BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Monostory Iván

VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA

Példatár

Műegyetemi Kiadó, 2005.

(Tizedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **0409731**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 14 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 055/05

II.

Ez a példatár Monostory Iván egyetemi adjunktus "Valószinüségelmélet és matematikai statisztika" c. elméleti jegyzetéhez készült segédlet. A több mint 100 feladat jelentős részének sorszáma előtt * jelzés található, vagy a feladat sorszáma bekeretezve olvasható. Az előbbiek megoldásához a példatár második felében utmutatást adtunk, az utóbbiakét részletesen kidolgoztuk, egy-egy alkalommal több megoldást is közöltünk.

Ahol a megoldások ismertetése közben tételekre hivatkozunk, hasznos az elméleti jegyzet odavágó fejezetének áttanulmányozása.

TARTALOM

	Feladatok	Megoldások
Valószínűség elmélet		
I. Kombinatorika	9	65
II. Eseményalgebra	12	70
III. Klasszikus valószínűség ...	14	71
IV. Geometriai valószínűség ...	17	74
V. Feltételes valószínűség. Függetlenség	19	80
VI. Valószínűségi változók eloszlásának jellemzése	24	86
VII. Valószínűségi változók együttes eloszlása. Korreláció	30	93
VIII. Néhány típus-eloszlás. Határeloszlás-tételek	35	97
IX. Csebisev-egyenlőtlenség. A nagy számok törvényei ...	41	107
Matematikai statisztika		
X. Statisztikai adatok feldolgozása	43	109
XI. Paraméter-becslés. Megbízhatósági intervallum	46	109
XII. Statisztikai próbák	49	114
XIII. Korrelációs és regressziós elemzés	59	122
XIV. Tájékoztató	127	

FELADATOK

I. Kombinatorika

(Összefoglalás)

Permutáció:	elemek sorrendezése.
Kombináció:	elemek kiválasztása. Sorrend nem számit.
Variáció:	elemek kiválasztása. Sorrend számit.
Ismétléses permutáció:	a sorrendezendő elemek között megegyezők is előfordulnak.
Ismétléses kombináció: variáció	a kiválasztott elemek között ugyanaz(ok) az elem(ek) többször is előfordulhat(nak).

Képletek:

	Permutáció	Kombináció	Variáció
Ism. nélküli	$n!$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}k!$
Ismétléses	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k

*1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$2.\binom{x}{2}+3.\binom{x}{x-1}=35 ; \qquad x \in T.$$

$\boxed{2.}$ Hány olyan valódi tizjegyü szám létezik, amelyben minden számjegy csak egyszer fordul elő? (Valódinak mondunk egy n-jegyü számot, ha az első számjegye nem zérus.)

3. A kettes számrendszerben hány különböző valódi tizjegyü szám irható fel?

4. Egy 20-tagu brigádban négy jutalmat osztanak ki. Hányféleképpen alakulhat a jutalmazott csoportja, ha egy brigádtag

a) csak egy jutalmat kaphat,
b) több jutalmat is kaphat?

Oldjuk meg a feladatot egyenlő és különböző jutalmak esetére is!

*5. Hány valódi ötjegyü szám készithető a 0,3,0,2,2 számjegyekből?
Irjuk fel ezeket a számokat!

*6. Hány valódi háromjegyü páros szám képezhető a 0,1,2,3,4 számjegyek felhasználásával, ha minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel?

7. Egy dobozban 20 darab gépalkatrész van. Közülük öt selejtes. Hányféleképpen vehetjük ki egyenként mind a 20 alkatrészt ugy, hogy a selejtesek utoljára maradjanak?

8. Négy játékos kártyázik a 32 lapos magyar kártyával. Minden játékos nyolc lapot kap.
Hány különböző leosztás valósulhat meg?

*9. A 32 lapos magyar kártyacsomagból négy egyenlő csoportot képeztünk. (Tehát minden csoportban pontosan 8 kártyalap van elhelyezve.)
a) Hány különböző ilyen négyes csoport létezik?
b) Hány különböző négyes csoport létezik akkor, ha az egyik csomóban pontosan három ásznak kell lennie?

*10. Hány különböző 10 találatos toto-tipposzlop létezik? (Tegyük fel, hogy 13 mérközést kellett megtippelni.)

$\boxed{11.}$ Három kockával dobunk egyszerre.
Hányféleképpen alakulhat a dobás eredménye, ha
a) mindhárom kocka egyforma szinü (megkülönböztethetetlen);
b) két kocka fehér, egy fekete;
c) a kockák különböző szinüek?

*12. Mennyi az elemi események száma az előző feladat a) b) és c) esetében?

*13. Valamely sakkversenyen egy játékosnak a hetedik forduló után (tehát 7 játszmából) 5 pontja van. Hányféleképpen jöhetett létre ez az eredmény?
(Nyert játszma 1 pont, döntetlen 0,5 pont, vesztett játszma 0 pont.)

14. Hányféleképpen helyezkedhet el 5 urnában 50 számozott golyó, ha az elsőben 8, a másodikban 4 és a harmadikban 10 golyónak kell lennie?

15. Hány olyan ötjegyű szám létezik, amely csak az 1,2,3 számjegyeket tartalmazza, de mindegyiket legalább egyszer?

*16. Hány 5-betűs szót képezhetünk az l, m, n, r és az a, e, i, o, u betűkből úgy, hogy sem két magánhangzó, sem két mássalhangzó ne kerüljön egymás mellé, és egyik betű se ismétlődjék?

17. Hány hétbetűs, magánhangzóval kezdődő szó alkotható az l, m, n, r és az a, e, i, o, u betűkből, ha két magán- ill. mássalhangzó nem kerülhet egymás mellé, és minden mássalhangzó csak egyszer szerepelhet?

18. Hány különböző módon olvashatjuk ki az alábbi összeállításból a VALÓSZÍNŰSÉG szót, ha a bal felső sarokból kiindulva egy-egy lépéssel jobbra vagy lefelé haladunk, míg a jobb alsó sarokba nem érünk:

V A L Ó S Z Í
A L Ó S Z Í N
L Ó S Z Í N Ű
Ó S Z Í N Ű S
S Z Í N Ű S É
Z Í N Ű S É G

[illegible] darab termékből 7 darab első osztályú és három másodosztályú. Hányféleképpen választhatunk ki ezek közül 5 gyártmányt úgy, hogy legfeljebb két másodosztályú legyen közöttük?

20. Az előző feladatban szereplő gyártmányok közül hányféleképpen választhatunk ki 5 terméket úgy, hogy legalább két másodosztályú legyen közöttük?

21. Mennyi az 1-es és a 2-es számjegyekből felírható ötjegyű számok összege?

*22. Hányféleképpen osztható 5000 Ft három részre, ha mindegyikbe legalább 1000 Ft-ot kitevő, kerek százas értékű összegnek kell jutnia?

II. Eseményalgebra

23. Egy üzem három szövőgépét vizsgáljuk. L esemény jelentse azt, hogy legalább az egyik gép hibás, M pedig, hogy mindhárom kifogástalan.
Mit jelentenek az
- a) $\overline{M} + L$
- b) ML
- c) $M + L$
- d) $\overline{L}$
- e) $\overline{M}$
- f) $\overline{M}\,\overline{L}$

események?

$\boxed{24.}$ Próbagyártás során három szempontból vizsgálják a késztermékeket. Az A esemény bekövetkezése jelentse azt, hogy a megvizsgált termék anyaghibás, a B esemény mérethibát, a C esemény pedig egyéb szempontból való meg nem felelést jelentsen.
Irjuk fel a késztermékkel kapcsolatos alábbi eseményeket A-val, B-vel és C-vel:
- a) a termék csak mérethibás (tehát egyébként megfelelő),
- b) a termék legalább egy szempontból nem megfelelő,
- c) a termék pontosan egy szempontból nem megfelelő,
- d) a termék legfeljebb egy szempontból nem megfelelő.

*25. Az előző feladat jelöléseit felhasználva, irjuk fel az alábbi eseményeket:
- a) a termék legalább egy szempontból megfelelő,
- b) a termék legfeljebb két szempontból nem megfelelő,
- c) a termék kifogástalan.
- d) Fogalmazzuk meg az $\overline{A + B + C}$ esemény jelentését!

A megolsások során - ahol lehet - alkalmazzuk a De Morgan-féle azonosságokat is! (Lásd a 3.15 és a 3.16 tételeket!)

26. Igazoljuk, hogy

$$(A + B) - C = (A - C) + (B - C)$$

eseményalgebrai azonosság!

27. Egy urnában 100 korong van 1-től 100-ig megszámozva. Találomra kihuzunk egyet. Legyen A az az esemény, hogy páros számot, B hogy 3-mal osztható, C hogy 30-nál kisebb számot huzunk.
Irjunk fel legalább három olyan számot, amelynek kihuzásakor az

a) $(A - C) + (B - C)$,
b) $(\overline{A - C}) + (B - C)$

esemény következik be!

*28. Mutassuk meg, hogy valamely eseménytér tetszőleges A és B eseményére az

$$AB\ ;\ \bar{A}B;\ A\bar{B};\ \bar{A}\bar{B}$$

események teljes eseményrendszert alkotnak!

29. Bizonyitsuk be, hogy

$$A = (A - B) + B$$

akkor és csakis akkor, ha B maga után vonja A-t!
(Lásd a 3.21 és a 3.22 Tételt!)

III. Klasszikus valószínűség

(Összefoglalás)

Az eseménytér bármely A eseményére:

$$P(A) = \frac{\text{az A eseményben foglalt kedvező elemi események száma}}{\text{az összes elemi események száma}} ,$$

feltéve, hogy az eseménytér véges sok, egyenlő valószinüségü elemi eseményből áll.

Az $\bar{A}$ (komplementer) esemény valószinüségére fennáll, hogy

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) .$$

Ha a B esemény maga után vonja az A esemény bekövetkezését, akkor

$$P(A - B) = P(A) - P(B)$$

Annak a valószinüsége, hogy az eseménytér két tetszőleges eseménye közül legalább az egyik bekövetkezik:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB .$$

Kettőnél több eseményre a tételt általánosan Poincaré fogalmazta m (8.7 Tétel)

30. Egy dobozban 40 db 8 mm-es, több 6 és 10 mm-es anyás csavar van.
Annak a valószinüsége, hogy egy csavart kiemelve az 6 vagy 10 mm-es lesz: 0, 6; annak pedig, hogy 6 vagy 8 mm-es lesz: 0, 7. Hány darab 6 mm-es és hány 10 mm-es csavar van a dobozban? (Feltesszük, hogy a csavarok mindegyike - méretüktől függetlenül - azonos eséllyel emelhető ki a halmazból!)

*31 Egy szabályos kockát hatszor egymás után feldobunk.
Mi a valószinüsége, hogy

a) az 1,2,3,4,5,6 számok mindegyike szerepelni fog?
b) az első dobás hatos lesz, a többi ettől különböző?
c) az első két dobás hatos, a többi pedig ettől és egymástól is különböző lesz?
d) két dobás eredménye hatos, a többi pedig ettől különböző lesz?

✶32. 7 házaspár táncol. Van közöttük 3 testvérpár (1 férfi - 1 nő testvér).
Mennyi a valószinüsége, hogy
a) a 3 testvérpár együtt táncol?
b) legalább egy valaki nem a házastársával táncol?
(Feltételezzük, hogy a párok véletlenszerüen alakulnak ki.)

✶33. Egy 52 lapos kártyacsomagból 13 lapot találomra kihuzunk. (Az egyszer kihuzott lapot többé nem tesszük vissza a csomagba.) Mennyi a valószinüsége annak, hogy
a) a treff-király a kihuzott lapok között lesz?
b) pontosan két treff lesz a kihuzott lapok között?
c) a treff-királyon kivül a treff ász is a kihuzott lapok között lesz?
d) legalább egy treff lesz a kihuzott lapok között?

✶34. Kitöltünk egy lottószelvényt. Mennyi a valószinüsége annak, hogy
a) pontosan három találatunk lesz?
b) legalább három találatunk lesz?
c) legfeljebb három találatunk lesz?

✶35. A válogató edzésen résztvevő 22 játékos közül 10 játékos az F, 7 játékos a T, 5 játékos pedig a C csapat tagja.
a) Mi a valószinüsége annak, hogy a szövetségi kapitány 9 játékost az F, 1-1 játékost pedig a másik két csapatból válogat be a nemzeti 11-be, ha minden játékos beválogatásának azonos az esélye?
b) Az edzőmérkőzésen találomra történik a 22 játékos szétosztása két 11-es csoportba. Mi a valószinüsége annak, hogy a két legjobb játékos egymás ellen játszik?

36. Mennyi a valószinüsége, hogy egy találomra kitöltött totó - tipposzloppal pontosan 10 találatot érünk el? (13 megtippelendő mérkőzést tételezünk fel.)

$\boxed{37.}$ Egy alkatrészhalmazból, amelyben p a selejtarány, visszatevéssel veszünk ki egy n elemű mintát, véletlenszerűen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában páros lesz a selejtesek száma?

$\boxed{38.}$ A Brown-mozgás tárgyalására szolgálhat modellül az alábbi ún. bolyongási probléma:

Tételezzük fel, hogy egy részecske csupán egy egyenes mentén mozoghat úgy, hogy egységnyi útszakaszokat tesz meg ugyanolyan valószínűséggel jobb vagy bal irányban mindenegyes lépésben. Legyen az egyenes az x tengely, amelynek nulla jelű pontjából indul a részecske. Kérdés: mi a valószínűsége annak, hogy n lépés után az x=A pontban lesz a részecske?

39. Egy dobozban lévő 100 db, 1-től 100-ig számozott golyó közül találomra kiválasztunk 10 db golyót visszatevés nélkül. A kiválasztott golyókat számozásuknak megfelelően nagyság szerint növekvő sorba rendezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sorba rendezett golyók közül az ötödik éppen az ötvenes sorszámot viseli?

IV. Geometriai valószínűség

(Összefoglalás)

Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetők meg úgy, hogy az egyes események bekövetkezési valószínűsége a nekik megfelelő részhalmazok geometriai mértékével arányos, akkor egy tetszőleges A esemény bekövetkezésének valószínűsége

$$P(A) = \frac{m}{M},$$

ahol m az A eseménynek megfeleltetett részalakzatnak, M pedig a teljes geometriai alakzatnak a mértéke.

$\boxed{\text{I.}}$ Háromszög szerkeszthetőségének valószínűsége. A (0,1) intervallumon találomra kiválasztunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így keletkezett három szakaszból háromszög szerkeszthető?

*II. Két számot választunk találomra a (0,1) számközben. Mi a valószínűsége, hogy összegük 1-nél, szorzatuk pedig $\frac{4}{25}$-nél kisebb?

*III. Ketten megbeszélik, hogy de. 10 és 11 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint, aki korábban érkezik 20 percet vár a másikra. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?

IV. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint bármelyik a végpontokhoz?

V. Egy r sugarú kör területén megjelölünk egy pontot. Ezután a körlapon találomra választunk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a két pont távolsága nagyobb, mint $r\sqrt{2}$?

xV Az $x^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet b és c együtthatóit válasszuk véletlenszerűen a (-2;2) számközből. Mi a valószínűsége annak, hogy az egyenlet gyökei valós számok lesznek?

VII. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három, egységnyi hosszúságnál rövidebb, egymástól függetlenül találomra választott szakasszal - mint élhosszakkal - meghatározott téglatest testátlója az az egységnél kisebb?

xVIII. Egy r sugarú körben adott iránnyal párhuzamos húrt veszünk fel. Mi a valószínűsége annak, hogy a húr hossza kisebb mint a kör sugara, ha a húr felezőpontját az adott irányra merőleges átmérőn választjuk véletlenszerűen?

xIX. Egy r sugarú kör kerületén véletlenszerűen felveszünk egy pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy ezen ponton keresztül egy előre megadott iránnyal párhuzamosan húzott húr hossza kisebb mint a kör sugara?

xX. A Bertrand-féle paradoxon.

Egy r sugarú kör valamely húrját véletlenszerűen kiválasztjuk. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy ez a húr hosszabb a körbe írt szabályos háromszög oldalánál? A véletlenszerű kiválasztást végezzük el

a) a húr egyik végpontjának a köríven való véletlenszerű kiválasztásával (ha a másik végpontot már előre rögzítettük.)

b) a húr középpontjának a körlap területén való véletlenszerű kiválasztásával.

V. Feltételes valószínűség. Függetlenség

(Összefoglalás)

Feltételes valószínüség

Definició: $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, ha $P(B) \neq 0$.

Következmény: $P(A/B)\,P(B) = P(B/A)\,P(A)$.

A teljes valószínüség tétele:

$$P(A) = P(A/B_1)\,P(B_1) + P(A/B_2)\,P(B_2) + \ldots + P(A/B_n)\,P(B_n),$$

ahol $B_1, B_2, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer és $P(B_i) \neq 0$.

Bayes-tétele: $P(B_k/A) = \dfrac{P(A/B_k)\,P(B_k)}{P(A/B_1)\,P(B_1) + \ldots + P(A/B_n)\,P(B_n)}$,

ahol $B_1, B_2, \ldots B_n$ teljes eseményrendszer, $P(B_i) \neq 0$ és $P(A) \neq 0$.

Függetlenség

Definició: A és B függetlenek, ha $P(A/B) = P(A)$.
Következmény: A és B akkor és csakis akkor függetlenek, ha $P(AB) = P(A)\,P(B)$.

Megjegyzés: Kettőnél több esemény páronkénti függetlenségéből nem következik feltétlenül azok teljes függetlensége.
Ha $A_1, A_2, \ldots A_n$ összességükben (teljesen) függetlenek, akkor

$P(A_1 A_2 \ldots . A_n) = P(A_1)\,P(A_2) \ldots P(A_n)$, de - fordítva - a reláció teljesülése nem biztositéka az események függetlenségének.

40. Egy üzem terméke három különböző technológiával készül. A kész termékeket első-, illetőleg másodosztályunak minősitik.

Valamely munkanapon az alábbi táblázatot állitották össze az elkészült termékekről:

	1. techn.	2. techn.	3. techn.	Összesen
I. oszt.	300	310	315	925
II. oszt.	220	190	175	585
Összesen:	520	500	490	1510

Jelentse A_i azt az eseményt, hogy a vizsgált termék az i-edik technológiával készült ($i = 1, 2, 3$).

A B_k esemény azt jelenti, hogy a vizsgált termék k-adosztályu minősitésü.

Feltéve, hogy bármelyik terméket egyenlő valószinüséggel választhatjuk ki a halmazból, határozzuk meg az alábbi valószinüségeket:

a) $P(A_1)$; b) $P(A_1 + A_2)$; c) $P(A_1/B_2)$;

d) $P(A_1 + A_3/B_1)$; e) $P(B_1/A_1 + A_2)$;

f) $P(B_1 + B_2/A_1)$.

41. Valamely eseménytérben az A és B események közül legalább az egyik feltétlenül bekövetkezik.

Legyen $P(A/B) = 0,2$ és $P(B/A) = 0,5$.

Mennyi a $P(A)$ és $P(B)$ valószinüségek értéke?

*42. Bizonyitsuk be az elméleti jegyzet 10.5 Tételében megfogalmazott állitást!

43. Legyen $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(A/B) = \frac{2}{3}$, továbbá $P(B/A) = \frac{1}{3}$.

Határozzuk meg a

a) $P(A + B)$,

b) $P(\bar{A}/\bar{B})$ valószinüségeket!

44. Egy urnában 3 golyó van elhelyezve: egy piros, egy fehér és egy zöld. Az urnából ötször huzunk egymás után egy-egy golyót. (A megvizsgált golyót az ujabb huzás előtt visszahelyezzük az urnába.)

Mi a valószinüsége annak, hogy egyszer sem huzunk piros golyót, feltéve, hogy fehéret is és zöldet is legalább kétszer huzunk?

45. Izzólámpákat százas csomagolásban szállitanak. Az előző megfigyelésekből ismert, hogy a tételek között csak 0, 1, 2, 3 vagy 4 hibás darabot tartalmazó fordul elő, azonos arányban.

Mennyi a valószinüsége annak, hogy egy tételből véletlenszerűen – visszatevés nélkül – kiválasztva három égőt, egy lesz közülük hibás?

*46. Kétmillió pénzérme közül kettőn két fej van, a többi érme hibátlan. Találomra kiválasztunk egy érmét és háromszor feldobjuk. Eredményül mindig fejet kapunk.

Mennyi annak a valószinüsége, hogy rossz érmét választottunk?

*47. Egy munkás két gépen dolgozik.
Az első gépet 0,87, a másodikat 0,90 valószinüséggel nem kell javitania egy müszak alatt.

Mennyi annak a valószinüsége, hogy

a) legfeljebb egy géppel kell foglalkoznia,

b) csak egy géppel kell foglalkoznia javitás céljából egy müszak alatt, ha a gépek meghibásodása egymástól független?

48. 100 db alkatrészből 4 db selejtes. A halmazból kiemelünk 5 db alkatrészt véletlenszerüen, visszatevés nélkül. A kiemelt alkatrészeket megvizsgáljuk, majd visszahelyezzük azokat az alaphalmazba. A mintavételt és a vizsgálatot még kétszer ugyanigy megismételjük.

Milyen valószinüséggel lesz mindhárom minta hibátlan?

$\boxed{49.}$ Egy rendszer három <u>független</u> komponensből áll. A komponensek mindegyike p valószinüséggel müködik. Mennyi a valószinüsége annak, hogy a rendszer müködik, ha a komponensek

a) sorosan,

b) párhuzamosan

kapcsoltak?

$\boxed{50.}$ Hány héten keresztül kell játszani heti egy lottószelvénnyel, hogy annak a valószinüsége, hogy legalább egyszer legalább négyes találatot érjünk el, z-nél nagyobb legyen? $(0 < z < 1)$.

Három kockával dobunk egyszerre. Mi a valószí-
ısége annak, hogy legalább az egyik hatost mutat,
on feltevés mellett, hogy az egyes kockák különbö-
jelzésű számokat mutatnak?

52. Egy perzsa sah egyszer egy elítéltnek azt mondta, hogy tetszés szerint elhelyezhet 50 fehér és 50 fekete folyót két urnába. Az egyikből a sah kihúz majd egy golyót, s ha az fehér, megkegyelmez neki, ha fekete, nem. Hogyan kell szétosztani a 100 golyót a két urnába, hogy a fehér golyó húzásának a valószínűsége maximális legyen?

53. Két doboz mindegyikében 100-100 csavar van. Az első dobozban 10, a másodikban 5 a selejtek száma. Az egyik dobozból kiveszünk egy csavart. Mekkora a valószínűsége, hogy az selejtes lesz, ha az első dobozból 0,2 valószínűséggel húzunk?

Ezután öntsük össze a két doboz tartalmát. Húzzunk ki most egy csavart! Mennyi a selejtes húzás valószínűsége?

Hasonlítsuk össze a két eredményt! Mit tapasztalunk?

54. n doboz mindegyikében n számú golyó van, az i-edikben i db piros (i=1,2,...,n), a többi fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, s abból kihúzunk egy golyót. Ez piros lett. Mennyi a valószínűsége, hogy az utolsó két doboz valamelyikéből húztuk?

55. N darab elemet tartalmazó halmazból visszatevéssel veszünk ki egy n elemű mintát. A mintában k selejtes adódott. Mennyi a valószínűsége, hogy az adott halmazban S a selejtek száma? (Feltesszük, hogy az adott halmazban minden összetétel egyenlően valószínű.)

×56. Egy rekeszben 15 labda van, amelyek közül 9 új. Az első játékhoz találomra kiveszünk 3 labdát és ezeket játék után visszatesszük. A második játékhoz ismét 3 labdát veszünk ki találomra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utóbb kivett labdák mind újak lesznek?

57. Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyek közül rendre 1, 2, 3, 4, 5, 6 golyó fehér. Egy találomra választott dobozból három golyót húzunk egymás után visszatevéssel. Azt találjuk, hogy mindhárom húzásra fehér golyót vettünk ki. Mennyi ez esetben annak a valószínűsége, hogy a 6 golyó közül éppen kettő fehér volt a dobozban?

58. Egy automatagéppel kapcsolatban hosszú időn keresztül megfigyelték, hogy az egy nap alatt gyártott termékek között a selejt 3 és 4% között ingadozik. Pontosabban: bármely napot kiválasztva, p_i a valószínűsége annak, hogy a selejtszázalék $(3+\frac{i}{10})$%,

$i=0,1,2,\dots,10$ és $\sum_{i=10}^{10} p_i=1$. Egy napon, minőségőrzés során 1000 munkadarab közül 20 darabot véletlenszerűen kiválasztottak. Kérdés, mennyi annak a valószínűsége, hogy 20 kiválasztott darab közül pontosan 2 selejtes?

59. **Oldjuk meg az elméleti jegyzet 49. oldalán kidolgozott 10.2 példát Poincaré tételének (8.7 Tétel) felhasználásával!**

VI. Valószínűségi változók eloszlásának jellemzése

(Összefoglalás)

Diszkrét valószínűségi változó eloszlását a lehetséges értékeihez (teljes eseményrendszer) tartozó p_k valószínűségek összességével (sorozatával) adjuk meg:

$$P(\xi = x_k) = p_k, \qquad k = 1,2,\dots .$$

$$\sum_k p_k = 1.$$

Folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlását $f(x)$ sűrűségfüggvényével jellemezzük:

$$P(a \leqq \xi < b) = \int_a^b f(x)\,dx .$$

$$f(x) \geqq 0 \,;\; x \in R \,; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 .$$

Tetszőleges valószínűségi változó esetén a $P(\xi < x)$, $x \in R$ valószínűséget mint x függvényét, $F(x)$-szel jelöljük és eloszlásfüggvénynek nevezzük.

$$0 \leqq F(x) \leqq 1 \,; \quad F(-\infty) = 0 \,; \quad F(+\infty) = 1 \,;$$

$\lim\limits_{x \to a-0} F(x) = F(a)$; $F(x)$ monoton növekedő függvény.

Összefüggések: $$\sum_{a \leqq x_k < b} p_k = F(b) - F(a) \,;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ ;$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt,$$

és f(x) minden folytonossági pontjában $F'(x) = f(x)$.

A valószinüségi változók eloszlását jellemző legfontosabb számadatok a várható érték: $M(\xi)$ és a szórás: $D(\xi)$.
A várható érték:

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i, \quad \text{illetőleg} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

összefüggéssel adódik, feltéve, hogy a szóban forgó sor illetőleg az impropriús integrál abszolut konvergens.
A szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = M\left[(\xi - M(\xi))^2\right] = M(\xi^2) - \left[M(\xi)\right]^2,$$

s igy kiszámitása:

$$D^2(\xi) = \sum_i x_i^2 p_i - \left(\sum_i x_i p_i\right)^2,$$

illetőleg

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx\right]^2$$

összefüggésekkel történik.

*60. Valamely diszkrét valószinüségi változó a következő értékeket veszi fel:

$$x_1 = -3\ ;\quad x_2 = 1\ ;\quad x_3 = 2\ ;\quad x_4 = 5.$$

Ezen értékekhez tartozó valószinüségek rendre:

$$\frac{1}{12}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\ .$$

a) Valószinüségeloszlást adtunk-e meg?
b) Ábrázoljuk ξ eloszlását és eloszlásfüggvényét!
c) Számitsuk ki ξ várható értékét és szórását!

*61. Legyen ξ olyan valószinüségi változó, amelynek értékei a 0,1,2,.. nem - negativ egész számok.
Tudjuk, hogy a $\xi = k$ esemény valószinüsége arányos $\frac{1}{k!}$ -sal.
Határozzuk meg a $P(\xi = k)$ valószinüségeket!

62. Egy munkadarabot két alkatrészből szerelnek össze. A kétféle alkatrészt igen nagy mennyiségben egy-egy dobozban tárolják. Az első dobozban 10%, a másodikban 20% a selejtes alkatrészek aránya. A munkafolyamat során mindig az első dobozból emelnek ki először egy alkatrészt.

Legyen a ξ valószinüségi változó értéke az első hibás alkatrész megjelenéséig kiválasztott alkatrészek száma, beleértve a hibás alkatrészt is. (A kiválasztás véletlenszerüen történik.)

Határozzuk meg ξ valószinüségeloszlását!

*63. A tanszéki könyvtár hat orosz nyelvü folyóiratra fizet elő. Ebből négy matematikai, kettő müszaki tárgyu. A hat folyóirat közül hármat találomra kiválasztunk. Legyen a ξ valószinüségi változó értéke a kiválasztott matematikai tárgyu folyóiratok száma.
a) Irjuk fel és ábrázoljuk a valószinüségi változó eloszlását!
b) Határozzuk meg az eloszlásfüggvényt!
c) Határozzuk meg ξ várható értékét!

64. Mutassuk meg, hogy az

$$F(x) - \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leqq 1\,; \\ \dfrac{1+2x}{x-0,8}\,, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

függvény nem lehet eloszlásfüggvény!

65. Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \leqq -3 \\ \frac{1}{12}\,, & \text{ha } -3 < x < 1 \\ \frac{1}{4}\,, & \text{ha } 1 \leqq x \leqq 2 \\ \frac{3}{4}\,, & \text{ha } 2 < x \leqq 5 \\ 1\,, & \text{ha } x > 5 \end{cases}$$

a) Mutassuk meg, hogy $F(x)$ nem lehet eloszlásfüggvény!

b) Változtassuk meg (a legkézenfekvőbb módon) a függvény értelmezését ugy, hogy ezután már valamely valószinüségi változó eloszlásfüggvényének tekinthessük!

c) Határozzuk meg az eloszlás szórását!

$\boxed{66.}$ Legyen

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 1, \\ A + \dfrac{B}{x+1}, & \text{ha } x \geqq 1. \end{cases}$$

a) Milyen A és B esetén tekinthető $F(x)$ valamely valószinüségi változó eloszlásfüggvényének?

b) Ábrázoljuk $F(x)$-et!

c) Határozzuk meg az eloszlás sürüségfüggvényét!

d) Számitsuk ki a $P(\xi > 9)$ valószinüséget!

67. C és A mely értékeire lehet az

$$F(x) = C + A.\text{arc tg } x, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

eloszlásfüggvény?

*68. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} A(x + \frac{1}{2}), & \text{ha } 0 \leqq x < 1 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) A milyen értékére lehet $f(x)$ valamely valószinüségi változó sürüségfüggvénye?

b) Adjuk meg az $F(x)$ eloszlásfüggvényt!

c) $P(0 < \xi < 0,3) = ?$

*69. Legyen a ξ valószinüségi változó sürüségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{ha } x \geqq a, \\ 0 & \text{ha } x < a. \end{cases}$$

a) Határozzuk meg "a" értékét!

b) Számitsuk ki a $P(\xi \geqq \ln 2)$ valószinüséget!

c) Határozzuk meg az eloszlás várható értékét és szórását!

$\boxed{70.}$ Csapágy-gyürüket készitenek olyan automata gépsoron, amely helyes beállitás esetén hibátlan terméket állit elő. A beállitás azonban minden darab gyártása közben 0,02 valószinüséggel megváltozhat, s igy selejtes terméket kapunk.
Az ellenőrzés automatikus, s a gépsor azonnal leáll, amint selejtes gyártmány készült, hogy a beállitást korrigálhassák.

Határozzuk meg két beállitás között készülő csapágy-gyürük számának várható értékét!

* 71. Lehet-e

a) $$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{ha } -1 < x < 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

valamely eloszlás sürüségfüggvénye?

72. Valamely valószinüségi változó sürüségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 < x \leqq 1, \\ 2-x, & \text{ha } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Adjuk meg az eloszlásfüggvényt, továbbá a $P(\xi < 0)$, $P(\xi > 1)$ és a $P(0 < \xi < 3)$ valószinüségek értékeit!

* 73. Egy valószinüségi változó sürüségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x \leqq 1, \\ \frac{A}{2x^2}, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases} \qquad (A \in R).$$

a) Határozzuk meg az A konstans értékét!
b) Milyen valószinüséggel esik a valószinüségi változó értéke 0,5 és 2 közé?

* 74. **Gázmolekulák sebességét olyan ξ valószínűségi változónak tekintjük, amelynek sűrűségfüggvénye a Maxwell-eloszlás szerint:**

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha } x \leq 0\ , \\ \frac{4\,h^3}{\sqrt{\pi}}\, x^2\, e^{-h^2x^2}\ , & \text{ha } x > 0, \quad (h = \text{állandó}). \end{cases}$$

Számítsuk ki a gázmolekulák sebességének a várható értékét!

*75. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül két pontot választunk találomra. Legyen a valószínűségi változó a két választott pont távolsága. Határozzuk meg a két pont távolságának a várható értékét!

76. Egy céllövés során minden találat egy 18 cm sugarú körlapra jut. A lövés a körlap bármely pontjára azonos eséllyel található. Számítsuk ki a találat helyének a kör középpontjától való távolságának a szórását!

*77. Két ember teniszezik. A győztesnek három játszmát kell nyernie. Legyen p és 1-p annak a valószínűsége, hogy egy játszmát az A játékos nyer illetőleg veszít. Tegyük fel, hogy az egyes játszmák egymástól függetlenek. Kérdés, mennyi a szükséges játszmák számának a várható értéke?

78. Mutassuk meg, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1\ , \\ \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak nem létezik szórása.

79. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \qquad (\lambda > 0).$$

Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását!

VII. Valószínűségi változók együttes elosztása. Korreláció

(Összefoglalás)

Két diszkrét valószinüségi változó - ξ és η - együttes eloszlását a

$$p_{ik} = P(\xi = x_i, \eta = y_k); \quad i,k = 1,2,\ldots$$

valószinüségek összességével adjuk meg.

$$\sum_k \sum_i p_{ik} = 1 .$$

Két folytonos eloszlásu valószinüségi változó együttes eloszlását $f(x,y)$ együttes sürüségfüggvényükkel jellemezzük.

A ξ és η valószinüségi változók akkor és csakis akkor függetlenek, ha

$p_{ik} = p_i\, q_k$ minden i-re és k-ra, illetőleg $f(x,y) = f_1(x).f_2(y)$,

ahol a p_i és q_k valószinüségek ξ és η un. peremeloszlásának tagjai, illetőleg $f_1(x)$ és $f_2(y)$ ξ és η un. peremsürüségfüggvénye.

Fennáll, hogy

$$p_i = P(\xi = x_i) = \sum_k p_{ik} ,$$

$$q_k = P(\eta = y_k) = \sum_i p_{ik} ,$$

illetőleg

$$f_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy .$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \,.$$

Tetszőleges $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ valószinüségi változókra igaz, hogy

$$M(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i) .$$

Független valószinüségi változók esetén

$$M(\prod_{i=1}^{n} \xi_i) = \prod_{i=1}^{n} M(\xi_i) ,$$

és

$$D^2(\sum_{i=1}^{n} \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i) .$$

Valószinüségi változók $\zeta = g(\xi, \eta)$ függvényének, mint valószinüségi változónak a várható értékét az

$$M(\zeta) = \sum_i \sum_k g(x_i, y_k)\, p_{ik}$$

sor összege, illetőleg az

$$M(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y).f(x,y)\,dx\,dy$$

integrál szolgáltatja. (Az abszolut konvergencia teljesülése esetén
Két valószinüségi változó lineáris jellegü kapcsolatának szorosságát az

$$R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi\,\eta) - M(\xi)\,.\,M(\eta)}{D(\xi)\,.\,D(\eta)}$$

un. korrelációs együttható méri.

$$|R(\xi, \eta)| \leq 1.$$

80. Egy dobozban 5 db 7 mm-es, 4 db 6,8 mm-es és 3 db 7,2 mm-es csavar van elhelyezve. Véletlenszerűen kiveszünk közülük 3 darabot.

Jelentse ξ a mintában előforduló legkisebb, η pedig a közepes méretű csavarok számát.

a) Írjuk fel a (ξ, η) vektorváltozó valószínűségeloszlását!
b) Adjuk meg a peremeloszlásokat!
c) Függetlenek-e ξ és η ?

*81. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \ ; \ 0 < y < 2\ (1 - x), \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Irjuk fel ξ illetve η peremsűrűségfüggvényét!
b) Függetlenek-e ξ és η ?

82. Bizonyos munkadarabok elkészitése során egy-egy tengelyre 10 db egyforma méretű alkatrészt helyeznek szorosan egymás mellé. Az alkatrészek hossza egymástól független ingadozást mutat 10 cm körül, 0,2 szórással.

Mekkora az összeszerelt munkadarabok várható hossza és mekkora a szórása?

83. Két kockával dobva, vektorváltozót értelmezünk az alábbi módon:

Legyen $\xi = 1$, ha mindkét kockával egyforma, és
$\xi = 0$, ha különböző számot dobunk.
η pedig a 7 pont dobás eseményhez tartozó karakterisztikus változó.

$(\eta = 1$, ha a dobott pontszámok összege 7, különben $\eta = 0.)$

a) Irjuk fel a (ξ, η) együttes eloszlását!
/ b) Számitsuk ki az $R(\xi, \eta)$ korrelációs együtthatót!

*84. A ξ illetőleg az η valószinűségi változó lehetséges értékei 1; 2 illetőleg 1; 2; 3.

Az együttes eloszlásukban szereplő valószinűségeket az alábbi táblázat foglalja össze:

$\eta \backslash \xi$	1	2
1	0,1	0,3
2	0,2	0,1
3	0,2	0,1

a) Függetlenek-e ξ és η ?
b) Mennyi a valószinüsége a ($\xi \neq \eta$, $\eta > 1$) esemény bekövetkezésének?
c) Határozzuk meg ξ és η kovarianciáját!

85. Egy üzem termékeit I., II., és III. osztályu minősitéssel látják el. A készáruraktárban az üzem A és B jelü termékei az alábbi megoszlásban szerepelnek:

	I	II	III
A	500	200	100
B	650	300	50

Ebből a halmazból egy terméket véletlenszerüen kiemelnek. $\xi = 0$ jelentse, hogy A-jelü, $\xi = 1$ pedig, hogy B-jelü a termék. Az $\eta = 1$, $\eta = 2$, $\eta = 3$ érték jelentse a kivett termék minősitését.

a) Számitsuk ki $\xi + \eta$ várható értékét és szórását!
b) Határozzuk meg ξ és η korrelációs együtthatóját!

86. A (ξ, η) vektorváltozó együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	3p	6p
1	5p	15p	30p

a) Mekkora p értéke?
b) Függetlenek-e ξ és η ?
c) $M(\xi + \eta) = ?$
d) $M(\xi \cdot \eta) = ?$
e) $D(\xi + \eta) = ?$
f) $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = ?$

87. ξ és η együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

ξ η	2	0	-1	ξ perem
1	a	b	a	2a + b
0	b	a	b	a + 2b
-2	a	b	a	2a + b
η perem	2a+b	a+2b	2a+b	

Tudjuk, hogy ξ és η korrelátlatlanok. Függetlenek-e?

88. Jelentse ξ egy szövőgépen 1 óra alatt előforduló szálszakadások számát. A gépet kezelő munkásnak egy szál megkötéséhez 15 sec-ra van szüksége. Az az időmennyiség, amelyet a munkás 1 órán belül nem szálkötözésre fordit szintén valószinüségi változó, legyen ez η .

Irjuk fel ξ és η korrelációs együtthatóját!

89. Legyen ξ várható értéke $M(\xi)$ és szórása $D(\xi)$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\eta = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

valószínűségi változó várható értéke 0, és szórása 1.

VIII. Néhány típuseloszlás. Határeloszlás-tételek

(Összefoglalás)

1. Binomiális eloszlás. $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$; $k = 0,1,2,\dots,n.$

$M(\xi) = np$; $D(\xi) = \sqrt{npq}$. $(p+q = 1.)$

2. Poisson-eloszlás. $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; $k=0,1,2,\dots,$ $\lambda > 0.$

$M(\xi) = \lambda$, $D(\xi) = \sqrt{\lambda}$.

Elég nagy n **és kicsi** p **esetén a binomiális eloszlás tagjai jól közelíthetők a megfelelő Poisson-eloszlás tagjaival.**

3. Intervallumon egyenletes eloszlás.
Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2}; \qquad D(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

4. Exponenciális eloszlás.
Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda . e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{különben. } (\lambda > 0). \end{cases}$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}.$$

5. Normális eloszlás.

Sürüségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma.\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$M(\xi) = m, \qquad D(\xi) = \sigma.$$

"Standard normális" az eloszlás, ha $m = 0$, $\sigma = 1$.

Jele: N(0,1). Sürüségfüggvénye: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

A standard normális eloszlás táblázatának használatához szükséges összefüggések:

a) $f(a) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi(\frac{a-m}{\sigma})$; b) $F(a) = \Phi(\frac{a-m}{\sigma})$,

ahol f és F az (m, σ) paraméterü, φ és Φ pedig a $(0;1)$ paraméterü normális eloszlás sürüség-, illetőleg eloszlásfüggvénye.

c) A $\Phi(x)$ eloszlásfüggvényre fennáll, hogy

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

<u>A centrális határeloszlástétel</u> értelmében:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - nm}{\sqrt{n}.\sigma} < x\right) \approx \Phi(x),$$

ha a ξ_i-k azonos eloszlásu független valószinüségi változók, közös "m" várható értékkel és σ szórással. A közelités "n" növelésével egyre pontosabbá válik.

Ha η speciálisan (n,p) paraméterü binomiális eloszlásu valószinüségi változó, akkor a centrális határeloszlástétel Moivre-Laplace alakja áll előttünk:

$$P\left(a \leq \frac{\eta - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a).$$

$\boxed{90.}$ Egy binomiális eloszlású valószinüségi változó várható értéke 4, szórása $\frac{4}{\sqrt{5}}$.
Mekkora valószinüséggel veszi fel a valószinüségi változó
a) a nulla,
b) pozitiv,
c) a (-1)-es
értéket?

*91. Egy gép 0,1 valószinüséggel gyárt selejtet.
(A selejtté válás valószinüsége minden termékre azonos, és független az előzményektől.)
Mennyi a valószinüsége annak, hogy 15 db gyártmányból a selejtesek száma nem éri el a négyet?
(Adjuk meg az eredményt táblázat alapján, négy tizedes pontossággal!)

$\boxed{92.}$ Késztermék ellenőrzéssel kapcsolatban egyszeres mintavételi tervet készitettek. Ugy állapodtak meg, hogy a nagy elemszámu tételből kicsiny, n = 20 elemszámu mintát vesznek, s a tételt abban az esetben fogadják el, ha a mintában legfeljebb két selejtes darab lesz.

A selejtesek száma a véletlentől függ. Egy adott szállitmány jónak tekinthető, ha abban a selejtarány maximálisan 5%, viszont nem fogadható el, ha a selejtarány eléri vagy meghaladja a 20%-ot!

Az ellenőrzéssel kapcsolatban az átadó azt a követelményt támasztja, hogy egy jó tételt az átvevő kicsiny, legfeljebb p_1 valószinüséggel utasitson vissza (p_1 az átadó kockázata).

Az átvevő viszont azt köti ki, hogy egy rossz tételt csak igen kicsi, legfeljebb p_2 valószinüséggel kelljen elfogadnia. (p_2 az átvevő kockázata).

Állapitsuk meg az átadó és az átvevő kockázatát, a fenti megállapodások figyelembevételével!

*93. Egy 1000 oldalas könyvben 300 sajtóhiba van. Mennyi a valószinüsége annak, hogy 20 kiválasztott lapon nem lesz sajtóhiba? (A sajtóhibák száma Poisson-eloszlást követ.)

$\boxed{94.}$ Egy szövőgép 600 szállal dolgozik. A szálak munka közben egymástól függetlenül elszakadhatnak. Az egy müszak alatti szálszakadás valószinüsége minden szálra 0,012.

Mennyi annak a valószinüsége, hogy egy müszak alatt

a) legalább három szál,
b) legfeljebb három szál,
c) pontosan három szál

szakad el?

$\boxed{95.}$ Egy életbiztositó társaság 10 000 egyforma szociális helyzetü és koru biztositottja január 1-én 10-10 Ft-ot fizet a biztositó pénztárába. A biztositott elhalálozása esetén hozzátartozója 4000 Ft-t kap a biztositótól.

Annak a valószinüsége, hogy egy biztositott személy az év folyamán meghal 0,002. Mennyi a valószinüsége annak, hogy a társaságnak

a) sem nyeresége, sem vesztesége nem lesz,
b) nem lesz nyeresége?

*96. Egy ξ folytonosan egyenletes eloszlásu valószinüségi változó várható értéke 4, szorásnégyzete 3.
Irjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlásfüggvényét!

97. Egy esemény bekövetkezésének időpontja reggel 8 órakor kezdődő, ismeretlen hosszuságu intervallumon egyenletes eloszlásu valószinüségi változó. Tudjuk, hogy az esemény 80% valószinüséggel $8^{\underline{30}}$ és $12^{\underline{30}}$ óra között következik be.

a) Mennyi a valószinüsége, hogy az esemény 9 és 10 között következik be?
b) Mi az esemény bekövetkezésének várható időpontja?
c) Ha az esemény $\frac{1}{2}$ 11-ig nem következett be, mi a valószinüsége, hogy $\frac{1}{2}$ 11 és 11 között bekövetkezik?

$\boxed{98.}$ Egy alkatrész átlagos élettartama 4 hónap. Mi a valószinüsége annak, hogy az alkatrész a beszerelés után 6 hónappal is betölti funkcióját, ha tudjuk, hogy az élettartam exponenciális eloszlásu valószinüségi változó?

*99. Valamely áruszállitással kapcsolatban 0,2 a valószinüsége annak, hogy egy gépkocsinak 1 óránál többet kell várnia.

a) Mi a valószinüsége, hogy egy érkező gépkocsi fél órán belül sorrakerül, ha a várakozási idő exponenciális eloszlásu valószinüségi változó?
b) Mennyi várakozási időt kell a gépkocsiknak betervezniük?

*100. Egy ruhagyár szövetet rendel a szövőgyártól. A szövetben szövési hibák fordulhatnak elő. Ezek száma Poisson-eloszlást követ. 10 méterenként 2 hiba várható.

A szövetet öltönyök készitése céljából 320 cm-es darabokra vágják szét. Ha szövetdarab hibátlan, akkor a belőle készült öltöny I. osztályu; ha egy hiba van benne, II. osztályu; ha több, akkor a szövetdarabot leárazva eladják.

A szövetdarabok hány százalékából készül várhatóan I. illetőleg II. osztályu öltöny?

$\boxed{101.}$ Egy gép fémhuzalt darabol. A szálak hossza normális eloszlásu valószinüségi változó 10 méter várható értékkel és 5 cm szórással.

a) Mennyi annak a valószinüsége, hogy egy huzaldarab hossza 9,9 méter és 10,1 méter között van?

b) Milyen (szimmetrikus) határok között van egy szál hossza 99%-os valószinüséggel?

102. Egy normális eloszlásu valószinüségi változó várható értéke 20, szórása 2. Milyen "a" értékre teljesül a

$$P(20 - a < \xi < 20 + a) = 0,516$$

egyenlőség?

*103. Egy automata daraboló 10 cm várható értékkel dolgozik. A szórás a gép beállitásával szabályozható. Határozzuk meg, hogy mekkora szórás esetén teljesül a

$$P(\left|\xi - M(\xi)\right| \leqq 0,1) = 0,95$$

feltétel? (Az automatákon gyártott termékek mérete normális eloszlásunak tekinthető.)

*104. Görgőscsapágyak készitéséhez hengereket (görgőket) gyártanak. A görgők hossza - ξ - és átmérője - η - olyan normális eloszlásu valószinüségi változónak tekinthetők, amelyek ingadozása egymástól független.

Statisztikai megfigyelések alapján a 12 mm hosszuságura tervezett hosszméret szórása 0,055 mm, a 6 mm-nek tervezett átmérő szórása pedig 0,028 mm.

Egy görgő akkor tekinthető selejtnek, ha hosszmérete a tervezett értéktől 0,1 mm-nél, átmérőjének eltérése pedig 0,05 mm-nél nagyobb.

Mennyi a valószinü selejtszázalék?

105. Olyan ellenállásokkal dolgozunk, amelyek egymástól független ingadozásokat mutatnak 550 Ω várható értékkel és 30 Ω szórással, egyenletes eloszlásban. A centrális határeloszlás segitségével adjunk becslést annak a valószinüségére, hogy 10 sorbakapcsolt ellenállás eredője 5600 Ω -nál nagyobb!

*106. Legyen ξ egyenletes eloszlású az (a,b) intervallumon. Jelölje m a ξ várható értékét és σ a szórását. Számítsuk ki a

$P(m-2\sigma<\xi<m+2\sigma)$ valószínűséget!

107. Legyen ξ exponenciális eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel. Számítsuk ki a

$P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)$, $k\geq 0$ valószínűséget!

(m és σ a várható értéket ill. a szórást jelöli.)

108. A Brown-mozgás tanulmányozása során 518 megfigyelést végeztek vízben lebegő aranyszemcsékre vonatkozólag. A megfigyelések szerint adott térfogatrészben 112-szer egyetlen szemcse sem volt, 168-szor találtak 1 szemcsét, 130-szor kettőt, 69-szer hármat, 32-szer négyet, 5-ször ötöt, 1-szer hatot és 1-szer hetet.

Számítsuk ki az észlelt aranyszemcsék számának átlagát, és a relatív gyakoriságokat. Hasonlítsuk össze ez utóbbi értékeket, a megfelelő Poisson eloszlás tagjaival!

109. Egy automata zacskókba vegyszert csomagol. A betöltött vegyszer súlya normális eloszlású valószínűségi változó 100 g várható értékkel és 2 g szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy három véletlenszerűen kiválasztott csomag között legalább egy olyan van, amelyben lévő vegyszer súlya 99 g és 101 g közé esik? (A csomagokba töltött vegyszer súlya egymástól független.)

IX. Csebisev-egyenlőtlenség. A nagy számok törvényei

(Összefoglalás)

A valószinüségi változó értékeinek a várható értéktől való eltérésére vonatkozó Csebisev-becslés:

$$P(\left|\xi - M(\xi)\right| \geqq \lambda . D(\xi)) \leqq \frac{1}{\lambda^2} . \ (\lambda > 1.)$$

Ha speciálisan ξ egy kisérletsorozatban megfigyelt esemény bekövetkezésének relativ gyakorisága, fennáll hogy

$$P(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon) \geqq 1 - \delta .$$

Előirt pontosságu becsléshez szükséges kisérletek számára az

$$n > \frac{1}{4\delta\varepsilon^2}$$ egyenlőtlenség irható fel.

✗110. Egy ismeretlen eloszlásu valószinüségi változó várható értéke $m = 20$, szórása $\sigma = 2$.

a) Adjunk becslést az A: $15 < \xi < 25$ esemény bekövetkezési valószinüségére!

b) Mennyi az esemény bekövetkezési valószinüsége, ha a valószinüségi változó

b/1. normális eloszlásu,

b/2. binomiális eloszlásu?

c) Lehet-e exponenciális eloszlásu?

111. Egy üzemben csavarokat csomagolnak. Egy-egy dobozba átlagosan 5000 csavar kerül. A csavarok számának szórása a tapasztalat szerint 20 darab.
Mit mondhatunk annak a valószinüségéről, hogy egy dobozban a csavarok száma 4900 és 5100 közé esik, ha az eloszlást nem ismerjük?

112. Automata vizsgálót használva, 10^5 számu vizsgálat után milyen biztonsággal állithatjuk, hogy a selejt előfordulásának relativ gyakorisága és a tényleges selejt-arány legfeljebb 0,01-dal tér el egymástól?

✗ 113. Egy ládában kétféle méretü csavar van összekeverve igen nagy mennyiségben. A számunkra megfelelő csavarok aránya 70%. A halmazból véletlenszerüen kiemelünk 10 000 darabot.

a) Mennyi lesz ezek között a céljainknak megfelelő csavarok várható száma?

b) Mennyi a valószinüsége, hogy a megfelelő csavarok számának valódi értéke a várható értéktől annak legfeljebb 5%-ával tér el?

114. Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak a valószinüsége, hogy egy szál meghatározott időtartam alatt elszakad: 0,008 minden szálra. Határozzuk meg, hogy 0,95 valószinüséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma az adott időtartam alatt?

115. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószinüsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni 90% valószinüséggel a találatok száma?

X. Statisztikai adatok feldolgozása

(Összefoglalás)

Az n-elemű minta eloszlásfüggvénye (empirikus eloszlásfüggvény):

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leqq x_1^* \\ \frac{k}{n}, & \text{ha} \quad x_k^* < x \leqq x_{k+1}^*, \quad (k = 1,2,..,n-1), \\ 1, & \text{ha} \quad x > x_n^*, \end{cases}$$

ahol x_i^* a minta (növekedő) nagyság szerint rendezett elemei közül az i-edik.

A hisztogram (empirikus sűrűségfüggvény) értéke az $x, x+h$ intervallumban:

$$\frac{k(x+h) - k(x)}{n.h},$$

ahol $k(x)$ azon mintaelemek számát jelenti, amelyek számértéke kisebb x-nél; h a részintervallumok hossza és n a minta elemszáma.

Mintaátlag (empirikus várható érték):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j x_j = A + \frac{B}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f_j z_j .$$

A minta szórásnégyzete (empirikus szórásnégyzet):

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \approx \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j (x_j - \bar{x})^2 = \frac{B^2}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j (z_j - \bar{z})^2,$$

ahol n a mintaelemszám, x_i a mintaelemek értékei, m az osztályok száma, f_j az osztály gyakorisága, x_j az osztályközepek értékei,

$Z_j = \frac{x_j - A}{B}$ a lineárisan transzformátl osztályközepek.

("A" egy alkalmasan választott osztályközép, B pedig az osztályok szélessége.)

Korrigált empirikus szórásnégyzet:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 \approx \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j(x_j-\bar{x})^2 = \frac{B^2}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{m} f_j(z_j-\bar{z})^2 .$$

200. Ellenállások gyártásakor a statisztikai vizsgálat 10-elemű mintavételekkel történt.

Egy ilyen minta a következő volt:

10,08	10,15
9,85	9,95
10,12	10,10
10,06	9,95
10,00	10,04 ohm.

a) Rajzoljuk meg a mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvényt!

b) Határozzuk meg az empirikus várható értéket és szórást, valamint a korrigált empirikus szórást!

201. Egy üzem nyersanyag-felhasználásának alakulását vizsgálják. Ez egy 25 munkanapos hónap egyes napjain rendre az alábbi módon alakult:

20,1 ;	19,3 ;	21,0 ;
17,1 ;	14,0 ;	17,7 ;
19,6 ;	13,6 ;	18,0 ;
16,2 ;	18,9 ;	18,2 ;
16,0 ;	18,7 ;	25,5 ;
19,4 ;	20,7 ;	22,1 ;
19,3 ;	17,2 ;	21,2 ;
15,2 ;	17,5 ;	18,5 ;
		18,6 .

(Az adatok tonna/nap egységekben értendők.) Dolgozzuk fel a rendelkezésre álló adatokat!

a) Soroljuk azokat egységnyi terjedelmű osztályokba, tüntessük fel az osztály-közepeket és az egyes osztályokba eső adatok gyakoriságát, f_j-t!

b) Rajzoljuk meg a tapasztalati eloszlásfüggvényt és sürüségfüggvényt (hisztogramot), majd a grafikonok alapján döntsük el, hogy származhat-e a minta normális eloszlású alapsokaságból!

c) Számitsuk ki a minta átlagát (az empirikus várható értéket) a definiáló összefüggés alapján, felhasználva az osztály-gyakoriságot; majd az adatok lineáris transzformációja után ismételjük meg a számitást!

d) Határozzuk meg az empirikus szórást és a korrigált empirikus szórást!

*202. A 200. és a 201. feladatok megoldása során nyert eredmények közül melyek származnak
torzitatlan,
aszimptotikusan torzitatlan,
erősen konzisztens, illetőleg
hatásos becslésből?

XI. Paraméter-becslés. Megbízhatósági intervallum

(Összefoglalás)

A legnagyobb valószinüség elvének (maximum-likelihood elv) alkalmazása az ismeretlen paraméter konzisztens becsléséhez vezet.

Az un. likelihood-függvény szélsőértékét kivánjuk meghatározni:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \beta) = \begin{cases} p(x_1, \alpha, \beta) . p(x_2, \alpha, \beta) \dots p(x_n, \alpha, \beta) \\ f(x_1, \alpha, \beta) . f(x_2, \alpha, \beta) \dots f(x_n, \alpha, \beta) , \end{cases}$$

ahol $p(x_i, \alpha, \beta) = P(\xi = x_i)$ (diszkrét eset),

illetőleg f az eloszlás sürüségfüggvénye (folytonos eset), $x_1, x_2, \dots, x_n$ az n-elemü minta adatai, mig α és β ismeretlen paraméterek, amelyekre becslést kivánunk adni. A gyakorlatban a likelihood függvény logaritmusával dolgozunk.

Egy becslés meghatározott valószinüségei szinthez tartozó megbizhatósági (konfidencia) intervallumán a számegyenes olyan szakaszát értjük, mely a becsült paraméter valódi értékét az esetek szóban forgó százalékában lefedi.

A várható érték konfidencia-intervallumát (ha az elméleti szórás ismert) a

$$P\left(\frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < x_\varepsilon\right) \approx 2 \, \Phi(x_\varepsilon) - 1 = 1 - \varepsilon$$

összefüggésből határozzuk meg: $\left(\bar{\xi} - x_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \ \bar{\xi} + x_\varepsilon \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Valamely A esemény bekövetkezési valószinüségét a $\hat{p} = \frac{k}{n}$ relativ gyakorisággal becsülve

$$x_\varepsilon \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1 - \hat{p})}{n}}$$ sugaru konfidencia intervallum adódik.

(Itt x_ε ugyancsak a $2 . \Phi(x) - 1 = 1 - \varepsilon$ összefüggésből határozható meg.)

Ismeretlen szórásu normális eloszlásból származó minta mintaátlagához tartozó konfidencia-intervallum a

$$P\left(\frac{|\bar{\xi} - m|}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}} < t_{\varepsilon}\right) = S_{n-1}(t_{\varepsilon}) = 1 - \varepsilon \text{ összefüggésből:}$$

$$|\bar{\xi} - m| < t_{\varepsilon}\frac{s_n}{\sqrt{n}}, \quad \text{azaz} \quad \left(\bar{\xi} - t_{\varepsilon}\frac{s_n}{\sqrt{n}};\ \bar{\xi} + t_{\varepsilon}\frac{s_n}{\sqrt{n}}\right).$$

Itt s_n a mintából származó korrigált empirikus szórás, n a mintaelemek száma, n-1 a Student-eloszlás szabadságfoka.

$\boxed{210.}$ Legyen $x_1, x_2, \dots, x_r$ egy ξ valószinüségi változó által leirt statisztikai sokaságból vett r-elemü minta. Adjuk meg az eloszlás ismeretlen paraméterének maximum - likelihood becslését, ha ξ

a) "p" paraméterü binomiális eloszlásu (n ismert),
b) λ paraméterü Poisson eloszlásu,
c) p paraméterü geometriai eloszlásu,
d) λ paraméterü exponenciális eloszlásu

valószinüségi változó.

✗211. Egy müszer r párhuzamosan kapcsolt komponensből áll. Jelölje "p" annak a valószinüségét, hogy egy komponens egy munka periódus alatt nem romlik el.
"p" meghatározására "n" független munkaperiódust figyeltek meg. Ez alatt a müszer k-szor romlott el.
Határozzuk meg "p" maximum-likelihood becslését, $\hat{p}$-t!
(Az egyes komponensek meghibásodása legyen egymástól független!)

212. Oldjuk meg az előző feladatot r sorosan kapcsolt komponensből álló müszert feltételezve!

$\boxed{213.}$ Valamely fonál szakitószilárdságát vizsgálva, 12 mérésből az $\bar{x} = 3,25$ kp értéket kapták.
A szórás ismert: $\sigma = 0,30$ kp.

a) Állapitsuk meg a mintaátlag megbizhatósági intervallumát 95%-os szinten!

b) Legalább hány mérést kellene végezni ahhoz, hogy 95%-o megbizhatósági szint esetén a konfidencia intervallum hossza 0,2 kp legyen?

✱214. a) Hogyan módosulnak a 95%-os megbizhatósági intervallum határai az előző (213.) feladatban, ha az alapsokaság szórása nem ismert, hanem azt is a 12 mérésből állapitották meg. Legyen tehát a korrigált empirikus szórás: $s_n = 0,30$ kp.

b) Legalább hány mérés szükséges ebben az esetben ugyanolyan - 0,2 kp - hosszuságu konfidencia - intervallum biztositásához, mint az előző feladatban?

215. Egy normális eloszlásu alapsokaságból származnak az alábbi mérési adatok:

2,96	3,20
3,12	2,95
3,15	3,00
3,16	3,20
3,10	2,96.

Határozzuk meg az alapsokaság várható értékére a 95%-os és a 99%-os konfidencia - határokat, ha

a) a szórás ismert: 0,05,

b) a szórást nem ismerjük!

✱216. Milyen egyoldali - alsó - határt adhatunk az előző feladat mérési adatai alapján az alapsokaság várható értékére 95%-os valószinüségi szinten?

XII. Statisztikai próbák

(Összefoglalás)

a) Egymintás u - próba.

Normális eloszlásu, ismert - σ - szórásu alapsokaság várható értékére tett $m = m_o$ null-hipotézis ellenőrzésére az

$$u = \frac{\bar{\xi} - m_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

statisztikát használjuk, amely a hipotézis teljesülése esetén N(0,1) eloszlásu. Itt $\bar{\xi}$ a mintaátlag és n a mintaelemek száma.

b) Egymintás t - próba.

Ha az alapeloszlás szórását a mintából kell megbecsülni, a várható értékre tett $m = m_o$ hipotézist - n-nel jelölve a mintaelemek számát - az (n-1)-szabadságfoku Student, más néven t-statisztikával ellenőrizzük:

$$t = \frac{\bar{\xi} - m_o}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}},$$

Itt s_n a mintából vett korrigált empirikus szórás.

c) Kétmintás u - próba.

Két ismert szórásu (σ_1 és σ_2), normális eloszlásu alapsokaságból n_1 illetőleg n_2 számu mintaelemet veve, az eloszlások várható értékének megegyezésére tett $m_1 = m_2$ hipotézist N(0,1) eloszlásu u statisztikai függvénnyel ellenőrizzük:

$$u = \frac{\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} .$$

d) Kétmintás t - próba.

Ha két normális eloszlásu alapsokaság szórása megegyezik, de nem ismert érték, a várható értékek megegyezésére vonatkozó feltevés ellenőrzésére az $(n_1 + n_2 - 2)$ - szabadságfoku, Student-eloszlást követő

$$t = \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)s_{n_1}^2 + (n_2 - 1)s_{n_2}^2}}$$

statisztikai függvényt használjuk. (n_1 és n_2 a két független minta elemszáma, s_{n_1} és s_{n_2} a mintákhoz tartozó korrigált empirikus szórások.)

A próba elvégzése előtt F-próbával ellenőrizni kell a szórások megegyezésére tett feltevésünket:

$$F_{f_1, f_2} = \frac{s_{n_1}^2}{s_{n_2}^2} , \quad \text{ahol } s_{n_1} \text{-gyel}$$

mindig a nagyobb szórást jelöljük, $f_1 = n_1 - 1$ és $f_2 = n_2 - 1$.

e) Illeszkedésvizsgálat.

Ha azt vizsgáljuk, hogy megfigyelési eredményeink illeszkednek-e egy feltételezett eloszláshoz, akkor a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

dolgozunk.

Itt r a feltételezett eloszláshoz tartozó valószinüségi változó lehetséges értékeiből alkotott csoportok (osztályok) számát, ν_i a mintaelemek osztály-gyakoriságát, p_i az osztályokba esés elméleti valószinüségét, n pedig az összes mintaelemek számát jelenti.

A használt χ^2 statisztika szabadságfoka tiszta illeszkedésvizsgálatnál (r-1). Becsléses illeszkedésvizsgálatnál a szabadságfok a mintából becsült paraméterek számával tovább csökken.

A próba megbizhatóságához az $np_i \geqq 10$ relációnak minden i-re teljesülnie kell.

f) Homogenitásvizsgálat.

Két alapsokaság eloszlásának azonosságára tett feltevésünket (r-1)-szabadságfoku χ^2 statisztikával ellenőrizzük:

$$\chi^2 = \frac{1}{m \, . \, n} \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{(n\mu_i - m\nu_i)^2}{\mu_i + \nu_i} ,$$

ahol m és n a két független minta elemszáma, r az osztályok száma, μ_i illetőleg ν_i pedig a mintán belüli osztály-gyakoriságokat jelöli.

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i = m , \quad \sum_{i=1}^{r} \nu_i = n.$$

g) Függetlenségvizsgálat.

Két valószinüségi változó függetlenségére vonatkozó null-hipotézisünk megbizhatóságát (r-1).(s-1) szabadságfoku χ^2 statisztikai függvénnyel mérjük.

$$\chi^2 = n\left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\nu_{ij}^2}{\nu_{i.} \cdot \nu_{.j}} - 1\right]$$

Itt n a minta elemszáma, r illetőleg s a két - együtt megfigyelt - valószinüségi változó értékeihez tartozó osztályok száma, $\nu_{.i}$ illetőleg $\nu_{.j}$ a mintabeli osztály-gyakoriságok száma, mig ν_{ij} az együttes bekövetkezés mintabeli gyakorisága.

220. Legyen ξ normális eloszlásu valószinüségi változó. Az eloszlás paramétereire vonatkozólag két feltevés adódik:

$$H_1: N(10;1) \quad \text{és} \quad H_2: N(13;2).$$

A hipotézisek között mérések alapján döntünk, mégpedig ugy, hogy $x \leqq 11$-re a H_1, $x > 11$-re a H_2 hipotézist fogadjuk el. Mi a hibás döntés valószinüsége, ha

a) a H_1 feltevés,

b) a H_2 feltevés

igaz?

✱ 221. Adott a H_0: $\xi \in N(0,1)$ null-hipotézis és a H_1: $\xi \in N(3, \frac{1}{\sqrt{n}})$ alternativ hipotézis.

A döntés:

$$\xi < d \Rightarrow H_0 ,$$

$$\xi \geqq d \Rightarrow H_1 .$$

Meghatározandó d és n, ha az elsőfaju illetőleg a másodfaju hiba korlátai:

$$\varepsilon_1 = 0,01, \text{ illetőleg } \varepsilon_2 = 0,05.$$

222. Egy alkatrész átmérőjének várható értékére elfogadhatjuk-e a $d_0 = 2$ cm null-hipotézist 90%-os szinten, ha 10 elemet megvizsgálva, a következő értékeket kaptuk cm-ben:

1,99
2,00
1,98
1,95
1,95
2,02
2,05
2,04
2,03
2,01.

A sokaság normális eloszlásu és

a) $\sigma = 0,04$ cm,

b) σ- t nem ismerjük.

223. Egy automata darabolónak 1200 mm hosszuságu acélszalagokat kell levágnia. Előzetes adatfelvételekből tudjuk, hogy a gép által készitett darabok hossza normális eloszlásu valószinüségi változó $\sigma = 3$ mm szórással. Ellenőrizni akarjuk a gép beállitásának helyes voltát. Ezért a gyártmányokból 16 db szalagot véletlenszerüen kiválasztunk.

A 16 hosszuságmérés eredménye mm-ben:

1193	1196	1198	1195
1198	1199	1204	1193
1203	1201	1196	1200
1191	1196	1198	1191

Vizsgáljuk meg, hogy nincs-e szignifikáns eltérés az előirt mérettől!

*224. Árammérőket ugy igazitanak be, hogy a mérőket szinkron müködtetik egy standard árammérővel.

Beigazitás után 10 árammérőből álló mintát vesznek és ellenőrzik, hogy konstansaik csak véletlenszerüen térnek-e el a standard árammérő konstansától. Ebből a célból preciziós wattmérővel és stopperrel pontosan meghatározzák a szóban forgó árammérők konstansait, majd t-próbával ellenőrzik azt a feltevést, hogy az eltérések véletlenszerüek. A 10 mérő konstansai:

0,985	0,987
1,003	0,993
0,996	0,991
0,994	1,004
1,002	0,985.

A standard mérő konstansa 1. Szignifikáns-e az eltérés 99%-os szinten?

$\boxed{225.}$ Meghatározott tipusu kupgörgős csapágy belső gyürüjének kupszög vizsgálata során, azonos mérőeszközzel, de kétféle etalonnal végeztek 100-100 független mérést. A mérési eredmények normális eloszlást mutattak. Az első etalon használatakor a tapasztalati szórásnégyzetre 1,6104 μ, a második használatakor 1,9349 μ adódott.

Kérdés, hogy a két etalon használata esetén az elméleti szórásnégyzetek 95%-os szinten azonosnak tekinthetők-e?

*226. A textilipari minőségellenőrzésnél igen nagy jelentőségü annak a vizsgálata, hogy két, minta alapján minősitett tétel azonos tulajdonságunak minősithető-e vagy sem.

Legyen $\bar{x}_1 = 195$ gr , $n_1 = 100$,

és $\bar{x}_2 = 185$ gr , $n_2 = 70$.

Feltételezzük, hogy a tételek szórása az átvételi előirás szerinti $\sigma = 18$ gr.

Itéletünket 99%-os szinten hozzuk!

✶ 227. Két automata gépen gépalkatrészeket gyártanak. Szereléstechnikai okokból lényeges, hogy a két gépen termelt gyártmányok egyik méretének várható értéke azonos időszakokban azonos legyen. Ennek ellenőrzése céljából - miután a gépek mérettartó képessége jó - kielégitő naponta a gyártás beinditása után 30-40 mintadarab ellenőrzése.

Egy napon az első gépen 30 darabot mértek le, amelyek átlaga $x = 5,42$ mm; korrigált szórása $s_1 = 0,025$ mm; a második gépen 35 darab vizsgálatából az átlag $\bar{y} = 5,39$ mm, a korrigált szórás pedig $s_2 = 0,014$ mm.

Elfogadható-e a mérési adatok alapján, hogy a két gépen termelt gyártmányok szóban forgó mérete megegyezik?

(A nagy mintaelemszámok miatt a korrigált szórások az elméleti szórásokat jól helyettesitik, igy u - statisztikával dolgozhatunk.)

✶ 228. Két különböző gyártási módot akarnak kipróbálni. Meg akarják vizsgálni, hogy az eljárások különbözősége okoz-e eltérést a gyártott termékek mért tulajdonságának átlagában.

A mért értékek a következők:

<u>Első csoport:</u> 60,477 ; 60,699 ; 60,699; 60,845; 60,954; 60,954; 61,000; 61,079; 61,301; 61,380; 61,380; 61,532; 61,634; 61,663; 61,763; 62,146.

<u>Második csoport:</u> 60,301; 60,699; 60,699; 60,845; 60,903; 60,954; 61,146; 61,255; 61,380; 61,415; 61,415; 61,532; 61,568; 61,623; 61,954.

Szignifikáns-e az eltérés 95%-os szinten?

✶229. Két fogyasztónál 40-40 izzólámpának órákban kifejezett élettartama az alábbi gyakorisági eloszlást mutatta:

	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2300	2500	2700	2900	3100
I.	2	0	2	4	10	7	10	1	3	0	0	1
II.	2	3	7	4	13	8	3	0	0	0	0	0

Jelentős-e a különbség 98%-os szignifikancia szinten a két fogyasztó lámpahasználati módját és körülményeit illetően vagy nem?

✶230. Négy, egyenletesen használt kompresszort néhány év folyamán 166 esetben véletlenszerűen megvizsgálva, dugattyúgyűrű-hiba az alábbi számban mutatkozott:

i	1	2	3	4
X_i	46	33	38	49

$$n = \sum_{i=1}^{4} X_i = 166$$

Tekinthető-e egyenletesnek a gyűrűhiba előfordulásának valószínűsége 95%-os szinten?

*231. Különböző óraüzletek kirakataiban egy meghatározott időpontban 500 órát figyeltek meg abból a szempontból, hogy azok milyen időpontot mutatnak. Ellenőrizni akarják azt a hipotézist, hogy a mutatott időpontok egyenletesen oszlanak meg a 0 - 12 időintervallumon. Az időpontokat 12 osztályba sorolták ugy, hogy az osztályhatárok az egész órák legyenek. Az egyes osztályokban a következő gyakoriságokat tapasztalták:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

Megtartható-e a hipotézis 95%-os szignifikancia szinten?

232. Egy városban, adott időpontban 240 parkolóhelyen végeztek felmérést. A parkolóhelyeken talált gépkocsik számára nézve az alábbi táblázatot készitették el:

Gépkocsik száma (g_i)	Parkolóhelyek száma (ν_i)
$0 \leqq g_1 < 10$	11
$10 \leqq g_2 < 20$	22
$20 \leqq g_3 < 30$	46
$30 \leqq g_4 < 40$	85
$40 \leqq g_5 < 50$	43
$50 \leqq g_6 < 60$	20
$60 \leqq g_7 < 70$	13
Összesen:	240

A parkolóhelyeken állomásozó járművek száma normális eloszlásu-e 95%-os szignifikancia szinten?

233. Egy gyár munkavédelmi osztályán azt a kérdést vizsgálják, hogy 1 év alatt az 1 munkásra jutó balesetek száma Poisson-eloszlást mutat-e.
A vizsgálatokhoz 400 munkást választottak ki véletlenszerüen.
Ez a "400 elemü minta" az alábbi adatokat szolgáltatta:

az egy főre eső balesetek száma	0	1	2	3	4	>4	Összesen
annak gyakorisága	141	150	83	18	8	0	400

Ellenőrizzük a hipotézist χ^2 próbával, 95%-os szignifikancia szinten!
(A H_0 hipotézis Poisson-eloszlásának ismeretlen paraméterét annak maximum-likelihood becslésével, $\bar{x}$-sal - a mintaátlaggal - pótoljuk!)

*234. Az 1974. és az 1975. évi baleseti statisztikák közelitő adatait tartalmazza az alábbi táblázat:

	Összes sérültek száma	48 órán belül meghalt	30 napon belül megh.	többi
1974	26 500	1350	1800	23 350
1975	26 000	1400	1900	22 700

Vizsgáljuk meg a fenti minták alapján, hogy a különböző sulyosságu sérülések bekövetkezése az egyes években azonos eloszlásunak tekinthető-e, azaz el lehet-e fogadni 99%-os szinten a

$$H_0 : p_1 = q_1 ; \quad p_2 = q_2 ; \quad p_3 = q_3$$

nullhipotézist, ahol p_i ill. q_i $(i = 1,2,3)$ a különböző tipusu sérülések bekövetkezésének valószinüségét jelöli az 1974. illetőleg az 1975. évben?

*235. Egy egyorsós forgácsoló automatán gyártott 394 darab golyós olajozó törzs átmérő és hossz szerinti eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

		Hossz mm-ben: 10+					
		0, 05-ig	0, 06-tól 0,10-ig	0,11-től 0,15-ig	0,16-tól 0,20-ig	0, 21-től	Össz db
átmérő mm-ben: 7+	-0, 07-ig	12	14	13	20	17	76
	-0, 06-tól -0, 05-ig	7	18	34	18	8	85
	-0, 03-tól -0, 01-ig	13	43	41	24	13	134
	-0, 00-tól	11	35	34	17	2	99
	Összesen, darab	43	110	122	79	40	394

Kérdés, hogy az átmérő és a hossz ingadozása 99, 9%-os szinten függetlennek tekinthető-e egymástól?

x236. Egy üzem három különböző típusú munkadarabot állít elő. Jelöljük ezeket A-val, B-vel és C-vel. Az elkészült termékeket I. illetőleg II. osztályúnak minősítik.

Valamely munkanapon összesen 90 termék készült: 66 I. osztályú minősítést kapott. Az I. osztályú termékek közül 50 A jelű és 6 B jelű.

A 90 termék között összesen 20 darab C jelű van. Tudjuk azt is, hogy mindössze 1 db II. osztályú B jelű termék készült aznap.

Adataink birtokában vizsgáljuk meg, hogy van-e kapcsolat a termékek típusa és azok minősége között. A döntést 90%-os szinten hozzuk meg!

237-238. Valamely üzem külföldről szerzi be a megmunkálandó félkésztermékeket. Egy alkalommal a külföldi cég kísérő levélben örömmel közölte, hogy sikerült egészen kiváló minőségű félkésztermékét előállítania, és az új automatán készült munkadarabok átmérőjének szórása mindössze 0,200 mm. A szóban forgó hazai üzem főmérnöke hiányolja, hogy a szállító nem közölte a termék átmérőjének mértékét, hiszen menetközben többször is módosították azt.

A főmérnök emlékezete szerint legutóbb 24 mm-ben állapodtak meg.

A főmérnök a hiányzó adatnak először 90%-os, majd 95%-os megbízhatósági intervallumát kívánja meghatározni.

Egy négyelemű statisztikai minta adatai:

23,750; 24,000; 24,050; 23,500; (mm)

A minta alapján "megbízhat-e emlékezetében" a főmérnök 90 illetőleg 95%-os szinten?

Milyen intervallumba esik a minta alapján számított átmérő a megadott szinteken?

XIII. Korrelációs és regressziós elemzés

(Összefoglalás)

Az előjel-korrelációs együttható:

$$\varrho = \frac{u - v}{n} ,$$

ahol u (illetőleg v) az n elemü minta azon adatpárjainak a száma, amelyekben az adatoknak a mintabeli átlagtól való eltérése ugyanolyan (illetőleg ellentétes) irányu.

A mintabeli (tapasztalati) korrelációs együttható:

$$\hat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}}$$

A regressziós egyenes egyenlete:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \bar{x}^2} (x - \bar{x}) + \bar{y} .$$

A regressziós becslés szórása:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2}{n}} ,$$

ahol y_i az x_i-hez tartozó megfigyelt érték, mig Y_i a regressziós görbe x_i-hez tartozó ordinátája.

A

$$\sqrt{1 - \frac{s_y^2}{\sigma_y^2}}$$

korrelációs hányadossal mérjük görbevonalu regresszió esetén a kapcsolt szorosságát. Lineáris regresszió esetén

$$|\hat{r}| = \sqrt{1 - \frac{s_y^2}{\sigma_y^2}} ,$$

ahol σ_y az η valószinüségi változónak a mintából vett empirikus szórása.
(Feltesszük, hogy az η változó ξ -re vonatkoztatott regresszióját vizsgáljuk.)

240. Nagy példányszámu nyomáshoz a nyomtatott szövegről készitett klisét vékony krómréteggel vonják be.

Egy alkalommal a bevonásra használt krómmennyiségre és a kinyomtatott példányszámra az alábbi adatokat észlelték:

Krómmennyiség (grammokban)	5,23	5,94	5,17	5,93	6,96	8,45	6,17	7,80	6,34	6,71	7,32	7,24	7,39	7,32	6,82
Kinyomtatott példányszám (ezrekben)	273	628	520	496	615	718	510	796	539	536	631	719	789	722	630

a) Készitsünk korrelációs diagramot! Mit tapasztalunk?
b) Határozzuk meg az előjel-korrelációs együtthatót!
c) Számitsuk ki a mintabeli (empirikus) korrelációs együtthatót!
d) Határozzuk meg a regressziós egyenes egyenletét!
e) Számitsuk ki a regressziós becslés szórását!
f) A regressziós becslés szórásával ellenőrizzük a korrelációs együtthatóra a mintából adott becslést!

241. Famentes ofszetpapir átlagos szakadási hossza és a fajlagos repesztőnyomás között fennálló összefüggést vizsgáljuk. Mérési adataink:

Fajlagos repesztőnyomás (kp/cm^2) x_i	1,70	1,55	1,52	1,53	1,57	1,50	1,70	1,60	1,52	1,65	1,70	1,55	1,50	1,56	1,57	1,62
Átlagos szakadási hossz (m) y_i	1930,0	2005,0	2042,5	2035,0	1995,0	2015,0	1920,0	1999,0	1957,5	1950,0	1985,0	1975,0	2006,0	1980,5	1972,0	1975,0

Készitsünk korrelációs diagramot, határozzuk meg a korreláció szorosságát (a tapasztalati korrelációs együtthatót) és a regressziós egyenes egyenletét! Számitsuk ki a regressziós becslés szórását!

*242. Fonodai felvételi lapok összesitésével akarják megállapitani az eltelt tiz perces időközök sorszáma (x_i) és a fonálszakadások átlaga (y_i) közötti összefüggést.

Az adatok:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y_i	11,7	16,4	13,1	15,7	20,6	16,0	15,3	14,6	17,2	18,9	29,7

a) Irjuk fel a táblázatba foglalt adatokhoz tartozó regressziós egyenes egyenletét!

b) A korrelációs együtthatóval jellemezzük a feltételezett lineáris kapcsolat erősségét!

c) Közelitsük a pontokat másodfoku parabolával! (Kvadratikus regresszió.)

d) A korrelációs hányadossal jellemezzük a feltételezett parabolikus kapcsolat szorosságát!

*243. Egy vezetőn ismeretlen erősségü áram halad. Az áramerősséget 1,2,3,5,7,10 amperrel megnövelve, a felmelegedés rendre 11,12,15,22,34,61 C^o-nak adódott. (Ezek mért adatok, a tényleges áramerősség és a tényleges felmelegedés ettől eltérhet.)

Készitsünk korrelációs diagramot, s ennek alapján végezzünk kvadratikus regressziót!

MEGOLDÁSOK

1. $x = 5$.

Megfelelő átalakitás után ugyanis

$$2\frac{x!}{2!(x-2)!} + 3\frac{x!}{(x-1)!} = 35,$$

$$x(x-1) + 3x = 35 \quad \text{adódik.}$$

2. 9.9!.

<u>Első megoldás:</u>

Összesen tiz számjegy van: 0,1,2,...,9. Az első helyen 9-féle számjegy állhat. (0 nem!) Minden rögzitett első számjegy után a megmaradt 9 számjegy bármelyik permutációja következhet.

<u>Második megoldás:</u>

A tiz számjegy összes lehetséges sorrendjének $\frac{1}{10}$ -e nem megfelelő, mert 0-val kezdődik. A megoldások száma tehát

$\frac{9}{10} \cdot 10!$.

3. 2^9.

4. Ha a jutalmak egyenlők:

a) $\binom{20}{4}$,

b) $\binom{23}{4}$.

Különböző jutalmakat feltételezve, a megoldás

a) $\binom{20}{4} \cdot 4!$

b) 20^4.

5. 18.

Első megoldás:

Az első helyen csak 2-es vagy 3-as állhat. Mindkét esetben a rögzitett első számjegy után a megmaradt számjegyek bármelyik permutációja következhet. A megoldások száma tehát

$$\frac{4\,!}{2\,!}+\frac{4\,!}{2!2!}\,.$$

Második megoldás:

A megadott számjegyek összes lehetséges permutációinak a számából levonjuk a zérussal kezdődők számát:

$$\frac{5\,!}{2!2!}-\frac{4\,!}{2\,!}\,.$$

6. 30.

Első megoldás: Az utolsó számjegy 0, 2 vagy 4 kell legyen. Ilyen szám rendre $\binom{4}{2}.2\,!$; 3.3; 3.3 darab irható fel. A megoldások száma ezek összege.

Második megoldás:

Az öt számjegyből felirható összes háromjegyü szám $\frac{3}{5}$-e páros. Ezek számából vonjuk le a zérussal kezdődő - nem valódi - háromjegyü páros számok számát!

7. 15! . 5! .

8. $\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}$.

9. a) $$\frac{\binom{32}{8}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}}{4!}\,,$$

b) $$\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{28}{5}\cdot\binom{24}{8}\cdot\binom{16}{8}}{3!}$$

a-hoz: Az előző feladattal szemben a 8-as csoportok egymás között most nincsenek kitüntetve, s igy a csoportok sorrendje közömbös.

b-hez: Az egyik (bármelyi) csomó a 4 ász közül hármat, a többi 28 lapból pedig ötöt tartalmaz. A megmaradó 24 lapból képezzük a további három csoportot. E három csoport sorrendje is közömbös a feladat értelmében, ezért 3!-sal még osztani kell.

10. $\binom{13}{3} \cdot 2^3$.

A 13 mérközésből ugyanis 10-et kell eltalálni, s hármat nem. A három el nem talált eredmény a 13-ból nyilván annyiféleképpen választható ki, mint a 10 eltalált mérközés:

$$\binom{13}{10} = \binom{13}{3} .$$

Az el nem talált mérkőzések mindegyikére 2-2 hibás tippünk van, azért ezekre a lehetséges tippek számát 2 elem harmadosztályu ismétléses variációinak a száma adja.

11. a) 56 ; b) 126 ; c) 216.

Megoldás:

a-hoz: Mindhárom kockán azonos pontszám 6-féleképpen adódhat. Pontosan két kockán azonos pontszám 6.5-féleképpen valósulhat meg.
Mindhárom kockán különböző pontérték $\binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{1.2.3}$ = 20-féleképpen alakulhat ki.

Az összes (megfigyelhető!) lehetőségek száma tehát 6 + 30 + 20.
Formálisan okoskodva: 6 elemből kiválasztunk 3-at (t.i. a három kockán megjelenő pontértéket), ugyanaz az elem többször is szerelhet, a kiválasztott elemek sorrendje közömbös.

$$C_6^{3,i} = \binom{6+3-1}{3} .$$

12. Mindhárom esetben természetesen ugyanannyi, vagyis 216. Egy kisérlet lehetséges kimeneteleinek száma ugyanis független a megfigyelő inger-küszöbétől; példánkban attól, hogy képes-e megkülönböztetni két kockát egymástól vagy sem.

13. 161.

A lehetőségek száma az

a) 5 győzelemből és 2 vereségből,

b) 4 győzelemből, 2 döntetlenből és 1 vereségből,

c) 3 győzelemből és 4 döntetlenből

álló játszma-sorozatok számának az összege.

(Ismétléses permutáció!)

14. $\binom{50}{8}\cdot\binom{42}{4}\cdot\binom{38}{10}\cdot 2^{28}$.

15. 150.

Első megoldás:

Három számjegy felhasználásával összesen 3^5 darab különböző ötjegyű szám irható fel.

Ezek között azonban $\binom{3}{2}\cdot 2^5$ olyan ötjegyű szám fordul elő, amelyek felirásához legfeljebb csak két számjegyre van szükség.

Igaz, hogy igy kétszer vettük tekintetbe azt a három ötjegyű számot, amelyik egyetlen számból épül fel.

Ezért 3^5-ből csak $\left[\binom{3}{2}\cdot 2^5 - 3\right]$ -t kell levonni, hogy a feltételt kielégitő megoldások számát megkapjuk.

Második megoldás:

A megadott számjegyeknek legalább egyszer szerepelniük kell minden ötjegyű számban.

Válasszunk ezért számjegyeink mellé még két számjegyet, ugyancsak a megadottak közül.

Aszerint, hogy a választott két számjegy két megegyező-e vagy sem, a velük kiegészitett ötelemű számcsoportok két tipusa jön létre. Vagy egy számjegy ismétlődik háromszor, s a másik kettő ehhez képest és egymás között is különböző; vagy két számjegy ismétlődik kétszer, s a harmadik ezektől különbözik.

Ezen csoportok számjegyeinek permutációi során állnak elő az összes, előírt tulajdonságu számok, melyek száma tehát

$$\binom{3}{1}\frac{5!}{3!}+\binom{3}{2}\cdot\frac{5!}{2!2!}\,.$$

16. 1200.

Két eset lehetséges: két magánhangzóval párosul három mássalhangzó, vagy fordítva. Mivel összesen 5 magánhangzó és 4 mássalhangzó áll rendelkezésre, azért az előírt tulajdonságú különböző megoldások száma

$$V_5^2 \cdot V_4^3 + V_4^2 \cdot V_5^3 .$$

17. $V_5^{4,i} \cdot V_4^3 = 5^4 \cdot 24 = 15\ 000$.

18. 462.
A "valószínűség" szó ugyanis 12 betűből áll. Összesen tehát 11 lépést kell tennünk: 6 lépést jobbra és 5 lépést lefelé. Mivel ezen lépések mindenegyes (tetszőleges) sorrendjéhez egy-egy kiolvasás tartozik, a különböző megoldások száma az ismétléses permutációk számával egyenlő:

$$P_{11}^{6,5} = \frac{11!}{6!5!} .$$

Ellenőrzésül így is gondolkodhatunk:
Lefelé összesen 5-ször kell lépnünk a 11 lépés során. Ezen öt lefelé-lépés helye $\binom{11}{5}$-féleképpen választható meg.

19. 231.
A legfeljebb két másodosztályú termék kiválasztása három különböző módon valósulhat meg: pontosan 0, pontosan egy és pontosan két másodosztályú termék kiválasztása során. Az összes lehetséges megoldások száma tehát

$$\binom{7}{5}+\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{1}+\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}.$$

20. $\binom{7}{3}\cdot\binom{3}{2}+\binom{7}{2}\cdot\binom{3}{3}= 126.$

21. 533 328.
Gondolatban írjuk egymás alá a kívánt tulajdonságú összeadandó számokat. Ekkor minden oszlopban ugyanannyi 1-esnek kell szerepelnie, mint 2-esnek, hiszen szerepük szimmetrikus. Mivel összesen 2^5 összeadandó szám van, az egy oszlopban szereplő 1-esek (és egyúttal 2-esek) száma 2^4. Egy-egy oszlop összege tehát $2^4 \cdot 1 + 2^4 \cdot 2 = 48$.
A kérdéses összeg pedig: $48(10^4+10^3+10^2+10+1)$.

22. 231.
20 darab százas szétosztási lehetőségeit kell megvizsgálni. Tulajdonképpen 3 elem (a 3 rész) közül választhatunk 20-szor. A lehetőségek száma $C_3^{20,i} = \binom{3+20-1}{20}$.

23. a) L; b) O; c) Ω ;

d) M; e) L; f) O.

24. a) $B\bar{A}\bar{C}$;

b) $A+B+C$;

c) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$;

d) $\bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$.

Megoldás:

a-hoz: Lásd a 3.7 Definiciót! A $B,\bar{A}$ és a $\bar{C}$ események együttes bekövetkezéséről van szó.

b-hez: Lásd a 3.6 Definiciót! Az A,B és a C események közül következik be legalább az egyik.

c-hez: Az előző két feladat megoldásánál alkalmazott gondolatok ismételt felhasználására van szükség. (Az összeg-esemény tagjai páronként kizárják egymást!)

d-hez: Az $\bar{A}\bar{C}$ esemény például azt jelenti, hogy a késztermék legfeljebb mérethibás (az sem biztosan). Az összeg-esemény .6 Definiciójából következik, hogy a késztermék legfeljebb mérethibás lehet. (T.i. ha valóban mérethibás a termék, akkor az összeg másik két tagjának bekövetkezése kizárt esemény.) Teljesen hasonló meggondolás végezhető az összegesemény másik két tagjára.

a) $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$,

b) $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$,

c) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$,

d) a termék kifogástalan.

a-hoz: lásd a 3.6 Definiciót!

b-hez: a feladat az előzőnek másik megfogalmazása.

c-hez: lásd a 3.7 Definiciót!

Másik megoldás - lehetőség:

Az $A+B+C$ esemény ellentettjéről van szó!

$$\overline{A+B+C}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Lásd a 3.15 Tételt.

d-hez: "A termék legalább az egyik szempontból nem megfelelő" esemény ellentettje: "A termék kifogástalan".

26. (A [illegible] C = $(A+B)\bar{C} = A\bar{C}+B\bar{C} = (A-C)+(B-C)$.

a) pl. 30,32,33.

b) pl. 29,30,31,33.

b-hez: Minden páratlan szám, minden 30-nál kisebb szám, minden 3-mal osztható 30-nál kisebb szám jó.
Tehát csak a huszonkilencnél nagyobb, hárommal nem osztható páros számok nem felelnek meg! (pl. 34.)

28. A 3.9 Definició értelmében azt kell belátni, hogy

1. $A B + \bar{A} B + A \bar{B} + \bar{A} \bar{B} = \Omega$, és
2. bármely két esemény szorzata a lehetetlen esemény. Ezt a vizsgálatot $\binom{4}{2} = 6$ eseménypárra kell elvégezni.

29. a) A $B \subset C$ feltétel szükséges:

$$(A-B)+B=A\bar{B} + B=(A+B)(B+\bar{B}) = (A+B)\,\Omega = A + B,$$

és ez csak akkor egyenlő A-val, ha $B \subset A$.

b) A $B \subset A$ feltétel elégséges is. Ez a fenti igazolás lépéseinek forditott sorrendben való elvégzésével látható be.

30. Mindkét fajta csavarból 30.

Legyen a 6 mm-es csavarok száma x, a 8 mm-eseké pedig y. Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott csavar 6 vagy 10 mm-es, B pedig azt, hogy a csavar 6 vagy 8 mm-es.

A klasszikus képlet ismételt alkalmazásával az

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= \frac{x + y}{x+y+40} = 0{,}6 \\ P(B) &= \frac{x + 40}{x+y+40} = 0{,}7 \end{aligned}\right\} \text{ egyenletrendszerhez jutunk.}$$

Ebből x és y egyértelműen meghatározható.

31. a) $\frac{6!}{6^6}$; b) $\frac{5^5}{6^6}$;

c) $\frac{\binom{5}{4}\cdot 4!}{6^6}$; $\frac{\binom{6}{2}\cdot 5^4}{6^6}$.

Az összes lehetséges dobás-sorozatok (elemi események) száma annyi, ahányféleképpen 6 különböző elemből 6-ot ki lehet válasz-

/ı

tani feltéve, hogy ugyanaz az elem többször is előfordulhat és a kiválasztott elemek (az egyes dobások kimenetelei) sorrendjére is tekintettel vagyunk.

32\. a) $\frac{4!}{7!}$; b) $1 - \frac{1}{7!}$.

A hét férfit képzeljük egy meghatározott (rögzitett) sorrendben felállitva, majd melléjük a nőket az összes lehetséges sorrendben.

33\. a) $\frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}}$; b) $\frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{11}}{\binom{52}{13}}$;

b) $\frac{\binom{50}{11}}{\binom{52}{13}}$; d) $1 - \frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$.

d-hez: A "legalább egy treff előfordulása" eseménynek komplementere az az esemény, hogy nem lesz treff a kihuzott lapok között. Ezután a 8.2 Tétel alkalmazható.

34\. a) $\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}$; b) $p_3 + p_4 + p_5$;

c) $p_o+p_1+p_2+p_3 \quad 1 \quad p_4 - p_5$.

Itt p_k a pontosan k találat bekövetkezési valószinüsége:

$$p_k \quad \frac{\binom{5}{k} \cdot \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}} \qquad k = 0,1,2,3,4,5.$$

Indokolás:

A 90 számból 5-öt választunk ki, sorrendre való tekintet nélkül. Az összes lehetőségek számát igy 90 elem 5-ödosztályu kombinációi adják.

A pontosan k találathoz (kedvező eset) az 5 kihuzott számból kell választanunk k-t, a többi 85 számból (5-k)-t, s ezen választások minden csoportositása kedvező. Igy a kedvező esetek száma a két kombináció számának a szorzata.

35. a) $\dfrac{\binom{10}{9} \cdot 7 \cdot 5}{\binom{22}{11}}$; b) $\dfrac{\binom{20}{10}}{\frac{1}{2} \cdot \binom{22}{11}}$.

Az a) és b) esetben más-más az eseménytér.

a) esetben ugyanis nyilvánvalóan annyiféleképpen lehet 11 válogatott játékost kijelölni, amennyi 22 elem 11-edosztályu kombinációinak a száma.

b) esetben a lehetséges elemi események száma pontosan a felére csökken. A két csapat t.i. nincs egymással szemben kitüntetve, ezért ha az egyik csapat 11 játékosát már egyszer valahogy kijelöltük, vele egyidejüleg a másik csapat (az a) alatti eseménytér egy másik elemi eseménye) is előállt.
A "becslés" pedig a végeredmény gyors felirásához is elvezet, ha meggondoljuk, hogy egy kiszemelt játékos 21 társának több mint a fele - 11 játékos - játszik az ellenfél csapatában.

Tehát

$$p = \frac{11}{21} > 0{,}5.$$

36.

$$\frac{\binom{13}{10} \cdot 2^3}{3^{13}}.$$

(lásd a 10. feladatot!)

37.

$$\frac{1}{2} \cdot \left[1 + (1 - 2p)^n\right].$$

Annak a valószinüsége ugyanis, hogy a minta pontosan k számu selejtest tartalmaz $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $(q = 1-p)$. Legyen most $k = 0, 2, \ldots, 2\ell, \ldots \left[\frac{n}{2}\right]$.

A keresett érték:

$$\binom{n}{0}p^0q^n + \binom{n}{2}p^2q^{n-2} + \binom{n}{4}p^4q^{n-4} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(q+p)^n + (q-p)^n\right].$$

(Felhasználtuk a binomiális tételt.)

38. $\frac{1}{2^n}\cdot\binom{n}{\frac{n+A}{2}}.$

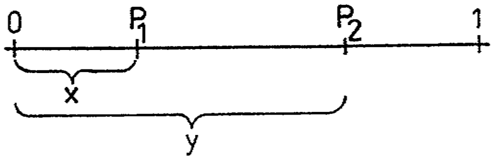
Az $x=0$ pontból induló részecske páros (páratlan) számú lépés után csak páros (páratlan) koordinátájú pontba juthat el. Tehát $|A| \leqq n$, és A n-től csak kettő többszörösében különbözhet.
Az összes lehetséges utak száma 2^n, hiszen mindenegyes lépésben csak két irányban mozdulhat el a részecske.

Legyen "a" a jobb irányban, "b" a bal irányban megtett lépések száma. Ekkor az $\left.\begin{matrix} a+b=n \\ a-b=A \end{matrix}\right\}$ összefüggésekből $a = \frac{n+A}{2}$. Így a "kedvező utak" száma $\binom{n}{\frac{n+A}{2}}$.
A meghatározandó valószínűség pedig

$$p = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+A}{2}}\cdot\frac{1}{2^n}, & \text{ha } A = n,\ n-2,\ \dots,\ -n+2,\ -n \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

39. $\frac{\binom{49}{4}\cdot\binom{50}{5}}{\binom{100}{10}}.$

I. $\frac{1}{4}.$



1. ábra

A két pont kiválasztását a sík egyetlen (x,y) - koordinátájú pontjával egyértelműen reprezentálhatjuk.

A geometriai alakzat, amellyel az egyes események kapcsolatba hozhatók a $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq y\leqq 1$ egyenlőtlenségrendszerrel definiált négyzetlap alakú tartomány. A feladat: meghatározni ennek a négyzetnek azt a résztartományát, amely pontjainak koordinátái eleget tesznek a háromszög megszerkeszthetőségét biztosító ún. háromszög egyenlőtlenségeknek.

a) Vizsgáljuk először az $y\geqq x$ esetet. A szóban forgó három szakasz ekkor x, $y-x$, $1-y$. A megszerkeszthetőség feltételei:

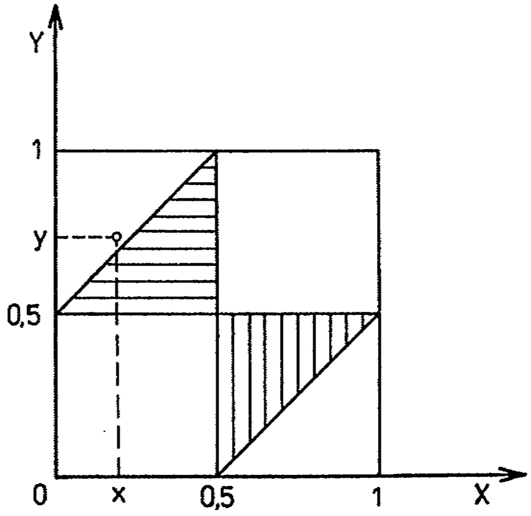
$x+(y-x)>1-y$
$x+(1-y)>y-x$
$(y-x)+(1-y)>x$

Vagyis

$y>1-y\Leftrightarrow y>\frac{1}{2}$
$2y<2x+1\Leftrightarrow y<x+\frac{1}{2}$
$-x+1>x\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

b) Az $y<x$ eset vizsgálata az

$$\left.\begin{array}{l} y<\frac{1}{2}\\ y>x-\frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}\end{array}\right\}\text{egyenlőtlenség rendszerhez vezet}$$



2. ábra

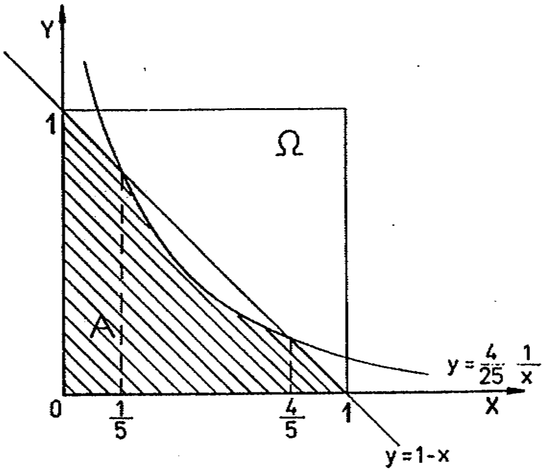
A bevonalkázott tartomány területe: $2\cdot\frac{1}{8}$; M, a teljes geometriai alakzat mértéke pedig az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területe.

A keresett valószínűség tehát $\frac{2\cdot\frac{1}{8}}{1}=\frac{1}{4}$.

II. $\frac{1}{5}+\frac{4}{25}\cdot\ln 4\approx 0,42.$

Az esetménytér ismét a $\left.\begin{array}{l}0\leqq x\leqq 1\\ 0\leqq y\leqq 1\end{array}\right\}$ egyenlőtlenségrendszerrel definiált négyzetlap pontjainak a halmaza. A vizsgált esemény akkor teljesül, ha az $x+y<1$ és az $xy<\frac{4}{25}$ egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek.

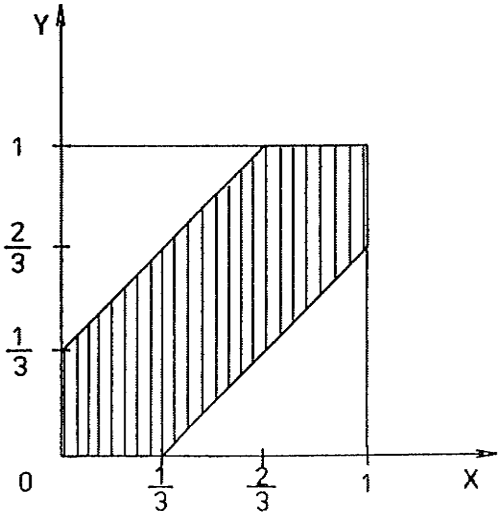
$$m = \frac{1}{5} + \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{4}{5}} \frac{4}{25}\,\frac{1}{x}\,dx\ ;\ M=1.$$



3. ábra

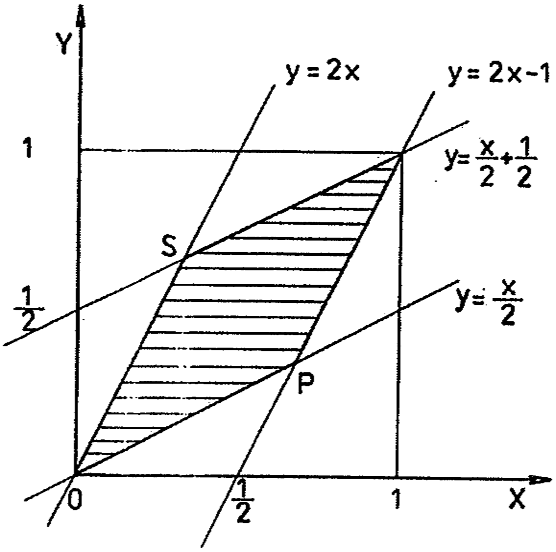
III. $\frac{5}{9}$.

A feladat megfogalmazása az alábbi alakra redukálható: A (0,1) intervallumon találomra választva két pontot, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek egymástól való távolsága legfeljebb $\frac{1}{3}$. Tehát az $|x-y| \leq \frac{1}{3}$ egyenlőtlenség vizsgálatáról van szó.



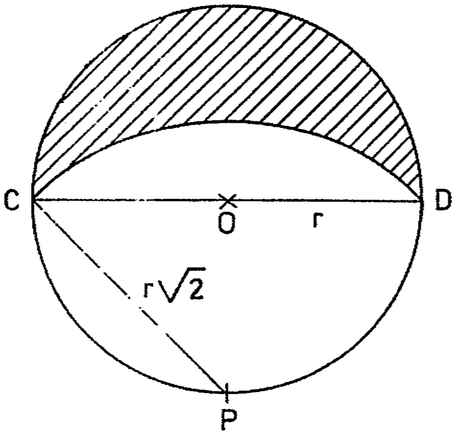
4. ábra

IV. $\frac{1}{3}$.



5. ábra

V. $\frac{1}{\pi}$.

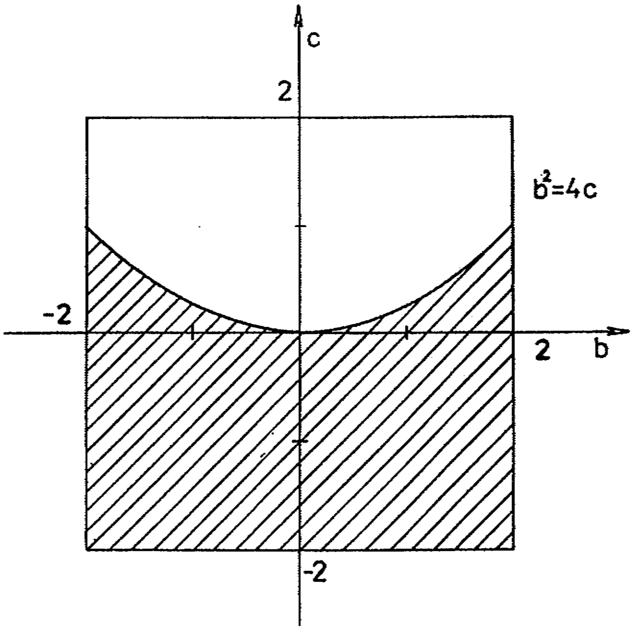


6. ábra

VI. $\frac{7}{12}$.

Az esetménytér jelen esetben egy origó középpontú, 4 egység oldalhosszúságú négyzetlap. Területe 16 egység.

A gyökök valósak, ha $b^2 \geq 4c$. A vizsgált résztartomány a $c \leq \frac{b^2}{4}$ egyenlőtlenségnek megfelelően a bevonalkázott, alábbi tartomány:



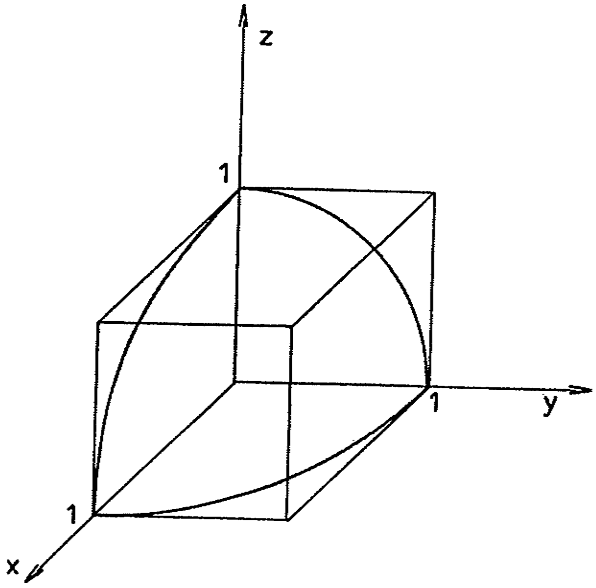
7. ábra

A "kedvező" résztartomány területe:

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{4} b^2 \, db + 8 = \frac{28}{3} .$$

VII. $\frac{\pi}{6}$.

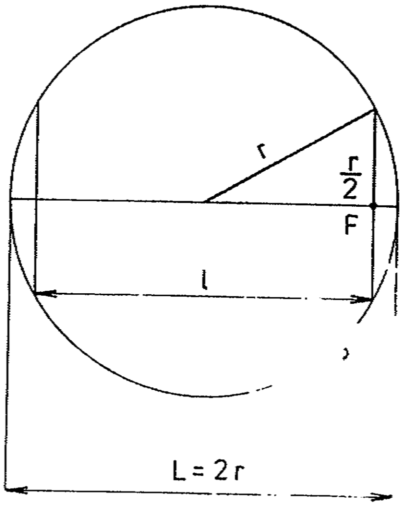
Az esetménytér az $0 \leqq x \leqq 1$
$0 \leqq y \leqq 1$ egységkocka belső pontjainak
$0 \leqq z \leqq 1$
a halmaza, míg a vizsgált esemény szempontjából kedvező ponthalmazt az $x^2+y^2+z^2<1$; $x>0$; $y>0$; $z>0$ egyenlőtlenség-rendszer definiálja. (nyolcadgömb)



8. ábra

VIII. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,13$.

Az eseménytér a 2r hosszúságú körátmérő



9. ábra

$l=r\sqrt{3}$, így $p=\frac{2r-r\sqrt{3}}{2r}$.

$$B:\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}3\text{ fehér}\\ 2\text{ zöld}\end{array}\right\}\\ \hline \left.\begin{array}{l}2\text{ fehér}\\ 3\text{ zöld}\end{array}\right\}\\ \hline \left.\begin{array}{l}2\text{ fehér}\\ 3\text{ zöld}\\ 1\text{ piros}\end{array}\right\}\end{array}\qquad\qquad AB:\ \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}3\text{ fehér}\\ 2\text{ zöld}\end{array}\right\}\\ \hline \left.\begin{array}{l}2\text{ fehér}\\ 3\text{ zöld}\end{array}\right\}\end{array}$$

golyó huzása.

A meghatározandó A/B esemény valószinüségére igy

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5!}{3!2!} + \frac{5!}{3!2!}}{3^5} : \frac{\frac{5!}{3!2!} + \frac{5}{3!2!} + \frac{5!}{2!2!}}{3^5}$$

adódik.

45. $$\frac{1}{5} \cdot \frac{\binom{99}{2} + \binom{98}{2}\binom{2}{1} + \binom{97}{2}\binom{3}{1} + \binom{96}{2}\binom{4}{1}}{\binom{100}{3}} .$$

A feladatot a teljes valószinüség tételével oldottuk meg.

46. $$\frac{8}{1\ 000\ 007} .$$

Jelölje ugyanis R azt az eseményt, hogy rossz érmét választottunk, és F azt az eseményt, hogy egy érmét háromszor feldobva, mindháromszor fejet kapunk.
Ezeket a jelöléseket felhasználva, az R/F esemény bekövetkezési valószinüségét kell meghatároznunk.

Bayes-tétele szerint:

$$P(R/F) = \frac{1 \cdot \frac{2}{2.10^6}}{1 \cdot \frac{2}{2.10^6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1\ 999\ 998}{2.10^6}} .$$

47. a) 0, 987 ; b) 0, 204.

<u>a-hoz:</u> P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), ahol a függetlenség miatt P(AB) = P(A) P(B).

b-hez: $P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B)$, hiszen az $A\bar{B}$ és az $\bar{A}B$ egymást kizáró események. A továbbiakban az események függetlenségét használjuk ki.

48. $$\left[\frac{\binom{96}{5}}{\binom{100}{5}}\right]^3 .$$

49. a) p^3 ; b) $1 - (1 - p)^3$.

a-hoz: A sorba-kapcsolt komponensekből álló rendszer csak akkor müködik, ha mindegyik komponens müködik. Ennek valószinüsége - a komponensek müködésének függetlensége folytán - a három müködési valószinüség szorzata.

b-hez: A párhuzamos rendszer müködik, ha legalább az egyik komponens müködik. Célszerü először a komplementer esemény valószinüségét meghatározni. Annak a valószinüsége t.i., hogy mindhárom komponens hibás: $(1 - p)^3$. Itt megint a függetlenséget használtuk ki.

Megjegyzés: Gyakorlásul és ellenőrzésként, határozzuk meg a "legalább az egyik komponens müködik" esemény valószinüségét direkt módon is!

$$(3p\ (1 - p)^2 + 3p^2\ (1 - p) + p^3 .)$$

50. Az $1 - (1 - p)^n > z$ egyenlőtlenséget kell n-re megoldani, ahol

$$p = \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1} + 1}{\binom{90}{5}} .$$

Megoldás: A legalább négy - 4 vagy 5 - találat valószinüségét jelöljük p-vel.

A legfeljebb három találat - az előbbi esemény komplementerének - valószinüsége: $1 - p$.

Annak a valószinüsége, hogy n héten keresztül mindig legfeljebb csak három találatot érünk el - az egyes heti huzások függetlensége miatt - $(1 - p)^n$.

Ezen $(1 - p)^n$ valószinüségü esemény komplementer eseménye bekövetkezési valószinüségének kell z-nél nagyobbnak lenni. Ebből n kifejezhető.

51. $\frac{1}{2}$.

Legyen A esemény az, hogy a három szám különböző, és B hogy legalább az egyik hatos. Ekkor $\bar{B}$ esemény az, hogy egyik sem hatos. Mivel

$$P(B/A) = 1 - P(\bar{B}/A = 1 - \frac{P(\bar{B}\cdot A)}{P(A)},$$

azért

$$P(B/A) = 1 - \frac{\dfrac{\binom{5}{3}.3!}{6^3}}{\dfrac{\binom{6}{3}.3!}{6^3}}$$

52. Egyik urnába 1 fehér golyót kell tenni, az összes többi golyót pedig a másik urnába.
Legyen ugyanis k az egyik urnába elhelyezett fehér és l a fekete golyók száma. Akkor a fehér golyó húzásának valószínűsége a teljes valószínűség tétele szerint

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+l} + \frac{50 - k}{100-(k+l)}\right).$$

Ez az érték maximális, ha k = 1 és l = 0, mint arról módszeres próbálgatással meggyőződhetünk.

$$p_{max} = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{49}{22}\cdot\frac{1}{2} \approx 0{,}747 .$$

53. p=0,06 ill. p=0,075.

54. $\frac{4n-2}{n(n+1)}$.

Legyen A_i esemény az, hogy az i-edik dobozból húzunk.

$P(A_i) = \frac{1}{n}$, $i=1,2,\dots,n$.

B esemény jelentse azt, hogy piros golyót húzunk.
$P(A_{n-1}+A_n/B) = P(A_{n-1}/B) + P(A_n/B)$,
mert A_{n-1} és A_n kizáró események. Bayes-tétele szerint:

$$P(A_{n-1}/B) = \frac{P(B/A_{n-1})P(A_{n-1})}{P(B)} = \frac{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{i=1}^{n} P(B(A_i)\cdot P(A_i)} =$$

$$= \frac{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}(1+2+\ldots+n)} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)} ,$$

$$P(A_n/B) = \frac{2n}{n(n+1)} .$$

A keresett valószínűség ezen két feltételes valószínűség összege.

55. $\dfrac{s^k(N-s)^{n-k}}{\sum\limits_{i=0}^{N} i^k(N-i)^{n-k}}$.

56. $\approx 0{,}089$.

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a másodszorra kivett labdák mind újak, és B_i-vel azt, hogy az először választott három labda közül i darab új. $(i=0,1,2,3)$.
A teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3} P(A/B_i)\cdot P(B_i)=\sum_{i=0}^{3}\frac{\binom{9-i}{3}}{\binom{15}{3}} \cdot \frac{\binom{9}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}} =$$

$$= \frac{1}{455^2}(20.84+9.15.56+36.6.35+84.20) .$$

57. $\dfrac{8}{441}$.

"A két fehér golyót tartalmazó dobozból választottunk, feltéve, hogy három fehér golyót húztunk" esemény valószínűségét Bayes-tételével határozhatjuk meg:

$$P(B_2/A) = \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}}{\sum\limits_{j=1}^{6}\left(\frac{j}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{2^3}{\sum\limits_{j=1}^{6} j^3} .$$

58.

$$p=\sum_{i=0}^{10}\frac{\binom{30+i}{2}\binom{1000-30-i}{18}}{\binom{1000}{20}}\cdot p_i .$$

60. a) igen.

c) $M(\xi) = \frac{13}{6}$; $D(\xi) = \frac{\sqrt{161}}{6}$.

a-hoz: $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$

c-hez: $M(\xi) = -3 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{4} .$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 .$$

61. $P(\xi = k) = \frac{1}{e \cdot k!}$, $(k = 0,1,2,\dots)$.

Ugyanis

$$\sum_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot \frac{1}{k!} = 1 ;$$

$$a = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}} .$$

62.
$$\left.\begin{aligned} p_{2k-1} &= (0,72)^{k-1} \cdot 0,1 ; \\ p_{2k} &= (0,72)^{k-1} \cdot 0,18 ; \end{aligned}\right\} \quad k = 1,2,\dots$$

63. a) $p_1 = \frac{1}{5}$; $p_2 = \frac{3}{5}$; $p_3 = \frac{1}{5}$.

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0 , & \text{ha } x \leqq 1 , \\ \frac{1}{5} , & \text{ha } 1 < x \leqq 2, \\ \frac{4}{5} , & \text{ha } 2 < x \leqq 3, \\ 1 , & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$

c) $M(\xi) = 2.$

a-hoz: $P(\xi = k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{2}{3-k}}{\binom{6}{3}}$, $k = 1,2,3.$

64. Például azért nem, mert

$$F(x) = 2 + \frac{2,6}{x - 0,8}$$

azonos átalakitás után világos, hogy $F(x) > 2$, ha $x > 1$. "Ránézésre" pedig közvetlenül látható, hogy $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 2.$

65. a) $\lim\limits_{x \to 1-0} F(x) \neq F(1).$

b) Legyen $F(1) = \frac{1}{12}$.

c) Tulajdonképpen a 60. feladat áll előttünk.

66. a) $A = 1;$ $B = -2.$

c) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 1, \\ \frac{2}{(x+1)^2}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$

d) 0,2.

Megoldás:

a-hoz: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = A = 1 , \\ \lim\limits_{x \to 1-0} F(x) = F(1) = A + \frac{B}{2} = 0, \end{array}\right\}$

és $1 - \frac{2}{x + 1}$ monoton növekedő is.

__b-hez:__

$$F(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \leqq 1, \\ 1 - \dfrac{2}{x+1}\,, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

__c-hez:__

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \leqq 1, \\ \dfrac{2}{(x+1)^2}\,, & \text{ha } x > 1. \end{cases} \qquad (f(x) = F'(x))$$

__d-hez:__ $P(\xi > 9) = 1 - P(\xi \leqq 9) = 1 - F(9) = 1 - (1 - \frac{2}{10}),$

vagy $P(\xi > 9) = \int\limits_9^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{c \to \infty} \int\limits_9^{c} \frac{2}{(x+1)^2} dx =$

$$= \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{2}{x+1} \right]_9^c = \lim_{c \to \infty} \left[-\frac{2}{c+1} + \frac{2}{10} \right].$$

67. $C = \frac{1}{2}$; $A = \frac{1}{\pi}$.

68. a) $A = 1$.

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0, \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2}\,, & 0 < x \leqq 1, \\ 1\,, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

c) 0,195.

__a-hoz:__

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A. \int\limits_0^1 (x + \tfrac{1}{2})dx = A\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = 1.$$

__c-hez:__

$$\int\limits_0^{0,3} (x + \tfrac{1}{2})dx = \frac{0,3^2}{2} + \frac{0,3}{2} = \frac{0,39}{2} .$$

69. a) $a = 0.$

b) $P(\xi \geqq \ln 2) = \frac{1}{2}.$

c) $M(\xi) = 1; \quad D(\xi) = 1.$

c-hez:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_0^A x.e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty} \Big[-e^{-x}(x+1)\Big]_0^A =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{A+1}{e^A}\right) + 1.$$

Az integrál abszolut konvergens, hiszen $|x| = x$, ha $x \geqq 0$, igy a várható érték valóban létezik.

70. $n = 50.$

Megoldás:

Jelölje a ξ valószinüségi változó a két beállitás között elkészülő munkadarabok számát.

$$P(\xi = k) = 0,98^{k-1} \,.\, 0,02\,, \quad (k = 1,2,\dots).$$

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} k.0,98^{k-1}.0,02 = 0,02.\sum_{k=1}^{\infty} k.0,98^{k-1}.$$

Mivel a $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ hatványsor (geometriai sor) $|x| < 1$

konvergens, sőt egyenletesen konvergens, a tagon lás
al nyert sorra fennáll, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} k.x^{k-1} = \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{1}{(1-x)}$$

Ezt az összefüggést figyelembe véve:

$$M(\xi) = 0,02 \cdot \frac{1}{(1-0,98)^2} = \frac{1}{0,02} \cdot$$

71. a) nem.
b) igen.

a-hoz: Már az $f(x) \geqq 0$ feltétel sem teljesül $(-1, -\frac{1}{2})$-ben.

b-hez: $f(x) \geqq 0$, és $\int_0^1 (x + \frac{1}{2})\, dx = 1.$

72.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{ha } 0 < x \leqq 1, \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1, & \text{ha } 1 < x \leqq 2, \\ 1, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

$P(\xi < 0) = 0$; $P(\xi > 1) = 0,5$; $p(0 < \xi < 3) = 1.$

Megoldás: A 11.6. Definició szerint $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$; szemléletesen tehát $F(x)$ a sürüségfüggvény alatti területet méri $-\infty$-től x-ig. (Hasznos ezért, a későbbiek szempontjából is, a sürüségfüggvényt ábrázolni! Lásd az elméleti jegyzet 103. oldalán lévő 20. ábrát.)

Mivel a sürüségfüggvény szakaszonként értelmezett, az integrálást rendre a $(-\infty, 0)$; $[0,1]$; $[1,2]$; $[2, +\infty)$ intervallumokon kell elvégezni. Igy például az $[1,2]$ intervallumon az eloszlásfüggvény meghatározása az alábbiak szerint történik:

$$F(x) = \int_0^1 t dt + \int_1^x (2-t)dt = \frac{1}{2} + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} \,.$$

Gyakori hibaforrás a már "kiintegrált" additiv tag - jelen esetben az elöl álló $\frac{1}{2}$ - elhagyása.

Ez természetesen sulyos hiba, hiszen a dolog lényegét érinti. A kérdésekben szereplő valószinüségek például az eloszlásfüggvény ismeretében igy számithatók ki:

$$P(\xi < 0) = F(0) = 0.$$

$$P(\xi > 1) = 1 - P(\xi < 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$P(0 < \xi < 3) = F(3) - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

Ezek a valószinüségértékek akár a sürüségfüggvény grafikonjáról (görbe alatti terület), akár az eloszlásfüggvény ábrájáról (ordináták különbsége) közvetlenül leolvashatók.

73. a) $A = 1$;

b) $P(\frac{1}{2} < \xi < 2) = \frac{1}{2}$.

a-hoz: $\int_1^\infty \frac{A}{2x^2} dx = \frac{1}{2}$.

b-hez: $P(\frac{1}{2} < \xi < 2) = P(\frac{1}{2} < \xi < 1) + P(1 < \xi < 2) =$

$$= \frac{1}{4} + \int_1^2 \frac{1}{2x^2} dx.$$

74. $$M(\xi) = \frac{2}{h. \sqrt{\pi}} .$$

A várható érték parciális integrálással adódik. (Használjuk ki, hogy

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-h^2 x^2} = 0.)$$

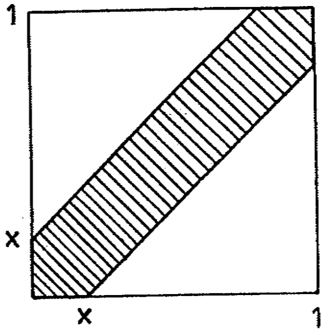
75. $M(\xi) = \frac{1}{3}$.

Először a szóban forgó valószínűségi változó eloszlásfüggvényét írjuk fel, vagyis meghatározzuk annak a valószínűségét, hogy két választott pont távolsága x-nél kisebb. Geometriai valószínűséggel dolgozva azt kapjuk, hogy

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x \leqq 0;\\ 2x-x^2, & \text{ha } 0<x\leqq 1;\\ 1, & \text{ha } x>1\end{cases}.$$

F(x) szakaszonkénti deriválásával a sűrűségfüggvény:

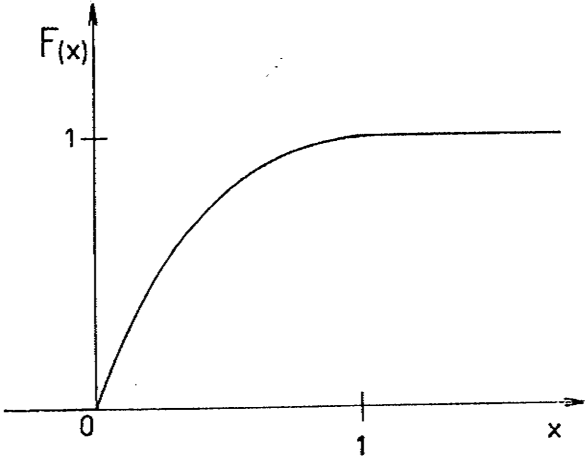
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0 \quad;\\ 2-2x, & \text{ha } 0<x \leqq 1;\\ 0, & \text{ha } x>1 \quad,\end{cases}$$



11. ábra

ξ várható értéke tehát:

$$M(\xi) = \int_0^1 x(2-2x)dx.$$



12. ábra

76. $D(\xi) = \sqrt{18}$ cm.

77. A mérkőzés csak 3,4 vagy 5 játszmából állhat. $1-p=q$ jelöléssel:

$$p_3 = P(\xi=3)=p^3+q^3 ,$$

$$p_4 = P(\xi=4)=\binom{3}{1}\left[p^3q+q^3p\right],$$

$$p_5 = P(\xi=5)=\binom{4}{2}\left[p^3q^2+q^3p^2\right].$$

$$M(\xi)=\sum_{i=3}^{5} i\cdot p_i = 3(1+pq+2p^2q^2).$$

78. A szórás számításakor fellépő $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ improprius integrál divergens.

79. $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$; $D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.

80. a)
b)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3	η perem
0	$\frac{1}{220}$	$\frac{12}{220}$	$\frac{18}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{35}{220}$
1	$\frac{15}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{30}{220}$	0	$\frac{105}{220}$
2	$\frac{30}{220}$	$\frac{40}{220}$	0	0	$\frac{70}{220}$
3	$\frac{10}{220}$	0	0	0	$\frac{10}{220}$
ξ perem	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

) Nem függetlenek.

Megoldás:
a) és b)-hez:

$$P(\xi=i,\ \eta=k) = \frac{\binom{4}{i}\cdot\binom{5}{k}\cdot\binom{3}{3-i-k}}{\binom{12}{3}}, \quad \begin{array}{l} i,k=0,1,2,3. \\ 0 \leqq i+k \leqq 3. \end{array}$$

c)-hez: pl.

$$P(\xi = 2,\ \eta = 2) = p_{22} = 0,$$

de ugyanakkor sem $P(\xi = 2)$, sem $P(\eta = 2)$ nem zérus.

81. a)

$$f_1(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y}{2}, & \text{ha } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

b) nem függetlenek.

a-hoz:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{2-2x} dy = 2-2x, \quad 0 < x < 1.$$

b-hez: $f(x,y) \neq f_1(x).f_2(y)$, s igy a 16.3 Tétel szerint nem lehetnek függetlenek.

82. $M(\xi) = \ell = 1$ m; $D(\xi) = \sqrt{0,4}$ cm.

83. a)

η \ ξ	1	0	η perem
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$
ξ perem	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

b) $-\frac{1}{5}$.

Megoldás: Ismeretes, hogy két kockával dobva, az elemi események száma 6.6. A ($\xi = 0$, $\eta = 1$) esemény például azt jelenti, hogy a két kockával különböző számot dobtunk ugy, hogy a pont-értékek összege 7. Leszámolható, hogy ilyen dobás összesen hatféleképpen valósulhat meg. A szóban forgó esemény bekövetkezési valószinűsége tehát $\frac{6}{36}$.

A táblázatban a peremeloszlásokat is feltüntettük. Ez egyrészt ellenőrzési lehetőséget biztosit, másrészt a korrelációs együttható kiszámitásához szükséges.

$$R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi . \eta) - M(\xi) . M(\eta)}{D(\xi) . D(\eta)} .$$

$$M(\xi . \eta) = 1.1.0 + 1.0.\frac{1}{6} + 0.1.\frac{1}{6} + 0.0.\frac{4}{6} = 0,$$

$$M(\xi) = 1.\frac{1}{6} + 0.\frac{5}{6} = \frac{1}{6}, \quad M(\eta) = 1.\frac{1}{6} + 0.\frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$D^2(\xi) = 1^2 . \frac{1}{6} + 0^2 . \frac{5}{6} - (\frac{1}{6})^2 ,$$

$$D^2(\eta) = 1^2 . \frac{1}{6} + 0^2 . \frac{5}{6} - (\frac{1}{6})^2 .$$

Igy $R(\xi, \eta) = \dfrac{0 - \frac{1}{6} . \frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{6} . \frac{\sqrt{5}}{6}} = - \frac{1}{5}$.

84. a) Nem függetlenek.

b) $P(\xi \neq \eta, \eta > 1) = 0,5$.

c) $cov(\xi, \eta) = - 0,15$.

a-hoz: A táblázatot a peremeloszlásokkal kiegészítve [illegible] látható, hogy van olyan i és k, amelyre

$$p_{ik} \neq p_i \cdot q_k$$

(Lásd a 16.2. Tételt!)

b-hez: A táblázatból kiolvasható, hogy

$$P(\xi \neq \eta, \eta > 1) = P(\xi = 1, \eta = 2) + P(\xi = 1, \eta = 3) +$$

$$+ P(\xi = 2, \eta = 3) = 0,2 \ [illegible] \ 1 = 0,5.$$

c-hez: A $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi.\eta) - M(\xi).M(\eta)$ összefüggésből egyszerű számítással adódik a meghatározandó érték.

85. a) $M(\xi+\eta) = 2$; $D(\xi+\eta) = \frac{\sqrt{22}}{6}$.

b) $R(\xi,\eta) = -\sqrt{\frac{2}{335}}$.

86. a) $p = \frac{1}{60}$.

b) Igen.

c) $\frac{7}{6}$.

d) $\frac{1}{3}$.

e) $\sqrt{\frac{181}{180}}$.

f) 0.

87. Igen.

Megoldás:

Először az "a" és "b" paraméterek értékeit határozzuk meg. A táblázatból leolvasható, hogy $5a+4b = 1$ kell legyen.

$(\sum_{i,k} p_{ik} = 1.)$

A korrelálatlanságot kihasználva, az $M(\xi.\eta) = M(\xi).M(\eta)$ összefüggés alapján:

$$2a - a - 4a + 2a = [2a+b-2(2a+b)].[2(2a+b)-(2a+b)]$$

adódik. Rendezve: $-a = -(2a+b)^2$.

Az
$$\left.\begin{aligned} 5a + 4b &= 1 \\ (2a+b)^2 &= a \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszer megoldása

$a_1 = 1$; $b_1 = -1$

$a_2 = \frac{1}{9}$; $b_2 = \frac{1}{9}$

Mivel $0 \leqq p \leqq 1$ az I. axióma értelmében, csak az $a = \frac{1}{9}$, $b = \frac{1}{9}$ megoldás-pár jön számításba. Táblázatunkba ezeket az értékeket beirva látható, hogy $p_{ik} = p_i \cdot q_k$ minden i-re és k-ra. Tehát a két valószinüségi változó egymástól valóban független.

88. $R(\xi, \eta) = -1.$

A két valószinüségi változó között nyilvánvalóan lineáris kapcsolat áll fenn:

$$\eta = 60 - \frac{1}{4}\xi \quad \text{(az időt percekben mérve).}$$

Mivel ξ növekedésével egyidejüleg η csökken, a korrelációs együttható negativ.

89. $\eta = a\xi + b$ alakú, ahol $a = \frac{1}{D(\xi)} > 0$ és $b = -\frac{M(\xi)}{D(\xi)}$.
Ismeretes, hogy $M(\eta) = aM(\xi) + b$ és $D(\eta) = |a| D(\xi)$.
Ezekből az összefüggésekből közvetlenül adódik az állítás.

90. a) $(\frac{4}{5})^{20}$,

b) $1 - (\frac{4}{5})^{20}$,

c) 0.

a-hoz: A binomiális eloszlásu valószinüségi változó várható értéke és szórásnégyzete felirható az eloszlás paramétereivel. A feladat adatait felhasználva:

$$np = 4,$$

és

$$npq = \frac{16}{5}.$$

Ebből az egyenletrendszerből $n = 20$, $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{4}{5}$.

Igy $P(\xi = 0) = \binom{20}{0} \cdot (\frac{1}{5})^0 \cdot (\frac{4}{5})^{20-0}$.

b-hez: Mivel a binomiális eloszlásu valószinüségi változó lehetséges értékei: 0, 1, 2, ..., n; azért a $\xi = 0$ eseménynek komplementere a $\xi > 0$ esemény.

Ennek bekövetkezési valószinüsége tehát

$$P(\xi > 0) = 1 - P(\xi = 0).$$

c-hez: Az előbbiek szerint a $\xi = -1$ esemény lehetetlen esemény, tehát bekövetkezési valószinüsége nulla.

91. 0, 9445.
Olyan binomiális eloszlásról van szó ugyanis, amelynek paraméterei: $n = 15$, $p = 0,1$.
A $\sum_{k=0}^{3} P(\xi = k)$ valószinüséget kell meghatározni.

92. $p_1 = 7,54\%$; $p_2 = 20,6\%$.

Megoldás:

Valamely tétel elfogadásának V valószinüsége a tétel tényleges p selejtarányától függ:

$$V(p) = \sum_{k=0}^{k_{max}} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k},$$

ahol k_{max} az n-elemü mintában előforduló selejtes darabok megengedett maximális száma. (Mivel a minta elemszáma kicsi a tétel elemszámához képest, binomiális eloszlással közelithetünk.)

A

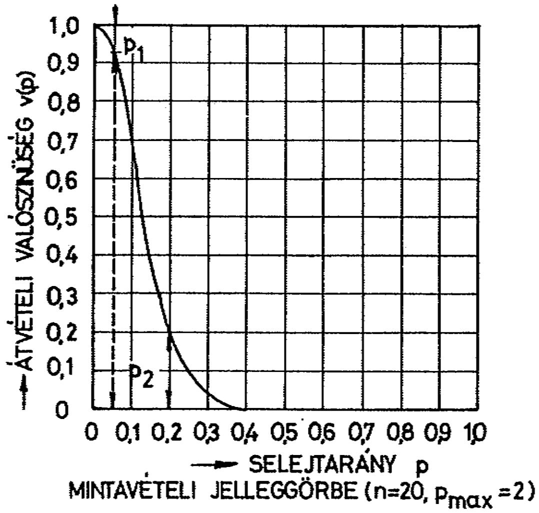
$$V(p) = \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot p^k (1-p)^{20-k}$$

"mintavételi jelleggörbét" a 92. ábra szemlélteti.

Az ábrából is látható, hogy az átadó p_1 kockázata a legnagyobb valószinüség, amellyel a legfeljebb 0, 05 selejtarányu tételből vett 20 elemü minta kettőnél több selejtes darabot tartalmaz:

$$p_1 = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{20-k} .$$

Az átvevő p_2 kockázata pedig a legnagyobb valószinüség, amelylyel a 0, 2 (vagy annál nagyobb) selejtarányu tételből vett 20 elemü minta legfeljebb két selejtest tartalmaz:



92. ábra

$$p_2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{20}{k} \cdot 0,2^k \cdot 0,8^{20-k} .$$

p_1 és p_2 számszerű értéke az I. sz. táblázat adatainak felhasználásával határozható meg.

93. $\frac{1}{e^6} = 0,0025.$ (táblázatból)

20 oldalon ugyanis átlag $\frac{300}{1000} \cdot 20 = 6$ sajtóhiba várható. Az eloszlás paramétere tehát $M(\xi) = \lambda = 6$.

Igy $P(\xi = 0) = p_o = \frac{6^o}{0!} e^{-6} = \frac{1}{e^6}$.

94. a) 0,9745 ; b) 0,0719 ; c) 0,0464.

Megoldás:

Az egy müszak alatt elszakadó szálak száma binomiális eloszlást alkot. Jelöljük p_i-vel annak a valószinüségét, hogy egy müszak alatt pontosan i darab szál szakad el.

Ezzel a jelöléssel élve, rendre a

$$\sum_{i=3}^{600} p_i \,; \quad \sum_{i=0}^{3} p_i \,;$$

illetőleg a p_3 valószinüségek meghatározása a feladatunk.

Mivel $n = 600$ igen nagy szám és $p = 0,012$ elég kicsi, a binomiális eloszlás tagjai jól közelithetők a $\lambda = np = 600 \,.\, 0,012 = 7,2$ paraméterü Poisson eloszlás megfelelő tagjaival. (Lásd a 23.2 Tételt.) Igy

$$\sum_{i=3}^{600} p_i = 1 - \sum_{i=0}^{2} p_i \approx 1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{7,2^i}{i!} e^{-7,2} =$$

$$= 1 - (0,0007+0,0054+0,0194) = 0,9745.$$

Továbbá

$$\sum_{i=0}^{3} p_i \approx \sum_{i=0}^{3} \frac{7,2^i}{i!} e^{-7,2} = 0,0007+0,0054+0,0194+ 0,0464 =$$

$$= 0,0719.$$

Végül

$$p_3 \approx \frac{7,2^3}{3!} e^{-7,2} = 0,0464.$$

95. a) 0,0446; b) 0,1667.

Megoldás:

a-hoz: Tulajdonképpen az a kérdés, hogy mi a valószinüsége annak, hogy a biztositó a befolyt $10\ 000 . 10 = 10^5$ Ft összeget maradéktalanul kifizeti (és nem kell a tőkéjéből pótolnia sem), vagyis, hogy pontosan $\frac{10^5}{4000} = 25$ haláleset következik be az év folyamán (egymástól függetlenül).

A 21.2 Definició értelmében $n = 10\ 000$, $p = 0,002$ paraméterü binomiális eloszlásról van szó. Ezt a $\lambda = 20$ paraméterü Poisson-eloszlással közelitjük. Most $k = 25$, igy táblázatunkból a $P(\xi = 25) = 0,0446$ értéket olvassuk ki.

b-hez: Az előző feladathoz képest az a változás, hogy a 25 vagy annál több haláleset bekövetkezési valószinüségét kell meghatározni.

Ismét a táblázatból

$$P(\xi \geqq 25) = 0,1667 \quad \text{adódik.}$$

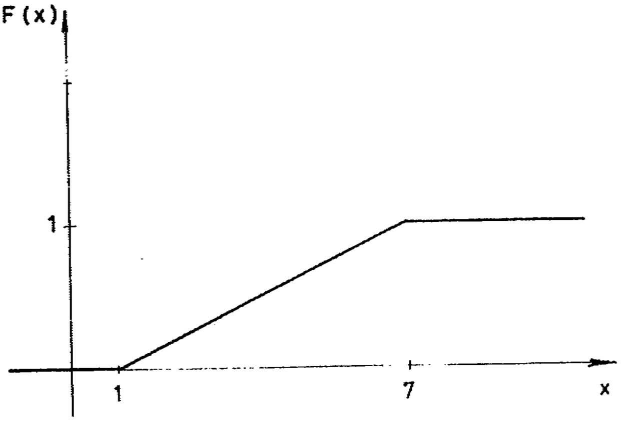
96.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 1, \\ \dfrac{x - 1}{6}, & \text{ha } 1 < x \leqq 7, \\ 1, & \text{ha } x > 7. \end{cases}$$

Ugyanis
$$M(\xi) = \frac{a + b}{2} = 4,$$

$$D^2(\xi) = \frac{(b - a)^2}{12} = 3.$$

Innen $a = 1,\ b = 7.$

L. 96. ábra.



96. ábra

97. a) 20%; b) 10^{30} ; c) 20%,
ha a 8^{30}-tól 12^{30}-ig terjedő idő-intervallum teljes egészében az ismeretlen hosszuságu időintervallumon belül van. Különben:

a) 40% ; b) 9^{15} ; c) értelmetlen.

98. $\dfrac{1}{\sqrt{e^3}} = 0,2231$ (táblázatból).

Első megoldás:

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{különben (lásd a 21.2. Példát).} \end{cases}$$

Feladatunkban az eloszlás paramétere: $\lambda = \frac{1}{M(\xi)} = \frac{1}{4}$.

A meghatározandó valószinüség pedig:

$$P(\xi \geqq 6) = 1 - F(6) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{6}{4}}\right] = \frac{1}{\sqrt{e^3}} .$$

Második megoldás:

Az eloszlás sürüségfüggvényével:

$$P(\xi \geqq 6) = \int_6^\infty \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{4}} dx = \left[- e^{-\frac{x}{4}}\right]_6^\infty = \lim_{A \to \infty} (- e^{-\frac{A}{4}}) +$$

$$+ e^{-\frac{6}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} .$$

9. a) $\approx 0,5528$; b) $\approx 0,62$ óra.

a-hoz:

$$P(\xi < \tfrac{1}{2}) = 1 - \sqrt{0,2}.$$

b-hez:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} ; \quad e^{-\lambda} = 0,2.$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\ln 5} .$$

00. kb. 52,8%, illetőleg 33,7%.

Az eredmény a $\lambda = 0,64$ paraméterü Poisson-eloszlás táblázatából lineáris interpolációval nyerhető.

101. a) kb. 95,4%; b) $9,871 < \xi < 10,129$.

Megoldás:

a-hoz: $P(9,9 < \xi < 10,1) = F(10,1) - F(9,9) =$

$$= \phi\left(\frac{10,1 - 10}{0,05}\right) - \phi\left(\frac{9,9 - 10}{0,05}\right) =$$

$$= \phi(2) - \phi(-2) = \phi(2) - \left[1 - \phi(2)\right] =$$

$$= 2\ \phi(2) - 1 = 2.0,9772 - 1 = 0,9544.$$

b-hez:

$$P(10-a < \xi < 10+a) = 0,99\ ;\ a = ?$$

$P(10-a < \xi < 10+a) = F(10+a)-F(10-a) =$

$$= \phi\left(\frac{a}{0,05}\right) - \phi\left(-\frac{a}{0,05}\right) = 2\ \phi\left(\frac{a}{0,05}\right) - 1.$$

Az "a"-ra megoldandó egyenlet tehát

$$2.\ \phi\left(\frac{a}{0,05}\right) - 1 = 0,99.$$

Ebből

$$\phi\left(\frac{a}{0,05}\right) = 0,995.$$

A táblázatból visszakeresve:

$$\frac{a}{0,05} \approx 2,58\ ; \qquad a \approx 0,129$$ adódik.

102. $a = 1,4$.

103. $\sigma \approx 0,05$ cm.

A feltételi egyenlet ugyanis ekvivalens a

$$2.\ \phi\left(\frac{0,1}{\sigma}\right) - 1 = 0,95$$

egyenlettel. (Lásd még a 101/b feladatot!)

104. Kb. 13,8%.

Jelentse A a $11,9 \leqq \xi \leqq 12,1$,
B az $5,95 \leqq \eta \leqq 6,05$

eseményt.

Feladatunk a $P(\bar{A} + \bar{B})$ valószinüség meghatározása.

A De Morgan-féle azonosságot és az események függetlenségét felhasználva, a kérdéses valószinüségre:

$$P(\bar{A} + \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A)\, P(B)$$

adódik.

(Ugyanerre az eredményre jutunk, ha a 8.6 és a 10.5 Tételeket alkalmazzuk:

$$P(\bar{A}+\bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P\ (\bar{A}.\bar{B}) =$$

$$= P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A})\, P(\bar{B}) \qquad \text{s.i.t.})$$

105. 0,147.

<u>Megoldás:</u>

Az eredő ellenállás olyan valószinüségi változó, amelynek várható értéke 5 500 Ω és szórása $\sqrt{10}\ .\ 30\,\Omega$.

Igy standardizáltja: $\eta = \dfrac{\xi - 5500}{\sqrt{10}\ .\ 30}$.

A $\xi > 5600\,\Omega$ esemény ekvivalens az

$\eta > \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ eseménnyel. Ennek ellentettje az

$\eta < \dfrac{\sqrt{10}}{3}$ esemény, amelynek bekövetkezési valószinüségére a centrális határeloszlástétel segitségével a

$P(\eta < \dfrac{\sqrt{10}}{3}) \approx \phi\,(\dfrac{\sqrt{10}}{3})$ becslés irható fel.

Igy a kérdezett valószinüség becslése:

$$P(\xi > 5600) = P(\eta > \frac{\sqrt{10}}{3}) \approx 1 - \phi\,(\frac{\sqrt{10}}{3}) \approx 14,7\%.$$

106. 1.

Ismeretes, hogy ebben az esetben

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a<x<b, \\ 0 & \text{különben}, \end{cases}$$

és $M(\xi) = m = \frac{a+b}{2}$, $D(\xi) = \sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Mivel $2\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{3}} > \frac{b-a}{2}$, azért

$$m+2\sigma > \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b,$$

és $m-2\sigma < a$. Így a kérdéses valószínűség:

$$p = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = 1.$$

107. Ismeretes, hogy exponenciális eloszlás esetén
$M(\xi) = D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$.
Így $m+k\sigma = \frac{1}{\lambda} + \frac{k}{\lambda} = \frac{1+k}{\lambda}$,
és $m-k\sigma = \frac{1-k}{\lambda} = \begin{cases} >0, & \text{ha } k<1 \\ \leqq 0, & \text{ha } k\geqq 1. \end{cases}$

A meghatározandó valószínűség értéke tehát

$$\int_{\frac{1-k}{\lambda}}^{\frac{1+k}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{\frac{1-k}{\lambda}}^{\frac{1+k}{\lambda}} = -e^{-1-k}+e^{-1+k} = \frac{e^k}{e} - \frac{1}{ee^k}, \text{ ha } k<1,$$

$$\int_{0}^{\frac{1+k}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\frac{1+k}{\lambda}} = 1 - \frac{1}{ee^k}, \text{ ha } k\geqq 1.$$

<u>Megjegyzés:</u> Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha a $P(m-k\sigma<\xi<m+k\sigma)=F(m+k\sigma)-F(m-k\sigma)$ összefüggésből indulunk ki!

108. Az átlagérték 1,55 .
A számított ill. a táblázatból kiolvasható értékeket az alábbi táblázat foglalja össze:

Az aranyszemcsék			Az $\frac{1{,}55^k}{k!}e^{-1{,}55}$ eloszlás tagjai
száma	gyakorisága	relatív gyakorisága	
0	112	$\frac{112}{518}\approx 0{,}216$	0,213
1	168	$\frac{168}{518}\approx 0{,}324$	0,328
2	130	$\frac{130}{518}\approx 0{,}251$	0,254
3	69	$\frac{69}{518}\approx 0{,}133$	0,132
4	32	$\frac{32}{518}\approx 0{,}062$	0,051
5	5	$\frac{5}{518}\approx 0{,}010$	0,016
6	1	$\frac{1}{518}\approx 0{,}002$	0,004
7	1	$\frac{1}{518}\approx 0{,}002$	0,001

109. $\approx 0{,}78$.

Legyen az A esemény a "mindhárom csomag súlya legalább 1 g-mal eltér 100 g-tól" esemény. (Ennek az eseménynek az ellentetje ugyanis a kérdéses.)

Először egy csomag esetére vizsgáljuk a szóban forgó esemény bekövetkezési valószínűségét.

$P(|\xi-100|>1) = 1-P(|\xi-100|<1) = 1-P(99<\xi<101) =$

$$= 2\left(1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 0{,}6170 \ .$$

Ezzel
$P(A) = 0,6170^3$ a függetlenség miatt.
A kérdezett valószínűség pedig
$P(\bar{A}) = 1-0,6170^3$.

110. a) $P(A) \geqq 0,84$; b) 1. 98,76%,

$$\text{b) 2. } \sum_{k=16}^{24} \binom{25}{k} \cdot 0,8^k \cdot 0,2^{25-k} \approx 95,4\%.$$

c) Nem lehet.

<u>a-hoz:</u> A feladat szerint $|\xi - M(\xi)| < 5$;

ez az eltérés a $\sigma = 2$ szórás 2,5-szerese.
A $|\xi - M(\xi)| < 5$ esemény ellentettjére a Csebisev-egyenlőtlenség értelmében

$$P(|\xi - M(\xi)| \geqq 5) \leqq \frac{1}{2,5^2}.$$

Ezért

$$P(|\xi - M(\xi) < 5) \geqq 1 - \frac{1}{2,5^2} = 0,84.$$

<u>b/2-höz:</u> A feladat értelmében: $\left.\begin{matrix} np = 20 \\ npq = 4 \end{matrix}\right\}$

Az egyenletrendszerből: $q = \frac{1}{5}$; $p = \frac{4}{5}$; $n = 25$.

<u>c-hez:</u> Exponenciális eloszlás esetén

$M(\xi) = D(\xi)$, s ennek adataink ellentmondanak.

<u>Megjegyzés:</u> A b/2 valószinüség számszerü értéke normális eloszlással való közelités eredményeként adódott. (Lásd a 23.4 Centrális határeloszlástételt.)

111. <u>Legalább 96%</u> a valószinüsége annak, hogy a csavarok száma 4900 és 5100 között van.

112. 0,975.

<u>Megoldás:</u>

A feladat a nagy számok Bernoulli törvénye alapján oldható meg. (22.3 Tétel.)

Adataink: $n=10^5$, $\varepsilon = 10^{-2}$; p -t nem ismerjük, s ezért δ-ra felső becslést adunk. (Lásd a 22.1 Példát.)

$$\delta = \frac{pq}{n.\ \varepsilon^2} = \frac{1}{4\ n\ \varepsilon^2} = 0,025.$$

Igy $1 - \delta \geqq 0,975.$

Vagyis az $\left| \frac{k}{10^5} - p \right| < 0,01$ esemény bekövetkezési valószinüsége legalább 97,5%.

113. a) 7000 ; b) legalább 0,983.

<u>b-hez:</u> 7000 csavar 5%-a 350.

Az $|k - 7000| < 350$ esemény

ekvivalens az $\left| \frac{k}{10^4} - 0,7 \right| < 0,035$ eseménnyel.

A $p=0,7$; $n=10^4$; $\varepsilon = 0,035$ értékekből δ, s igy az $1 - \delta$ valószinüség (alsó becslés) közvetlen számitással adódik.

114. Legalább 95% valószinüséggel 13-nál kevesebb lesz a szálszakadások száma a szóban forgó időtartam alatt.

115. A találatok száma 90% valószinüséggel 58 és 102 közé fog esni.

(Ennél pontosabb becslés is adható a centrális határeloszlástétel alapján.)

<u>Első megoldás:</u> A nagy számok Bernoulli-féle törvénye alapján. ε -t ugy kell meghatározni, hogy az

$$\left| \frac{k}{200} - 0,4 \right| < \varepsilon$$

esemény legalább 0,9 valószinüséggel következzen be.

$\varepsilon^2 = \frac{pq}{n.\delta}$ -ból $\varepsilon = 0,11$ adódik.

Igy $$0,29 < \frac{k}{200} < 0,51.$$

Második megoldás: A Moivre-Laplace formula felhasználásával.
A találatok várható száma: $np = 80$.

A szórás: $\sqrt{npq} = \sqrt{48} = 4.\sqrt{3}$.
A találatok számának a várható értéktől való eltérése legyen
$\lambda \, . \sqrt{npq}$.
Igy

$$\sum \binom{200}{k} 0,4^{k}\ 0,6^{200-k} \approx 2.\ \phi(\lambda) - 1 = 0,9.$$

$$80- \lambda\, 4.\ \sqrt{3} \leqq k \leqq 80 + \lambda\, 4.\ \sqrt{3}$$

Innen $\phi(\lambda) = 0,95$; $\lambda = 1,645$.

Tehát

$$80 - 1,645.4.\ \sqrt{3} \leqq k \leqq 80 + 1,645.4.\ \sqrt{3}, \quad \text{vagyis}$$

$$68 < k < 92.$$

200. $\bar{x} = 10,03$;

$\sigma = 0,08775$;

$s = 0,09250$.

201. Legyenek az osztályok például [13;14), [14;15), . . . , [25;26)
Ekkor

$\bar{x} = 18,7$;
$\sigma = 2,4980$;
$s = 2,5495$.

202. A mintaátlag és a minta korrigált szórásnégyzete mindig torzítatlan, az empirikus szórásnégyzet csak aszimptotikusan torzítatlan statisztika.
A mintaátlag erősen konzisztens becslés is. A 201. feladatban megadott minta feltehetően normális eloszlásból származik. Ezért ennek a mintának az átlaga az alapsokaság várható értékének hatásos becslése.
Mi a tartalmuk ezeknek a megállapitásoknak?
(Lásd az elméleti jegyzet 27. pontját!)

210. a) $\frac{\bar{x}}{n}$; b) $\bar{x}$; c) $\frac{1}{\bar{x}}$; d) $\frac{1}{\bar{x}}$.

a-hoz: A likelihood-függvény:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_r,p) = \prod_{i=1}^{r} \binom{n}{x_i} p^{x_i} \cdot q^{n-x_i} ;$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^{r} \left[\ln \binom{n}{x_i} + x_i . \ln p + (n-x_i) . \ln (1-p) \right] ;$$

$$\frac{d(\ln L)}{dp} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{x_i}{p} - \frac{n-x_i}{1-p} \right) = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{p} - \frac{nr-\sum_{i=1}^{r} x_i}{1-p} .$$

A szükséges feltétel:

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{p} = \frac{nr-\sum_{i=1}^{r} x_i}{1-p} , \quad \text{ahonnan} \quad \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i}{n.r} = \frac{\bar{x}}{n} .$$

Az elégséges feltétel:

$$\frac{d^2(\ln L)}{dp^2} = \sum_{i=1}^{r} \left(-\frac{x_i}{p^2} - \frac{n-x_i}{(1-p)^2} \right)$$

$$\left. \frac{d^2(\ln L)}{dp^2} \right|_{p=\hat{p}} = -\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{x_i n^2}{x^2} + \frac{n-x_i}{(1-\frac{x}{n})^2} \right) < 0,$$

hiszen x_i $(i=1,2,\ldots,r)$ csak $0,1,2,\ldots,n$ valamelyike lehet.

b-hez:

$$L(x_1,x_2,\ldots,x_r,\lambda) = \prod_{i=1}^{r} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{r} x_i}}{\prod_{i=1}^{r} x_i\,!} e^{-r\lambda} .$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} x_i!}\left[\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) . \ \lambda^{\sum_{i=1}^{r} x_i - 1} . \ e^{-r\lambda} - r\lambda^{\sum_{i=1}^{r} x_i} . \ e^{-r\lambda}\right] =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} x_i!} . \ \lambda^{\sum_{i=1}^{r} x_i - 1} . \ e^{-r\lambda} (r\bar{x} - r\lambda).$$

A szükséges feltételből adódó $\lambda = \bar{x}$ mellett az elégséges feltétel is teljesül.

c-hez:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_r, p) = \prod_{i=1}^{r} (1-p)^{x_i - 1} . \ p$$

d-hez:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_r, \lambda) = \prod_{i=1}^{r} \lambda . \ e^{-\lambda x_i}$$

211. $\hat{p} = 1 - \sqrt[r]{\frac{k}{n}}$.

A müszer mindaddig müködik, mig legalább egy komponense funkcionál. Tehát csak akkor romlik el, ha minden egyes komponense tönkremegy. Ezen esemény bekövetkezésének valószinüsége: $z = (1-p)^r$, az egyes komponensek meghibásodásának egymástól való függetlensége miatt.

Az "n" munkaperiódus alatti müszer-meghibásodások száma a feladat értelmében k.
A szóban forgó esemény bekövetkezési valószinüsége tehát

$$z^k (1-z)^{n-k}$$

(z paraméterü karakterisztikus valószinüségi változóhoz tartozó likelihood-függvény.)
Feladatunk ezen valószinüség (mint z függvénye) maximumának meghatározása.

$$f(z) = z^{k}.(1 - z)^{n-k}$$

$$f'(z) = \left[k.z^{k-1}(1-z)^{n-k} + z^{k}(n-k)(1-z)^{n-k-1}.(-1)\right] =$$

$$= z^{k-1}\,(1-z)^{n-k-1}.\left[k\,(1-z) - z(n-k)\right],$$

s ez zérus, ha $z = \frac{k}{n}$.

Igy $z = (1 - p)^{r}$ -ből p maximum-likelihood becslése:

$$\hat{p} = 1 - \sqrt[r]{z} = 1 - \sqrt[r]{\frac{k}{n}}.$$

212. $\hat{p} = \sqrt[r]{1 - \frac{k}{n}}$.

213. a) $[3,08 \;;\; 3,42]$;

b) 35.

a-hoz: Az empirikus várható érték (mintaátlag) olyan valószinüségi változó, amelynek várható értéke az elméleti várható érték: m;

szórása pedig az elméleti szórás $\sqrt{n}$ -ed része;

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. (lásd a 27.2 és a 27.3 tételeket). Igy standardizáltja:

$\frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ a 23.3 "Centrális határeloszlástétel" értelmében

aszimptotikusan N(0,1) eloszlású valószinüségi változó.
A feladatban közölt adatokat felhasználva, tehát a

$$P\left(\left|\frac{\bar{\xi} - 3,25}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < x\right) \approx \underline{2\,\phi\,(x) - 1 = 0,95}$$

összefüggés aláhuzott egyenlőségéből először x-et határozzuk meg, majd x ismeretében az $|\bar{\xi} - m|$ konfidencia-sugarat.
A III. táblázatból: x = 1,96.

Igy $$|\bar{\xi} - m| < 1,96\,\frac{0,3}{2\sqrt{3}} \approx 0,17.$$

Tehát a várható értéknek a megadott mintából számitott 95%-os megbizhatósági intervalluma:

$$(3,08\ ;\ 3,42).$$

b-hez: Adott valószinüségi szinten a konfidencia-sugár akkor csökkenthető, ha több információ áll rendelkezésünkre.

$$1,96\,\frac{0,3}{\sqrt{n}} \leqq 0,1 \quad \text{teljesül, ha} \quad n \geqq 35.$$

Tehát legalább 35 mérést kell végezni ahhoz, hogy 95%-os megbizhatósági szinten 0,1 kp sugaru konfidencia-tartományt adhassunk meg.

214. a) [3, 06; 3,44) ;

b) 44.

a-hoz: Mivel az alapsokaság szórását is a mintából kellett megbecsülni, a bizonytalanság megnő. Változatlan megbizhatósági szinthez - érthetően - szélesebb konfidencia-intervallumot tudunk csak megadni.

A $\dfrac{\bar{\xi} - m}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ statisztika most (n-1) szabadságfoku Student-eloszlást követ.

Eredményünk a

$$P\left(\left|\frac{\bar{\xi} - 3,25}{\dfrac{0,30}{2.\sqrt{3}}}\right| < t\right) \approx \underline{S_{11}(t) = 0,05}$$

összefüggés-láncból adódik, az előző feladatnál alkalmazott gondolatmenet analógiájára, az V. táblázat adatainak felhasználásával.

b-hez: 12-nél nyilván több mérésre van szükség. A 11 szabadságfokhoz tartozó t=2,201 értékkel dolgozva, a szükséges mérések számát biztosan majoráljuk. (Lásd a táblázatot!)

$$2,201\ .\ \frac{0,3}{\sqrt{n}} \leqq 0,1 \quad \text{összefüggésből} \quad n \geqq 44 \ \text{adódik.}$$

Megjegyzés. Ha az előző feladat eredményét ($n \geqq 35$) felhasználjuk, a becslés finomitható: $n \geqq 37$.

215. $\bar{x} = 3,080.$

A konfidencia-intervallum 95%-os szinten:

a) $[3,049 \ ; \ 3,111]$; b) $[3,006 \ ; \ 3,154]$;

99%-os szinten pedig:

a) $[3,039 \ ; \ 3,121]$; b) $[2,974 \ ; \ 3,186]$.

216. 3,021.

Az 5% egyoldali maradék - valószinüség 10% kétoldali valószinüségnek felel meg. A kritikus "t" érték tehát az V. táblázatból $p = 0,10$, $n = 9$ értékhez tartozik: 1,833. A korrigált empirikus szórás:

$$s_{10} = \sqrt{\frac{0,0942}{9}} \approx 0,1023.$$

220. Mindkét esetben: 0,1587.

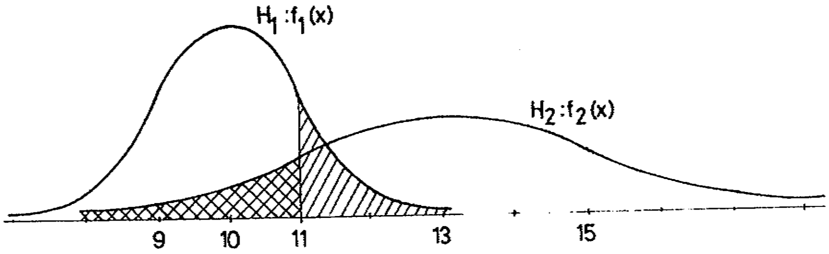
a-hoz: Hibásan döntünk valahányszor $x > 11$. Ennek valószinüsége (ha H_1 igaz):

$$P(\xi > 11) = 1 - P(\xi \leqq 11) =$$

$$= 1 - P(\xi < 11) = 1 - F(11) = 1 - \phi\left(\frac{11-10}{1}\right).$$

Tehát a hibás döntés valószinüsége:

$$1 - \phi(1) = 0,1587.$$



▨ az f_1 (x) görbe alatti egységnyi terület 15,87%-a

▩ az f_2 (x) görbe alatti egységnyi terület 15,87%-a

220. ábra

b-hez: Most a H_2 teljesülése esetén kell az $x \leqq 11$ esemény bekövetkezési valószinüségét meghatározni:

$$P(\xi < 11) = F(11) = \Phi\left(\frac{11-13}{2}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1).$$

Tehát a hibás döntés valószinüsége ugyanaz, mint az a) esetben.

221. $2,327 < d < 3$; $\quad n \geqq \left(\frac{1,645}{3 - d}\right)^2$.

Az elsőfaju hibát akkor követjük el, amikor a helyes H_0 hipotézist elvetjük:

$$P(\xi \geqq d) = 1 - \Phi(d).$$

A másodfaju hiba a helytelen alaphipotézis megtartását jelenti, bár a H_1 alternativ hipotézis a helyes. Ennek valószinüsége:

$$P(\xi < d) = F(d) = \Phi\left[(d-3) \cdot \sqrt{n}\right].$$

A továbbiakban az

$$\left.\begin{aligned} 1 - \Phi(d) &\leqq 0,01 \\ \Phi\left[(d-3) . \sqrt{n}\right] &\leqq 0,05 \end{aligned}\right\} \text{egyenlőtlenségrendszert}$$

kell megoldani.

222. a) igen. b) igen.

a-hoz: u-próbát alkalmazunk.
Az adatokból: $\bar{\xi} = 2,002$; $m_o = 2$; $\sigma = 0,04$.

Igy az $u = \dfrac{\bar{\xi} - m_o}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ statisztikánk helyettesitési értéke:

$$\frac{0,002}{\frac{0,04}{\sqrt{10}}} = 0,158.$$

A $2. \Phi(u_{90}) - 1 = 0,9$ összefüggésből a 90%-os szinthez tartozó kritikus $u_{90} = 1,645$.

Mivel statisztikánk helyettesitési értéke 0,158, az 1,645 sugaru elfogadási tartományon belül van, hipotézisünk 90%-os szinten elfogadható.

b-hez: Mivel a szórás nem ismert és a mintaelemszám kicsi, a korrigált empirikus szórással felirt statisztikai függvényünk kilenc szabadságfoku Student - eloszlást követ:

$$t = \frac{\bar{\xi} - m_0}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}} .$$

Az s_{10} korrigált empirikus szórásra 0,0349 adódik. Igy t-statisztikánk helyettesitési értéke 0,181; mig a kritikus t-érték 1,833.

Mivel $0{,}181 < 1{,}833$ teljesül, null-hipotézisünket elfogadjuk.

223. Az eltérés még az igen magas 99,9%-os szinten is szignifikáns, ezért a gépet ismét be kell állitani.

224. Az eltérés ezen a szinten nem szignifikáns. t-statisztikánk helyettesitési értéke 2,626. Ez kisebb mint a kilenc szabadságfokhoz tartozó kritikus "t" érték: 3,250.
(Az eredmény mégsem megnyugtató, mert kicsi elemszámu mintából adódik, és a szignifikancia-szint igen magas.)

225. Igen.
Tulajdonképpen azt akarjul eldönteni, hogy két minta származhat-e azonos szórásu normális eloszlásu alapsokaságból. Teljesül-e 95%-os szinten a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vagy ami ugyanaz, a

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \text{ null-hipotézis?}$$

A két szórásnégyzet hányadosára - mindig a nagyobb érték áll a számlálóban (!) -

$$F = \frac{1{,}9349}{1{,}6104} = 1{,}2015 \text{ adódik.}$$

Ezt az értéket hasonlitjuk össze a VI. Táblázatból kiolvasható, $f_1 = f_2 = 99$ szabadságfokhoz és a 95%-os szinthez tartozó 1,39 kritikus értékkel.

Mivel $F_{kritikus} > 1,2015$, a szórások megegyezésére vonatkozó null-hipotézist ezen a szinten elfogadjuk.

226. A két tétel nem azonos tulajdonságu.

$$u = \frac{10}{18\sqrt{\frac{1}{70} + \frac{1}{100}}} = 3,56.$$

Ez az érték nagyobb mint az előírt 99%-os szinthez tartozó $u_{0,99} = 2,58$ érték.

227. A várható értékek megegyezésére tett hipotézisünket el kell vetni.

$$u = \frac{5,42 - 5,39}{\sqrt{\frac{0,025^2}{30} + \frac{0,014^2}{35}}} = 5,74\ .$$

Ez az érték olyan nagy, hogy nem is található meg a táblázatban. Gyakorlatilag tehát nulla a valószinüsége annak, hogy ilyen nagy legyen az u, ha a két gépen azonos a sokaság várható értéke

228. Az eltérés nem szignifikáns.
A kétmintás t-próba alkalmazása előtt ellenőrizni kell, hogy a szórások között nincs-e szignifikáns eltérés. Mivel F-re 1,08-at kapunk, s ez 95%-os szinten nem szignifikáns, a t-próba elvégezhető.

$n_1 = 16$; $n_2 = 15$; $\overline{x} = 61,219$; $\overline{y} = 61,179$; $s_1 = 0,456$; $s_2 = 0,439$.

t-statisztikánk helyettesitési értéke 0,25, s ez lényegesen kisebb. mint a 95%-os szinthez és $16 + 15 - 2 = 29$ szabadságfokhoz tartozó kritikus érték: 2,045.

229. Igen, jelentős.
A számítási részeredmények: $\overline{x}_1 = 1865$; $\overline{x}_2 = 1495$, $s_1^2 \approx 174\,128$; $s_2^2 \approx 102\,538$.

$$\frac{|\overline{x}_1 - \overline{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = 3,27\ .$$

A nagy mintaelemszám miatt u-statisztikával dolgozhatunk.

$$u_{krit.} = 2{,}33.$$

(A t táblázatból interpolálással kiolvasható - 40+40-2=78 szabadságfokú - megfelelő kritikus t érték 2,34 lenne.)

230. Igen, a hibaszámok kompresszorok közötti eltérésének nincs jelentősége.

Az egyenletes elosztást feltételező statisztikai függvényünk helyettesítési értéke:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = 3{,}88 \ . \quad p_i = \frac{1}{4}; \ i = 1,2,3,4.$$

A hármas szabadságfokhoz és a 95%-os szinthez (a táblázatban p=0,05 értékhez) tartozó kritikus érték 7,815.

A null-hipotézisnek a tapasztalat nem mond ellent, hiszen a 3,88-as χ^2 érték az elfogadási tartományba esik.

231. Igen.
A számitott χ^2 érték 10,09, és ez lényegesen kisebb a 11 szabadságfokhoz és a megadott szinthez tartozó 19,675 kritikus értéknél.

232. Nem.
A szignifikancia próba elvégzéséhez célszerü táblázatot késziteni:

Az osztályok száma: 7.

$$\bar{x} \approx 34{,}5 + \frac{10}{240} \cdot (-1) \approx 34{,}46.$$

$$s_n^2 \approx \frac{100}{239}\left(473 - \frac{1}{240}\right), \quad s_n \approx 14{,}07.$$

Feladatunk tehát, hogy 95%-os szignifikancia szinten döntsük el: származhat-e a minta N(34,46; 14,07) normális eloszlásból.

A próbát 7 - 1 - 2 = 4 szabadságfoku aszimptotikusan χ^2 eloszlást követő statisztikára alapozzuk. (Az osztályok számát a mintából becsült két paraméter számával is csökkentettük a szabadságfok megállapitásakor!) A próba megbizhatóságához szükséges $np_i \geqq 10$ feltétel lényegében teljesül.

Sor-szám	Osztá-lyok	Osztály-közepek (x_i)	Minta-beli gyak. (ν_i)	$z_i = \frac{x_i-34,5}{10}$	$\nu_i \cdot z_i$	$\nu_i z_i^2$	p_i	Várt gyakori-ságok $(240.p_i)$	$\frac{(\nu_i-240p_i)^2}{240\ p_i}$
1.	[0,10)	4,5	11	-3	-33	99	0, 0409	9,82	0,14
2.	[10,20)	14,5	22	-2	-44	88	0,1106	26,54	0,78
3.	[20,30)	24,5	46	-1	-46	46	0,2241	53,78	1,13
4.	[30,40)	34,5	85	0	0	0	0,2787	66,89	4,90
5.	[40,50)	44,5	43	1	43	43	0,2110	50,64	1,15
6.	[50,60)	54,5	20	2	40	80	0,1000	24,00	0,67
7.	[60,70)	64,5	13	3	39	117	0,0347	8,33	2,62
Összesen:			240		-1	473	1,0000		11,59

A p_i valószinüségeket a III. táblázat adatainak felhasználásával számitjuk ki. Például

$$p_1 = P(\xi < 10) = F(10) = \Phi\left(\frac{10-34,46}{14,07}\right) = \Phi(-1,74) =$$

$$= 1 - \Phi(1,74) = 1 - 0,9591 = 0,0409.$$

$$p_2 = P(10 \leqq \xi < 20) = F(20)-F(10) = \Phi(-1,03) - \Phi(-1,74) =$$

$$= \Phi(1,74) - \Phi(1,03) = 0,9591 - 0,8485 = 0,1106.$$

χ^2 statisztikánk mintából számitott helyettesitési értéke (táblázatunk utolsó oszlopának összege): 11,59.
Ez az érték nagyobb mint a kritikus 9,488 érték. Ezen a szinten tehát szignifikáns az eltérés a H_0 hipotézishez képest: nem tekinthető normális eloszlásu valószinüségi változónak a parkolóhelyeken előforduló gépkocsik száma. (Bár "ránézésre" az eloszlás szimmetrikus: könnyen normálisnak tünhet.)

233. A hipotézis 95%-os szinten elfogadható.

Megoldás:

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = 1,005.$$

A
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

statisztikánk helyettesitési értéke:

$$\frac{1}{400}\left[\frac{(141-400.0,3661)^2}{0,3661} + \frac{(150-400.0,3678)^2}{0,3678} + \frac{(83-400.0,1848)^2}{0,1848} + \right.$$

$$\left. + \frac{(18-400\cdot 0,062)^2}{0,062} + \frac{(8-400.0,0155)^2}{0,0155} + \frac{(0-400.0,0038)^2}{0,0038}\right] = 5,28.$$

(A p_i valószinüségeket $\lambda = 1,005$ miatt interpolációval kaptuk a II. táblázatból.)

Ezt a helyettesitési értéket kell összehasonlitani az $f = 4$ szabadságfoku kritikus χ^2 értékkel.

A szabadságfok a csoportok számánál 2-vel kisebb, hiszen az eloszlás paraméterét is a mintából becsültük.

(Lásd az elméleti jegyzet 204. oldalán lévő 2. megjegyzést.) Mivel 5,28 lényegesen kisebb a IV. táblázatból kiolvasható 9,488 kritikus értéknél, azért elfogadhatjuk azt a feltételezést, hogy az egy főre jutó üzemi balesetek száma Poisson-eloszlást mutat.

234. A null-hipotézis (a magas) 99%-os szignifikancia-szinten elfogadható.

A mintából számitott

$$\chi^2 = \frac{1}{mn} \cdot \sum_{i=1}^{r} \frac{(n.\mu_i - m.\nu_i)^2}{\mu_i + \nu_i} = 8,03,$$

míg az f = 2 szabadságfoku, 99%-os szinthez tartozó kritikus χ^2 érték: 9,21.

235. Nem függetlenek.

Az adatokból számitott χ^2 statisztikára 37,03 adódik, mig a 12 szabadságfok mellett $\chi^2_{0,999} = 32,9$. Ez azt jelenti, hogy e nagy biztonságot szolgáltató szinten sem egyeztethető össze a kapott χ^2 érték a számára - függetlenség esetén - fennálló eloszlással.

236. A próba a függetlenségre tett hipotézisnek ellentmond: van kapcsolat a termékek típusa és azok minősége között:

A kontingencia - táblázat:

	A	B	C	Σ
I.	50	6	10	66
II.	13	1	10	24
Σ	63	7	20	90

χ^2 statisztikánk helyettesítési értéke körülbelül 7,3. A táblázatból kiolvasható, 90%-os szinthez tartozó, kettő szabdságfokú kritikus χ^2 érték viszont csak 4,6.

237-238. A 237. számú feladat kérdésére adandó válasz szignifikancia próbával dönthető el. Mivel a szórás ismert, u-próbát végezhetünk.

$$\text{A } P(|u|<|u_\varepsilon|) = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1$$

összefüggésnek megfelelően 90%-os megbízhatósági szint esetén a $2\phi(u_\varepsilon)-1=0,9$ relációból a táblázat alapján $u_{0,9} = 1,645$.

95%-os szint mellett természetesen nagyobb kritikus u értéket kapunk: $u_{0,95}=1,96$.

A mintaátlag: $\overline{x} = 23,825$ mm. Ezzel statisztikai függvényünk helyettesítési értéke abszolút értékben

$$\left|\frac{23,825-24,000}{\frac{0,200}{2}}\right| = 1,75 .$$

Ez az érték a kritikus 1,645-nél nagyobb; tehát szignifikáns az eltérés a tapasztalat és a főmérnök emlékezete között ezen a 90%-os szinten.

95%-os szinten viszont elfogadható az átmérő méretére vonatkozó 24 mm-es hipotézis, mert 1,75 kisebb a kritikus 1,96 értéknél.

A gyakorlatban ezért mindig előre kell megadni azt a szintet, amelyen - a feladat természetétől függően - dönteni kívánunk hipotézisünk elfogadásáról illetőleg annak elutasításáról.

A párhuzamos 238. számú feladat konfidencia intervallum meghatározását írja elő. Az előző megoldás részeredményeit felhasználva, az

$$\frac{|23,825-m|}{0,1} < u_\varepsilon$$

összefüggés alapján első esetben (90%-os megbízhatóság esetén), az

$|23,825-m| < 0,1645$ relációhoz jutunk. A megbízhatósági intervallum tehát ez esetben

$23,661 < m < 23,989$.

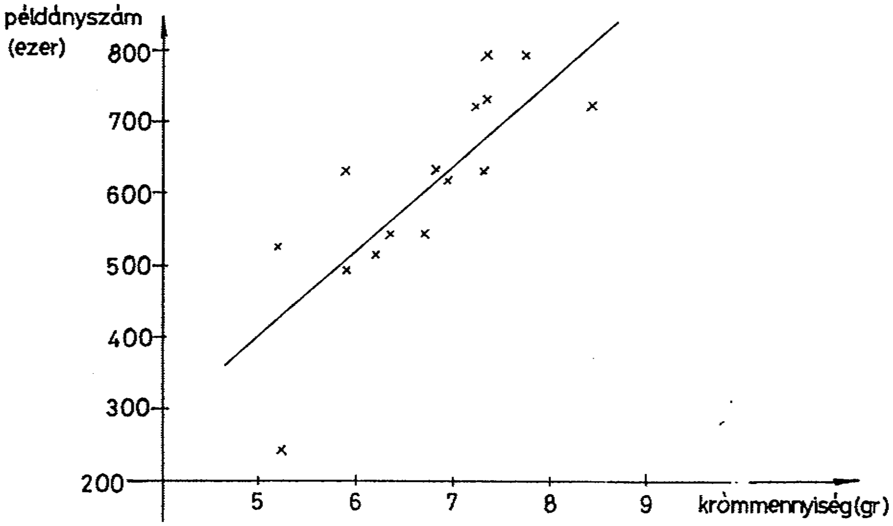
95%-os megbízhatóság mellett viszont a

$23,629 < m < 24,021$

intervallumhoz jutunk, amely természetesen szélesebb az előbbinél.

A két feladat párhuzamos megoldása során jól érzékelhető, hogy a null-hipotézist pontosan akkor (azon a szinten) tartjuk meg, amikor a megfelelő konfidencia-intervallum lefedi a feltételezett 24 mm-es értéket. (Lásd még az elméleti jegyzet 196. oldalán lévő 2. számú megjegyzést.)

240. a) A pontok elhelyezkedése elég határozott tendenciát mutat. L. 240. ábra.



240. ábra

b) 0, 867;

c) 0, 822;

d) $y = 120,52\ x - 201,64$;

e) 235, 29.

<u>b-hez:</u> $n = 15$, $u = 14$, $v = 1$.

Tehát $\varrho = \frac{13}{15} = 0,867$.

<u>c-hez:</u> $\bar{x} = 6,719$; $\bar{y} = 608,13$ $\sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 62741,44$;

$$\sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 689,21; \qquad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 5806438.$$

$$\hat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right)}} = \frac{1451,06}{\sqrt{12,04.259107}} = 0,822.$$

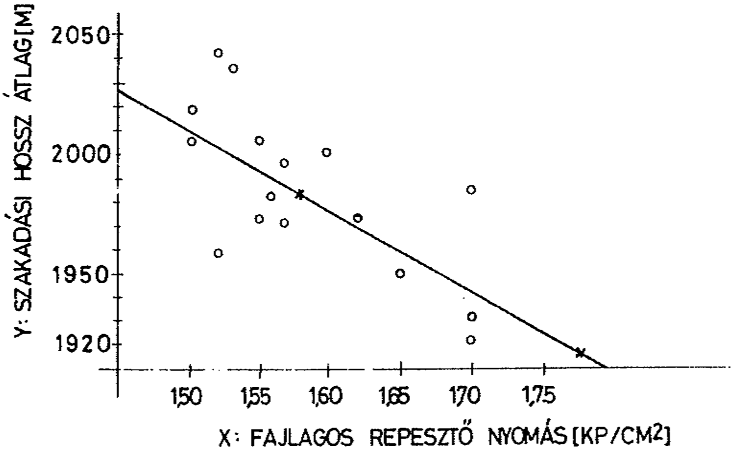
<u>d-hez:</u> $y = b\,x + a\,;$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2} = \frac{1451,06}{12,04} = 120,52\ ;$$

$$a = \bar{y} - b\,\bar{x} = 608,13 - 120,52\ .\ 6,719 = -\ 201,64.$$

<u>e-hez:</u> $S_y^2 = 5595,9\ ;\quad S_y = 74,81.$

<u>f-hez:</u> $|\hat{r}| = 0,822.$



241. ábra

$\hat{r} = -\ 0,705$ (a feltételezett lineáris kapcsolat elég megbízható).

$y = -\ 340\ (x - 1,58) + 1984$

A repesztőnyomás növelésekor - a szóban forgó papirszállitmánynál - a szakadási hossz <u>csökkenése</u> tapasztalható.
A regressziós becslés szórására 23,4 m adódik.
Ez azt jelenti, hogy <u>átlagosan</u> ekkora eltérés várható a szakadási hosszra (abszolut értékben), a regressziós egyenes y koordinátájától.

242. a) $y = 0,95\,x + 11,7$;

b) 0,66;

c) $y = 0,164x^2 - 1,0175x + 15,76$;

d) 0,737.

a-hoz:

$$b = \frac{1240 - 11.6.17,20}{506 - 11.6^2} = \frac{104,8}{110} = 0,95.$$

$$a = 17,20 - 0,95.6 = 11,68\ .$$

b-hez:

$$\hat{r} = \frac{104,8}{\sqrt{110.232,46}} = 0,66$$ (laza kapcsolat)

c-hez:

Az $$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

összeg minimalizálásához az

$$a\ .\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\ .\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\ .\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . y_i$$

$$a\ .\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\ .\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\ .\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i$$

$$a\ .\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\ .\sum_{i=1}^{n} x_i + c.n = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

egyenletrendszert kell az a, b, c értékekre megoldani.

d-hez: $$\sqrt{1 - \frac{106,17}{232,46}} = 0,737\ .$$

Az illeszkedés mértékét meghatározó mérőszám azt mutatja, hogy a parabolikus kapcsolatra tett feltevés indokolt volt.

243. $y = 0,56\ x^2 - 0,63\ x + 11,25.$

Megoldás:

Δi [A]	1	2	3	5	7	10
ΔT [C°]	11	12	15	22	34	61

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 28\ ; \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 188\ ; \quad \sum_{i=1}^{6} x_i^3 = 1504\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^4 = 13124\ ; \quad \sum_{i=1}^{6} y_i = 155\ ; \quad \sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1038\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 y_i = 8510.$$

A megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{array}{r}
13\ 124\ a + 1504\ b + 188\ c = 8510 \\
1\ 504\ a + 188\ b + 28\ c = 1038 \\
188\ a + 28\ b + 6\ c = 155 \\
\hline
\end{array}$$

$a = 0,56\ ; \quad b = -\ 0,63\ ; \quad c = 11,25.$

XIV. Tájékoztató

1988-ban a vizsga írásbeli és szóbeli részből állt. Az írásbeli maga is kétrészes volt. Mind valószínűségelméletből, mind statisztikából három kérdésre kellett válaszolni. A három kérdés közül kettő feladat-megoldásra irányult, egy kérdés pedig ún. elméleti kérdés volt. Az írásbeli mindkét részére 30-40 perces kidolgozási időt szántunk, köztük rövid szünetet tartottunk.

A Tanszék az írásbeli dolgozat alapján a vizsgázónak jó-közepes-elégséges vizsgajegyet ajánlott meg. Igen gyenge írásbeli esetén szóbeli vizsgára nem került sor. A megajánlottnál jobb osztályzatért a halgató kívánsága szerint szóbelizhetett. Jeles minősítésért feltétlenül szóbeli vizsgát kellett tenni.

Tájékoztatásul közöljük az utolsó két szemeszter néhány vizsgadolgozatát (megoldásokkal együtt). A feladatok súlyozását is feltüntettük.

1988. január 14.

"V"

1. $f(x)=C.e^{-2|x|}$, $C>0$

a) Határozza meg a "C" paraméter értékét úgy, hogy f(x) sűrűségfüggvény legyen!
b) Mennyi a valószínűsége a $\xi < -M(\xi)$ eseménynek?

(40%)

2. Egy vasfajta megrozsdásodásának az idejére azt a megfigyelési eredményt jegyezték fel, hogy az normális eloszlású 2,5 év átlagidővel és 3 hónap szórással. Mennyi a valószínűsége, hogy egy ilyen vasból készült tárgy a második évben megrozsdásodik?

(30%)

3. Ismertesse és igazolja a teljes valószínűség tételét!

(30%)

"St"

1. Két, egységnyi szórású normális eloszlásból származó független minta adatai:

I. minta: -1; 0; 1; 2; 3.
II. minta: -1; 0; 1.

Ellenőrizze a H_o: $m_1=m_2$ hipotézist 96%-os szinten!

(40%)

2. Normális eloszlású alapsokaságból származó statisztikai minta adatai:

1,90; 2,20; 1,95; 2,10; 2,00;
1,80; 2,05; 2,10; 1,90.

Határozza meg az alapeloszlás várható értékének a mintából számított 99%-os konfidencia-intervallumát!

(35%)

3. Definiálja a előjel-korrelációs együtthatót! Mutassa meg, hogy $|\varrho|\leq 1$!

(25%)

<u>Megoldások</u>
1988. január 14.

V/1. a) A sűrűségfüggvény felírása az elemi függvényjelekkel:

$$f(x)=\begin{cases} C\cdot e^{-2x}, & \text{ha } x\geq 0 \\ C\cdot e^{2x}, & \text{ha } x<0 \end{cases}$$

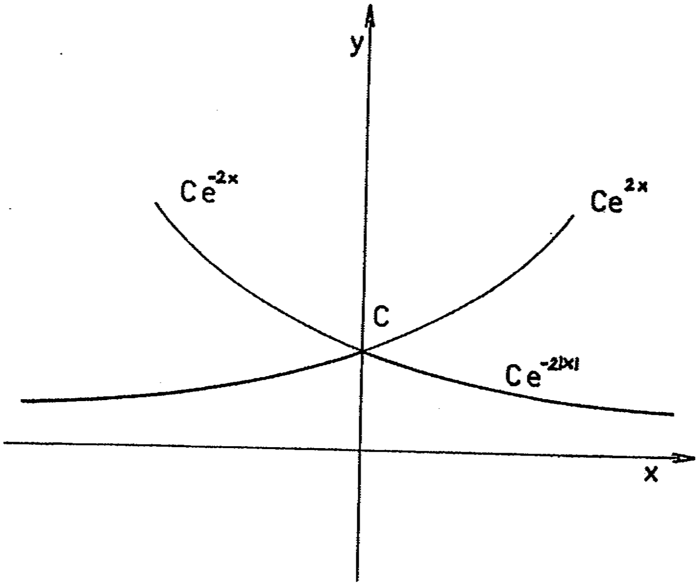
Mivel $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ kell legyen,

azért az

$$\int\limits_{-\infty}^{0} Ce^{2x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} Ce^{-2x}dx = 2\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} Ce^{-2x}dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} 2C\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty} C(1-e^{-2A})$$

összefüggésből $\underline{\underline{C=1}}$.



13. ábra

b) Az ábrából leolvasható, de az

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \text{ definiáló összefüggésből}$$

is kiszámítható, hogy $M(\xi) = 0$.

A $\xi < -M(\xi)$ esemény tehát a $\xi < 0$ eseménnyel ekvivalens.

$$P(\xi < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2} \text{, amint az ábrából köz-}$$

közvetlenül ellenőrizhető. (f(x) páros függvény!)

V/2. A második év az első év végétől a második év végéig terjedő idő-intervallum. A feladat tehát a $P(1<\xi<2)$ valószínűség meghatározása.

$P(1<\xi<2) = F(2) - F(1)$.

Az élettartam várható értéke: m=2,5 év, a szórás pedig $= \frac{1}{4}$ év (3 hónap), azért

$$F(2) - F(1) = \Phi\left(\frac{2-2,5}{0,25}\right) - \Phi\left(\frac{1-2,5}{0,25}\right) = \Phi(-2) - \Phi(-6).$$

A Φ függvény értékei negatív argumokok esetén nincsenek tabellázva, de ismeretes, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, így $\Phi(-2) - \Phi(-6) = 1 - \Phi(2) - [1 - \Phi(6)] = \Phi(6) - \Phi(2)$. $\Phi(6)$ értéke 1-nek vehető. Végeredményben tehát a kérdéses valószínűség

$$P(1<\xi<2) \approx 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228 = 2{,}28\%.$$

Tehát 2,28% a valószínűsége annak, hogy egy ilyen vasból készült tárgy a második évben megrozsdásodik.

V/3. A tétel, bizonyításával együtt az elméleti jegyzet 41-42. oldalán található.

(A tétel pontos ismertetéséért 10%, a bizonyításért 20% teljesítményt számítottunk.)

St/1. A hipotézis helyes voltát kétmintás u-próbával ellenőrizhetjük. Azért végezhetünk u-próbát, mert az alapsokaságok (elméleti) szórása ismert. (Az nem lényeges, hogy jelenleg még meg is egyeznek.)

A helyesen kiválasztott statisztikai függvény helyettesítési értékének meghatározásához a mintaátlagokat kell kiszámítani: $\bar{x}_1 = 1$; $\bar{x}_2 = 0$.

Ezekkel

$$u_{tap} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}}} = \sqrt{\frac{15}{8}} \approx 1{,}37.$$

Ennek a tapasztalati értéknek az <u>abszolút értékét</u> kell összehasonlítani a megadott 96%-os szinthez tartozó kritikus u értékkel. A

$$2 \cdot \Phi(u_{krit}) - 1 = 0{,}96 \text{ összefüggésből}$$

$$u_{krit} = 2{,}06 .$$

Most már dönthetünk!

Az $|u_{tap}| < u_{krit}$ reláció teljesülése azt jelenti, hogy a tapasztalati értékünk az elfogadási tartományba esik: nincs szignifikáns eltérés a tapasztalat és a feltételezett $m_1 = m_2$ érték-megegyezés között.

St/2. Az adatokból először pontbecslést végzünk az elméleti várható értékre. A tapasztalati várható érték (vagyis a mintaátlag): $\bar{x} = 2,00$.

Mint tudjuk, ez torzítatlan, erősen konzisztens becslése az elméleti várható értéknek.

Most következik az intervallum - becslés a

$$t = \frac{\bar{x}-m}{\frac{s_n}{\sqrt{n}}}$$ statisztikai függvény felhasználásával. (hiszen a szórás nem ismert)

A mintánk 9 elemből áll, tehát a szabadságfok 8. A feladat szerint $\varepsilon = 0,01$. A táblázatból $t_\varepsilon = 3,335$. Ez a konfidencia-intervallum határának megállapításához szükséges szélső t-érték. A minta korrigált empirikus szórására

$$s_n = \sqrt{\frac{0,125}{8}} = 0,125 \text{ adódik.}$$

így a

$$\frac{|2,00-m|}{\frac{0,125}{\sqrt{9}}} < t_\varepsilon$$ összefüggésből azt kapjuk, hogy

$$2 - t_\varepsilon \frac{0,125}{3} < m < 2 + t_\varepsilon \frac{0,125}{3} .$$

Vagyis $1,86 < m < 2,14$.

Eredményünket így interpretáljuk:
Az alapsokaság (amelyből statisztikai mintánk származott) olyan normális eloszlású sokaság, amelynek várható értéke 99%-os valószínűséggel nem kisebb 1,86-nál és nem nagyobb 2,14-nél.

St/3. A kérdésre adandó helyes válasz az elméleti jegyzet 213-214. oldalán olvasható.

1988. január 19.

"V"

1. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy négytagú társaság születésnapja négy különböző naptári hónapra esik? (Feltesszük, hogy mindenkinek a születésnapja egyenlő valószínűséggel eshet bármelyik hónapra.)

(30%)

2. Egy (ξ,η) kétdimenziós valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & \text{ha } 0<x<1 \text{ és } 0<y<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki ξ peremeloszlásának sűrűségfüggvényét, eloszlásfüggvényét és ξ várható értékét! (40%)

3. Határozzuk meg az $a<\xi<b$ esemény bekövetkezési valószínűségét az eloszlásfüggvény felhasználásával és igazoljuk is az állítást! (30%)

"St"

1. Legyen ξ olyan diszkrét valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei a k=2,3,4,... pozitív egészszámok, és a hozzájuk tartozó valószínűségek

$$P(\xi=k) = (k-1)p^2q^{k-2}, \text{ ahol } q=1-p.$$

Ebből az eloszlásból származik a (2; 3; 2) háromelemű minta.

Mennyi ezen minta bekövetkezési valószínűsége, ha $p=\frac{1}{2}$, illetőleg $p=\frac{1}{3}$?

Melyik "p" paraméter-érték a valószínűbb az adataink alapján?

(35%)

2. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó, és legyen $H_o:\xi \in N(2,3)$.

Mennyi a kritikus x értéke, ha az elsőfajú hiba valószínűsége 0,0156?
(Az elfogadási tartomány a várható értékre szimmetrikus.) (35%)

3. Mit jelent az, hogy a statisztikai minta szórásnégyzete, σ_n^2 csak aszimptotikusan torzítatlan becslése az elméleti szórásnégyzetnek, σ^2-nek?

Mutassuk meg, hogy a korrigált empirikus szórásnégyzet $-s_n^2-$ már torzítatlan becslése az elméleti szórásnégyzetnek, σ^2-nek! (30%)

Megoldások

1988. január 19.

V/1. Az elemi események véges sokan vannak, s mindegyikük egyenlő valószínűséggel következhet be a feladat értelmében, tehát klasszikus problémáról van szó.

Összes eset: 12 hónap közül választunk ki négyet. Ismétlődés is lehet, sorrend is számít. Tehát 12 elem 4-edosztályú ismétléses variációs csoportjairól van szó. Ezek száma: 12^4.

Kedvezőek azok az esetek, amelyeknél a kiválasztás során nincs ismétlődés. Ilyen csoport $\binom{12}{4}4! = \frac{12!}{8!}$ alkotható.

A keresett valószínűség tehát $\frac{\frac{12!}{8!}}{12^4} = \underline{\underline{\frac{165}{288}}} \approx 0,57.$

V/2. ξ peremsűrűség függvényére ismeretes, hogy

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy,$$

Az együttes sűrűségfüggvény értelmezését figyelembevéve:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)\,dy = \frac{5}{6}x + \frac{2}{5}.$$

$$\text{Tehát } f_1(x) = \begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{2}{5}, & \text{ha } 0<x<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Innen a peremeloszlás függvény:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leqq 0, \\ \int_0^x (\frac{6}{5}t + \frac{2}{5})\,dt = \frac{3}{5}x^2 + \frac{2}{5}x, & \text{ha } 0<x<1, \\ 1, & \text{ha } x>1. \end{cases}$$

Az $M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx$ összefüggésből pedig

$$M(\xi) = \int_0^1 x \cdot (\frac{6}{5}x + \frac{2}{5})\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}\,.$$

V/3. $P(a<\xi<b) = F(b) - F(a) - P(\xi=a)$
Ha ξ folytonos eloszlású, akkor $P(\xi=a) = 0$.
Az összefüggés bizonyítása az elméleti jegyzet 57. oldalán olvasható. A bizonyítás pillére az eloszlásfüggvény definíciójának felhasználása.

St/1. A megadott statisztikai minta megvalósulása három - egymástól független - esemény együttes bekövetkezését jelenti. Ez a három esemény az $A : \xi = 2$; $B : \xi = 3$ és a $C : \xi = 2$ esemény. A függetlenségből kifolyólag $P(ABD) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ szorzat adja meg a szóban forgó minta megvalósulásának a valószínűségét:

$$\left[(2-1)\ p^2(1-p)^{2-2}\right]\cdot\left[(3-1)p^3\ (1-p)^{3-2}\right]\cdot\left[(2-1)p^2(1-p)^{2-2}\right]$$

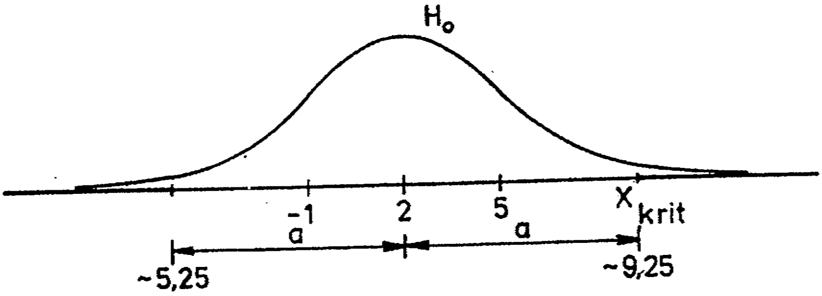
Ha most $p=\frac{1}{2}$, akkor ez a valószínűség: $p_1 = 2\cdot\frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^7}$,

Ha pedig $p=\frac{1}{3}$, akkor ez a valószínűség: $P_2 = 2\cdot\frac{1}{3^6}\cdot\frac{1}{3^2} = \frac{2}{3^8}$.

Mivel $\frac{1}{2^7} = \frac{2}{2^8}$, rögtön látszik, hogy $\underline{\underline{p_1 > p_2}}$, mert $2^8 < 3^8$.

Tehát $p = \frac{1}{2}$ a valószínűbb paraméter érték.

St/2.



14. ábra

Tulajdonképpen azt az "a" értéket kell meghatározni, amelyre $P(2-a<\xi<2+a) = 1-0,0156$.
Az összefüggés bal oldala az eloszlásfüggvénnyel, majd a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével is felírható:

$$F(2+a)-F(2-a) = \Phi\left(\frac{2+a-2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-a-2}{3}\right) = \Phi\left(\frac{a}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{a}{3}\right).$$

A $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ összefüggést felhasználva:

$$2\Phi\left(\frac{a}{3}\right) - 1 = 1 - 0{,}0156 \text{ adódik.}$$

Innen: $\Phi\left(\frac{a}{3}\right) = 0{,}9922$

A táblázatból való visszakereséssel: $\frac{a}{3} = 2{,}42$; $a = 7{,}36$.
Tehát $X_{krit} = 2 + a = \underline{\underline{9{,}26}}$

St/3. Az $\hat{a}_n$ becslés az "a" paraméter aszimptotikusan torzítatlan becslése, ha

$$\lim_{n\to\infty} M(\hat{a}_n) = a .$$

Mivel $M(\sigma_n^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$, igaz az, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 = \sigma^2 .$$

Másrészt a $\sigma_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2}{n}$,

és a $s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}$.

definiáló összefüggésekből kiolvasható, hogy a korrigált szórásnégyzet: $s_n^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_n^2$.

Így $M(s_n^2) = M\left(\frac{n}{n-1}\sigma_n^2\right) = \frac{n}{n-1} \cdot M(\sigma_n^2) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\sigma^2 =$

$= \sigma^2$, s ez az összefüggés éppen a torzítatlanságot fejezi ki.

1988. június 9.
"V"

1. Egy szabályos kockával 9-szer dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
   a) pontosan ötször 3-ast dobunk;
   b) legfeljebb egyszer 6-ost dobunk?

(30%)

2. Legyen ξ $\lambda=2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Jelentse A a $\xi < 2$ és B a $\xi > 1$ eseményt.
   Számítsa ki a P(A/B) valószínűséget!

(30%)

3. Mutassa meg, hogy a $|\xi - m| < a\sigma$ esemény bekövetkezési valószínűsége csak az "a" paramétertől függ, ha $\xi \in N(m,\sigma)$ és $a \in R$!

(40%)

"St"

1. Legyen (-1; 1; 5; 3; 5; -1) egy megvalósult 6 elemű minta. Ábrázolja az empirikus eloszlásfüggvényt és számítsa ki a minta korrigált empirikus szórását!

(30%)

2. Tudjuk, hogy ξ normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma=2$ szórással. Mintát véve, meghatározott szignifikancia szinten akarunk dönteni az $M(\xi)=0$ nullhipotézis elfogadásáról.
   a) Milyen próbát alkalmazunk és miért azt?
   b) Rajzban szemléltesse a hibás döntés valószínűségét, ha az $M(\xi)=3$ alternatív hipotézis a helyes!

(30%)

3. Két változó között keressük a "legjobb" $y = \sqrt{ax}$, $a>0$ alakú kapcsolatot. Becsülje meg az "a" paramétert az $(x_1, y_1); (x_2, y_2),\dots(x_n, y_n)$ n-elemű minta felhasználásával!

(40%)

<u>Megoldások</u>
1988. június 9.

V/1. a) Legegyszerűbb, ha Bernoulli nyomán így gondolkodunk. A 3-as dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$. Összesen 9 független kísérletet (dobást) végzünk. Az $\frac{1}{6}$ valószínűségű esemény 5-ször az $\frac{5}{6}$ valószínűségű ellentett esemény 4-szer következik be. Ha az <u>összes</u>

lehetséges pozíciót is tekintetbe vesszük, a kérdéses dobás-sorozat bekövetkezési valószínűségére

$$\binom{9}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \text{ adódik.}$$

A kilenc dobásból álló sorozatot egyetlen kísérlettel (dobással) helyettesítve gondolatban, a kedvező - 5 kockával 3-as dobás, 4 kockával 5 féle (nem hármas dobás) - lehetőségek száma $\binom{9}{5} \cdot 5^4$, míg 9 kockával összesen 6^9- féle dobás képzelhető el összesen.

Ezután már a klasszikus képlettel közvetlenül a fentivel azonos eredményre jutunk.

A legfejlebb egy hatos dobás a pontosan nulla hatos és a pontosan egy hatos dobás - egymást kizáró - események összege. A meghatározandó valószínűség az előző feladatrészben alkalmazott gondolatmenet kétszer való megismétlése után, összeadással adódik (kizáró események összegének valószínűsége):

$$\binom{9}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9 + \binom{9}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8$$

V/2.

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ összefüggést alkalmazva,}$$

$$P(\xi < 2/\xi > 1) = \frac{P(1 < \xi < 2)}{P(\xi > 1)} \text{ kifejezéshez}$$

jutunk.

A $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét:

$$f(x) = \begin{cases} 2\, e^{-2x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \text{ -t felhasználva,}$$

a kérdéses valószínűség:

$$\frac{\int_1^2 2e^{-2x}dx}{\int_1^{+\infty} 2e^{-2x}dx} = \frac{\left[-e^{-2x}\right]_1^2}{\lim\limits_{A\to\infty}\left[-e^{-2x}\right]_1^A} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{e^2}}}\,.$$

V/3. A megoldáshoz az elméleti jegyzet 140. oldalán lévő 21.3 Példa gondolatmenetét kellett reprodukálni. Röviden: $\frac{\xi - m}{\sigma} \in N(0,1)$, így $P(|\xi - m| < a\sigma) =$

$= P(-a < \frac{\xi - m}{\sigma} < a) = 2 \cdot \Phi(a) - 1.$

St/1. Az empirikus (tapasztalati) eloszlásfüggvény definíciója

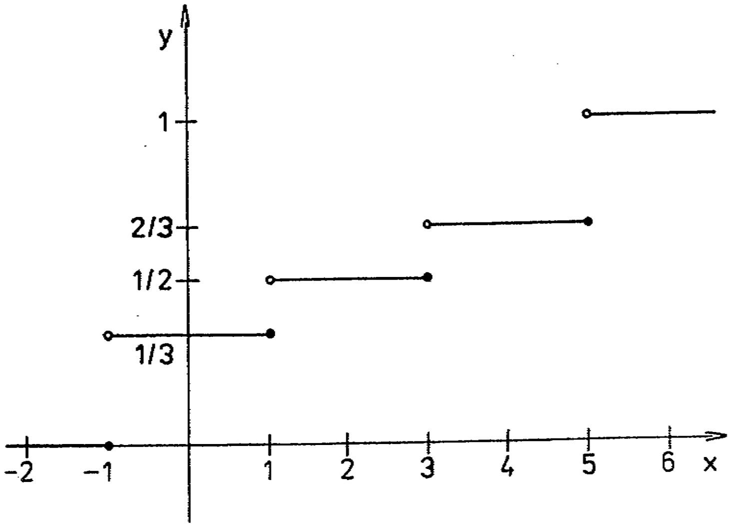
$$F_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \leqq x_1 \\ \frac{k}{n}, \text{ ha } x_k^* < x \leqq x_{k+1}^* \\ 1, \text{ ha } x > x_n^* \end{cases}$$

ahol $x_1^* \leqq x_2^* \leqq \dots \leqq x_n^*$ (a nagyság szerint növekvő sorrendbe rendezett n-elemű minta elemei)

Ennek megfelelően a megadott minta eloszlásfüggvénye:

$$F_6(x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x \leqq -1, \\ \frac{1}{3}, \text{ ha } -1 < x \leqq 1, \\ \frac{1}{2}, \text{ ha } 1 < x \leqq 3, \\ \frac{2}{3}, \text{ ha } 3 < x \leqq 5, \\ 1, \text{ ha } x > 5. \end{cases}$$

Grafikonja:



15. ábra

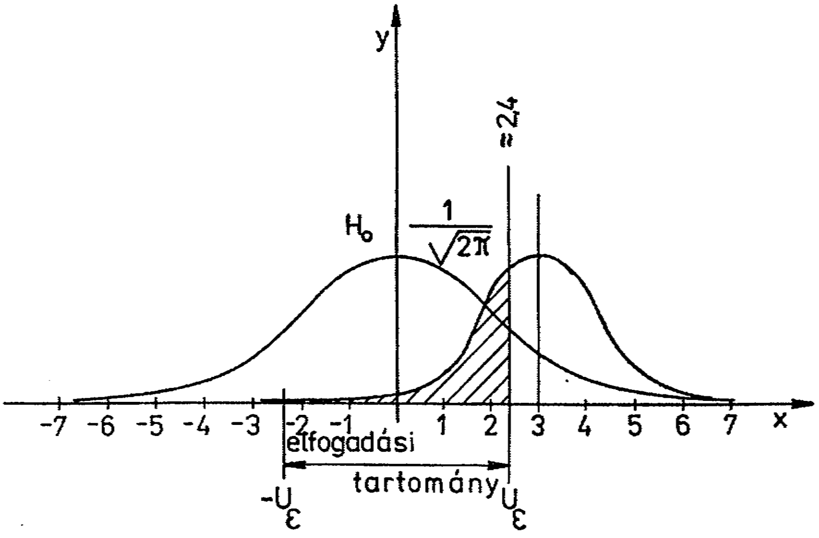
A korrigált empirikus szórás pedig

$$s_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_1-\bar{x})^2}{n-1}}\quad,\ \text{ahol n a minta-elemek száma.}$$

$$\text{A mintaátlag: } \bar{x} = \frac{-1 + 1 + 5 + 3 + 5 + (-1)}{6} = 2,$$

$$\text{így } s_6 = \sqrt{\frac{9 + 1 + 9 + 1 + 9 + 9}{5}} = \sqrt{7,6} \approx \underline{2,76}\ .$$

St/2. Egymintás u-próbát kell alkalmaznunk, hiszen az alapeloszlás szórása ismert.



16. ábra

Ábránkon a kritikus u értéket önkényesen vettük fel, hiszen a feladat sem jelöl meg konkrét szignifikancia szintet. Ehhez képest a hibás döntés valószínűsége (másodfajú hiba), az ábra alapján becsülve 30-40%.

St/3. A feladat értelmében a másodfajú regressziós függvényt kell előállítanunk: "a legkisebb négyzetek módszerének" alkalmazásával kell megbecsülnünk az "a" paramétert.

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \sqrt{ax_i})^2\ ,$$

$$f'(a) = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \sqrt{ax_i})\cdot\left(-\frac{\sqrt{x_i}}{2\sqrt{a}}\right),$$ mert $a > 0$,

s így $x_i > 0$ $i=1,2,\dots n$, szintén.

A szélsőérték szükséges feltételéből:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{y_i\sqrt{x_i}}{\sqrt{a}}\right) = 0 .$$

S innen a becslés:

$$\hat{a} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)^2$$

Az elégséges feltétel is teljesül, hiszen

$$f''(a) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{a^3}}\sqrt{x_i}y_i ,$$

tehát $f''(\hat{a}) > 0$: az eltérések négyzetösszegének valóban minimuma van.

TÁBLÁZATOK

I. Táblázat

Binomiális eloszlás

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3000	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4800	0,4850	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,6840	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0628
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,2036	0,3280	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2593	0,2059	0,1562
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0004	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1562
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0312
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2323	0,3543	0,3992	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
7	0	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,1848	0,1306	0,0872	0,0547
	2	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,2985	0,2613	0,2140	0,1641
	3	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2679	0,2903	0,2918	0,2734
	4	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1442	0,1935	0,2388	0,2734
	5	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0466	0,0774	0,1172	0,1641
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0084	0,0172	0,0320	0,0547
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
8	0	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0019	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,2793	0,3626	0,3847	0,3555	0,2670	0,1977	0,1373	0,0896	0,0548	0,0312
	2	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2587	0,2090	0,1569	0,1094
	3	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2786	0,2787	0,2568	0,2188
	4	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1775	0,2322	0,2627	0,2734
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0808	0,1239	0,1719	0,2188
	6	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0217	0,0413	0,0703	0,1094
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0033	0,0079	0,0164	0,0312
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0017	0,0039
9	0	0,6303	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,2985	0,3874	0,3679	0,3020	0,2253	0,1556	0,1004	0,0605	0,0339	0,0176
	2	0,0629	0,1722	0,2597	0,3020	0,3003	0,2668	0,2162	0,1612	0,1110	0,0703
	3	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2716	0,2508	0,2119	0,1641
	4	0,0006	0,0074	0,0283	0,0661	0,1168	0,1715	0,2194	0,2508	0,2600	0,2461

I. Táblázat folytatása

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0000	0,0008	0,0050	0,0165	0,0389	0,0735	0,1181	0,1672	0,2128	0,2465
	6	0,0000	0,0001	0,0006	0,0028	0,0087	0,0210	0,0424	0,0743	0,1160	0,1641
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0012	0,0039	0,0098	0,0212	0,4007	0,0703
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0035	0,0083	0,0176
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0020
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2559	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,2665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0084	0,0264	0,0594	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
11	0	0,5688	0,3136	0,1673	0,0422	0,0198	0,0088	0,0036	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,3293	0,3835	0,3248	0,2362	0,1549	0,0932	0,0518	0,0266	0,0125	0,0054
	2	0,0367	0,2131	0,2866	0,2953	0,2581	0,1998	0,1395	0,0887	0,0513	0,0269
	3	0,0137	0,0710	0,1517	0,2215	0,2581	0,2568	0,2254	0,1774	0,1259	0,0806
	4	0,0014	0,0158	0,0536	0,1107	0,1721	0,2201	0,2428	0,2365	0,2060	0,1611
	5	0,0001	0,0025	0,0132	0,0388	0,0803	0,1321	0,1830	0,2207	0,2360	0,2256
	6	0,0000	0,0003	0,0023	0,0097	0,0268	0,0566	0,0985	0,1471	0,1931	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0003	0,0017	0,0064	0,0173	0,0379	0,0701	0,1128	0,1611
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0037	0,0102	0,0234	0,0462	0,0806
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018	0,0052	0,0126	0,0269
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0007	0,0021	0,0054
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0005
12	0	0,5404	0,2824	0,122	0,0687	0,0317	0,0138	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,3413	0,3766	0,3013	0,2062	0,1267	0,0712	0,0368	0,0174	0,0075	0,0029
	2	0,0988	0,2301	0,2924	0,2835	0,2323	0,1678	0,2088	0,0639	0,0339	0,0161
	3	0,0173	0,0852	0,1720	0,2362	0,2581	0,2997	0,1954	0,1419	0,0923	0,0537
	4	0,0021	0,0213	0,0683	0,1329	0,1936	0,2311	0,2367	0,2128	0,1700	0,1208
	5	0,0002	0,0038	0,0193	0,0532	0,1032	0,1585	0,2039	0,2270	0,2225	0,1934
	6	0,0000	0,0005	0,0040	0,0155	0,0401	0,0792	0,1281	0,1766	0,2124	0,2256
	7	0,0000	0,0000	0,0006	0,0033	0,0115	0,0291	0,0591	0,1009	0,1489	0,1934
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0078	0,0199	0,0420	0,0762	0,1208
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0048	0,0125	0,0277	0,0537
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0025	0,0068	0,0161
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0001	0,0029
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
13	0	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,3512	0,3672	0,2774	0,1787	0,1029	0,0540	0,0259	0,0113	0,0045	0,0016
	2	0,1109	0,2448	0,2937	0,2680	0,2059	0,1388	0,0836	0,0453	0,0220	0,0095
	3	0,0214	0,0997	0,1900	0,2457	0,2517	0,2181	0,1651	0,1107	0,0660	0,0349
	4	0,0028	0,0277	0,0838	0,1535	0,2097	0,2337	0,2222	0,1845	0,1350	0,0873
	5	0,0003	0,0055	0,0266	0,0691	0,1258	0,1803	0,2154	0,2214	0,1989	0,1571
	6	0,0000	0,0008	0,0063	0,0230	0,0559	0,1030	0,1546	0,1968	0,2169	0,2095
	7	0,0000	0,0001	0,0011	0,0058	0,0186	0,0442	0,0833	0,1312	0,1775	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0011	0,0047	0,0142	0,0336	0,0656	0,1089	0,1571
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0009	0,0034	0,0101	0,0243	0,0495	0,0873
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0065	0,0162	0,0349
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0013	0,0036	0,0095
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

I. Táblázat folytatása

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
14	0	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,3593	0,3559	0,2539	0,1539	0,0833	0,0407	0,0181	0,0073	0,0027	0,0009
	2	0,1229	0,2570	0,2912	0,2501	0,1802	0,1134	0,0634	0,0317	0,0141	0,0056
	3	0,0259	0,1142	0,2056	0,2501	0,2402	0,1943	0,1366	0,0845	0,0462	0,0222
	4	0,0037	0,0349	0,0998	0,1720	0,2202	0,2290	0,2022	0,1549	0,1040	0,0611
	5	0,0004	0,0078	0,0352	0,0860	0,1468	0,1963	0,2178	0,2066	0,1701	0,1222
	6	0,0000	0,0013	0,0093	0,0322	0,0734	0,1262	0,1759	0,2066	0,2088	0,1833
	7	0,0000	0,0002	0,0019	0,0092	0,0280	0,0618	0,1082	0,1574	0,1952	0,2095
	8	0,0000	0,0000	0,0003	0,0020	0,0082	0,0232	0,0510	0,0918	0,1398	0,1833
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0066	0,0183	0,0408	0,0762	0,1222
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0014	0,0049	0,0136	0,0312	0,0611
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0033	0,0093	0,0222
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0019	0,0056
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0009
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
15	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,3658	0,3432	0,2312	0,1319	0,0668	0,0305	0,0126	0,0047	0,0016	0,0005
	2	0,1348	0,2669	0,2856	0,2309	0,1559	0,0916	0,0476	0,0219	0,0090	0,0032
	3	0,0307	0,1285	0,2184	0,2501	0,0252	0,1700	0,1110	0,0634	0,0318	0,0139
	4	0,0049	0,0428	0,1156	0,1876	0,2252	0,2186	0,1792	0,1268	0,0780	0,0417
	5	0,0006	0,0105	0,0449	0,1032	0,1651	0,2061	0,2123	0,1859	0,1404	0,0916
	6	0,0000	0,0019	0,0132	0,0430	0,0917	0,1472	0,1906	0,2066	0,1914	0,1527
	7	0,0000	0,0003	0,0030	0,0138	0,0393	0,0811	0,1319	0,1771	0,2013	0,1964
	8	0,0000	0,0000	0,0005	0,0035	0,0131	0,0348	0,0710	0,1181	0,1647	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0034	0,0116	0,0298	0,0612	0,1048	0,1527
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0007	0,0030	0,0096	0,0246	0,0515	0,0196
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0074	0,0191	0,0417
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052	0,0139
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0032
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,3706	0,3294	0,2097	0,1126	0,0335	0,0228	0,0087	0,0030	0,0009	0,0002
	2	0,1463	0,2745	0,2775	0,2111	0,1336	0,0732	0,0353	0,0150	0,0056	0,0018
	3	0,0359	0,1423	0,2285	0,2463	0,2079	0,1650	0,0888	0,0468	0,0215	0,0085
	4	0,0061	0,0514	0,1311	0,2001	0,2252	0,2040	0,1553	0,1014	0,0572	0,0278
	5	0,0008	0,0137	0,0555	0,1201	0,1802	0,2099	0,2008	0,1623	0,1123	0,0667
	6	0,0001	0,0028	0,0180	0,0550	0,1101	0,1649	0,1982	0,1983	0,1684	0,1222
	7	0,0000	0,0004	0,0045	0,0197	0,0524	0,1010	0,1524	0,1889	0,1969	0,1746
	8	0,0000	0,0001	0,0009	0,0055	0,0197	0,0487	0,0923	0,1417	0,1812	0,1964
	9	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0058	0,0185	0,0442	0,0840	0,1318	0,1746
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,796	0,0411	0,0182

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0001	0,0039	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031
	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117
	5	0,0014	0,0218	0,0767	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327
	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708
	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214
	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669
	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0003
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2852	0,1529	0,0685	0,0268	0,0093	0,0029	0,0008	0,0002	0,0000
	2	0,1787	0,2852	0,2428	0,1540	0,0803	0,0358	0,0138	0,0046	0,0013	0,0003
	3	0,0533	0,1796	0,2428	0,2182	0,1517	0,0869	0,0422	0,0175	0,0062	0,0018
	4	0,0112	0,0798	0,1714	0,2182	0,2023	0,1491	0,0909	0,0467	0,0203	0,0074
	5	0,0018	0,0266	0,0907	0,1636	0,2023	0,1916	0,1468	0,0933	0,0947	0,0222
	6	0,0002	0,0069	0,0374	0,0955	0,1574	0,1916	0,1844	0,1451	0,0949	0,0518
	7	0,0000	0,0014	0,0122	0,0443	0,0974	0,1525	0,1844	0,1797	0,1443	0,0961
	8	0,0000	0,0002	0,0032	0,0166	0,0487	0,0981	0,1489	0,1797	0,1771	0,1442
	9	0,0000	0,0000	0,0007	0,0051	0,0198	0,0514	0,0980	0,1464	0,1771	0,1762
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0013	0,0066	0,0220	0,0528	0,0976	0,1449	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0018	0,0077	0,0233	0,0532	0,0970	0,1442
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0022	0,0083	0,0237	0,0529	0,0961
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0024	0,0085	0,0233	0,0518
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0082	0,0222
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0074
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

I. Táblázat folytatása

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011
	4	0,0033	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,197	0,1771	0,1602
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Poisson eloszlás

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

λ

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3495	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
4	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3437	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	1,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,196	0,1494
2	0,200	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0092	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,011	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007
11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	3,1	3,2	3,3	4,4	3,5	3,6	3,8	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1397	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0789	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1539	0,1465
3	0,2237	0,2226	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2001	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1823	0,1858	0,1888	0,1912	0,1931	0,1944	0,1951	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
1	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0385	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0089	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

II. Táblázat folytatása

					λ					
k	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0679	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0427	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1158	0,1125	0,1063	0,1005	0,0948	0,0894	0,0847
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1917	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1667	0,1708	0,1725	0,1738	0,1747	0,1753	0,1755
6	0,1093	0,1143	0,1191	0,1237	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0599	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0255	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0051	0,0052	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0001	0,0003	0,0003	0,0003	0,0005
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
k	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0081	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0746	0,0701	0,0559	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1052	0,1033	0,0985	0,0938	0,0892
4	0,1719	0,1681	0,1641	0,1600	0,1558	0,1515	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1752	0,1748	0,1740	0,1728	0,1714	0,1697	0,1678	0,1656	0,1632	0,1606
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1061	0,1605	0,1606
7	0,1086	0,1125	0,1163	0,1200	0,1234	0,1267	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0749	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0359	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0039	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0101	0,0113
13	0,0015	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
k	6,1	6,2	6,3	6,3	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0032	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0137	0,0126	0,0116	0,0106	0,0098	0,0090	0,0082	0,0076	0,0070	0,0064
2	0,0417	0,0390	0,0364	0,0340	0,0318	0,0296	0,0276	0,0258	0,0240	0,0223
3	0,0848	0,0806	0,0765	0,0726	0,0688	0,0652	0,0617	0,0584	0,0552	0,0521
4	0,1294	0,1249	0,1205	0,1118	0,1076	0,1034	0,0992	0,0992	0,0952	0,0912
5	0,1579	0,1549	0,1519	0,1457	0,1454	0,1420	0,1385	0,1340	0,1314	0,1277
6	0,1605	0,1601	0,1595	0,1586	0,1575	0,1562	0,1546	0,1529	0,1511	0,1490
7	0,1399	0,1418	0,1435	0,1450	0,1462	0,1472	0,1480	0,1486	0,1489	0,1490
8	0,1066	0,1099	0,1130	0,1160	0,1188	0,1215	0,1240	0,1263	0,1284	0,1303
9	0,0723	0,0757	0,0791	0,0825	0,0585	0,0891	0,0923	0,0954	0,0985	0,1014
10	0,0441	0,0469	0,0498	0,0528	0,0558	0,0586	0,0618	0,0649	0,0679	0,0710
11	0,0245	0,0265	0,0285	0,0307	0,0330	0,0353	0,0377	0,0401	0,0426	0,0452
12	0,0124	0,0137	0,0150	0,0164	0,0179	0,0194	0,0210	0,0227	0,0245	0,0264
13	0,0058	0,0065	0,0073	0,0081	0,0089	0,0098	0,0108	0,0119	0,0130	0,0142
14	0,0025	0,0029	0,0033	0,0037	0,0041	0,0046	0,0052	0,0058	0,0064	0,0071

II. Táblázat folytatása

λ

k	6,1	6,2	6,3	6,3	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
15	0,0010	0,0012	0,0024	0,0016	0,0018	0,0020	0,0023	0,0026	0,0029	0,0033
16	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013	0,0014
17	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006
18	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001

k	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0069	0,0054	0,0049	0,0045	0,0041	0,0038	0,0038	0,0035	0,0032	0,0029
2	0,0208	0,0194	0,0180	0,0167	0,0156	0,0145	0,0134	0,0175	0,0116	0,0107
3	0,0492	0,0464	0,0438	0,0413	0,0389	0,0366	0,0345	0,0324	0,0305	0,0286
4	0,0874	0,0836	0,0799	0,0764	0,0729	0,0696	0,0663	0,0632	0,0602	0,0573
5	0,1241	0,1204	0,1167	0,1130	0,1094	0,1057	0,1021	0,0986	0,0951	0,0916
6	0,1468	0,1445	0,1420	0,1394	0,1367	0,1339	0,1311	0,1282	0,1252	0,1221
7	0,1489	0,1486	0;1481	0,1474	0,1465	0,1454	0,1442	0,1428	0,1413	0,1396
8	0,1321	0,1337	0,1351	0,1363	0,1373	0,1382	0,1388	0,1392	0,1395	0,1396
9	0,1042	0,1070	0,1096	0,1121	0,1144	0,1167	0,1187	0,1207	0,1224	0,1241
10	0,0740	0,0770	0,0800	0,0829	0,0858	0,0887	0,0914	0,0941	0,0967	0,0993
11	0,4473	0,0504	0,0531	0,0558	0,0585	0,0613	0,0640	0,0609	0,0695	0,0722
12	0,0283	0,0303	0,0323	0,0544	0,0366	0,0388	0,0411	0,0438	0,0457	0,0481
13	0,0154	0,0168	0,0181	0,0196	0,0211	0,0227	0,0243	0,0260	0,0278	0,0296
14	0,0078	0,0086	0,0095	0,0101	0,0113	0,0123	0,0134	0,0145	0,0157	0,0169
15	0,0037	0,0041	0,0046	0,0051	0,0057	0,0062	0,0069	0,0075	0,0083	0,0090
16	0,0016	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0030	0,0033	0,0037	0,0041	0,0045
17	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0012	0,0013	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021
18	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
19	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0004
20	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001

k	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	7,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0017	0,0016	0,0014	0,0013	0,0012	0,0011
2	0,0100	0,0082	0,0086	0,0079	0,0074	0,0068	0,0063	0,0058	0,0054	0,0050
3	0,0269	0,0052	0,0237	0,0222	0,008	0,0195	0,0183	0,0171	0,0160	0,0150
4	0,0554	0,0517	0,0491	0,0466	0,0443	0,0420	0,0398	0,0377	0,0357	0,0337
5	0,0882	0,0894	0,0816	0,0784	0,0752	0,0722	0,0692	0,0663	0,0635	0,0607
6	0,1191	0,1160	0,1128	0,1097	0,1066	0,1034	0,1003	0,0972	0,0941	0,0911
7	0,1378	0,1358	0,1338	0,1317	0,1294	0,1271	0,1247	0,1222	0,1197	0,1171
8	0,1395	0,1392	0,1388	0,2382	0,1375	0,1366	0,1356	0,1344	0,1332	0,1318
9	0,1256	0,1269	0,1280	0,1290	0,1299	0,1306	0,1311	0,1315	0,1317	0,1318
10	0,1017	0,1040	0,1063	0,1084	0,1104	0,1123	0,1140	0,1157	0,1172	0,1186
11	0,0749	0,0776	0,0802	0,0828	0,0853	0,0878	0,0902	0,0925	0,0948	0,0970
12	0,0505	0,530	0,0555	0,579	0,0604	0,0629	0,0651	0,0679	0,0703	0,0728
13	0,0315	0,0334	0,0345	0,0374	0,0395	0,0416	0,0438	0,0459	0,0481	0,0504
14	0,0182	0,0196	0,0210	0,0225	0,0240	0,0256	0,0272	0,0289	0,0306	0,0324
15	0,0098	0,0107	0,0116	0;0126	0,0136	0,0147	0,0158	0,0169	0,0182	0,0194
16	0,0050	0,0055	0,0060	0,0066	0,0072	0,0079	0,0086	0,0093	0,0101	0,0109
17	0,0024	0,0026	0,0029	0,0033	0,0036	0,0040	0,0044	0,0048	0,0053	0,0058
18	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0024	0,0026	0,0029
19	0,0005	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014

II. Táblázat folytatása

λ

k	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
20	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0006
21	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

k	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
2	0,0046	0,0043	0,0040	0,0037	0,0034	0,0031	0,0029	0,0027	0,0025	0,0023
3	0,0140	0,0131	0,0123	0,0115	0,0107	0,0100	0,0093	0,0087	0,0081	0,0076
4	0,0319	0,0302	0,0285	0,0269	0,0254	0,0240	0,0226	0,0213	0,0201	0,0189
5	0,0581	0,0555	0,0530	0,0506	0,0483	0,0460	0,0439	0,0418	0,0298	0,0378
6	0,0881	0,0851	0,0822	0,0793	0,0264	0,0736	0,0709	0,0682	0,0656	0,0631
7	0,1145	0,1118	0,1091	0,1064	0,1037	0,1010	0,0982	0,0955	0,0928	0,0901
8	0,1302	0,1286	0,1269	0,1251	0,1232	0,1212	0,1191	0,1170	0,1148	0,1126
9	0,1317	0,1315	0,1311	0,1306	0,1300	0,1293	0,1284	0,1274	0,1263	0,1251
10	0,1198	0,1210	0,1219	0,1228	0,1235	0,1241	0,1245	0,1249	0,1250	0,1251
11	0,0991	0,1012	0,1031	0,1049	0,1067	0,1083	0,1098	0,1112	0,1125	0,1137
12	0,0732	0,0776	0,0799	0,0822	0,0844	0,0866	0,0688	0,0008	0,0928	0,0948
13	0,0526	0,0549	0,0572	0,0594	0,0617	0,0640	0,0662	0,0684	0,0707	0,0729
14	0,0342	0,0381	0,0380	0,0399	0,0419	0,0439	0,0459	0,0479	0,0500	0,0521
15	0,0208	0,0221	0,0235	0,0250	0,0264	0,0281	0,0297	0,0313	0,0330	0,0347
16	0,0118	0,0127	0,0137	0,0147	0,0157	0,0168	0,0180	0,0192	0,0204	0,0217
17	0,0063	0,0069	0,0075	0,0081	0,0089	0,0095	0,0103	0,0111	0,0119	0,0126
18	0,0032	0,0035	0,0039	0,0042	0,0046	0,0051	0,0055	0,0060	0,0065	0,0071
19	0,0015	0,0017	0,0019	0,0021	0,0023	0,0026	0,0028	0,0031	0,0034	0,0037
20	0,0007	0,0008	0,0009	0,0010	0,0011	0,0012	0,0014	0,0015	0,0017	0,0019
21	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009
22	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004
23	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0010	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0037	0,0018	0,0008	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0102	0,0053	0,0027	0,0013	0,0006	0,0003	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0224	0,0127	0,0070	0,0037	0,0019	0,0010	0,0005	0,0002	0,0001	0,0001
6	0,0411	0,0255	0,0452	0,0087	0,0048	0,0026	0,0014	0,0007	0,0004	0,0002
7	0,0646	0,0437	0,0281	0,0174	0,0104	0,0060	0,0034	0,0018	0,0010	0,0005
8	0,0888	0,0655	0,0457	0,0304	0,0194	0,0120	0,0072	0,0042	0,0024	0,0013
9	0,1085	0,0874	0,0661	0,0473	0,0324	0,0213	0,0135	0,0083	0,0050	0,0029
10	0,1194	0,1048	0,0859	0,0663	0,0486	0,0341	0,0230	0,0150	0,0095	0,0058
11	0,1194	0,1144	0,1015	0,0844	0,0663	0,0496	0,0355	0,0245	0,0164	0,0106
12	0,1094	0,1144	0,1099	0,0984	0,0829	0,0661	0,0504	0,0368	0,0259	0,0176
13	0,0926	0,1056	0,1099	0,1060	0,0956	0,0814	0,0658	0,0509	0,0378	0,0271
14	0,0728	0,0905	0,1021	0,1060	0,1024	0,0930	0,0800	0,0655	0,0514	0,0387
15	0,0534	0,0724	0,0855	0,0989	0,1024	0,0992	0,0960	0,0786	0,0650	0,0516
16	0,0376	0,0543	0,0719	0,0866	0,0960	0,0992	0,0963	0,0884	0,0722	0,0646
17	0,0237	0,0363	0,0550	0,0713	0,0847	0,0934	0,0963	0,0936	0,0863	0,0760
18	0,0145	0,0256	0,0397	0,0554	0,0706	0,8030	0,0909	0,0936	0,0911	0,0844
19	0,0084	0,0161	0,0272	0,0409	0,0557	0,0699	0,0814	0,0877	0,0911	0,0888

II. Táblázat folytatása

k	λ									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	0, 0046	0, 0097	0, 0177	0, 0286	0, 0418	0, 0559	0, 0692	0, 0798	0, 0366	0, 0888
21	0, 0024	0, 0055	0, 0109	0, 0191	0, 0299	0, 0426	0, 0560	0, 0684	0, 0783	0, 0846
22	0, 0012	0, 0030	0, 0065	0, 0121	0, 0204	0, 0310	0, 0433	0, 0560	0, 0676	0, 0769
23	0, 0006	0, 0016	0, 0037	0, 0074	0, 0133	0, 0216	0, 0320	0, 0438	0, 0559	0, 0669
24	0, 0003	0, 0008	0, 0020	0, 0043	0, 0083	0, 0144	0, 0266	0, 0328	0, 0442	0, 0557
25	0, 0001	0, 0004	0, 0010	0, 0024	0, 0050	0, 0092	0, 0154	0, 0237	0, 0336	0, 0446
26	0, 0000	0, 0002	0, 0005	0, 0013	0, 0029	0, 0057	0, 0101	0, 0164	0, 0246	0, 0343
27	0, 0000	0, 0001	0, 0002	0, 0007	0, 0016	0, 0034	0, 0063	0, 0109	0, 0173	0, 0254
28	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0003	0, 0009	0, 0019	0, 0038	0, 0070	0, 0117	0, 0181
29	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0002	0, 0004	0, 0011	0, 0023	0, 0024	0, 0077	0, 0225
30	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0002	0, 0006	0, 0013	0, 0026	0, 0049	0, 0083
31	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0003	0, 0007	0, 0015	0, 0030	0, 0054
32	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0001	0, 0004	0, 0009	0, 0018	0, 0034
33	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0002	0, 0005	0, 0010	0, 0020
34	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0002	0, 0006	0, 0012
35	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0003	0, 0007
36	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001	0, 0001	0, 0004
37	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0002	0, 0002
38	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001
39	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0000	0, 0001

III. Táblázat

Normális eloszlás

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)du$$

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
0, 00	0,3989	0, 5000	0, 30	0, 3814	0, 6179	0, 60	0, 3322	0, 7252
01	3989	5040	31	3802	6217	61	3312	7291
02	3989	5080	32	3790	6265	62	3292	7324
03	4988	5120	33	3778	6293	63	3271	7357
04	3986	5160	34	3765	6331	64	3251	7389
05	3984	5199	35	3752	6368	65	3230	7422
06	3982	5234	36	3739	6406	66	3209	7454
07	3980	5279	37	3725	6443	67	3187	7486
08	3977	5319	38	3712	6480	68	3166	7517
09	3973	5359	39	3697	6517	69	3144	7549
0,10	0, 370	0, 5398	0, 40	0, 3683	0, 6557	0, 70	0, 3123	0, 7580
11	3965	5438	41	3668	6591	71	3101	7611
12	3961	5478	42	3653	6628	72	3079	7642
13	3956	5517	43	3637	6664	73	3056	7673
14	3951	5557	44	3621	6700	74	3034	7703
15	3945	5596	45	3605	6736	75	3011	7734
16	3939	5636	46	3589	6772	76	2989	7764
17	3932	5675	47	3572	6808	77	2966	7794
18	3925	5714	48	3555	6844	78	2934	7823
19	3918	5753	49	3538	6879	79	2930	7852
0, 20	0, 3910	0, 5793	0, 50	0, 3521	0, 6915	0, 80	0, 2897	0, 7881
21	3902	5832	51	3503	6950	81	2874	7910
22	3894	5871	52	3485	6985	82	2850	7939
23	3885	5910	53	3467	7019	83	2827	7967
24	3876	5948	54	3448	7054	84	2803	7995
25	3867	5987	55	3429	7088	85	2780	8023
26	3857	6026	56	3410	7123	86	2756	8051
27	3847	6064	57	3391	7157	87	2732	8078
28	3836	6103	58	3372	7190	88	2709	8106
29	3825	6141	59	3352	7224	89	2685	8133

III. Táblázat folytatása

x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\phi(x)$
0, 90	0, 2661	0, 8159	1, 20	0, 1942	0, 8849	1, 50	0, 1295	0, 9332
91	2637	8186	21	1919	8869	51	1276	9345
92	2613	8212	22	1895	8888	52	1257	9357
93	2589	8238	23	1872	8907	53	1238	9370
94	2565	8264	24	1849	8925	54	1219	9382
95	2541	8289	25	1826	8944	55	1200	9394
96	2516	8315	26	1804	8962	56	1182	9406
97	2492	8340	27	1881	8980	57	1163	9418
98	2468	8365	28	1858	8997	58	1145	9429
99	2444	8389	29	1836	9015	59	1127	9441
1, 00	0, 2420	0, 8413	1, 30	0, 1714	0, 9032	1, 60	0, 1109	0, 9452
01	2396	8438	41	1691	9049	61	1092	9463
02	2371	8461	32	1669	8066	62	1074	9474
03	2347	3485	33	1647	9082	63	1057	9484
04	2323	8508	34	1626	9099	64	1040	9495
05	2299	8531	35	1604	9115	65	1023	9505
06	2275	8554	36	1582	9131	66	1006	9515
07	2251	8577	37	1561	9147	67	0989	9525
08	2227	8599	38	1539	9162	68	0973	9535
09	2203	8621	39	1518	9177	69	0957	9545
1, 10	0, 2179	0, 8643	1, 40	0, 1497	0, 9192	1, 70	0, 0940	0, 9554
11	2155	8665	41	1475	9207	71	0925	9564
12	2131	8686	42	1456	9222	72	0909	9573
13	2107	8708	43	1435	9236	73	0893	9583
14	2083	3729	44	1415	9251	74	0878	9591
15	2059	3749	45	1394	9265	75	0863	9599
16	2036	8770	46	1374	9279	76	0848	9608
17	2012	8790	47	1354	9272	77	0, 833	9616
18	1989	8810	48	1334	9306	78	0818	9625
19	1965	8830	49	1315	9319	79	0804	9633

III. Táblázat folytatása

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$
1,80	0,790	0,9641	2,20	0,0355	0,9861	2,80	0,0079	0,9974
81	0775	9649	22	0339	9868	82	0075	9976
82	0761	9656	24	0325	9875	84	0071	9977
83	0748	9664	26	0310	9881	86	0067	9979
84	0734	9671	28	0297	9887	88	0063	9980
85	0821	9778	30	0283	9893	90	0060	9981
86	0707	9686	32	0270	9898	92	0056	9982
87	0694	9693	34	0258	9904	94	0053	9984
88	0681	9699	36	0246	9909	96	0050	9985
89	0669	9706	38	0235	9913	98	0047	9986
1,90	0,0656	0,9713	2,40	0,0224	0,9918	3,00	0,00443	0,99865
91	0644	9719	42	0213	9922	10	00327	99903
92	0632	9729	44	0203	9927	20	00238	99931
93	0620	9732	46	0194	9931	30	00172	99951
94	0608	9738	48	0184	9934	40	00123	99966
95	0596	9744	50	0175	9938	50	00087	99976
96	0584	9750	52	0167	9941	60	00061	99984
97	0573	9756	54	0158	9945	70	00042	99989
98	0562	9761	56	0151	9948	80	00029	99993
99	0551	9767	58	0143	9951	90	00020	99995
2,00	0,0540	0,9772	2,60	0,0136	0,9953	4,00	0,000134	0,999968
02	0519	9783	62	0129	9956	50	000016	999997
04	0498	9793	64	0122	9959	5,00	000002	999997
06	0478	9803	66	0116	9961			
08	0459	9812	68	0110	9963			
10	0440	9821	70	0104	9965			
12	0422	9830	72	0099	9967			
14	0404	9838	74	0093	9969			
16	0387	9846	76	0088	9971			
18	0371	9854	78	0084	9973			

IV. Táblázat

χ^2-eloszlás

n \ p	0, 98	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,000	0,000	0,000	0,016	0,064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	0,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	0,424	2,366	3,665	4,642	6.251	7,815	9,837	11,345	16,268
4	0,297	0,429	0,711	1,054	1,649	2,195	3,357	4,878	5,909	7,779	9,488	11,668	13,277	18,465
5	0,554	0,752	1,145	1,510	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,517
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,992	15,033	16.812	22,457
7	1,239	1,564	2,162	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12.017	14.067	16.622	18,475	24,322
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,557	7,344	9,524	11,730	13,362	15,507	18,168	20,000	26.125
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	3,053	3,609	4,575	5,571	6,959	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	3,571	4,178	5,226	6.304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	4,660	5,368	5,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141	36,123
15	5,229	5,955	7,261	8,547	1,307	11,721	14,339	17,332	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,102	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,760	25,989	28,869	34,805	42,312
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	37,566	37,566	45,315
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,371	36,343	38,932	46,997
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,533	33,196	36,115	40,270	42,980	51,179
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,793
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Adott n és p esetén a táblázat alapján meghatározható az a χ^2_p, melyre $P(\chi^2 > \chi^2_p) = p$.

V. Táblázat

Student-eloszlás

p n	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,272	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,824	63,567	636,619
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	0,161	0,386	0,1886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,509	0,741	0,941	0,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,046
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,780
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,530	0,695	0,873	1,053	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,390	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,223
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,146
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,606	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,309	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,730	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,756
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,049	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,584	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,255	0,388	0,259	0,681	0,861	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Adott n és p esetén a táblázat alapján meghatározható az a t_p, melyre $P(|t| > t_p) = p$.

VI. Táblázat

Az F-próba kritikus értékei $\varepsilon = 0,05$-re

f_1 a nagyobb empirikus szórásnégyzetü minta elemszámának, f_2 pedig a másik minta elemszámának eggyel kisebbitett értéke

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	252	253	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,41	19,43	19,44	19,45	19,46	19,47	19,49	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,58	8,56	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,74	5,70	5,66	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,44	4,40	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,75	3,71	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,57	3,49	3,44	3,41	3,33	3,32	3,28	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,03	2,98	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,07	3,08	2,93	2,90	3,86	2,80	2,76	2,71
10	4,36	4,10	3,71	3,48	4,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,64	2,59	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,50	2,45	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,69	2,60	2,54	2,50	2,46	2,40	2,35	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,32	2,26	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	3,39	2,35	2,31	2,24	2,19	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,18	2,12	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	3,33	2,28	2,24	2,20	2,13	2,07	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,08	2,02	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,04	1,98	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38	2,31	2,21	2,15	2,11	2,07	2,00	1,94	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,96	1,90	1,84
21	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,91	1,84	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,98	2,62	3,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,18	2,09	2,02	1,98	1,94	1,86	1,80	1,73
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,05	2,99	1,95	1,90	1,82	1,76	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,02	1,96	1,91	1,87	1,78	1,72	1,65
32	4,15	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14	2,07	1,97	1,91	1,86	1,82	1,74	1,67	1,59
36	4,11	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10	2,03	1,93	1,87	1,82	1,78	1,69	1,62	1,59
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,65	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,56	1,59	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	3,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,81	1,75	1,70	1,65	1,56	1,48	1,39
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,85	1,75	1,68	1,63	1,57	1,48	1,39	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,80	1,69	1,62	1,57	1,52	1,42	1,32	1,19
	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,35	1,24	1,00

Kedves Jegyzetfelhasználó!

A jó jegyzet nagyon hatékony segítség a tanulásban. A legjobb jegyzeteket pedig még aktív mérnökként is használni lehet. Egyetemi tanulmányai alatt valószínűleg különböző színvonalú jegyzetekkel találkozott eddig, és fog találkozni ezután. ***Kérjük, hogy ennek a kérdőívnek a kitöltésével segítse alábbi törekvéseinket:***

- ennek a jegyzetnek a következő kiadásában kevesebb sajtóhiba legyen és indokolt esetben készüljön el az átdolgozott kiadása,
- a jegyzeteket értékelni lehessen, amelynek eredményeként a legjobb jegyzetek szerzői nívódíjat kaphatnak.

Kérjük, hogy a kiküldött kérdőívet a Jegyzetbolt bejárata (V2 földszint) mellett elhelyezett gyüjtőládába dobja be.

Fáradozását köszöni az *Egyetemi Jegyzetbizottság.*

A jegyzet címe: **VALÓSZÍNŰSÉGELMÉLET ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA Példatár**

A jegyzet szerzője: **Monostory Iván**

A jegyzet azonosítója: **0409731**

Melyik tárgyhoz használta a jegyzetet:

Kar:

Félév:

Tárgy neve:

A jegyzet hány százalékát tudta használni (pl. 75%):

A jegyzet a tárgy anyagának hány százalékát fedte le (pl. 50%):

A jegyzet minősítése:
(0: használhatatlan, 1: nagyon rossz, 2: rossz, 3: tűrhető, 4: jó, 5: nagyon jó)

Javaslat átdolgozásra:

A megtalált sajtóhibák:

(A túloldalon folytatható)