Elemi statisztika fizikusoknak

Pollner Péter

Biológiai Fizika Tanszék

pollner@elte.hu

4. előadás
Valószínűség

4-1 fejezet
Áttekintés

Áttekintés

A ritka esemény szabály a következtető statisztikában:

Ha valamilyen feltevések mellett valamilyen megfigyelt esemény valószínűsége kicsi, akkor arra következtetünk, hogy a feltevés nem igaz.

A statisztikusok a ritka esemény szabályt használják következtetési szabályként (a logikai következtetés helyett).

Példa: egy adott módszer használata mellett 98 lány és 2 fiú születik

4-2. fejezet
Alapok

Definíciók

- **Esemény**

valamilyen folyamat vagy procedúra (továbbiakban véletlen kísérlet) eredményeinek vagy kimeneteinek gyűjteménye

- **Elemi esemény**

egy olyan esemény, amit nem lehet egyszerűbb komponensekre bontani

- **Esemény tér**

a lehetséges elemi események összessége; minden lehetséges kimenet, amit nem lehet tovább bontani

Példák

- esemény/folyamat: egyszerű (nem iker) szülés
- esemény: lány (elemi esemény)
- teljes eseménytér [fiú, lány]

- esemény/folyamat: három szülés
- esemény: 2 lány és egy fiú (nem elemi, mert: llf,lfl,fll)
- teljes eseménytér [fff,ffl,flf,lff,fll,lfl,llf,lll] 8 elemi esemény

Megjegyzés: kvantum-statisztikák

Jelölések

P – **jelöli a valószínűséget**

A*, *B* és *C – **adott eseményeket jelöl.**

***P* (*A*)** - **jelöli annak a valószínűségét, hogy az *A* esemény bekövetkezik.**

A valószínűség kiszámításának szabályai

1. szabály: A valószínűség közelítése a relatív gyakorisággal

Végezz el egy kísérletet (vagy figyelj meg egy folyamatot), és számold meg, hányszor történik meg az *A* esemény. Ezeken a konkrét eseményeken alapulva, *P*(*A*) a következő módon becsülhető:

$$P(A) = \frac{A \text{ bekövetkezéseinek száma}}{\text{hányszor ismétlődött a kísérlet összesen}}$$

Példa: Mi a vsz.-e annak, hogy egy rajzszög a talpára esik?

- Dobjuk le 1000-szer és számoljuk meg hányszor esik talpra.
- Hasonló feladat macskával …

A vsz. kiszámításának szabályai

2. szabály: Klasszikus/kombinatorikus megközelítés (Egyformán valószínű kimeneteket feltételez)

Tegyük fel, hogy egy véletlen kísérletnek *n* különböző elemi esemény a kimenetele és minden egyes kimenet bekövetkezésének ugyanakkora az esélye. Ha egy *A* esemény *s* esetben következhet be az *n* kimenet közül, akkor

$$P(A) = \frac{s}{n} = \frac{A \text{ bekövetkezésének esetei}}{\text{az összes elemi események száma}}$$

Példa: Mi a vsz.-e, hogy a dobókockával 6-ost dobunk

- Ideális kocka vagy valódi kocka?
- Elemi események: 1-est, 2-est, 3-ast, 4-est, 5-öst, 6-ost dobunk
- Ha mindegyiknek ugyanakkora a vsz.-e, akkor

$$P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=1/6$$

- Hasonló problémák: urna golyókkal, lottószámok, kártyajátékok, ….

Szokásos hiba

Azért, mert nem tudjuk egy esemény vsz.-ét, még nem jelenti azt, hogy 50% - 50% hogy az megtörténik vagy sem:

- Átmegyek-e az elemi statisztika vizsgán?
- Milyen idő lesz holnap?
- Szeret? Nem szeret?

A vsz. kiszámításának szabályai

3. szabály: Szubjektív valószínűség

$P(A)$, az A esemény valószínűségét a releváns körülmények figyelembevételével becsüljük.

A nagy számok törvénye

Ha a véletlen kísérletet újra és újra megismételjük, a relatív gyakoriságból kapott (1. szabály) valószínűség az esemény valódi valószínűségét közelíti meg.

A valószínűség határai

- **A lehetetlen esemény valószínűsége 0.**

- **A bizonyosan bekövetkező esemény valószínűsége 1.**

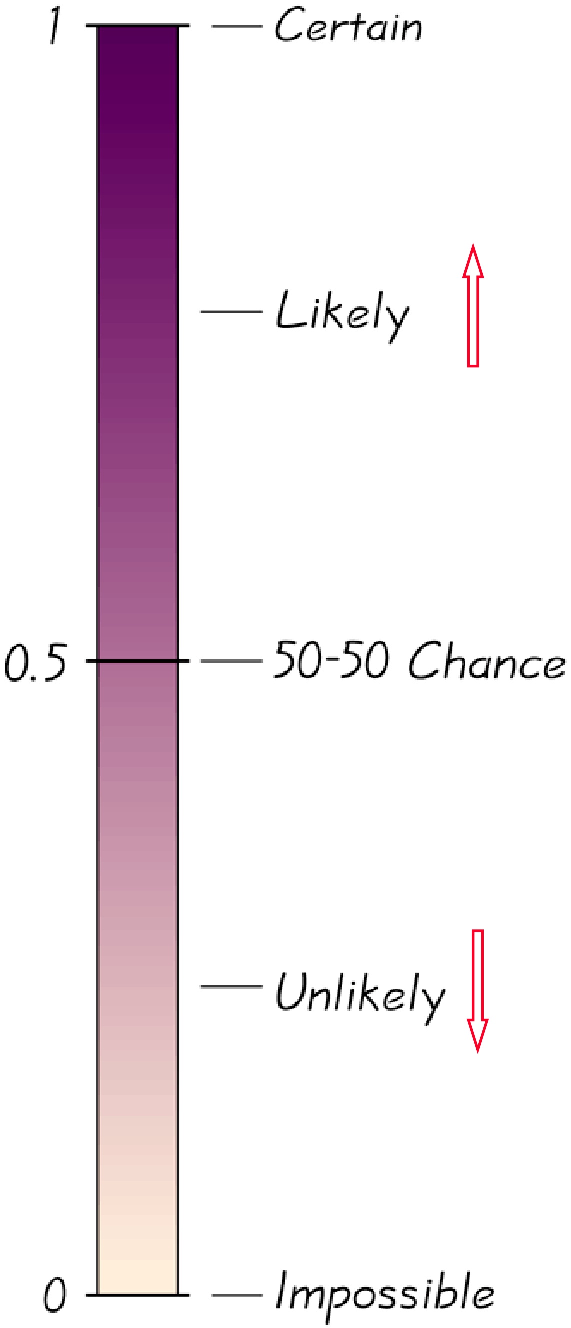
- **Minden *A* eseményre, *A* vsz.-ge 0 és 1 közé esik, beleértve a határokat is. Vagyis, $0 \le P(A) \le 1$.**

Magyarázat

- Összes kísérlet száma: N
- Amiben A bekövetkezett: N_A
- A vsz. becslése $N_A/N \rightarrow P(A)$
- $0 \leq N_A/N \leq 1 \rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$

- Mivel $N \rightarrow$ végtelen, $N_A/N \rightarrow P(A)$
  $P(A)=0$ esetén lehet, hogy $N_A \neq 0$
  $P(A)=1$ esetén lehet, hogy $N_A \neq N$

A valószínűség lehetséges értékei



Definíció

Az A esemény komplementerét $\overline{A}$ jelöli, ami mindazokból az eseményekből áll, melyekben A nem következik be.

Példa

- A valóságban több fiú születik, mint lány. 205 újszülött közül 105 fiú. Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenül kiválasztott újszülött nem fiú.

P(nem fiú)=P(lány)=100/205=0.488

Definíciók

Az igazi esélyek az *A* esemény megtörténése ellenében $P(A)/P(\bar{A})$, általában a:b alakban kifejezve (vagy "a a b-hez"), ahol *a* és *b* egész számok (közös osztó nélkül).

Az igazi esélyek az A esemény megtörténése mellett az előbbi reciproka. Ha *A* ellenében a:b az esély, akkor *A* mellett b:a.

A nyerési esély az *A* eseménnyel szemben a nettó profit (ha nyersz) viszonya a feltett összeghez.

nyerési esély egy A eseménnyel szemben

A = (nettó profit) : (feltett összeg)

Példa

- A kaszinóban tegyünk a 13-as számra 5$-t.
- A nyerés vsz.-e: 1/38 (amerikai rulett)
- A kaszinó 35:1-arányban fogad.
- Mekkora az igazi esély?
- a 13-assal szemben az esély =

P(nem 13)/P(13)=37/38 / 1/38 = 37 vagyis 37:1

Összefoglalás

Ebben a fejezetben megvitattuk:

- **A ritka események szabályát**
- **A valószínűség szabályait.**
- **A nagy számok törvényeit.**
- **A komplementer eseményt.**
- **Esélyeket.**

4-3. fejezet
Addíciós szabály

Kulcsfogalmak

A fejezet célja, hogy bemutassuk az addíciós szabályt ami egy jó eszköz arra, hogy vele olyan vsz.-eket számítsunk ki melyek *P*(*A* vagy *B*) alakúak, azaz annak a vsz.-e hogy vagy *A* esemény bekövetkezik, vagy *B* esemény bekövetkezi (esetleg mindkettő) a véletlen kísérlet kimeneteként.

Halálos áldozatok gyalogos gázolásnál

Ittasság	Gyalogos igen	Gyalogos nem
Vezető igen	59	79
Vezető nem	266	581

Példa

- Mi a vsz.-e annak, hogy vagy a vezető vagy a gyalogos ittas volt?
- Összes eset 985
- Ittas volt valaki: 404/985 = 41%

Ittasság	Gyalogos igen	Gyalogos nem
Vezető igen	59	79
Vezető nem	266	581

Definíció

Összetett esemény

bármely 2 vagy több

elemi eseményből összetett esemény

Jelölés

***P*(*A* vagy *B*) = *P*(*A* + *B*) =**

***P* (egy kísérletben legalább az *A* esemény vagy legalább a *B* esemény) =**

***P* (egy kísérletben *A* esemény vagy *B* esemény vagy mindkettő bekövetkezik)**

Az összetett események vsz.-ének általános szabálya

Ha ki akarjuk számítani annak a vsz.-ét, hogy *A* bekövetkezik vagy *B* bekövetkezik, meg kell számolni, hogy *A* hányszor következik be és hogy *B* hányszor következik be, de nem szabad több mint egyszer megszámolni a lehetséges kimeneteket.

Példa

- Mekkora annak a valószínűsége, hogy a vezető vagy a gyalogos ittas volt?
- Vezető ittas: 138
- Gyalogos ittas: 325
- Összesen 463
- de, kétszer számoltuk azt az 59 esetet, amikor mindketten ittasak voltak 463-59=404

Ittasság	Gyalogos igen	Gyalogos nem
Vezető igen	59	79
Vezető nem	266	581

Összetett esemény

Formális összeadási szabály:

$$P(A \text{ vagy } B) = P(\text{A+B}) = P(A) + P(B) - P(A \text{ és } B)$$

ahol $P(A$ és $B)$ jelenti annak a vsz.-ét, hogy A és B mindketten egyszerre bekövetkeznek a kísérlet kimeneteként.

Intuitív szabály:

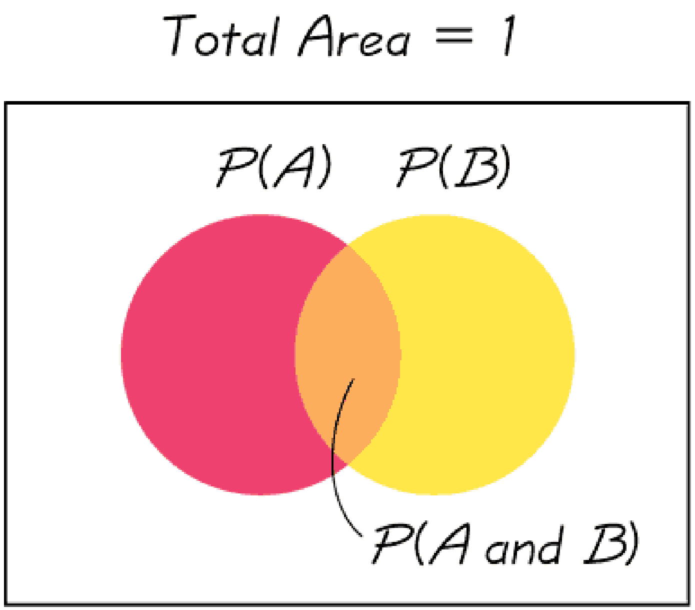
$$N_{A+B} = N_A + N_B - N_{A \text{ és } B}$$

$$N_{A+B}/N = N_A/N + N_B/N - N_{A \text{ és } B}/N$$

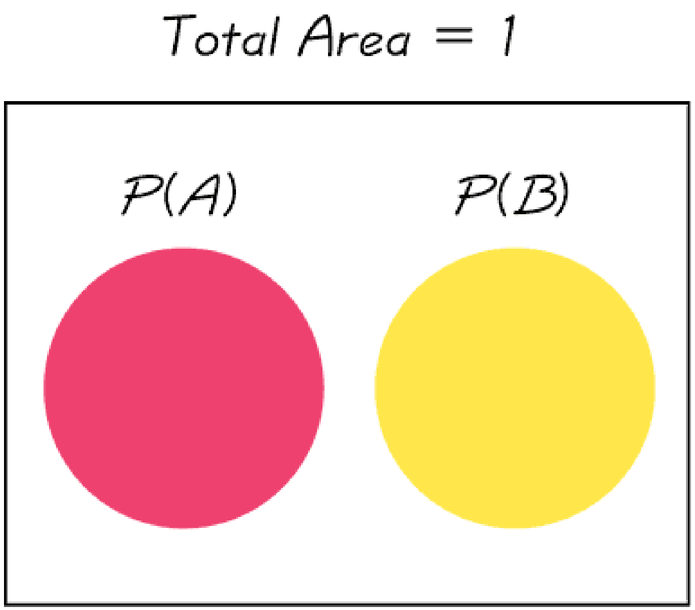
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ és } B)$$

Definíció

Az *A* és *B* események diszjunktak (vagy kölcsönösen kizárók) ha nem történhetnek meg egyszerre. (Vagyis, diszjunkt események nem fedhetnek át egymással.)



Nem diszjunkt események Venn diagrammja



Diszjunkt események Venn diagrammja

Komplementer események

A és $\bar{A}$

diszjunkt események

Egy esemény és a komplementere nem következhetnek be egyszerre.

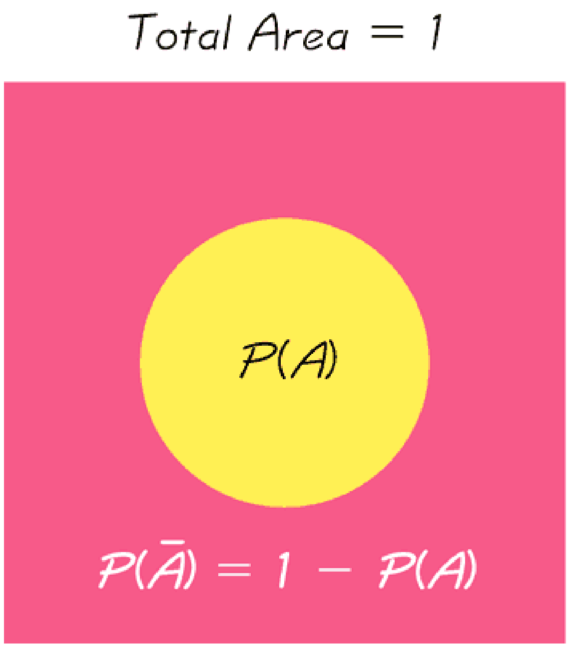
Komplementer események szabályai

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

A és komplementerének Venn diagrammja



Összefoglalás

Ebben a fejezetben tárgyaltuk az:

- **Összetett eseményeket.**
- **A formális összeadási szabályt.**
- **Az intuitív összeadási szabályt.**
- **Diszjunkt eseményeket.**
- **Komplementer eseményeket.**

4-4. fejezet
Multiplikációs szabály

Feltételes valószínűség

A második esemény *B* vsz.-ében figyelembe kell vennünk, hogy *A* bekövetkezett.

A feltételes vsz. jelölése

$P(B|A)$ jelöli annak a vsz.-ét, hogy a B esemény bekövetkezik, feltéve hogy A esemény már bekövetkezett („$B \,|\, A$” kiolvasása: “B feltéve, hogy A.”)

Példa

Ittasság	Gyalogos igen	Gyalogos nem
Vezető igen	59	79
Vezető nem	266	581

- Mi a valószínűsége annak, hogy a vezető ittas volt (A esemény)?
- P(A)=138/985 = 14%
- Mi a valószínűsége annak, hogy a gyalogos ittas volt (B esemény)?
- P(B)=325/985=33%
- Mi a valószínűsége annak, hogy a gyalogos ittas volt, ha tudjuk, hogy a vezető ittas volt?
- Vezető ittas 138 esetben, ebből 59 esetben a gyalogos is.
- P(B|A)=59/138=43%

Definíció

Egy esemény feltételes valószínűsége az a valószínűség, amit akkor kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy egy másik esemény már megtörtént. $P(B \mid A)$ jelöli B esemény feltételes vsz.-ét, feltéve, hogy A bekövetkezett. Kiszámítása:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ és } B)}{P(A)}$$

Példa (tovább)

- P(A és B)= 59/985
- P(A)=138/985
- P(B|A)=P(A és B)/P(A)=59/138 mint előbb.

Ittasság	Gyalogos igen	Gyalogos nem
Vezető igen	59	79
Vezető nem	266	581

Definíció

Független események

Két esemény, *A* és *B* független ek ha az egyik bekövetkezése nem befolyásolja a másik bekövetkezésének valószínűségét. (Több esemény hasonló módon független, ha bármelyikük bekövetkezése nem befolyásolja a többiek bekövetkezésének valószínűségét.) Ha *A* és *B* nem függetlenek, akkor egymástól függőnek nevezzük őket.

Kulcsfogalmak

Ha az első *A* esemény kimenete valahogy befolyásolja a második *B* esemény kimenetét, fontos hogy a *B* esemény vsz.-ének kiszámításakor figyelembe tudjuk venni hogy *A* bekövetkezett.

***P*(*A* és *B*) = P(A*B) kiszámításának szabályát multiplikációs szabálynak nevezzük.**

Formális szorzási szabály

- $P(A \text{ és } B) = P(A) \bullet P(B \mid A)$
- **Ha A és B független események, akkor $P(B|A) = P(B)$.**

Intuitív szorzási szabály

$$N_{A \text{ és } B} = (N_{A*B}/N_A)N_A$$

$$N_{A \text{ és } B}/N = (N_{A*B}/N_A)N_A/N$$

$$P(A*B)=P(B|A)P(A)$$

Független események szorzási szabálya

- Ha A és B független események, akkor $P(B|A) = P(B)$.
- Azaz:

$$P(A*B)=P(B)*P(A),$$

Összefoglalás:

- Feltételes valószínűséget.
- Formális szorzási szabályt.
- Intuitív szorzási szabályt.

4-6. fejezet
Valószínűségek kiszámítása szimulációval

Kulcsfogalmak

Ebben a fejezetben egy másik módszert mutatunk be a valószínűségek kiszámítására, amivel az előző fejezetekben bevezetett formális módszerek nehézségeit ki lehet kerülni.

Definíció

Egy folyamat szimulációja egy olyan másik folyamat, ami ugyanúgy viselkedik, és így hasonló eredményeket produkál mint az első.

Szimulációs példa (nagyon egyszerű példa)

Nemek (F,N) szelekciója Ha valamilyen nemi szelekciós módszert tesztelünk, akkor tudnunk kell, hogy mi a valószínűsége annak, hogy 100 újszülött közül legalább 60 lány, feltéve, hogy a fiú és lány születések egyforma gyakoriak.

Találjunk ki egy egyszerű szimulációt, amivel ki tudjuk számítani ezt a valószínűséget!

Példa: Generáljuk 100 újszülött nemét

1. megoldás:

- Dobjunk fel 100-szor egy érmét és

fej = nő
írás = férfi

F	F	Í	F	Í	Í	F	F	F	F
nő	nő	férfi	nő	férfi	férfi	nő	nő	nő	nő

2. megoldás:

- Generáljunk 0 és 1 sorozatokat egy számítógéppel, ahol

0 = férfi
1 = nő

0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
férfi	férfi	nő	férfi	nő	nő	nő	férfi	férfi	férfi

- Generáljunk nagyon sokszor (N alkalommal) 100 db véletlen 0 vagy 1 számot 50-50% valószínűséggel (vagy pl. 51,12% - 48,88 %).
- Számoljuk meg hányban van 60 vagy több 1-es (N_{60} alkalommal).
- P(60 vagy több lány 100 születésből)=N_{60}/N

Véletlen számok

Sok szimulációban, véletlen számokat használunk a valóságos események szimulációjára. Különböző véletlen szám generálási módszerek:

- **Véletlen számok táblázata**
- **Excel (VÉL() függvény, 0 és 1 között egyenletesen)**
- **C (y=random(100)) véletlen 0 és 100 közötti egész egyenletesen**

Összefoglalás

Ebben a fejezetben megvitattuk a:

- **Szimulációkat.**
- **Véletlen szám generálást.**