n	$\lambda=2{,}0$	$\lambda=3{,}0$	$\lambda=4{,}0$	$\lambda=5{,}0$
1	0,86466	0,95021	0,98168	0,99326
2	0,59399	0,80085	0,90842	0,95957
3	0,32332	0,57681	0,76190	0,87535
4	0,14288	0,32577	0,56653	0,73497
5	0,05265	0,18474	0,37116	0,55951
6	0,01656	0,08392	0,21487	0,38404
7	0,00453	0,03351	0,11067	0,23782
8	0,00110	0,01191	0,05113	0,13337
9	0,00024	0,00380	0,02137	0,06809
10	0,00005	0,00110	0,00813	0,03183
11	0,00001	0,00029	0,00284	0,01369
12		0,00007	0,00092	0,00545
13		0,00002	0,00027	0,00202
14			0,00008	0,00070
15			0,00002	0,00023
16			0,00001	0,00007
17				0,00002
18				0,00001

Normális eloszlás

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(u)\,du$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
0,00	0,3989	0,5000	0,45	0,3605	0,6736	0,90	0,2661	0,8159
0,01	0,3989	0,5040	0,46	0,3589	0,6772	0,91	0,2637	0,8186
0,02	0,3989	0,5080	0,47	0,3572	0,6808	0,92	0,2613	0,8212
0,03	0,3988	0,5120	0,48	0,3555	0,6844	0,93	0,2589	0,8238
0,04	0,3986	0,5160	0,49	0,3538	0,6879	0,94	0,2565	0,8264
0,05	0,3984	0,5199	0,50	0,3521	0,6915	0,95	0,2541	0,8289
0,06	0,3982	0,5239	0,51	0,3503	0,6950	0,96	0,2516	0,8315
0,07	0,3980	0,5279	0,52	0,3485	0,6985	0,97	0,2492	0,8340
0,08	0,3977	0,5319	0,53	0,3467	0,7019	0,98	0,2468	0,8365
0,09	0,3973	0,5359	0,54	0,3448	0,7054	0,99	0,2444	0,8389
0,10	0,370	0,5398	0,55	0,3429	0,7088	1,00	0,2420	0,8413
0,11	0,3965	0,5438	0,56	0,3410	0,7123	1,01	0,2396	0,8438
0,12	0,3961	0,5478	0,57	0,3391	0,7157	1,02	9,2371	0,8461
0,13	0,3956	0,5517	0,58	0,3372	0,7190	1,03	0,2347	0,8485
0,14	0,3951	0,5557	0,59	0,3352	0,7224	1,04	0,2323	0,8508
0,15	0,3945	0,5596	0,60	0,3332	0,7257	1,05	0,2299	0,8531
0,16	0,3939	0,5636	0,61	0,3312	0,7291	1,06	0,2275	0,8554
0,17	0,3932	0,5675	0,62	0,3292	0,7324	1,07	0,2251	0,8577
0,18	0,3925	0,5714	0,63	0,3271	0,7357	1,08	0,2227	0,8599
0,19	0,3918	0,5753	0,64	0,3251	0,7389	1,09	0,2203	0,8621
0,20	0,3910	0,5793	0,65	0,3230	0,7422	1,10	0,2179	0,8643
0,21	0,3902	0,5832	0,66	0,3209	0,7454	1,11	0,2155	0,8665
0,22	0,3894	0,5871	0,67	0,3187	0,7486	1,12	0,2131	0,8686
0,23	0,3885	0,5910	0,68	0,3166	0,7517	1,13	0,2107	0,8708
0,24	0,3876	0,5948	0,69	0,3144	0,7549	1,14	0,2083	0,8729
0,25	0,3867	0,5987	0,70	0,3123	0,7580	1,15	0,2059	0,8749
0,26	0,3857	0,6026	0,71	0,3101	0,7611	1,16	0,2036	0,8770
0,27	0,3847	0,6064	0,72	0,3079	0,7642	1,17	0,2012	0,8790
0,28	0,3836	0,6103	0,73	0,3056	0,7673	1,18	0,1989	0,8810
0,29	0,3825	0,6141	0,74	0,3034	0,7703	1,19	0,1965	0,8830
0,30	0,3814	0,6179	0,75	0,3011	0,7734	1,20	0,1942	0,8849
0,31	0,3802	0,6217	0,76	0,2989	0,7764	1,21	0,1919	0,8869
0,32	0,3790	0,6265	0,77	0,2966	0,7794	1,22	0,1895	0,8888
0,33	0,3778	0,6293	0,78	0,2943	0,7823	1,23	0,1872	0,8907
0,34	0,3765	0,6331	0,79	0,2920	0,7852	1,24	0,1849	0,8925
0,35	0,3752	0,6368	0,80	0,2897	0,7881	1,25	0,1826	0,8944
0,36	0,3739	0,6406	0,81	0,2874	0,7910	1,26	0,1804	0,8962
0,37	0,3725	0,6443	0,82	0,2850	0,7939	1,27	0,1881	0,8980
0,38	0,3712	0,6480	0,83	0,2827	0,7967	1,28	0,1858	0,8997
0,39	0,3697	0,6517	0,84	0,2803	0,7995	1,29	0,1836	0,9015
0,40	0,3683	0,6557	0,85	0,2780	0,8023	1,30	0,1714	0,9032
0,41	0,3668	0,6591	0,86	0,2756	0,8051	1,31	0,1691	0,9049
0,42	0,3653	0,6628	0,87	0,2732	0,8078	1,32	0,1669	0,9066
0,43	0,3637	0,6664	0,88	0,2709	0,8106	1,33	0,1647	0,9082
0,44	0,3621	0,6700	0,89	0,2685	0,8133	1,34	0,1626	0,9099

Normális eloszlás

(folytatás)

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,35	0,1604	0,9115	1,80	0,0790	0,9641	2,50	0,0175	0,9938
1,36	0,1582	0,9131	1,81	0,0775	0,9649	2,52	0,0167	0,9941
1,37	0,1561	0,9147	1,82	0,0761	0,9656	2,54	0,0158	0,9945
1,38	0,1539	0,9162	1,83	0,0748	0,9664	2,56	0,0151	0,9948
1,39	0,1518	0,9177	1,84	0,0734	0,9671	2,58	0,0143	0,9951
1,40	0,1497	0,9192	1,85	0,0721	0,9678	2,60	0,0136	0,9953
1,41	0,1476	0,9207	1,86	0,0707	0,9686	2,62	0,0129	0,9956
1,42	0,1456	0,9222	1,87	0,0694	0,9693	2,64	0,0122	0,9959
1,43	0,1435	0,9236	1,88	0,0681	0,9699	2,66	0,0116	0,9961
1,44	0,1415	0,9251	1,89	0,0669	0,9706	2,68	0,0110	0,9963
1,45	0,1394	0,9265	1,90	0,0656	0,9713	2,70	0,0104	0,9965
1,46	0,1374	0,9279	1,91	0,0644	0,9719	2,72	0,0099	0,9967
1,47	0,1354	0,9272	1,92	0,0632	0,9729	2,74	0,0093	0,9969
1,48	0,1334	0,9306	1,93	0,0620	0,9732	2,76	0,0088	0,9971
1,49	0,1315	0,9319	1,94	0,0608	0,9738	2,78	0,0084	0,9973
1,50	0,1295	0,9332	1,95	0,0596	0,9744	2,80	0,0079	0,9974
1,51	0,1276	0,9345	1,96	0,0584	0,9750	2,82	0,0075	0,9976
1,52	0,1257	0,9457	1,97	0,0573	0,9756	2,84	0,0071	0,9977
1,53	0,1238	0,9370	1,98	0,0562	0,9761	2,86	0,0067	0,9979
1,54	0,1219	0,9382	1,99	0,0551	0,9767	2,88	0,0063	0,9980
1,55	0,1200	0,9394	2,00	0,0540	0,9772	2,90	0,0060	0,9981
1,56	0,1182	0,9406	2,02	0,0519	0,9783	2,92	0,0056	0,9982
1,57	0,1163	0,9418	2,04	0,0498	0,9793	2,94	0,0053	0,9984
1,58	0,1145	0,9429	2,06	0,0478	0,9803	2,96	0,0050	0,9985
1,59	0,1127	0,9441	2,08	0,0459	0,9812	2,98	0,0047	0,9986
1,60	0,1109	0,9452	2,10	0,0440	0,9821	3,00	0,00443	0,99865
1,61	0,1092	0,9463	2,12	0,0422	0,9830	3,10	0,00327	0,99903
1,62	0,1074	0,9474	2,14	0,0404	0,9838	3,20	0,00238	0,99931
1,63	0,1057	0,9484	2,16	0,0387	0,9846	3,30	0,00172	0,99951
1,64	0,1040	0,9495	2,18	0,0371	0,9854	3,40	0,00123	0,99966
1,65	0,1023	0,9505	2,20	0,0355	0,9861	3,50	0,00087	0,99976
1,66	0,1006	0,9515	2,22	0,0339	0,9868	3,60	0,00061	0,99984
1,67	0,0989	0,9525	2,24	0,0325	0,9875	3,70	0,00042	0,99989
1,68	0,0973	0,9535	2,26	0,0310	0,9881	3,80	0,00029	0,99993
1,69	0,0957	0,9545	2,28	0,0297	0,9887	3,90	0,00020	0,99995
1,70	0,0940	0,9554	2,30	0,0283	0,9893	4,00	0,000134	0,999968
1,71	0,0925	0,9564	2,32	0,0270	0,9898	4,50	0,000016	0,999997
1,72	0,0909	0,9573	2,34	0,0258	0,9904	5,00	0,000002	0,999997
1,73	0,0893	0,9583	2,36	0,0246	0,9909			
1,74	0,0878	0,9591	2,38	0,0235	0,9913			
1,75	0,0863	0,9599	2,40	0,0224	0,9918			
1,76	0,0848	0,9608	2,42	0,0213	0,9922			
1,77	0,0833	0,9616	2,44	0,0203	0,9927			
1,78	0,0818	0,9625	2,46	0,0194	0,9931			
1,79	0,0804	0,9633	2,48	0,0184	0,9934			

Az e^x függvény

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0,00	1,0000	1,0000	0,50	1,6487	0,6065	1,0	2,718	0,3679
0,01	1,0101	0,9900	0,51	1,6653	0,6005	1,1	3,004	0,3329
0,02	1,0202	0,9802	0,52	1,6820	0,5945	1,2	3,320	0,3012
0,03	1,0305	0,9704	0,53	1,6989	0,5886	1,3	3,669	0,2725
0,04	1,0408	0,9608	0,54	1,7160	0,5827	1,4	4,055	0,2466
0,05	1,0513	0,9512	0,55	1,7333	0,5769	1,5	4,482	0,2231
0,06	1,0618	0,9418	0,56	1,7507	0,5712	1,6	4,953	0,2019
0,07	1,0725	0,9324	0,57	1,7683	0,5655	1,7	5,474	0,1827
0,08	1,0833	0,9231	0,58	1,7860	0,5599	1,8	6,050	0,1653
0,09	1,0942	0,9139	0,59	1,8040	0,5543	1,9	6,686	0,1496
0,10	1,1052	0,9048	0,60	1,8221	0,5488	2,0	7,389	0,1353
0,11	1,1163	0,8958	0,61	1,8404	0,5434	2,1	8,166	0,1125
0,12	1,1275	0,8869	0,62	1,8589	0,5379	2,2	9,025	0,1108
0,13	1,1388	0,8781	0,63	1,8776	0,5326	2,3	9,974	0,1003
0,14	1,1503	0,8694	0,64	1,8965	0,5273	2,4	11,023	0,0907
0,15	1,1618	0,8607	0,65	1,9155	0,5220	2,5	12,182	0,0821
0,16	1,1735	0,8521	0,66	1,9348	0,5169	2,6	13,464	0,0743
0,17	1,1853	0,8437	0,67	1,9542	0,5117	2,7	14,880	0,0672
0,18	1,1972	0,8353	0,68	1,9739	0,5066	2,8	16,445	0,0608
0,19	1,2096	0,8270	0,69	1,9937	0,5016	2,9	18,174	0,0550
0,20	1,2214	0,8187	0,70	2,0138	0,4966	3,0	20,086	0,0498
0,21	1,2337	0,8106	0,71	2,0340	0,4916	3,1	22,20	0,0450
0,22	1,2461	0,8025	0,72	2,0544	0,4868	3,2	24,53	0,0408
0,23	1,2586	0,7945	0,73	2,0751	0,4819	3,3	27,11	0,0369
0,24	1,2713	0,7866	0,74	2,0960	0,4771	3,4	29,96	0,0334
0,25	1,2840	0,7788	0,75	2,1170	0,4724	3,5	33,12	0,0302
0,26	1,2969	0,7711	0,76	2,1383	0,4677	3,6	36,60	0,0273
0,27	1,3100	0,7634	0,77	2,1598	0,4630	3,7	40,45	0,0247
0,28	1,3231	0,7558	0,78	2,1815	0,4584	3,8	44,70	0,0224
0,29	1,3364	0,7483	0,79	2,2034	0,4538	3,9	49,40	0,0202
0,30	1,3497	0,7408	0,80	2,2255	0,4493	4,0	54,60	0,0183
0,31	1,3634	0,7334	0,81	2,2479	0,4449	4,1	60,34	0,0166
0,32	1,3771	0,7261	0,82	2,2705	0,4404	4,2	66,69	0,0150
0,33	1,3910	0,7189	0,83	2,2933	0,4360	4,3	73,70	0,0136
0,34	1,4050	0,7118	0,84	2,3164	0,4317	4,4	81,45	0,0123
0,35	1,4191	0,7047	0,85	2,3397	0,4274	4,5	90,02	0,0111
0,36	1,4333	0,6977	0,86	2,3632	0,4232	4,6	99,48	0,0101
0,37	1,4477	0,6907	0,87	2,3869	0,4190	4,7	109,95	0,0091
0,38	1,4623	0,6839	0,88	2,4109	0,4148	4,8	121,51	0,0082
0,39	1,4770	0,6771	0,89	2,4351	0,4107	4,9	134,29	0,0074
0,40	1,4918	0,6703	0,90	2,4596	0,4066	5,0	148,41	0,0067
0,41	1,5068	0,6637	0,91	2,4843	0,4025	5,1	164,0	0,0061
0,42	1,5220	0,6570	0,92	2,5093	0,3985	5,2	181,3	0,0055
0,43	1,5373	0,6505	0,93	2,5345	0,3946	5,3	200,3	0,0050
0,44	1,5527	0,6440	0,94	2,5600	0,3906	5,4	221,4	0,0045
0,45	1,5683	0,6376	0,95	2,5857	0,3867	5,5	244,7	0,0041
0,46	1,5841	0,6313	0,96	2,6117	0,3829	5,6	270,4	0,0037
0,47	1,6000	0,6250	0,97	2,6380	0,3791	5,7	298,9	0,0034
0,48	1,6161	0,6188	0,98	2,6645	0,3753	5,8	330,3	0,0030
0,49	1,6323	0,6126	0,99	2,6912	0,3716	5,9	365,0	0,0027
0,50	1,6487	0,6065	1,00	2,7183	0,3679	6,0	403,4	0,0025
x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}