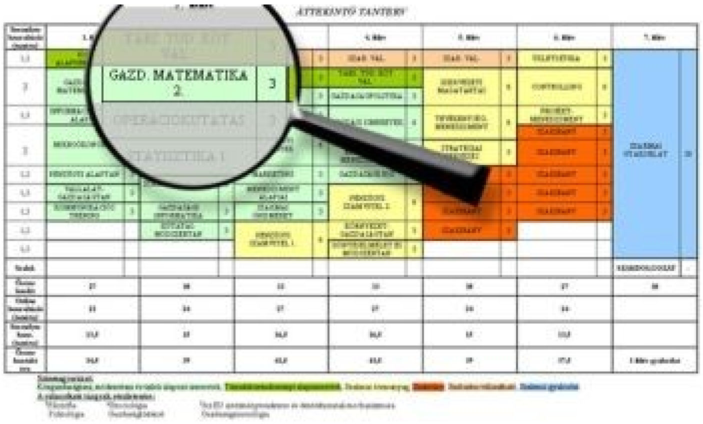
Tantárgyi útmutató

1. A tantárgy helye a szaki hálóban

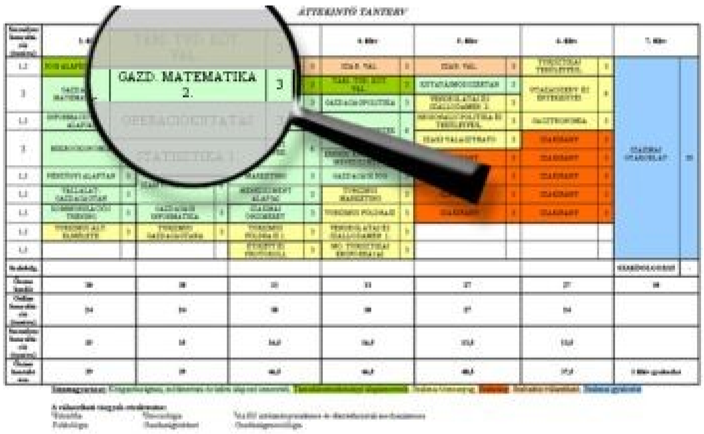
Gazdálkodási és menedzsment szakirány áttekintő tanterv

Nagyításhoz kattintson a képre!



Turizmus - vendéglátás szakirány áttekintő tanterv

Nagyításhoz kattintson a képre!



Közgazdaságtani, módszertani és üzleti alapozó modul ▷Gazdasági matematika 2.▷ Valószínűségszámítás

2. A tantárgyi program általános célja

A statisztika tantárgy egzakt matematikai megalapozása. A kombinatorika, és az eseményalgebra bevezető fejezetek feldolgozása után a sztochasztikus folyamatok és törvényszerűségeik megismerése a fő cél. Ezt a gazdasági és a mindennapi életből vett példákon keresztül mutatjuk be. Nagy hangsúlyt fektetünk a különböző eloszlástípusok megismertetésére, különös tekintettel a normális eloszlásra és a mintavételekhez illetve

független eseményekhez kapcsolódókra, mert ezek az ismeretek nélkülözhetetlenek a statisztika számos részének megértéséhez (független minta fogalma, becslés, hipotézis vizsgálat...)A fentieknek megfelelően nagyon fontosnak tartjuk a valószínűségszámítás és statisztika kapcsolódási pontjainak bemutatását (gyakoriság és valószínűség, átlag és várható érték kapcsolata, mintavételek, eloszlások,..., nagyszámok törvénye, centrális határeloszlás tétele).
A tantárgyrészletes tematikája az intrán található.

3. A tantárgyi program elsajátításához szükséges tanulmányi idő

- Személyes konzultáció: 1,5 tanóra,
- Online konzultáció (szinkron): 2 tanóra,
- Online konzultáció (aszinkron): a teljes szorgalmi időszakban,
- Egyéni tanulmányi idő: 85,5 tanóra

4. A tantárgy tartalma

A kurzus az alábbi témaköröket foglalja magában: Kombinatorika alapfogalmak és alkalmazásuk. Eseményalgebra. Valószínűség fogalma, axiómái, tételek. A klasszikus valószínűség fogalma és alkalmazásai. Geometriai valószínűség.Feltételes valószínűség, teljes valószínűség tétele, Bayes-tétel. Független kísérletek, a Bernoulli féle képlet és alkalmazása. A valószínűségi eloszlás fogalma, jellemzése eloszlásfüggvénnyel vagy valószínűségeloszlással, sűrűségfüggvénnyel, az eloszlás pontjellemzői. Nevezetes diszkrét (karakterisztikus-, egyenletes-, hipergeometrikus-, binomiális-, Poisson-, geometriai eloszlás) és folytonos eloszlások (egyenletes-, exponenciális-, normális eloszlás). Az eloszlások közötti kapcsolat bemutatása, becslési lehetőségek. Markov-, Csebisev-egyenlőtlenség, Nagy számok törvénye, centrális határeloszlás tétel.

5. A személyes konzultációk

A személyes konzultációk fókuszpontjai a vizsgára való felkészülésés a tantárgyat tanuló hallgatói csoport igényei szerint kerülnekmeghatározásra. A konzultációkra történő felkészüléshez ajánlott azegyéni haladási ütemterv szerint haladni. A konzultációs alkalmakpontos forgatókönyvét a tutorok készítik el és bocsátják hallgatóikrendelkezésére a konzultációs alkalom előtt min. 1 héttel.

6. Kötelező irodalom

- Szabó Ilona: Valószínűségszámítás, KJF, Székesfehérvár, 2005.
- Szabó Ilona: Valószínűségszámítás példatár, KJF, Székesfehérvár, 2006.

7. Ajánlott irodalom

- Solt György: Valószínűségszámítás példatár. Bolyai könyvek sorozat, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1995.
- Csernyák László:Valószínűségszámítás, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1998.
- Obádovics J. Gyula: Valószínűségszámítás ésmatematikai statisztika, 4. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest 2001.

Könyvtári kölcsönzés

A kötelező és ajánlott irodalmak a Kodolányi János Főiskola könyvtárából kölcsönözhetők. A könyvtár online katalógusa itt található.

A kívánt szakirodalom a következő adatlap kitöltésével előjegyeztethető és a konzultációs központ fiókkönyvtárában átvehető.

Könyvtári kapcsolattartók

Gazdálkodási és menedzsment szakosoknak:
Könyvtáros: Koloszárné Horinka Valéria.
Tel.: 22/543-431
e-mail cím: gazdtavokt@uranos.kodolanyi.hu

Turizmus- vendéglátás szakosoknak:
Könyvtáros: Kaltenecker Klára.
Tel.: 22/543-431
e-mail cím: ifotavokt@uranos.kodolanyi.hu

Szerző: Szabó Ilona
Szakmai lektor: Dr. Obádovics J. Gyula

Valószínűségszámítás-lexikon

0!

A 0! értéke definíció szerint 1.

Axióma

Az axiómák alkotják a matematika alapköveit. ezek olyan állítások, amelyeket nem bizonyítunk, hanem eleve igaznak fogadunk el. A valószínűségszámítás 4 ilyen "alapkőre" épül fel. (Lásd 9. lecke) Minden további állítás (tétel) bizonyításának alapját az axiómák képezik.

Bernoulli-kísérletsorozat

Bernoulli-kísérletsorozatról akkor beszélünk, ha függetlenül megismételt kísérletek mindegyikének csak két lehetséges kimenetele van, és ezen események valószínűsége a kísérletek során változatlan marad.

Binomiális eloszlás

Alkalmazás:

1. Visszatevéses mintavétel: Adott N elem, amelyek között M számú kitüntetett van. (Gyakran csak a kitüntetett elemek p = M/N részaránya ismert.) Az elemekből n-szer húzunk úgy, hogy minden húzás után a kihúzott elemet visszatesszük. A valószínűségi változó a mintában lévő kitüntetett elemek számát jelöli.
2. Bernoulli probléma (független kísérletek együttes bekövetkezése) : n számú független kísérletet végzünk. Egy- egy kísérletnél p valószínűséggel következik be a vizsgált esemény. A valószínűségi változó a vizsgált esemény bekövetkezéseinek számát jelöli n kísérlet esetén.
3. A hipergeometrikus eloszlás helyett a binomiális eloszlás képleteit alkalmazhatjuk, ha N és M elég nagyok n-hez képest.

Determinisztikus jelenség

A jelenség azonos körülmények között mindig ugyanúgy megy végbe. Például a föld felszínén elejtett test mindig g=10m/s2 gyorsulással esik a föld felé.

Diszkrét valószínűségi változó

Ha a valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok, akkor a valószínűségi változót diszkrét valószínűségi változónak mondjuk. A tanult speciális diszkrét eloszlások közül a valószínűségi változónak:

- véges sok értéke van a hipergeometrikus- és binomiális eloszlás esetében
- megszámlálhatóan végtelen sok értéke van a Poisson- és a geometriai eloszlás esetében.

Egyenletes eloszlás (folytonos)

Egyenletes eloszlás alkalmazása: A valószínűségi változó az értékeit egy (a;b) intervallumon veszi fel, és az (a;b) bármely részintervallumába esésének valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.

Egymást kizáró események

Két esemény kizárja egymást, ha egyszerre nem következhetnek be.
Példa: Húzzunk ki a magyar kártyából egyszerre 4 lapot.
A: A kihúzottak között 2 piros van
B: A kihúzottak között 3 zöld van
A és B események egymást kizárják, mert összesen csak 4 lapot húztunk.

Elemi esemény

Elemi esemény csak egyféleképpen következhet be. Jele: E Például a kockadobás egy lehetséges kimenetele, hogy hármas dobunk. Ez egy elemi esemény.

Eloszlásfüggvény

Egy valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye minden x valós számhoz hozzárendeli az x-nél kisebb értékek felvételének valószínűségét. Diszkrét és folytonos eloszlásnak is van eloszlásfüggvénye.

Események különbsége

Az A-B (ejtsd A különbség B) is esemény, amely akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik és a B nem.
Példa: Egy megbeszélésre 2 személyt várunk, Andrást és Bélát.
A: András pontosan érkezik.
B: Béla pontosan érkezik.
A - B: András pontosan érkezik és Béla nem.

Események összege

Két vagy több esemény összege is esemény, amely akkor következik be, ha az események közül legalább az egyik bekövetkezik.
Példa: Magyar kártyából húzzunk egy lapot.
A: zöldet húztunk
B: ászt húztunk
A+B: zöldet vagy ászt húztunk (a kettő közül legalább az egyik bekövetkezik).

Események szorzata

Két vagy több esemény szorzata is esemény, amely akkor következik be, ha az események mindegyike bekövetkezik.

Példa: Dobjunk a kockával kétszer. Jegyezzük le a számokat a dobás sorrendjében.
A: Mindkét dobott szám páros.
B: Mindkét dobott szám nagyobb 4-nél.
A*B : mindkét szám páros és nagyobb 4-nél, azaz mindkettő hatos.

Exponenciális eloszlás

Alkalmazás:

1. Ez az eloszlás olyan gépek és berendezések élettartamára jellemző, amelyek valamely hirtelen behatás (pl.: törés, szakadás) következtében mentek tönkre. (Tipikus példa az exponenciális eloszlásra az izzólámpa élettartama, amelyben az izzószál gyakran a ki- vagy bekapcsoláskor fellépő túláram hatására megy tönkre, azaz nem elöregedés következtében.)
2. A várakozási-, sorban állási idő is gyakran exponenciális eloszlással jellemezhető. (Például a mentő-, vagy a tűzoltó állomáson két egymást követő riasztás között eltelt idő exponenciális eloszlású.)

Feltételes valószínűség

Az A esemény B feltételre vonatkozó valószínűségénél azt vizsgáljuk, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy B már bekövetkezett. Másképpen: a B esemény bekövetkezése mennyire befolyásolja az A esemény bekövetkezését.

Független események

Két esemény függetlensége: Legyen A és B a H eseménytér két eseménye. Az A és B eseményeket függetlennek mondjuk, ha együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségének szorzatával, azaz P(A*B)=P(A)*P(B).
Megjegyzés: A definícióból látható, hogy a függetlenség szimmetrikus fogalom: ha A független B-től, akkor B is független A-tól.

Geometriai eloszlás

Alkalmazás: Végezzünk független kísérleteket. Egy-egy kísérletnél p valószínűséggel következik be a vizsgált esemény. A valószínűségi változó azt a számot jelöli, ahányadikra a vizsgált esemény először bekövetkezik.

Geometriai valószínűség

Geometriai valószínűségről akkor beszélünk, ha

- a H eseménytér egy geometriai alakzat,
- az A esemény ennek részhalmaza, és
- egy véletlen pont A tartományba esésének valószínűsége arányos az A tartomány mértékével.

A valószínűség csak az A tartomány nagyságától függ, de nem függ a H eseménytérben való elhelyezkedésétől.

Hipergeometrikus eloszlás

Alkalmazás: Visszatevés nélküli mintavétel: N számú elem van, amelyből M kitüntetett. Az N számú elemből n-szer húzunk visszatevés nélkül.

Ismétlés nélküli kombináció

Adott n különböző elem. Ezekből válasszunk ki k elemet úgy, hogy bármely elem csak egyszer választható és a kiválasztás sorrendje nem számít. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjáról beszélünk.

Ismétlés nélküli permutáció

Adott n különböző elem. Az elemek egy adott sorrendjét az n elem egy ismétlés nélküli permutációjának hívjuk.

Ismétlés nélküli variáció

Adott n különböző elem. Ezekből válasszunk ki k elemet úgy, hogy bármely elem csak egyszer választható és rendezzük őket sorba. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétlés nélküli variációjához jutunk.

Ismétléses kombináció

Adott n különböző elem. Válasszunk ki közülük k elemet úgy, hogy bármely elem többször is választható és a kiválasztás sorrendje nem számít. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétléses kombinációját kapjuk.

Ismétléses permutáció

Adott n elem, amelyek között vannak ismétlődőek (egyformák). Legyen

- az a_1 elemből k_1 számú,
- az a_2 elemből k_2 számú, ...
- az a_r elemből k_r számú.

Így tehát az elemek száma: $k_1 + k_2 + ... + k_r = n$

Ismétléses variáció

Adott n különböző elem. Válasszunk ki közülük k elemet úgy, hogy bármely elem többször is választható, majd rendezzük őket sorba. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétléses variációját kapjuk.

Komplementer esemény

Ellentett esemény. Az A esemény komplementere akkor és csak akkor következik be, ha az A esemény nem következik be. Például a kockadobásnál a páros szám dobásának komplementere a páratlan szám dobása.

Magyar kártya

32 lapból áll. Minden lapon van egy szín és egy figura.
4-féle szín van, amelyek nevei: piros, zöld, makk, tök.
Minden színből 8 lap van.
8-féle figura van, amelyek nevei: VII, VIII, IX, X, alsó, felső. király, ász.
Minden figurából 4 lap van.
Ilyen módon a lapok nevei például: zöld ász, piros király ...
Mivel nincs két teljesen egyforma lap, ezért 32 lapból áll a magyar kártya.

Medián

Pongyolán azt mondhatnánk, hogy a medián a valószínűségi változó azon értéke, amelynél kisebb és nagyobb értékek felvételének valószínűsége 50 %.
Ez a megfogalmazás azonban csak a folytonos eloszlásokra használható, a diszkrét eloszlásoknál speciális a számolás.

Megszámlálhatóan végtelen sok

Egy halmaznak megszámlálhatóan végtelen sok eleme van, ha annyian vannak, mint a pozitív egész számok, vagyis a halmaz elemei és a pozitív egész számok között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető.
Például a számsorozatok elemeinek száma megszámlálhatóan végtelen sok, mert minden n pozitív egész számhoz (az elem sorszámához) rendel egy értéket.

A valószínűségszámításban a Poisson- és geometriai eloszlások esetében a valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma megszámlálhatóan végtelen sok.

Módusz

Diszkrét eloszlás esetén a valószínűségi változó legvalószínűbb értéke. Folytonos eloszlás esetén a sűrűségfüggvény maximumhelye.

n ! (n faktoriális)

1-től n-ig az egész számok szorzatát n! -ral jelöljük és "n faktoriálisnak" mondjuk.

Normális eloszlás

Előfordulási területek:

1. Gyártási folyamatban fellépő méretingadozások.
2. Gépek és berendezések élettartama, amelyek természetes elhasználódással mennek tönkre.
3. Nagyon sok természetben, gazdaságban előforduló folyamat.

Pl.:

- Egy adott korosztályhoz tartozó gyerekek magassága.
- A görögdinnye (vagy más fajta termény) tömege.
- Egy bolt napi árbevétel vagy valamely termékből egy nap alatt eladott mennyiség.

Összetett esemény

Összetett esemény többféleképpen következhet be. Például a kockával páros számot többféleképpen is dobhatunk.

Ötös lottó

Szerencsejáték:
Egy szelvényen 90 szám van (1-90 -ig az egész számok), amiből a játékosnak 5-öt kell bejelölnie. A sorsolás során szintén 5 számot húznak ki.
A Szerencsejáték Rt. a 2, 3, 4 és 5 találatok esetén fizet a találatok számától és a nyertesek számától függően. Hetente egyszer van sorsolás.

Poisson-eloszlás

Alkalmazás:
Pont-elhelyezkedési problémák:
Adott idő intervallumon, távolságon, területen, térfogatban véletlenszerűen bekövetkező pontszerű események, amelyeknél az egyes tartományokba eső pontok számának várható értéke arányos a tartomány nagyságával.

Relatív gyakoriság

Azt mutatja meg, hogy a kísérletek hányad részében következett be a vizsgált esemény vagy a sokaság hányad része rendelkezik a vizsgálat szerinti tulajdonsággal.

Standard normális eloszlás

Ez az eloszlás a normális eloszlás egy speciális esete, ahol a várható érték 0; és a szórás 1. A standard normális eloszláshoz tartozó eloszlásfüggvény nem állítható elő elemi függvények segítségével, de közelítő értékeit táblázatba foglalták.

Sűrűségfüggvény

A folytonos valószínűségi változó F eloszlásfüggvényének első deriváltját az eloszlás sűrűségfüggvényének nevezzük, és f-fel jelöljük. Csak folytonos valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, diszkrétnek nincs.

Szórás

A szórás azt mutatja meg, hogy a valószínűségi változó értékei mennyire sűrűsödnek a várható érték körül, azaz mekkora a várható értéktől való átlagos eltérésük.

Sztochasztikus (véletlen) jelenségek

Azon jelenségek, amelyeknek azonos körülmények között többféleképpen is végbemehetnek, többféle kimenetelük is lehet. Előre nem meghatározható, hogy a lehetséges kimenetelek közül melyik fog bekövetkezni, mert a jelenség kimenetelét befolyásoló tényezők nem ismertek, vagy túlságosan bonyolultak. (Sztochasztikus jelenség például a kockadobás. Nem tudjuk előre megmondani, hogy melyik oldalára fog esni.)

Teljes eseményrendszer

Teljes eseményrendszernek nevezzük a H eseménytér olyan eseményeinek halmazát, amelyek

- páronként kizárják egymást (azaz az események közül bármely kettő kizárja egymást) és
- összegük a biztos esemény (azaz az események minden lehetséges esetet tartalmaznak).

A teljes eseményrendszer eseményei közül pontosan egy következik be bármi is a véletlen kísérlet kimenetele.

Példa: Az ötös lottó kihúzott számait vizsgáljuk:
A: Csak páros számot húztak ki.
B: Csak páratlan számot húztak ki.
C: A kihúzott számok között van páros is és páratlan is.
Az A, B, C események teljes eseményrendszert alkotnak, mert az események egymást kizárják, és tartalmaznak minden lehetséges esetet a kihúzott számokra vonatkozóan.

Totó

Szerencsejáték:
13+1 futballmeccs végeredményére lehet fogadni 1-sel, 2-sel vagy x-szel, attól függően, hogy az első csapatot, a másodikat tartjuk esélyesebbnek, illetve x-szel a döntetlenre tippelhetünk. A Szerencsejáték Rt. a találatok számától függően fizet a fogadóknak, abban az esetben, ha a találatok száma legalább 10. A +1-dik meccs találata csak akkor számít, ha előtte minden meccsre helyesen tippeltünk. Jelen tananyagban csak az első 13 meccsel fogunk foglalkozni, a +1-diket figyelmen kívül hagyjuk a feladatokban.

Valódi szám

Nem 0-val kezdődő pozitív egész szám.

Valószínűségek szorzási szabálya

A és B események együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő a B esemény valószínűségének és az A esemény B feltételre vonatkozó feltételes valószínűségének szorzatával.

Valószínűségeloszlás

Diszkrét valószínűségi változó esetén meghatározzuk a valószínűségi változó lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűséget.
Az adatokat gyakran táblázatos formában adjuk meg.

Valószínűségi változó

A H eseménytér minden elemi eseményéhez hozzárendelünk egy valós számot. Az így értelmezett függvényt valószínűségi változónak hívjuk. A feladatok szövegéből általában természetesen adódik, hogy az egyes elemi eseményekhez mely valószínűségi változó-értékek tartoznak.

Valószínűségszámítás klasszikus képlete

Legyen a H eseménytér elemi eseményeinek száma n és tegyük fel, hogy minden elemi esemény ugyanakkora valószínűséggel következik be. (Ekkor bármely elemi esemény valószínűsége 1/n) A valószínűséget úgy számoljuk, hogy a kedvező esetek számát osztjuk az összes eset számával.

Várható érték

Nagy számú kísérlet elvégzése után azt tapasztaljuk, hogy a valószínűségi változó által felvett értékek átlaga egyre kevésbé ingadozik egy számérték körül. Ezt a számértéket nevezzük az eloszlás várható értékének.

Visszatevés mintavétel

Az elemeket egyesével húzzuk ki a halmazból, feljegyezzük a (vizsgálat szerinti) jellemzőjüket. Minden elemet csak az előtte lévő visszahelyezése után húzzunk ki. Így minden húzásnál az összes elemből választunk. A kiválasztott elemek sorrendjét minden esetben figyelembe vesszük.
A visszatevés nélküli mintavétel helyett visszatevéses is alkalmazható, ha a minta elemszáma (n) sokkal kisebb az elemek (N) és a köztük lévő kitüntetettek (M) számánál.

Visszatevés nélküli mintavétel

Egy halmazból meghatározott számú elemet húzunk ki. A kihúzott elemeket nem tesszük vissza a többi közé, így a húzások során egyre kevesebb elemből választunk.
A visszatevés nélküli mintavétel helyett visszatevéses is alkalmazható, ha a minta elemszáma (n) sokkal kisebb az elemek (N) és a köztük lévő kitüntetettek (M) számánál.

Bevezető

A kombinatorika születése a szerencsejátékok születésére vezethető vissza. Már a XVI. században jelentős vagyonok cseréltek gazdát kártya- és kockajátékon a társadalom előkelő rétegeinek körében.

A titkosírások készítése és megfejtése is méltán foglalkoztatta a XVII. század nagy gondolkodóit. A tudósok - tudományos folyóiratok nem lévén - felfedezéseiket egymáshoz írt leveleikben tették közzé. A tudományos felfedezést az eredeti szöveg betűinek összekeverésével (anagramma) titkosították, hogy a levél címzettje ne tudja azt saját eredményeként továbbadni. Így egy viszonylag rövidebb mondat megfejtése is lehetetlen vállalkozásnak tűnt.
Például: aa dd eee eee h ii l mm n o r ttt tt z ?
Megfejtése: Mi lehetett az eredeti mondat?

A XIX. században már virágzott az ún. genovai lottójáték. Ez nagyon hasonlatos volt a mai ötös lottóhoz. 90 számból 5-öt húztak ki. A játékosok 1, 2, 3, 4, vagy 5 számmal játszhattak. A találat számától függően a szelvény árának előre rögzített többszörösét kapták vissza. Például ha valaki 1 számmal játszott, és azt a számot kihúzták, akkor a befizetett összeg 15-szörösét kapta vissza. (Kiszámítható, hogy 18 emberből átlagosan 1-nél lehetett találatra számítani, így 18 szelvényenként átlagosan 3 szelvény ára a rendezők zsebébe vándorolt.) Több számmal játszva még csábítóbb ajánlatokat tettek. Sok ember próbált ilyen módon meggazdagodni, de ez szinte senkinek sem sikerült.

Kombinatorikai problémák elméleti vizsgálatával Pascal és Fermat francia tudósok foglalkoztak először a XVII. században elsősorban szerencsejátékok nyereségelosztási problémáinak kapcsán. A kombinatorika illetve valószínűségszámítás további jelentős fejlődése Bernoulli, Leibniz és Euler nevéhez fűződik. Ma már szinte a tudomány minden ágában nélkülözhetetlen (informatika, fizika, biológia, minőségellenőrzés, biztosítás...).

Mivel is foglalkozik a kombinatorika?

Hányféleképpen lehet egy adott halmaz

- elemeit **sorba rendezni** $\longrightarrow$ **permutáció**
- elemeiből adott számú elemet **kiválasztani** és **sorba rendezni** $\longrightarrow$ **variáció**
- elemeiből adott számú elemet **kiválasztani** a sorrendre való tekintet nélkül $\longrightarrow$ **kombináció**

Mindhárom eset lehet **ismétléses** és **ismétlés nélküli**, attól függően, hogy a kiválasztott illetve sorba rendezett elemek között vannak-e ismétlődőek (egyformák) vagy sem.

1. lecke. Ismétlés nélküli permutáció

A permutáció adott számú elem sorba rendezését jelenti. Célunk annak a meghatározása, hogy hányféle sorba rendezés lehetséges.

Például: Egy versenyen hányféle sorrendben végezhetnek a résztvevők?

A permutáció lehet ismétléses vagy ismétlés nélküli, attól függően, hogy vannak-e a sorba rendezendő elemek között egyformák (ismétlődőek) vagy sem.

Definíció:
Adott n különböző elem. Az elemek egy adott sorrendjét az n elem egy ismétlés nélküli permutációjának hívjuk.

Az n *különböző* elem összes lehetséges sorrendjét (permutációját) P_n-nel jelöljük.

1. feladat

Egy sportversenyen 3 csapat versenyez egymással. Hányféle sorrend alakulhat ki a csapatok között, ha döntetlen nem lehetséges?

Jelöljük a csapatokat A, B, és C betűkkel.

1. feladat megoldása

A csapatokat a helyezésük szerint fadiagrammon ábrázolhatjuk:

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát a lehetséges permutációk:

$ABC \quad BAC \quad CAB$

$ACB \quad BCA \quad CBA$

Így 3 csapatnak $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ lehetséges sorrendje van.

2. feladat

Hányféle sorrend alakulhat ki négy csapat között, ha a döntetlen nem lehetséges?

2. feladat megoldása

Az első helyre 4 csapat esélyes; a 2. helyre már csak 3 befutó lehet; a 3. helyre már csak két csapat valamelyike kerülhet, és végül a 4. helyre a maradék csapat kerül.

A négy csapatnak $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lehetséges sorrendje van.

3. feladat

Hányféle sorrend alakulhat ki n számú csapat között, ha a döntetlen nem lehetséges?

3. feladat megoldása

Kattintson ide a nagyításhoz!

Az n csapat összes lehetséges sorrendjének száma:

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Definíció:
1-től n-ig az egész számok szorzatát $n!$-ral jelöljük és n faktoriálisnak mondjuk.

A 3. feladat eredményét tétel formájában is megfogalmazhatjuk:

Tétel:
Az n különböző elem összes lehetséges permutációinak száma:
$P_n = n!$

4. feladat

Egy asztalhoz leültetünk 3 fiút és 4 lányt. Hányféle sorrendben ülhetnek egymás mellé, ha semelyik két lány nem ül egymás mellett?

4. feladat megoldása

Ha semelyik két lány nem ül egymás mellett, akkor a nemek szerinti sorrend csak az alábbi módon lehetséges:

$L \quad F \quad L \quad F \quad L \quad F \quad L$

A négy lány $4!$-féleképpen, a három fiú $3!$-féleképpen ülhet le. A lányok bármely elhelyezkedése esetén a fiúk $3!$-féleképpen ülhetnek le.

Így $4! \cdot 3! = 24 \cdot 6 = 144$ ülésrend készíthető.

5. feladat

Egy vállalat a dolgozóinak belépő kártyát ad, amelynek kódja a 0, 1, 2, 3, 4, 5, számjegyek egyszeri felhasználásával készült valódi hatjegyű szám. Így éppen jutott minden dolgozónak kód. (Akkor mondunk valódinak egy számot, ha nem kezdődik nullával.)

a, Hány dolgozója van a vállalatnak?

b, Hány kódszám végződik 30-ra?

c, Hány kódszám osztható 2-vel?

5. feladat megoldása

a, Írjuk fel, hogy az egyes helyiértékekre hányféleképpen írható számjegy! A kód első helyére nem kerülhet 0, így ez a számjegy ötféleképpen választható meg. A megmaradt 5 számjegy a maradék 5 helyre tetszőleges sorrendben kerülhet. A vállalatnak tehát összesen $5 \cdot 5! = 5 \cdot 120 = 600$ dolgozója van.

b, Ha kód 30-ra végződik, akkor a kód első 4 helye az 1, 2, 4, 5 számjegyek bármely sorrendjével kitölthető. A négy különböző számjegynek $P_4 = 4! = 24$ lehetséges sorrendje van.

c, Csoportosítsuk a számokat a végződésük szerint.
Ha a szám 0-ra végződik, akkor az első 5 helyre az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek kerülhetnek tetszőleges sorrendben. A kódok száma: $P_5 = 5! = 120$

Ha a szám 2-re vagy 4-re végződik, akkor figyelni kell arra, hogy az első helyre nem kerülhet 0. Így a kódok száma: $4 \cdot 4! \cdot 2 = 192$
(Ebből 96 db kód 2-re, 96 db kód 4-re végződik.)

Tehát a kettővel osztható kódok száma: $120 + 192 = 312$

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **1.** fejezetében található **1.1** kidolgozott példákat és oldja meg a **1.3, 5-8.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

1. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - párosítás
Párosítsa össze a fogalmakat a meghatározásukkal!

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

elemekből kiválasztás és sorba rendezés	kombináció
elemekből kiválasztás, sorrend nem számít	permutáció
elemek sorba rendezése	variáció

2. feladat - egyszeres választás

Egy barátom egy hatjegyű telefonszámából csak annyira emlékezett, hogy 1, 3, 5, 6, 8 és 9 számjegyek szerepeltek benne, de arra nem, hogy milyen sorrendben. Hány telefonszám jöhet számításba? Jelölje be a jó megoldást!

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 6
( ) 32
( ) 720
( ) 6480

3. feladat - egyszeres választás

Hat barát (3 fiú és 3 lány) moziba készül. Sikerült is 6 egymás mellé szóló jegyet vásárolniuk.
Hányféleképpen ülhetnek le úgy, hogy az azonos neműek ne üljenek egymás mellett? Jelölje be a jó megoldást!

Segítség 1. lecke 3. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 10
( ) 12
( ) 72
( ) 36

4. feladat - egyszeres választás

Egy néptáncegyüttesnek 5 fiú és 5 lány tagja van. Hányféleképpen alkothatunk belőlük 5 vegyes párost? Jelölje be a jó megoldást!

Segítség 1. lecke 4. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 252
( ) 120
( ) 240
( ) 14400

5. feladat - egyszeres választás

Egy vállalat a dolgozóinak belépőkártyát ad, melynek kódja a 0, 2, 4, 5, számjegyek egyszeri felhasználásával készült négyjegyű valódi szám. Hány 5-tel osztható van a kiadott kódok között?

Segítség 1. lecke 5. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 14
( ) 24
( ) 18
( ) 10

6. feladat - egyszeres választás

Egy polcon 8 könyvet helyezünk el. A könyvek között 3 szótár van, amelyeket feltétlenül egymás mellé szeretnénk tenni. Hányféle sorrendje lehet a könyveknek ilyen módon?

Segítség 1. lecke 6. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 126
( ) 720
( ) 40320
( ) 4320

Megoldókulcs

1. feladat:	variáció - elemekből kiválasztás és sorba rendezés permutáció - elemek sorba rendezése kombináció - elemekből kiválasztás, sorrend nem számít
2. feladat:	720
3. feladat:	72
4. feladat:	120
5. feladat:	10
6. feladat:	4320

2. lecke. Ismétléses permutáció

Az ismétléses permutáció abban különbözik az ismétlés nélküli permutációtól, hogy a sorba rendezendő elemek között vannak egyformák (ismétlődőek) is.

Alkossunk például olyan 3 hosszúságú morze jeleket, amelyek 2 hosszú (**–**) és 1 rövid (·) jelből állnak.
A lehetséges esetek:
——.
—.—
.——

Definíció:
Adott n elem, amelyek között vannak ismétlődőek (egyformák).
Legyen az a_1 elemből k_1 számú,
az $a_2$elemből k_2 számú,
...
az a_r elemből k_r számú.
Így tehát az elemek száma: $k_1+k_2+...+k_r=n$

Az ilyen módon megadott elemek egy meghatározott sorrendjét az elemek egy ismétléses permutációjának nevezzük. Jelölje az ismétléses permutációk számát az alábbi szimbólum: $P_n^{(k_1,k_2,...k_r)}$

1. feladat

Melyikből van több eset?

a, 4 vizsgázónak 4 különböző feladatsort osztunk ki (Például: A, B, C, D jelű feladatsorokat)

vagy

b, 4 vizsgázónak 1 db A jelű és 3 db B jelű feladatsort osztunk ki.

1. feladat megoldása

a, Ismétlés nélküli permutáció:
A 4 különböző dolgozat kiosztásának összes lehetséges sorrendje: $P_4 = 4! = 24$

b, Ismétléses permutáció:
A lehetséges esetek:
A B B B   B A B B   B B A B   B B B A

Az ismétléses permutációból kevesebb van. Mivel magyarázható ez?

Cseréljük ki a 3 darab B jelű dolgozatot 3 különbözőre (B, C, D)!

Ismétléses permutációk	A B B B	B A B B	B B A B	B B B A
Ismétlés nélküli permutációk	A B C D A B D C A C B D A C D B A D B C A D C B	B A C D B A D C C A B D C A D B D A B C D A C B	B C A D B D A C C B A D C D A B D B A C D C A B	B C D A B D C A C B D A C D B A D B C A D C B A

Látható, hogy az esetek száma $3! = 6$-szorosára nő, ha a 3 egyforma dolgozatot különbözőre cseréljük, bárki is kapja az A jelű feladatsort. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az ismétléses permutációk száma 1/6-része az ismétlés nélkülieknek, ha az elemek között 3 egyforma van:

Az 1 db A jelű és 3 db B jelű feladatsor ismétléses permutációinak jelölése: $P_4^{(3,1)}$

Az ismétléses és ismétlés nélküli permutáció közti kapcsolat:
$P_4^{(3,1)} \cdot 3! = P_4$, amelyből $P_4^{(3,1)} = \frac{P_4}{3!} = \frac{4!}{3!} = 4$

2. feladat

Egy páncélszekrény zárjának 9 jegyű kódjáról a betörőknek azt sikerült kideríteniük, hogy 2 darab 1-es, 3 darab 3-as és 4 darab 6-os szerepel benne. Hányféle kód jöhet számításba?

2. feladat megoldása

Az ismétlődő számjegyek miatt ez **ismétléses permutáció**. A lehetséges esetek számát $P_9^{(2,3,4)}$ szimbólummal jelölhetjük.

Az ismétlődő számjegyeket különbözőre cserélve keressünk kapcsolatot az ismétléses és ismétlés nélküli permutációk száma között.

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát $P_9^{(2,3,4)} = \frac{9\,!}{2\,!\cdot 3\,!\cdot 4\,!} = 1260$ különböző kód lehetséges.

Általánosítsuk az előző feladatban kapott eredményt.

Tétel:
Adott n elem, amelyek között
az a_1 elemből k_1 számú,
az a_2 elemből k_2 számú,
...
az a_r elemből k_r számú van.
Ekkor az elemek összes lehetséges sorrendjének száma:
$$P_n^{(k_1,k_2,\dots k_r)} = \frac{n\,!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\dots\cdot k_r!}$$

Bizonyítás:

Ha a k_1 számú a_1 elemet különbözőre cseréljük, akkor a többi elem bármely rögzített sorrendje esetén $k_1!$ különböző sorrendet kapunk. Így az esetek száma a $k_1!$-szorosára nő. A többi ismétlődő elemet is különbözőre cserélve a permutációk száma rendre $k_2!$-szorosára,... $k_r!$-szorosára nő. Az összes ismétlődő elemet különbözőre cserélve az ismétlés nélküli permutációkhoz jutunk.

Tehát az ismétléses és ismétlés nélküli permutációk száma között az alábbi összefüggés van:
$$P_n^{(k_1,k_2,\dots k_r)}\cdot k_1!\cdot k_2!\cdot\dots\cdot k_r! = n\,!$$
amiből átrendezéssel:

$$P_n^{(k_1,k_2,\dots k_r)} = \frac{n\,!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\dots\cdot k_r!}$$

3. feladat

Egy ügyességi versenyen 11 fős csapatok vesznek részt. Minden csapatból 2 főnek csónakversenyen kell részt venni, 5 főnek kunyhót kell készíteni, 1 főnek fára kell mászni és 3 főnek hidat kell ácsolni. Hányféleképpen oszthatók ki a feladatok a csapattagok között?

3. feladat megoldása

Képzeljük el, hogy sorshúzással döntik el, hogy ki milyen feladatot végezzen. Egy kalapba betesznek
2 darab CS betűt (csónak),
5 darab K betűt (kunyhó),
1 darab M betűt (mászás),
3 darab H betűt (hídépítés).

A csapattagok egyesével húznak a betűkből. Annyiféleképpen oszthatók ki a feladatok a csapattagok között, ahányféle lehetséges sorrendje lehet a betűknek. Ez 11 betű sorba rendezése, amelyek között 2, 5, 1, 3 darab egyforma van, ezért

$$P_{11}^{(2,5,1,3)} = \frac{11\,!}{2\,!\cdot 5\,!\cdot 1\,!\cdot 3\,!} = 27\ 720$$

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **1.** fejezetében található **1.2** kidolgozott példákat és oldja meg a **1.15-19.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

2. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- igaz
- hamis

Igaz vagy hamis?

Azonos számú elem sorba rendezésekor mindig kevesebb lehetőség van akkor, ha minden elem különböző, mint akkor, ha vannak köztük ismétlődőek is. (1)................

Ha az elemek között van 2 egyforma és a többi különböző, akkor a permutációk száma kétszerese annak, mintha mind különböző lenne. (2)................

Ha az elemek között van 4 egyforma és a többi különböző, akkor a permutációk száma negyedrésze annak, mintha mind különböző lenne. (3)................

Ha az elemek között van 3 egyforma és a többi különböző, akkor a permutációk száma hatodrésze annak, mintha mind különböző lenne. (4)................

2. feladat - egyszeres választás

Hányféle 5 hosszúságú morzejel készíthető 2 rövid és 3 hosszú jelből?

Segítség 2. lecke 2. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 15
( ) 10
( ) 120
( ) 12

3. feladat - egyszeres választás

Húsvétra 3 különböző képeslapot vettünk, az egyes fajtákból rendre 2, 3 illetve 5 darabot. Hányféleképpen küldhetjük el őket 10 ismerősünknek?

Segítség 2. lecke 3. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 1440
( ) 28350
( ) 2520

( ) 3628800

4. feladat - egyszeres választás

Szabályos dobókockával 12-szer dobtunk, ebből 3 darab egyes, 2 darab kettes, 4 darab hármas, 2 darab négyes és 1 darab hatos volt.
Hányféle sorrendben következhettek a dobott számok egymás után?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 8316
( ) 576
( ) 831600
( ) 3685760

5. feladat - egyszeres választás

Hányféleképpen olvasható ki a MATEMATIKA szó az alábbi ábráról, ha a betűk összeolvasásakor csak jobbra vagy lefelé haladhatunk?

M	A	T	E	M
A	T	E	M	A
T	E	M	A	T
E	M	A	T	I
M	A	T	I	K
A	T	I	K	A

Segítség 2. lecke 5. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 24
( ) 126
( ) 151200
( ) 3628800

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - hamis (2) - hamis (3) - hamis (4) - igaz
2. feladat:	10
3. feladat:	2520
4. feladat:	831600
5. feladat:	126

3. lecke. Variáció

A **variáció** különböző elemek közül adott számú elem **kiválasztását és sorba rendezését** jelenti.
Célunk annak meghatározása, hogy hányféleképpen tehető ez meg.

Például: hányféleképpen lehet egy 10 fős társaságból 3 főt kiválasztani egy elnöki, egy elnökhelyettesi és egy titkári posztra? (A különböző tisztséggel a kiválasztottak között egyben egy sorrendet is felállítunk.)

A variáció lehet **ismétléses** és **ismétlés nélküli**, attól függően, hogy a kiválasztásnál megengedjük-e, hogy az elemek többször is választhatók legyenek vagy sem.

1. Ismétlés nélküli variáció

Adott n különböző elem. Ezekből válasszunk ki k elemet $(0<k\leq n)$ úgy, hogy bármely elem csak egyszer választható, majd rendezzük őket sorba. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétlés nélküli variációjához jutunk.

Az n elem összes k-adosztályú ismétlés nélküli variációjának számát V_n^k szimbólummal jelöljük.

1. feladat

5 különböző szín felhasználásával hány háromszínű zászló készíthető? (A zászló csíkjai legyenek különböző színűek!)

1. feladat megoldása

Vegyük sorba, hogy az egyes csíkoknál hányféle színből választhatunk! Az első csík színezésénél 5 színből választhatunk; a 2. csíknál csak a maradék 4 színből; a 3. csíkot már csak 3-féle színnel színezhetjük.

Tehát a lehetséges esetek száma: $V_5^3=5\cdot4\cdot3=\frac{5!}{2!}=60$

2. feladat

Egy rejtvénypályázatra 100 helyes megfejtés érkezett. A megfejtők között 10 különböző ajándékot (póló, kerékpár, fényképezőgép, ... autó) sorsolnak ki a megadott sorrendben. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak?

2. feladat megoldása

A 100 megfejtőből választanak ki 10-et. A kihúzottak sorrendje is számít, mert nem azonosak az ajándékok. (Az első kihúzott valószínűleg sajnálni fogja, hogy nem tizedikre húzták inkább ki.)

Az első nyertest 100 megfejtőből, a másodikat 99-ből húzzák ki stb. A 10. húzásnál már csak 91-ből sorsolnak, és végül 90 megfejtőt nem jutalmaznak. Tehát a sorsolás lehetséges kimeneteleinek száma:

$$V_{100}^{10}=100\cdot99\cdot98\cdot\ldots\cdot91$$

Bővítsük a kifejezést 90!-ral, ekkor a számláló értéke 100! lesz.

$$V_{100}^{10}=100\cdot 99\cdot 98\cdot\ldots\cdot 91=\frac{100\,!}{90\,!}$$

3. feladat

Általánosítsuk a 2. feladatot! Egy rejtvénypályázatra n helyes megfejtés érkezett. A megfejtők között k **különböző** ajándékot sorsolnak ki.
Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak?

3. feladat megoldása

Az előző feladathoz hasonlóan vizsgáljuk meg, hogy az egyes nyereményekre hány megfejtőből sorsolnak.

Az első ajándékot n, a 2.-at $(n-1)$, ... a k. ajándékot $(n-k+1)$ megfejtő közül sorsolják ki. Végül $(n-k)$ olyan megfejtő marad, aki nem kap ajándékot.

Tehát a sorsolás lehetséges kimenetelinek száma:
$$V_n^k=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n\,!}{(n-k)\,!}$$

Bővítsük a törtet $(n-k)!$-val. Ekkor a számlálóban $n!$ lesz:
$$V_n^k=\frac{n\,!}{(n-k)\,!}$$

A 3. feladat végeredményét tétel formájában is megfogalmazhatjuk.
Tétel:
Az n különböző elemből k kiválasztására és sorba rendezésére $V_n^k=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n\,!}{(n-k)\,!}$ lehetőség van, ha bármely elem legfeljebb egyszer választható.

2. Ismétléses variáció

Definíció:
Adott n különböző elem. Válasszunk ki közülük k elemet úgy, hogy bármely elem többször is választható, majd rendezzük őket sorba.
Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétléses variációját kapjuk.

Az n elem összes lehetséges k-adosztályú ismétléses variációjának számát $V_n^{k(i)}$ szimbólummal jelöljük.

4. feladat

Egy 6 kérdésből álló teszt minden kérdésére 4 lehetséges választ adtak, amelyekből csak egy a helyes. Hányféleképpen tölthető ki a teszt?

4. feladat megoldása

Minden kérdésnél 4 választási lehetőség van. Az 1. és 2. kérdésre $4 \cdot 4 = 16$-féle válasz adható, mert az első kérdés bármely válasza esetén 4-féleképpen adható válasz a 2. kérdésre. Minden további kérdésnél az esetek száma a 4-szeresére nő. Tehát a tesztnek $V_4^{6(i)} = 4^6 = 4096$ különböző kitöltése van.

5. feladat

Általánosítsuk az előző feladatot!
Egy k kérdésből álló teszt minden kérdésére n lehetséges választ adtak, amelyekből csak egy a helyes.
Hányféleképpen tölthető ki a teszt?

5. feladat megoldása

Minden kérdésnél n választási lehetőség van. Az 1. és 2. kérdésnél $n \cdot n = n^2$-féle lehetőség adódik, mert az első kérdésre adott bármely válasz esetén, n-féle lehet a 2. kérdésre adott válasz. Minden további kérdésnél az esetek száma az n-szeresére nő.
Tehát a tesztnek $V_n^{k\ (i)} = n^k$ különböző kitöltése van.

A feladat végeredményét tétel formájában is megfogalmazhatjuk.
Tétel:
Az n különböző elemből k kiválasztására és sorba rendezésére $V_n^{k\ (i)} = n^k$ lehetőség van, ha bármely elem többször is választható.

6. feladat

Hány totószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy valamelyik szelvényen biztosan legyen 13 találatunk? (Most a +1. sort nem vesszük figyelembe!)

6. feladat megoldása

Minden mérkőzésre háromféle tippünk lehet: 1, 2 vagy x.
Így az első 13 sor $V_3^{13\ (i)} = 3^{13} = 1\ 594\ 323$ különböző módon tölthető ki.
Ezekből csak egy szelvényen van 13 találat, ezért 1 594 323 totószelvény kitöltése szükséges ahhoz, hogy biztosan legyen 13 találatunk.

7. feladat

Egy kockát feldobunk egymás után ötször, a számokat lejegyezzük a dobás sorrendjében. Hány különböző dobássorozatot kaphatunk?

7. feladat megoldása

Bármelyik dobásnak 6-féle kimenetele lehet, így az összesen $V_6^{5\ (i)} = 6^5 = 7776$

dobássorozat lehetséges.

8. feladat

A magyar autók rendszámtáblái 3 betűből és 3 számból állnak. A rendszámtábla készítéséhez 25 betűt és 10 számjegyet használnak fel. A betűk és a számok bármely ismétlődése megengedett.

a, Hány autóra elegendő rendszám készíthető?

b, Hány olyan rendszám van, amely pontosan egy 4-es számjegyet tartalmaz?

c, Hány olyan rendszámtábla van, amelyben vannak ismétlődő betűk?

8. feladat megoldása

a, Minden betű 25-féleképpen, minden számjegy 10-féleképpen választható meg. Így a 3 betű összesen 25^3-féleképpen választható meg, ha a betűk bármely ismétlődése megengedett. Bármely betű-hármashoz $10^3=1000$ számhármas adható. Így összesen $25^3 \cdot 10^3=15\ 625\ 000$ rendszám adható ki.

b, A 4-es számjegy helye 3-féle módon választható meg. Vizsgáljuk meg először azt az esetet, ha a 4-es az utolsó helyre kerül.

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát a betűket 25-féleképpen, a 4-estől különböző számjegyeket 9-féleképpen lehet megválasztani. A 4-es számjegy 3 helyre kerülhet. Így összesen $3 \cdot 25^3 \cdot 81=3\ 796\ 875$ egy 4-es számjegyet tartalmazó rendszám adható ki.

c, Az ismétlődő betűt tartalmazó rendszámok számát úgy is megkaphatjuk, ha az összes rendszámból kivesszük azokat, amelyeknél minden betű különböző (vagyis nincs ismétlődés).

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát összesen: $25^3 \cdot 10^3-25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10^3=15\ 625\ 000-13\ 800\ 000=1\ 825\ 000$ olyan rendszámtábla van, amelyben nincsenek ismétlődő betűk.

9. feladat

4 szomszédos házat akarunk befesteni. 6 különböző színt használhatunk fel, de a szomszédos házak nem lehetnek azonos színűek. Hányféleképpen festhetjük a házakat?

9. feladat megoldása

Haladjunk sorba a házakon, és minden háznál ügyeljünk arra, hogy a színe ne legyen azonos a szomszédjával.

Az első háznál még 6 színből választhatunk, de a többi háznál már csak 5-ből, mert nem festhetjük az előtte lévő ház színére. Így $6 \cdot 5^3 = 750$ színsorrend lehetséges.

10. feladat

A 3-mal kezdődő hatjegyű telefonszámok között hány olyan van, amelyben van legalább egy 5-ös számjegy? (A telefonszámban a számjegyek ismétlődhetnek.)

10. feladat megoldása

A legalább egy 5-öst tartalmazókat úgy is megkaphatjuk, ha az összes telefonszámból kivesszük azokat, amelyek nem tartalmaznak 5-öst.

Összesen 10^5 db 3-mal kezdődő telefonszám van, mert minden számjegy 10-féleképpen választható meg.
Az 5-öst nem tartalmazók esetében minden számjegy 9-féleképpen választható ki, így ezek száma: 9^5.
Tehát az 5-öst tartalmazó telefonszámok száma: $10^5 - 9^5 = 40\ 951$

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **1.** fejezetében található **1.3-4.** kidolgozott példákat és oldja meg a **1.20-25, 27-35**. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

3. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Írja fel az alábbi szorzatot tört alakban a faktorjelek felhasználásával!

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 =$

számláló: (1)................

nevező: (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - egyszeres választás
Egy főiskola a 8 legeredményesebb tanulójából választja ki azt a hármat, akik ösztöndíjjal 3 különböző külföldi egyetemre mehetnek. Egy tanuló nem kaphat több ösztöndíjat. Hányféleképpen oszthatók ki az ösztöndíjak?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 512
( ) 40320
( ) 336
( ) 21

3. feladat - egyszeres választás
Egy előadóteremben 98 hely van, 58 diák vesz részt az előadáson. Hányféleképpen foglalhatják el a helyeket?

Segítség 3. lecke 3. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) $98! \cdot 58!$
( ) $\frac{98!}{40!}$
( ) 98^{58}
( ) 58^{98}

4. feladat - egyszeres választás
Hányféle dobássorozat jöhet létre, ha egy pénzérmét feldobunk 8-szor egymás után?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 56
( ) 20160
( ) 256
( ) 64

5. feladat - egyszeres választás
A 4. feladat dobássorozatai közül hány olyan van, amely 2 fejből és 6 írásból áll?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 28
( ) 64
( ) 56
( ) 1

6. feladat - szókitöltés
Egy városnak 3-sal kezdődő hétjegyű telefonszámai vannak.

Hány előfizetőnek tudnak így vonalat biztosítani? (1)................
Hány olyan telefonszám van, amelyben a szomszédos számjegyek különbözőek? (2)................
Hány olyan telefonszám van, amelyben van legalább egy páros számjegy? (3)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

7. feladat - szókitöltés
Egy hölgy mindig 3 különböző gyűrűt visel, a gyűrűket sosem húzza a hüvelykujjaira.

Hányféleképpen veheti fel őket, ha mindegyik gyűrűt más-más ujjára húzza fel? (1)................
Hányféleképpen veheti fel őket, ha egy ujjára több gyűrűt is felhúzhat? (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 10! (2) - 5!
2. feladat:	336
3. feladat:	$\frac{98!}{40!}$

4. feladat:	256
5. feladat:	28
6. feladat:	(1) - 1000000 (2) - 531441 (3) - 984375
7. feladat:	(1) - 336 (2) - 512

4. lecke. Ismétlés nélküli kombináció

A **kombináció** különböző elemek közül adott számú elem kiválasztását jelenti (sorrendre való tekintet nélkül). Célunk annak meghatározása, hogy hányféle kiválasztás lehetséges.

Például: hányféleképpen tölthető ki az ötöslottó szelvénye?

A kombináció lehet **ismétléses** vagy **ismétlés nélküli**, attól függően, hogy a kiválasztásnál megengedjük-e, hogy az elemek többször is választhatók legyenek vagy sem.
Definíció:
Adott n különböző elem. Ezekből válasszunk ki k elemet $(0<k\leq n)$ úgy, hogy bármely elem csak egyszer választható, és a kiválasztás sorrendje nem számít. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjáról beszélünk.

Az n elem összes k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának számát C_n^k szimbólummal jelöljük.

1. feladat

Egy áruház 2 raktárost szeretne felvenni. A hirdetésre 5 fő jelentkezett (András , Béla, Csaba, Dénes és Elemér). Hányféleképpen választható ki közülük a 2 raktáros?

1. feladat megoldása

A jelentkezőknek azonos munkakört kell betölteniük, így nem kell köztük sorrendet képezni. Tegyünk a felvettek nevéhez $+$ jelet, a többiek nevéhez **–** jelet.

	András	Béla	Csaba	Dénes	Elemér
1.	+	+	-	-	-
2.	+	-	+	-	-
3.	+	-	-	+	-
4.	+	-	-	-	+
5.	-	+	+	-	-
6.	-	+	-	+	-
7.	-	+	-	-	+
8.	-	-	+	+	-
9.	-	-	+	-	+
10.	-	-	-	+	+

A lehetséges eseteket 2 darab $+$ és 3 darab $-$ jel összes lehetséges sorba rendezésével kaptuk.
A feladatot az ismétléses permutációra vezettük vissza, ahol az elemek között 2 illetve 3 darab ismétlődő van. Így az összes lehetséges eset: $C_5^2 = P_5^{(2,3)} = \frac{5\,!}{2\,!\cdot 3\,!} = 10$

2. feladat

Általánosítsuk az 1. feladatot.
Egy áruház k raktárost szeretne felvenni. A hirdetésre n fő jelentkezett.
Hányféleképpen tölthetők be az állások?

2. feladat megoldása

A kiválasztott jelentkezők mellé $+$, a többiek mellé - jelet írva egy jelsorozatot kapunk, amely k darab $+$ és $(n-k)$ darab $-$ jelből áll. Az összes lehetséges kiválasztást a k darab $+$ és az $(n-k)$ darab $-$ jel ismétléses permutációi határozzák meg.

$$C_n^k = P_n^{(k,n-k)} = \frac{n\,!}{k\,!\cdot (n-k)\,!}$$

Az ismétlés nélküli kombinációk számának jelölésére bevezetjük az alábbi $\binom{n}{k}$ szimbólumot:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\cdot (n-k)\,!}$$ (Olvasd: n alatt a k)

A 2. példa végeredményét tétel formájában is megfogalmazhatjuk.
Tétel:
Adott n különböző elem, amelyből k különböző elemet választunk ki a sorrendre való tekintet nélkül. Ekkor az összes lehetséges ismétlés nélküli kombináció száma:

$$C_n^k = \frac{n\,!}{k\,!\cdot (n-k)\,!} = \binom{n}{k}$$

3. feladat

Hányféleképpen tölthető ki az ötös lottó szelvénye?

3. feladat megoldása

A játékosoknak 5 számot kell a szelvényen kiválasztani, és a kiválasztott számokat nem kell sorba rendezni. (Pl.: Nem kell eltalálni, hogy milyen sorrendben fogják őket kihúzni.) Így ismétlés nélküli kombinációról van szó.
- 90 számból választunk, ezért $n=90$;
- 5 számot kell kiválasztani, sorrendre való tekintet nélkül, ezért $k=5$.

Tehát $C_{90}^{5}=\binom{90}{5}=\frac{90\ !}{5\ !\cdot 85\ !}=\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5\ !}=43\ 949\ 268$ lehetséges kitöltése van az ötös lottónak.
Másképp megfogalmazva: ennyiféle kimenetele lehet a sorsolásnak.

4. feladat

Egy főiskolán 25 hallgatót jelöltek ösztöndíjra, de csak hármat választhatnak ki közülük a külföldi tanulmányi útra.
Az alábbi esetek közül melyikben van többféle ösztöndíjkiosztási lehetőség, és hányszor több:

a, ha a hallgatók azonos helyre nyerik az ösztöndíjat,

vagy

b, ha a 3 tanuló 3 különböző helyre megy?

4. feladat megoldása

Ha a hallgatók azonos helyre mennek, akkor csak kiválasztás van sorrendre való tekintet nélkül. Ha viszont különböző helyre mennek, akkor nem csak kiválasztani kell őket, hanem sorba is kell őket rendezni (beosztani a különböző helyekre).

Kattintson ide a nagyításhoz!

a, Ismétlés nélküli kombináció: $C_{25}^{3}=\binom{25}{3}=\frac{25\ !}{3\ !\cdot 22\ !}=2300$

b, Ismétlés nélküli variáció: $V_{25}^{3}=25\cdot 24\cdot 23=\frac{25\ !}{22\ !}=13\ 800$

Látható, hogy variációból $3!$-szor több van mint kombinációból, mert nem csak kiválasztani kell a hallgatókat, hanem sorba is kell őket rendezni.

5. feladat

Egy színtársulat 4 női és 3 férfi szerepre statisztákat keres. A hirdetésre 8 nő és 9 férfi jelentkezett. Hányféleképpen választhatók ki a szereplők?

5. feladat megoldása

A nők kiválasztására $C_8^4=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$-féle lehetőség van, a férfiakéra $C_9^3=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!\cdot 6!}=84$.

Bármely 4 női szereplőhöz 84-féle módon választható 3 férfi szereplő. Így összesen $\binom{8}{4}\cdot\binom{9}{3}=70\cdot 84=5880$-féle választási lehetőség van.

6. feladat

Egy iskolák közötti városi kosárbajnokságra 18 csapat nevezett be. Minden csapat minden csapattal egyszer játszik. Hány mérkőzést kell lejátszani?

6. feladat megoldása

Mind a 18 csapat 17 másik csapattal játszik. Ez $18\cdot 17=306$ mérkőzés lenne, de minden mérkőzést kétszer számoltunk meg (mindkét ellenfélnél), ezért ezt a számot osztani kell kettővel.
Tehát a mérkőzések száma: 153.
Ehhez az eredményhez akkor is eljutunk, ha megnézzük, hogy a 18 csapatból hányféleképpen lehet kettőt kiválasztani: $C_{18}^2=\binom{18}{2}=\frac{18!}{2!\cdot 16!}=\frac{18\cdot 17}{2}=153$.

7. feladat

Egy 12 főből álló munkacsoport tagjaiból egy 2 fős, egy 4 fős és 2 darab 3 fős csoportot kell alkotni különböző munkák elvégzésére. Hányféleképpen alakíthatók ki a csoportok?

7. feladat megoldása

Válasszuk ki sorban az egyes csoportokba a tagokat!

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát az összes kiválasztási lehetőség:
$$\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}=\frac{12!}{2!\cdot 10!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot 1=\frac{12!}{2!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3!}=277\ 200$$

Megjegyzés: 3 főből 3-at kiválasztani nyilvánvalóan egyféleképpen lehet, ezért $\binom{3}{3}=1$.
Definíció szerint a $\binom{3}{3}=\frac{3!}{3!\cdot 0!}$. Ez a kifejezés akkor ad csak 1-et, ha a $0!=1$. Állapodjunk meg tehát abban, hogy a $0!$ értékét 1-nek tekintjük!
$0!=1$

A definícióból következik, hogy bármely pozitív egész n-re

$$\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=\frac{n!}{n!\cdot 0!}=1.$$

Vagyis n elemből n-et is és 0-át is egyféleképpen lehet kiválasztani.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **1.** fejezetében található **1.5.** kidolgozott példákat és oldja meg a **1.39, 40, 42, 43, 44, 47, 49.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

4. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés

Melyik törttel egyenlő: $\binom{32}{8}$**?**

A számlálót és a nevezőt a faktoriálisokkal fejezze ki!

számláló: (1)................

nevező: (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
A piacon egy árusnak 15 dinnyéje van, amelyből 3 dinnyét vásároltunk.

Hányféleképpen választhattunk a gyümölcsökből? (1)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - egyszeres választás
A buszjegyre 9 négyzet van felrajzolva $3X3$**-as elrendezésben. A buszjegy kezelő automata ezen 3 lyukat üt. Hányféle jegylyukasztás lehetséges?**

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 729
( ) 48
( ) 504
( ) 84

4. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- A
- B

Egy rejtvénypályázatra 85 helyes megfejtés érkezett. A megfejtők között 5 ajándékot sorsolnak ki. Melyik esetben van több díjkiosztási lehetőség és hányszor több?

A - Ha a díjak egyformák.
B - Ha a díjak különbözőek.

A(z) (1)................ eset (2)................-szorosa a(z) (3)................ esetnek.

5. feladat - egyszeres választás
Hányféleképpen lehet az ötös lottót kitölteni úgy, hogy 2 öttel osztható legyen a számok

között?

Segítség 4. lecke 5. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 59793
( ) 14048100
( ) 987770
( ) 9124920

6. feladat - egyszeres választás
Egy kézilabdaversenyre 12 csapat nevezett be. Minden csapat minden csapattal egyszer játszott. Hány mérkőzést kellett lejátszani?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 144
( ) 24
( ) 132
( ) 66

7. feladat - szókitöltés
Egy fogadáson mindenki mindenkivel kezet fogott, így összesen 120 kézfogás volt. Hányan vettek részt a fogadáson?

Segítség 4. lecke 7. önellenőrző feladat

A fogadáson résztvevők száma: (1)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 32! (2) - 8!*24!
2. feladat:	(1) - 455
3. feladat:	84
4. feladat:	(1) - B (2) - 120 (3) - A
5. feladat:	9124920
6. feladat:	66
7. feladat:	(1) - 16

5. lecke. Ismétléses kombináció

Adott n különböző elem. Válasszunk ki közülük k elemet úgy, hogy bármely elem többször is választható, de a kiválasztás sorrendje nem számít. Ekkor az n elem egy k-adosztályú ismétléses kombinációját kapjuk.

Az n elem összes lehetséges k-adosztályú ismétléses kombinációinak számát $C_n^{k(i)}$ szimbólummal jelöljük.

1. feladat

Egy fagyizóban 3-féle fagyi kapható (csoki, citrom, eper). Egy 4 gombócos fagyit rendelünk. Hányféleképpen rendelhetünk, ha egy fajtából több is választható?

1. feladat megoldása

Írjunk annyi $+$ jelet, ahány csokist választunk, és írjunk utána egy 0-át. Majd írjunk annyi $+$ jelet, ahány citromost választunk, és ismét írjunk egy 0-át. Végül írjunk annyi $+$ jelet, ahány eprest választunk. A 0-ák az elválasztójel szerepét töltik be. Így minden esetben 4 darab $+$ és 2 darab 0-ból álló jelsorozatunk van.
Írjuk fel az összes lehetséges választási lehetőséget:

	csoki		citrom		eper
1.	+ + + +	0		0	
2.		0	+ + + +	0	
3.		0		0	+ + + +
4.	+ + +	0	+	0	
5.	+ + +	0		0	+
6.	+	0	+ + +	0	
7.		0	+ + +	0	+
8.	+	0		0	+ + +
9.		0	+	0	+ + +
10.	+ +	0	+ +	0	
11.	+ +	0		0	+ +
12.		0	+ +	0	+ +
13.	+ +	0	+	0	+
14.	+	0	+ +	0	+
15.	+	0	+	0	+ +

4 darab $+$ jel és a 2 darab 0 lehetséges sorrendjeivel előállítottuk az összes rendelési lehetőséget. A feladat az ismétléses permutációra vezethető vissza, ahol 6 elemből 4, illetve 2 azonos.

$$C_3^{4(i)} = P_6^{(4,2)} = \frac{6\,!}{4\,!\cdot 2\,!} = \frac{5\cdot 6}{2} = 15$$

2. feladat

Általánosítsuk az 1. példát!
Egy fagyizóban n-féle fagyi kapható, amelyekből egy k gombócos fagyit rendelünk. Hányféleképpen rendelhetünk, ha egy fajtából több is választható?

2. feladat megoldása

Mindegyik fajtához tegyünk annyi $+$ jelet, ahányat választottunk belőle. Válasszuk el 0-val a $+$ jeleket egymástól az 1. példában megadott módon. Így k darab $+$ jelből és $(n-1)$ darab 0-ból álló jelsorozatokat kapunk. Különböző jelsorozatokhoz különböző kiválasztások tartoznak. Az összes lehetséges esetet a $+$ jelek és 0-ák ismétléses permutációi adják. Összesen $(k+n-1)$ jelet rendezünk sorba, amelyek között k darab illetve $(n-1)$ darab ismétlődő van:

$$C_n^{k(i)} = P_{k+n-1}^{(k,n-1)} = \frac{(k+n-1)\,!}{k\,!\cdot(n-1)\,!} = \binom{n+k-1}{k}$$

A 2. példa eredményét tétel formájában is megfogalmazhatjuk:

Adott n különböző elem, amelyből k elemet választunk ki úgy, hogy bármely elem többször is választható, de a sorrend nem számít.
Ekkor az összes lehetséges kiválasztás (ismétléses kombináció) száma:

$$C_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$$

3. feladat

Egy cukrászdában 8-féle sütemény kapható. Egy születésnapi bulira 20 süteményt rendelünk.

a, Hányféleképpen rendelhetők meg a sütemények?

b, Hányféleképpen rendelhetünk, ha minden süteményből választunk legalább egyet?

3. feladat megoldása

a, A sütemények kiválasztásának sorrendje nem számít, de bármelyikből több is választható. Ezért ismétléses kombinációról van szó. (Vegyük észre, hogy nem megoldható a feladat, ha minden fajtából legalább egyet akarunk választani.) 8-féle süteményből választhatunk, ezért $n=8$;
20-szor választhatunk, ezért $k=20$.

Tehát az ismétléses kombinációk száma:

$$C_8^{20(i)} = \binom{8+20-1}{20} = \binom{27}{20} = \frac{27\,!}{7\,!\cdot 20\,!} = 888\ \ 030$$

b, A feladat feltételét úgy tudjuk teljesíteni, hogy először mind a 8 süteményből veszünk egyet. A hiányzó 12 süteményt tetszőlegesen választhatjuk ki a 8-féléből. Így olyan ismétléses kombinációra vezetjük vissza a feladatot, ahol 8-féléből választunk 12 darabot ismétléssel: $n=8$, $k=12$

Tehát $C_8^{12(i)} = \binom{8+12-1}{12} = \binom{19}{12} = \frac{19\,!}{12\,!\cdot 7\,!} = 50\ \ 388$ a lehetséges kiválasztások száma.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **1.** fejezetében található **1.6.** kidolgozott példákat és oldja meg a **1.53-55.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

5. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy élelmiszerboltban 5-féle ízesítésű joghurtot lehet kapni. Egy alkalommal 3 doboz joghurtot vásárolunk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha...

különböző ízesítésű joghurtokat veszünk, (1)................

a joghurtok között lehetnek azonos ízesítésűek is? (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - párosítás
Egy 12 fős kollektívában 3 jutalmat osztanak szét. Párosítsa össze a feladat részeit a megfelelő kombinatorikai fogalommal!

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

ismétlés nélküli variáció	A jutalmak különbözőek, és egy személy legfeljebb egyet kaphat.
ismétléses variáció	A jutalmak azonosak, és egy személy legfeljebb egyet kaphat.
ismétléses kombináció	A jutalmak azonosak, és egy személy többet is kaphat.
ismétlés nélküli kombináció	A jutalmak különbözőek, és egy személy többet is kaphat.

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 10 (2) - 35
2. feladat:	A jutalmak különbözőek, és egy személy legfeljebb egyet kaphat. - ismétlés nélküli variáció A jutalmak azonosak, és egy személy legfeljebb egyet kaphat. - ismétlés nélküli kombináció A jutalmak különbözőek, és egy személy többet is kaphat. - ismétléses variáció A jutalmak azonosak, és egy személy többet is kaphat. - ismétléses kombináció

6. lecke. A kombinatorika alkalmazásai (kiegészítő anyag)

1. A binomiális tétel

A binom kéttagú kifejezést jelent. Célunk, hogy tetszőleges pozitív egész n-re az $(a+b)^n$ kéttagú kifejezést polinommá alakítsuk. Középiskolai tanulmányokból ismert, hogy $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

1. feladat

Alakítsuk polinommá az $(a+b)^3$ kifejezést!

1. feladat megoldása

Az $(a+b)^3$ felírható $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$ alakban. A szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy minden zárójelből kiválasztjuk az a-t vagy a b-t, és a kiválasztottakat összeszorozzuk (pl.: $a\cdot a\cdot a$, ha minden zárójelből az a-t választjuk).
Ezt a kiválasztást és összeszorzást minden lehetséges módon elvégezzük, és a kapott 3 tényezős szorzatokat összeadjuk.
A szorzótényezőket hagyjuk most meg a kiválasztás sorrendjében.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A kifejezés polinommá alakítása: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

2. feladat

Alakítsuk polinommá az $(a+b)^4$ kifejezést!

2. feladat megoldása

Minden tag 4 szorzótényezőből áll, mert mind a 4 zárójelből kell egyet választani (például $a\cdot b\cdot b\cdot a=a^2\cdot b^2$).
A tagok együtthatóit ismétlés nélküli kombináció segítségével határozzuk meg. Például $a^2\cdot b^2$ tagból annyi van, ahányféleképpen a 4 zárójelből kiválasztható 2 (ahonnan a b szorzók származnak). Ez $\binom{4}{2}=6$ lehetőséget jelent. (Az a szorzók a maradék zárójelekből származnak, ezeket már nem kell kiválasztani.)

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát a $(a+b)^4$ kifejezés polinommá alakítása:

$$(a+b)^4=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)=$$
$$=a^4+\binom{4}{1}a^3b^1+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}a^1b^3+b^4=a^4+4a^3b^1+6a^2b^2+4a^1b^3+b^4$$

3. feladat

Végezzük el az $(a+b)^n$ kifejezés polinommá alakítását, ahol n tetszőleges pozitív egész szám!

3. feladat megoldása

- Ismét írjuk fel a lehetséges tagokat.
- Adjuk meg a tagok együtthatóit a kombinációk segítségével.

(A kiválasztásnál most is b szorzók számát figyeljük.)

A feladat megoldásával a binomiális tételhez jutottunk.

A $(a+b)^n$ kifejezés polinommá alakítása (n pozitív egész szám):

$$(a+b)^n=(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ \ldots\ \cdot(a+b)\cdot(a+b)=$$
$$=\binom{n}{0}\cdot a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}\cdot a^1b^{n-1}+\binom{n}{n}\cdot b^n$$

A 4. leckében leírtak szerint a $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, így az első és utolsó tag együtthatója mindig 1.

Speciális esetek:

$(a+b)^0=1$

$(a+b)^1=a+b$

A binomiális tételben szereplő tagok $\binom{n}{k}$ alakú együtthatóit binomiális együtthatóknak nevezzük.

4. feladat

Végezzük el a $\left(2x+y^2\right)^5$ kifejezés hatványozását!

4. feladat megoldása

Alkalmazzuk a binomiális tételt az $n=5$, $a=2x$ és $b=y^2$ helyettesítéssel!

$$\left(2x+y^2\right)^5=$$
$$=\binom{5}{0}\cdot(2x)^5+\binom{5}{1}\cdot(2x)^4\cdot\left(y^2\right)^1+\binom{5}{2}\cdot(2x)^3\cdot\left(y^2\right)^2+\binom{5}{3}\cdot(2x)^2\cdot\left(y^2\right)^3+\binom{5}{4}\cdot(2x)^1\cdot\left(y^2\right)^4+$$
$$+\binom{5}{5}\cdot\left(y^2\right)^5=$$
$$=2^5\cdot x^5+5\cdot 2^4\cdot x^4\cdot y^2+10\cdot 2^3\cdot x^3\cdot y^4+10\cdot 2^2\cdot x^2\cdot y^6+5\cdot 2\cdot x\cdot y^8+y^{10}=$$
$$=32\cdot x^5+80\cdot x^4\cdot y^2+80\cdot x^3\cdot y^4+40\cdot x^2\cdot y^6+10\cdot x\cdot y^8+y^{10}$$

5. feladat

Végezzük el az $(a-b)^n$ kifejezés polinommá alakítását, ahol az n tetszőleges pozitív egész szám!

5. feladat megoldása

Az $(a-b)^n$ kifejezés összeg hatványozásaként is felírható: $\left(a+(-b)\right)^n$.
A feladat megoldása így visszavezethető a binomiális tételre, ha a b helyére $(-b)$-t helyettesítünk:

$$(a-b)^n=(a+(-b))^n=$$
$$=\binom{n}{0}\cdot a^n+\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}(-b)^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}(-b)^2+\binom{n}{3}\cdot a^{n-3}(-b)^3+\binom{n}{4}\cdot a^{n-4}(-b)^4+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n}\cdot(-b)^n=$$
$$=\binom{n}{0}\cdot a^n-\binom{n}{1}\cdot a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}\cdot a^{n-2}b^2-\binom{n}{3}\cdot a^{n-3}b^3+\binom{n}{4}\cdot a^{n-4}b^4+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}\cdot b^n$$

Megfigyelhetjük, hogy a binomiális kifejtés tagjai váltakozó előjellel következnek egymás után.

Az első tag mindig pozitív. Az utolsó tag páratlan hatvány esetén negatív, páros hatvány esetén pozitív.

6. feladat

Végezzük el a $(x-\sqrt{2})^3$ kifejezés hatványozását!

6. feladat megoldása

$$(x-\sqrt{2})^3=x^3-3\cdot x^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot x\cdot(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3=x^3-3\cdot\sqrt{2}\cdot x^2+6\cdot x-2\cdot\sqrt{2}$$

7. feladat

Határozzuk meg $\left(\frac{x^3}{y^2}-\frac{y^5}{x^2}\right)^{87}$ kifejezés binomiális kifejtésének 56. tagját!

7. feladat megoldása

A binomiális tétel alkalmazásánál $n=87$, $a=\frac{x^3}{y^2}$, $b=-\frac{y^5}{x^2}$.

A b-t csak 55. hatványra kell emelni, mert binomiális kifejtés az első tagjában b 0. hatványon szerepel, és utána minden tagban eggyel nő a kitevője.

Az 56. tag: $\binom{87}{55}\cdot\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^{32}\cdot\left(-\frac{y^5}{x^2}\right)^{55}=-\binom{87}{55}\cdot\frac{x^{96}}{y^{64}}\cdot\frac{y^{275}}{x^{110}}=-\binom{87}{55}\cdot\frac{y^{211}}{x^{14}}$

2. Binomiális együtthatók és tulajdonságaik

A különböző n értékekhez $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ tartozó binomiális együtthatókat a ún. **Pascal-féle háromszög**ben helyezhetjük el.

Pascal háromszög

n = 0	$\binom{0}{0}$	1
n = 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
n = 2	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
n = 3	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
n = 4	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
n = 5	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1
	…	…

Binomiális együtthatók tulajdonságai:

2.1 Szimmetria-tulajdonság

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

Bizonyítás:

Definíció szerint az egyenlőség mindkét oldala $\frac{n\,!}{k\,!\cdot(n-k)\,!}$.

Például: $\binom{5}{2}=\binom{5}{3}$. Ezt szemléletesen is beláthatjuk. 5 elemből 2-t kiválasztani pontosan annyiféleképpen lehet, mint ahányféleképpen dönteni arról, hogy melyik 3-at ne válasszuk. A szimmetria-tulajdonság miatt a Pascal háromszög szimmetrikus.

2.2 Összegtulajdonság

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Bizonyítás:
(Definícióval bizonyítható!)
Ez azt jelenti, hogy a Pascal-féle háromszög elemei egyenlők a felettük lévő két elem összegével.

2.3 A binomiális együtthatók összege

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Bizonyítás:

Ha az $(1+1)^n$ kifejezésre alkalmazzuk a binomiális tételt, akkor éppen a fenti állításhoz jutunk.
Ez azt jelenti, hogy a Pascal-féle háromszög bármely sorában lévő elemek összege egyenlő 2-nek a megfelelő hatványával.

2.4 A binomiális együtthatók váltakozó előjellel való összeadása

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+...+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

Bizonyítás:

Ha az $(1-1)^n$ kifejezésre alkalmazzuk a binomiális tételt, akkor éppen a fenti állításhoz jutunk.

Ez azt jelenti, hogy a Pascal-féle háromszög bármely sorában lévő elemeket váltakozó előjellel összeadva 0-t kapunk.

6. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés

Melyikkel egyenlő $\binom{88}{23}$ **az alábbiak közül?**

A.	B.	C.	D.
$\binom{89}{22}$	$\binom{23}{88}$	$\binom{88}{65}$	$\binom{65}{88}$

Megoldás: (1).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés

Határozza meg az $(x^3+3y)^3$ **kifejtésének hiányzó együtthatóit!**

x^9+ (1)................. $x^6\cdot y+$(2)................. $x^3\cdot y^2+$ (3)................. y^3

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés

Határozza meg az $(a-b)^4$ **kifejtésének hiányzó előjeleit és együtthatóit!**

$(a-b)^4 = a^4$ (1)................(2)................a^3b^1(3)................(4)................a^2b^2
(5)................(6)................a^1b^3(7)................b^4

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - C
2. feladat:	(1) - 9 (2) - 27 (3) - 27
3. feladat:	(1) - - (2) - 4 (3) - + (4) - 6 (5) - - (6) - 4 (7) - +

I. fejezet. Gyakorló feladatok

1. feladat - leírás
1.

Egy kiránduláson négyen vettek részt, és 8 fényképet készítettek. A fényképek előhívása után

a. hányféle sorrendben nézhetik meg a képeket?

b. hányféleképpen osztozkodhatnak a képeken, ha mindenki 2 képet kap?

c. hányféleképpen osztozkodhatnak a képeken, ha a kiosztásra nincs semmilyen kikötés (akár egy személy is kaphatja mindet)?

Megoldás

2. feladat - leírás
2.

Egy nyelvvizsga bizottság előtt 8 hallgató vizsgázik egy nap (5 fiú és 3 lány).

a. Hányféle sorrendben vizsgázhatnak?

b. Hány olyan sorrend képzelhető el, ahol az első és utolsó vizsgázó fiú?

c. Hány olyan sorrend képezhető, ahol a fiúk egymás után következnek (a lányoknak nem feltétlen kell egymás után következniük)?

Megoldás

3. feladat - leírás
3.

Egy tudományos társaságnak 15 tagja van. Elnököt, elnökhelyettest és titkárt akarnak választani.

Hányféleképpen oszthatják ki a tisztségeket, ha egy személy legfeljebb egy feladatot láthat el?

Megoldás

4. feladat - leírás
4.

Karácsonykor 8 különböző ajándékot csomagolunk be 3-féle csomagolópapír felhasználásával.

Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

Megoldás

5. feladat - leírás
5.

Egy főiskola minden hallgatója kap egy 6 karakterből álló kódot. A kód karaktereit 36 betűből és 10 számjegy közül választják ki. (Bármelyik karakter lehet betű vagy szám.)

a. Hány olyan kód van, amelyben a karakterek nem ismétlődnek (sem a számjegyek, sem a betűk)?

b. Hány olyan kód van, amelyben pontosan 2 számjegy található és a karakterek nem ismétlődhetnek?

c. Hány olyan kód van, amelyben a karakterek ismétlődhetnek?

d. Hány olyan kód van, amelyben van legalább egy x betű (a karakterek ismétlődhetnek)?

Megoldás

6. feladat - leírás
6.

Hányféleképpen lehet a lottószelvényt kitölteni úgy, hogy

a. csak páros számot jelölünk be?

b. több páros számot jelölünk be, mint páratlant?

Megoldás

7. feladat - leírás

7.

Egy 14 tagú bizottságnak egy fontos ügyben kell döntést hoznia. A tagok igennel, nemmel és tartózkodással szavazhatnak. A tagok szavazatait sorba leírjuk.

a. Hányféleképpen szavazati sorrend alakulhat ki?

b. Hányféleképpen képzelhető el, hogy a szavazatok között 8 igen, 4 nem és 2 tartózkodás van?

Megoldás

Megoldókulcs

1. feladat:	ld. a feladatnál!
2. feladat:	ld. a feladatnál!
3. feladat:	ld. a feladatnál!
4. feladat:	ld. a feladatnál!
5. feladat:	ld. a feladatnál!
6. feladat:	ld. a feladatnál!
7. feladat:	ld. a feladatnál!

Bevezető

Mi történik, ha 1,25 m magasról leejtünk egy labdát?
0,5 másodperc múlva fog földet érni. Akárhányszor elvégezhetjük a kísérletet, földi körülmények között mindig ezt fogjuk tapasztalni.

Mi történik, ha elgurítunk egy dobókockát? Melyik oldala lesz felül, amikor megáll?
Erre a kérdésre már nem tudunk egyértelmű választ adni. Hat lehetséges eset jöhet számításba. Az szoktuk mondani, hogy a véletlenen múlik, hogy melyik fog bekövetkezni.

De valóban a véletlenen múlik ez?

Gondoljunk bele, hogy a tudomány már képes arra, hogy meghatározza egy űrrepülőgép kezdeti sebességét és más kezdeti feltételeket úgy, hogy pontosan a Holdra vagy a Marsra érkezzen vagy más előre meghatározott feladatot hajtson végre. Egy kocka pedig megoldhatatlan feladvány lenne? Nyilván nem. Ha ismernénk többek közt a kocka kezdeti sebességét és elhajításának szögét, nyilván ez is előre meghatározható lenne. Szerencsére a kezdeti feltételek (sebesség, hajlásszög stb.) mindig mások, különben mi is lenne a szerencsejátékokkal?

Akkor hát mi is az a véletlen?

Véletlennek mondható egy strand napi bevétele is. Két egyformán forró napon sem lesz ugyannyi a bevétel, mert a bevételt a hőmérsékleten kívül biztosan egyéb tényezők is befolyásolják (pl.: egy hirtelen zápor vagy egy izgalmasnak ígérkező meccs a tévében...). Ezek mindegyikét nem tudjuk figyelembe venni, nem is ismerhetjük meg mindegyiket.

A fenti egyszerű példából látható, hogy a **véletlen jelenségnek is oka van**. A problémát az okozza, hogy a **figyelembe vett vagy figyelembe vehető feltételek összessége nem határozza meg egyértelműen a jelenség kimenetelét**.

Azokat a jelenségeket, amelyeknek azonos feltételek mellett többféle kimenetele lehet **sztochasztikus (véletlen) jelenségeknek** nevezzük.
Ilyen jelenség tehát a már említett kockadobás, egy készülék élettartama, egy hivatalba adott idő alatt beérkező telefonhívások szám stb..

A jelenségek másik körét tehát azok alkotják, amelyek **azonos körülmények között mindig ugyanúgy zajlanak le**, így a jelenség kimenetele előre meghatározható. Ezeket a jelenségeket **determinisztikus (meghatározott) jelenségeknek** nevezzük.

Ilyen jelenség például a már említett szabadesés, a bolygók mozgása, holdfogyatkozás, napfogyatkozás. (Ha jobban belegondolunk, a fenti jelenségek is a tudomány fejlődésével váltak determinisztikus jelenségekké. A napfogyatkozást például nem tudták mindig előre megjósolni.)

A valószínűségszámítás a véletlen jelenségekkel foglalkozik. Ezek közül is csak azokkal, amelyek tömegjelenségek, azaz azonos körülmények között akárhányszor megismételhetők.

Távlati feladatunk az, hogy a véletlen tömegjelenségek törvényszerűségeit feltárjuk.

7. lecke. Eseményalgebra 1.

1. Jelenségek csoportosítása

A valószínűségszámítás szempontjából a jelenségeket két csoportra oszthatjuk:

- **determinisztikus (meghatározott) jelenségek**
- **sztochasztikus (véletlen) jelenségek**

A determinisztikus jelenségek azonos körülmények között mindig ugyanúgy mennek végbe, azaz a jelenség kimenetele előre meghatározható.
Például: szabadesés.

A sztochasztikus vagy véletlenszerű jelenségeknek azonos körülmények között többféle kimenetele is lehet. Nem tudjuk, hogy a lehetséges kimenetelek közül melyik fog bekövetkezni, mert a figyelembe vett vagy figyelembe vehető feltételek összessége nem határozza meg egyértelműen a jelenség kimenetelét.
Például: kockadobás, lottón kihúzott számok stb.

A valószínűségszámítás a véletlen tömegjelenségek vizsgálatával, törvényszerűségeivel foglalkozik.

Tömegjelenség: azonos körülmények között akárhányszor megismételhető.
Véletlen kísérlet: a véletlen tömegjelenség előidézése és megfigyelése.
Esemény: a véletlen jelenség valamely lehetséges kimenetele

A kísérleteknél meg kell határoznunk, hogy mit tekintünk lehetséges kimenetnek, azaz minek a megfigyelését végezzük. Például egy irodában figyeljük az **egy óra alatt érkező ügyfelek számát**.

A lehetséges **kimenetelek száma** lehet:

- **véges** (dobókockával dobott értékek)
- **végtelen** (egy céltábla pontjainak száma)

Az eseményeket nagy betűkkel jelöljük. Például:

- A: a kockával hármast dobtam
- B: a lottón csak páros számokat húztak ki

2. Események csoportosítása

1. **Elemi esemény**, amely csak egyféleképpen következhet be.
   Jele: E
   Például: E: a kockával hármast dobtam
2. **Összetett esemény**, amely többféleképpen is bekövetkezhet (több elemi eseményt tartalmaz).
   Például: B: a kockával párosat dobtam (azaz 2-est, 4-est vagy 6-ost)
3. **Lehetetlen esemény**, amely az adott körülmények között nem következhet be.
   Jele: ϕ
   Például: A magyar kártyából egyszerre kihúzott 5 lap mindegyike ász. Ez lehetetlen, mert a magyar kártyában csak 4 ász van.
4. **Biztos esemény**, amely az adott körülmények között biztosan bekövetkezik.
   Jele: H
   Például: A magyar kártyából egyszerre kihúzott 5 lap között biztosan vannak azonos színűek. (A magyar kártyában 4 különböző szín van.)

Eseménytér: Egy kísérlettel kapcsolatos elemi események összessége (halmaza).
Jele: H

A továbbiakban az eseményeket az eseménytér részhalmazainak tekintjük. Így az eseményekre alkalmazhatjuk a halmazoknál tanult fogalmakat.

Példa:

Dobjunk fel egy érmét kétszer. Jegyezzük le a dobások kimenetelét a dobás sorrendjében.
Például ha elsőre fejet, másodikra írást dobtunk: fi
Az **eseménytér** most 4 elemi eseményből áll: $H = ii; if; fi; ff$

Az eseménytér részhalmazai:

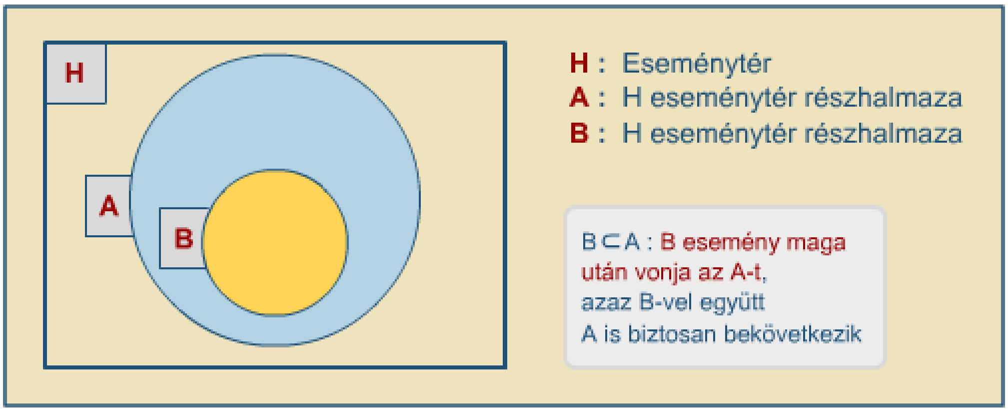
- elemi események (Például: mindkét dobás fej: $E = ff$)

- összetett események (Például: különböző a két dobás eredménye: $A = if;fi$

3. Műveletek eseményekkel

3.1 Maga után vonás vagy egyúttal bekövetkezés

jele: $B \subset A$
B esemény maga után vonja A-t, ha B bekövetkezésével A is biztosan bekövetkezik.
$B \subset A$ esemény ábrázolása halmazokkal:



Példa:

Dobjunk a kockával egyszer!
A: párosat dobtunk, vagyis $A = \{2,4,6\}$
B: kettest dobtunk, vagyis $B = \{2\}$

Ekkor a B esemény bekövetkezése maga után vonja az A bekövetkezését. Az eseményeket halmazoknak tekintve: B halmaz részhalmaza A-nak ($B \subset A$).

3.2 Két esemény egyenlősége vagy ekvivalenciája

Jele: $A = B$
A és B események egyenlők, ha bármelyik bekövetkezése maga után vonja a másik bekövetkezését.
Példa:

Dobjunk a kockával egyszer!

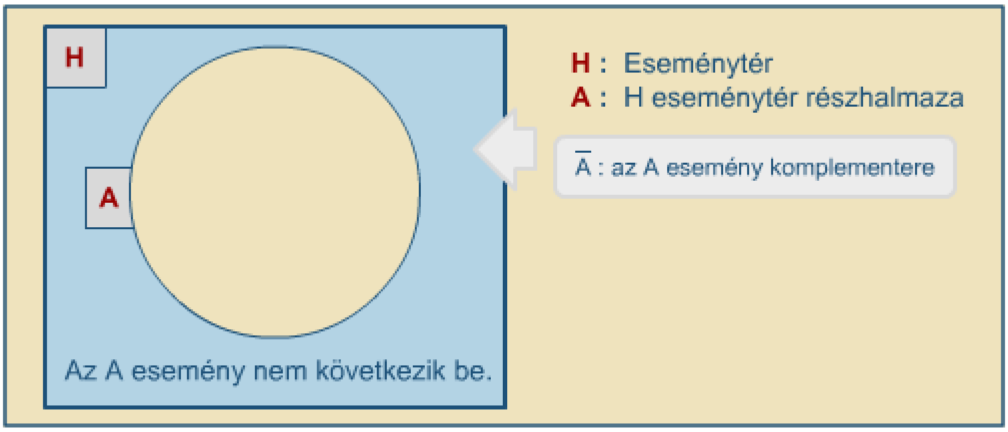
A: párosat dobtam
B: nem dobtam páratlant

3.3 Komplementer (ellentett) események

jele: $\overline{A}$

$\overline{A}$ (ejtsd: komplementer esemény) akkor és csak akkor következik be, ha az A esemény nem következik be. Tehát az $\overline{A}$ eseményhez pontosan azok az elemi események tartoznak, amelyek A-hoz nem tartoznak hozzá.

Az A és az $\overline{A}$ események ábrázolása halmazokkal:



Példa:

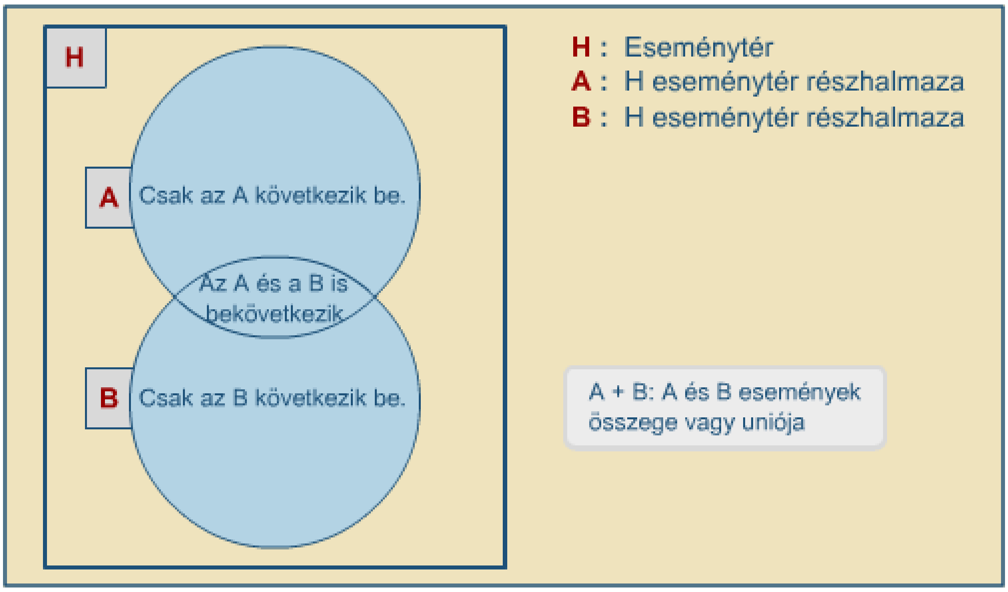
Egy kockával háromszor dobunk:
A: minden dobott szám páros
$\overline{A}$: nem mindegyik páros = van közte páratlan (egy vagy több)

A biztos esemény komplementere a lehetetlen esemény.
A lehetetlen esemény komplementere a biztos esemény.

3.4 Két esemény összege vagy uniója

jel: $A+B$ vagy $A \cup B$

Az A és B események összege is esemény, amely akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik (egyik, másik vagy mindkettő bekövetkezik).
Az $A+B$ esemény ábrázolása halmazokkal:



Példa:

Magyar kártyából húzzunk egy lapot.
A: zöldet húztunk
B: ászt húztunk
$A+B$: zöldet vagy ászt húztunk (a kettő közül legalább az egyik bekövetkezik).

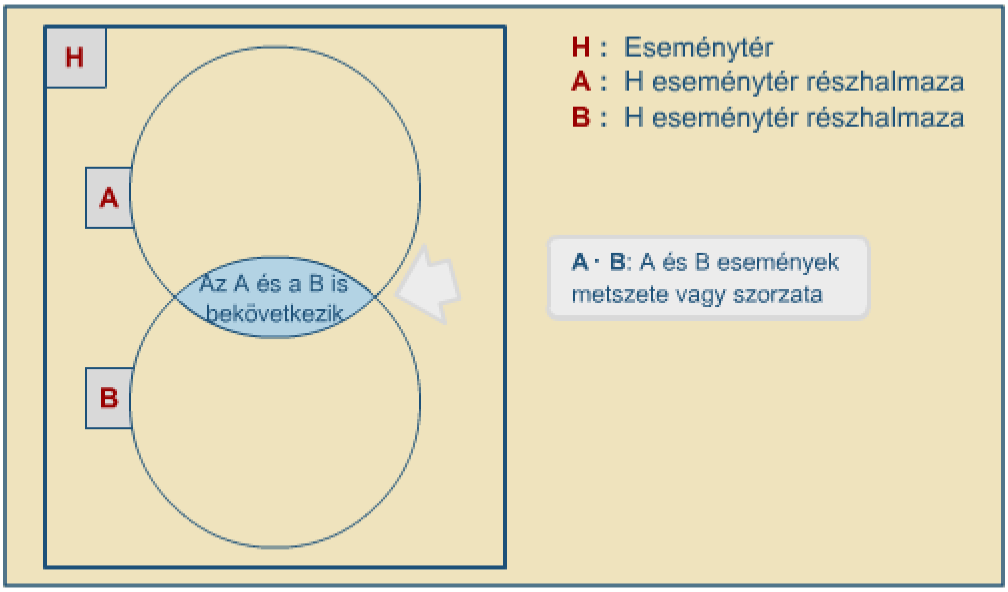
Megjegyzések:

1. $A+B$ **eseményt vagy-gyal fogalmazzuk meg, és azt is beleértjük, hogy mindkettő bekövetkezik**, azaz a zöld ászt is húzhattuk. Így most 11 lap jöhet számításba, mert 4 ász van, 8 zöld, és a zöld ászt így kétszer számoltuk.
2. **Több esemény összege** is esemény, amely akkor következik be, ha **az események közül legalább az egyik bekövetkezik**.

3.5 Két esemény szorzata vagy metszete

jel: $A \cdot B$ vagy $A \cap B$

Az A és B esemény szorzata is esemény, amely akkor következik be, ha A is és B is bekövetkezik.
Az $A \cdot B$ esemény ábrázolása halmazokkal:



Példa:

Dobjunk a kockával kétszer. Jegyezzük le a számokat a dobás sorrendjében.
A: Mindkét dobott szám páros.
B: Mindkét dobott szám nagyobb 4-nél.
$A{\cdot}B$: mindkét szám páros és nagyobb 4-nél, azaz mindkettő hatos.

Megjegyzések:

1. **Az $A{\cdot}B$ eseményt és-sel fogalmazzuk meg.**
2. **Több esemény szorzata** is esemény, amely ekkor következik be, ha **az események mindegyike bekövetkezik**.
3. **Egymást kizáró események:**
   A és B egymást kizáró események, ha együtt nem következhetnek be, azaz $A{\cdot}B=\emptyset$

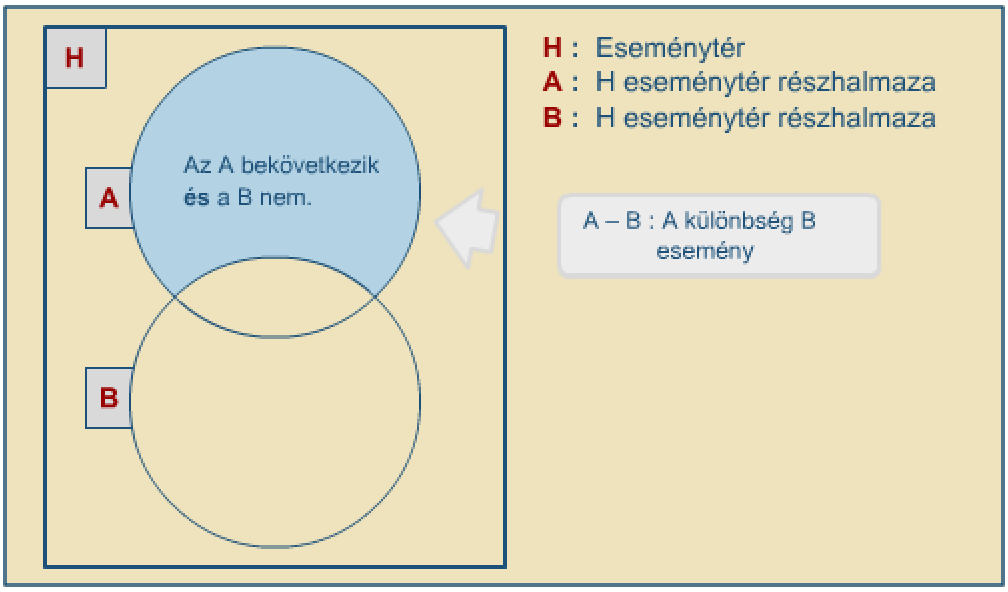
Példa:

Húzzunk ki a magyar kártyából egyszerre 4 lapot.
A: A kihúzottak között 2 piros van.
B: A kihúzottak között 3 zöld van.
A és B események egymást kizárják, mert összesen csak 4 lapot húztunk.

3.6 Események különbsége

jel: $A-B$

Az $A-B$ (ejtsd: A különbség B) is esemény, amely akkor következik be, ha az A esemény bekövetkezik és a B nem. Az $A-B$ esemény felírható $A{\cdot}\overline{B}$ alakban is.
Az $A-B$ esemény ábrázolása halmazokkal:



Példa:

Egy megbeszélésre 2 személyt várunk, Andrást és Bélát.
A: András pontosan érkezik.
B: Béla pontosan érkezik.
$A-B$: András pontosan érkezik és Béla nem.

4. Eseményekre vonatkozó fontosabb azonosságok

1. $A \cdot \overline{A} = \emptyset$
   Az esemény és a komplementere egymást kizárják.
2. $A + \overline{A} = H$
   Az esemény és komplementere közül az egyik biztosan bekövetkezik.
3. $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

   Az $\overline{A \cdot B}$ annak az ellentéte, hogy A és B események mindegyike bekövetkezik. Tehát tagadva: legalább az egyik nem következik be, azaz "nem A vagy nem B" ($\overline{A} + \overline{B}$).
4. $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
   $\overline{A + B}$ annak az ellentéte, hogy A és B közül legalább az egyik esemény bekövetkezik. Tehát tagadva: egyik sem következik be, azaz "nem A és nem B" ($\overline{A} \cdot \overline{B}$)

A 3. és 4. azonosságot **De Morgan azonosságoknak** nevezik.

Példa:

Egy éjjel-nappal nyitva tartó boltban azt vizsgáljuk, hogy van-e este friss kenyér az üzletben.

A: Hétfőn este volt friss kenyér
B: Kedd este volt friss kenyér

$A \cdot B$: Hétfőn is és kedden is volt friss kenyér

$\overline{A \cdot B}$: Legalább az egyik napon nem volt friss kenyér,
azaz:
hétfőn nem volt vagy kedden nem volt friss kenyér: $\overline{A}+\overline{B}$

$A+B$: legalább az egyik napon volt friss kenyér (Hétfőn vagy kedden volt friss kenyér)
$\overline{A+B}$: Egyik napon sem volt friss kenyér,
azaz:
hétfőn sem és kedden sem volt friss kenyér: $\overline{A} \cdot \overline{B}$

Az anyaghoz kapcsolódóan oldja meg a Valószínűségszámítás példatár **3.** fejezetében található **3.1, 4-6.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

7. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - többszörös választás
Egy kockával kétszer dobtunk. A számokat lejegyeztük a dobás sorrendjében. Válassza ki az elemi eseményeket az alábbiak közül!

Segítség 7. lecke 1. önellenőrző feladat

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] A dobott számok szorzata 12.
[ ] A dobott számok összege kettő.
[ ] A dobott számok szorzata 9.
[ ] Egy hármast és egy négyest dobtunk.
[ ] A dobott számok összege három.
[ ] Az első szám kettes, a második ötös.

2. feladat - többszörös választás
Az ötös lottó kihúzott számait vizsgáljuk. (A kihúzott számok sorrendje nem számít!) Válassza ki az összetett eseményeket az alábbiak közül!

Segítség 7. lecke 2. önellenőrző feladat

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] A 36 a kihúzott számok között van.
[ ] A kihúzott számok: 32, 45, 54, 62, 75, 87
[ ] Minden kihúzott szám egyjegyű és páratlan.
[ ] Három páros és két páratlan van a kihúzott számok között.
[ ] Nincs 5-tel osztható a számok között.
[ ] Minden kihúzott szám nagyobb 40-nél.

3. feladat - párosítás
Egy vállalat négy fénymásolót vásárolt. Vizsgáljuk a garanciális időn belül meghibásodott fénymásolókat.

Párosítsuk össze az eseményeket a komplementerükkel!

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

Legfeljebb két gép hibásodott meg. Legalább két gép meghibásodott.

Egy gép sem hibásodott meg.	Kettőnél több gép hibásodott meg.
Van olyan gép, amelyik nem hibásodott meg.	Legalább egy gép meghibásodott.
Legfeljebb egy gép hibásodott meg.	Minden gép meghibásodott.

4. feladat - párosítás
Egy földszintes szálloda két szárnyból áll (jobb és bal). Egy adott napon vizsgáljuk a szobák foglaltságát.

A esemény: a jobb szárnyon van üres szoba
B esemény: a bal szárnyon van üres szoba

Párosítsuk össze az események jelölését a szöveges megfogalmazással!

A - $A \cdot B$

B - $\overline{A \cdot B}$

C - $A + B$

D - $\overline{A + B}$

E - $A - B$

F - $B \cdot \overline{A}$

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

Mindkét szárnyon van üres szoba.	A
Nincs mindkét szárnyon üres szoba.	D
Legalább az egyik szárnyon van üres szoba.	F
Csak a jobb szárnyon van üres szoba.	E
Csak a bal szárnyon van üres szoba.	B
Egyik szárnyon sincs üres szoba	C

5. feladat - többszörös választás
Magyar kártyából kihúzunk egyszerre 4 lapot.

esemény: Nincs piros a kihúzott lapok között

Válasszuk ki azon eseményeket, amelyek az A eseménnyel egymást kizárják!

Segítség 7. lecke 5. önellenőrző feladat

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] Két zöld van a lapok között.
[ ] Mind a négy lap király.
[ ] Többféle szín van a lapok között.
[ ] Két piros van a lapok.

Megoldókulcs

1. feladat:	A dobott számok összege kettő. Az első szám kettes, a második ötös. A dobott számok szorzata 9.
2. feladat:	Minden kihúzott szám nagyobb 40-nél. Nincs 5-tel osztható a számok között. A 36 a kihúzott számok között van. Három páros és két páratlan van a kihúzott számok között.
3. feladat:	Kettőnél több gép hibásodott meg. - Legfeljebb két gép hibásodott meg. Minden gép meghibásodott. - Van olyan gép, amelyik nem hibásodott meg. Legalább két gép meghibásodott. - Legfeljebb egy gép hibásodott meg. Legalább egy gép meghibásodott. - Egy gép sem hibásodott meg.
4. feladat:	A - Mindkét szárnyon van üres szoba. B - Nincs mindkét szárnyon üres szoba. E - Csak a jobb szárnyon van üres szoba. D - Egyik szárnyon sincs üres szoba F - Csak a bal szárnyon van üres szoba. C - Legalább az egyik szárnyon van üres szoba.
5. feladat:	Mind a négy lap király. Két piros van a lapok.

8. lecke. Eseményalgebra 2.

Definíció:
Teljes eseményrendszernek nevezzük a H eseménytér olyan eseményeinek halmazát, amelyek:

- páronként kizárják egymást (azaz az események közül bármely kettő kizárja egymást), és

- összegük a biztos esemény (azaz az események minden elemi eseményt tartalmaznak).

A teljes eseményrendszer eseményei közül pontosan egy következik be, bármi is a véletlen kísérlet kimenetele.

A teljes eseményrendszer eseményeinek ábrázolása halmazokkal:

Példa:

1.
Magyar kártyából húzzunk ki három lapot:
: A lapok között nincs zöld.
: A lapok között egy zöld van.
: A lapok között két zöld van.
: A lapok között három zöld van.

Az , , , események teljes eseményrendszert alkotnak, mert az események egymást **páronként kizárják, és minden elemi eseményt tartalmaznak a kihúzott lapokra vonatkozóan**.

2.
Az ötös lottó kihúzott számait vizsgáljuk:
: Csak páros számot húztak ki.
: Csak páratlan számot húztak ki.
: A kihúzott számok között van páros is és páratlan is.

Az , , események teljes eseményrendszert alkotnak, mert az események **egymást páronként kizárják, és minden elemi eseményt tartalmaznak a kihúzott számokra vonatkozóan**.

Megjegyzések:

1. Egy esemény és a komplementere teljes eseményrendszert alkot.
Például: a magyar kártya lapjai közül kihúzunk egyszerre hármat:
: nincs közötte ász
: van közte ász

2. A eseménytér **összes elemi eseménye teljes eseményrendszert alkot**.
Például: kockával egyszer dobunk.
: A dobott szám egyes.
: A dobott szám kettes.
...
: A dobott szám hatos

1. Eseményalgebrai feladatok

Az eseményhez tartozó elemi események számát abszolútértékkel jelöljük:

1. feladat

Egy dobókockával kétszer dobunk, a számokat a dobás sorrendjében lejegyezzük. Így egy kétjegyű számhoz jutunk.

: mindkét számjegy páros
: a számjegyek egyformák

Fogalmazzuk meg a dobott számpárra vonatkozóan az alábbi eseményeket!
Számoljuk ki az **elemi események számát**!

Ábrázoljuk az eseményeket halmazokkal!

a,

b,

c, $A\cdot B$

d, $\overline{A\cdot B}$

e, $A+B$

f, $A+\overline{B}$

g, $A\cdot\overline{B}$

h, $B-A$

1. feladat megoldása

Készítsük el a feladathoz tartozó halmazábrát, írjuk be a kétjegyű számokat a megfelelő halmazrészbe:

A feladat megoldható a H , A, B, eseményekhez tatozó elemi események számának meghatározásával:

$|H|=6\cdot6=36$

$|A|=3\cdot3=9$

$|B|=6$

$|A\cdot B|=3$

a, $\overline{A}$: Van páratlan a számjegyek között.

$|\overline{A}|=|H|-|A|=36-9=27$

b, $\overline{B}$: A számjegyek különbözőek.

$|\overline{B}|=|H|-|B|=36-6=30$

c, $A\cdot B$: A számjegyek párosak és egyformák

$|A\cdot B|=3$

d, $\overline{A\cdot B}$: Vagy nem páros mindkét számjegy, vagy nem egyformák (legalább az egyik nem teljesül).

$|A\cdot\overline{B}|=|H|-|A\cdot B|=36-3=33$

e, $A+B$: Párosak vagy egyformák (legalább az egyik teljesül).

$|A+B|=|A|+|B|-|A\cdot B|=9+6-3=12$

f, $\overline{A+B}$: Van köztük páratlan és különbözőek.

$|\overline{A+B}| = |H| - |A+B| = 36 - 12 = 24$

g, $A \cdot \overline{B}$: Mindkét számjegy páros és különbözőek.
$|A \cdot \overline{B}| = |A| - |A \cdot B| = 9 - 3 = 6$

h, $B - A$: A számjegyek egyformák és páratlanok.
$|B - A| = |B| - |A \cdot B| = 6 - 3 = 3$

Kattintson ide a nagyításhoz!

2. feladat

Egy fénymásolóhoz a cég négyjegyű kódokat ad alkalmazottainak. A kód bármely számjegye a 0, 1...9 számjegyek valamelyike. Egy véletlenszerűen kiválasztott alkalmazott kódját vizsgáljuk.

A esemény: A kód nem tartalmaz 0-át

B esemény: A kód pontosan egy 1-t tartalmaz.

Fejezze ki A és B eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel a következő eseményeket! Számolja ki az események elemi eseményeinek számát!

a, A kód nem tartalmaz 0-át, és pontosan egy 1-es van benne.

b, A kód tartalmaz 0-át.

c, A kód pontosan egy 1-est tartalmaz és van benne 0.

d, A kód nem tartalmaz 0-át, vagy pontosan egy 1-es van benne (a két esemény közül legalább az egyik teljesül).

e, A kód nem egy darab 1-est tartalmaz.

f, A kódban van 0, és nem egy 1-es van benne.

2. feladat megoldása

Először határozzuk meg a H, A, B, $A \cdot B$ eseményekhez tartozó elemi események számát:

A H eseménytér tartalmazza az összes lehetséges kódot. Bármely számjegy helyére 10-féle szám kerülhet, azért a kódok száma: $|H| = 10^4 = 10000$

Ha a kód nem tartalmaz 0-át, akkor bármely számjegy helyére 9-féle szám kerülhet. Így az A esemény elemi eseményeinek száma: $|A| = 9^4 = 6561$

Ha a kód pontosan egy 1-est tartalmaz, akkor a másik 3 számjegy mindegyikét 9-féleképpen választhatjuk meg. Így az 1-es bármely rögzített helyéhez $9^3 = 729$ kód tartozik. Mivel az 1-es helyét 4-féleképpen választhatjuk meg, ezért a B esemény elemi eseményeinek száma:

$|B| = 4 \cdot 9^3 = 2916$

Ha a kód nem tartalmaz 0-t, és egy darab 1-es van benne, akkor az egyestől különböző számjegyek mindegyikét 8-féle számból választhatjuk ki. Így az $|A \cdot B| = 4 \cdot 8^3 = 2048$

Események	Algebrai kifejezések	Elemi események száma
a, A kód nem tartalmaz 0-át, és pontosan egy 1-es van benne.	$A \cdot B$	$\mid A \cdot B \mid = 4 \cdot 8^3 = 2048$
b, A kód tartalmaz 0-át.	$\overline{A}$	$\overline{A} = \|H\| - \|A\| =$ $10^4 - 9^4 = 3439$
c, A kód pontosan egy 1-est tartalmaz, és van benne 0.	$B \cdot \overline{A} = B - A$	$\|B - A\| = \|B\| - \|A \cdot B\|$ $4 \cdot 9^3 - 4 \cdot 8^3 = 868$
d, A kód nem tartalmaz 0-át, vagy pontosan egy 1-es van benne (a két esemény közül legalább az egyik teljesül).	$A + B$	$\|A + B\| =$ $\|A\| + \|B\| - \|A \cdot B\|$ $9^4 + 4 \cdot 9^3 - 4 \cdot 8^3 = 7429$
e, A kód nem egy darab 1-est tartalmaz.	$\overline{B}$	$\|\overline{B}\| = \|H\| - \|B\|$ $10^4 - 4 \cdot 9^3 = 7084$
f, A kódban van 0, és nem egy 1-es van benne.	$\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B}$	$\overline{A + B} = \|H\| - \|A + B\|$ $10^4 - 7429 = 2571$

3. feladat

András, Béla és Csaba egy vállalat vezetőségi tagjai. Egy fontos kérdésben igennel vagy nemmel kell szavazniuk.

A esemény: András igennel szavaz

B esemény: Béla igennel szavaz

C esemény: Csaba igennel szavaz

Fogalmazza meg az alábbi eseményalgebrai műveletekkel leírt eseményeket!

a, $A + B + C$

b, $A \cdot B \cdot \overline{C}$

c, $\overline{A \cdot B \cdot C}$

d, $\overline{A + B} \cdot C$

e, $\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$

f, $\overline{A+B+C}$

g, $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}$

3. feladat megoldása

a, $A+B+C$: Legalább egy igen szavazat volt.

b, $A\cdot B\cdot\overline{C}$: András és Béla igennel, Csaba nemmel szavazott.

c, $\overline{A\cdot B\cdot C}$: Nem mindenki szavazott igennel, azaz legalább egy nem szavazat volt.

d, $\overline{A+B}\cdot C$: András és Béla nemmel szavazott és Csaba igennel. ($\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$)

e, $\overline{A}\cdot B\cdot C+A\cdot\overline{B}\cdot C+A\cdot B\cdot\overline{C}$: Egy nem és két igen szavazat volt.

f, $\overline{A+B+C}$: Ez annak a komplementere, hogy legalább egy igen szavazat volt, azaz mindenki nemmel szavazott.

g, $\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}}$: Ez annak a komplementere, hogy mindenki nemmel szavazott, azaz legalább egy igen szavazat volt.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **3.** fejezetében található **3.1, 3.2.** kidolgozott példákat és oldja meg a **3.12-13.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

8. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - többszörös választás
Egy naponta közlekedő vonat pontosságát vizsgáljuk 4 napon keresztül.

A esemény: A vonat egyik nap sem késett.

B esemény: A vonat csak egy nap késett.

Válasszuk ki, hogy az alábbiak közül melyik egészíti ki az A és B eseményeket teljes eseményrendszerré!

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] C: legalább két nap késett
[ ] C: legalább egy nap késett
[ ] C: két nap késett, D: három nap késett, E: négy nap késett
[ ] C: 2. napon késett, D: 3. napon késett, E: 4. napon késett

2. feladat - párosítás
Egy napon három részvény (A, B és C) árfolyamának változását vizsgáljuk.

A esemény: Az A részvény árfolyama nőtt.

B esemény: A B részvény árfolyam nőtt.

C esemény: A C részvény árfolyama nőtt.

Párosítsuk össze a szövegesen megfogalmazott eseményeket a megfelelő algebrai kifejezéssekkel!

A - $A+B+C$

B - $A \cdot B \cdot \overline{C}$

C - $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

D - $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$

E - $A \cdot B \cdot C$

F - $\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

Legalább egy részvény árfolyama nőtt.	A
Minden részvény árfolyama nőtt.	D
Csak az A részvény árfolyam nőtt.	E
Csak a C részvény árfolyama nem nőtt.	B
Pontosan egy részvény árfolyama nőtt.	C
Egyik részvény árfolyam sem nőtt.	F

3. feladat - szókitöltés
Dobjunk egy pénzérmével ötször egymás után, és jegyezzük le a dobások eredményét (fej vagy írás) a dobás sorrendjében! (Sorrend számít.)

A: Az első két dobás azonos.

B: Pontosan 3 fej van a dobások között.

Írja be a szövegdobozba az elemi események számát!

Az első két dobás különböző és nem 3 fej van a dobások között. (1).................

Az első két dobás különböző és 3 fejet dobtunk. (2).................

Az első két dobás egyforma, vagy 3 fejet dobtunk (a két állítás közül legalább az egyik teljesül). (3)................

Az első két dobás különböző. (4)................

Az első két dobás azonos és 3 fejet dobtunk. (5)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	C: két nap késett, D: három nap késett, E: négy nap késett C: legalább két nap késett
2. feladat:	C - Csak az A részvény árfolyam nőtt. A - Legalább egy részvény árfolyama nőtt. F - Egyik részvény árfolyam sem nőtt. B - Csak a C részvény árfolyama nem nőtt. D - Pontosan egy részvény árfolyama nőtt. E - Minden részvény árfolyama nőtt.
3. feladat:	(1) - 10 (2) - 6 (3) - 22 (4) - 16 (5) - 4

II. fejezet. Gyakorló feladatok

1. feladat - leírás
1.

Egy gazdálkodás szakra járó főiskolásnak a 2. félévben 3 nehéz tantárgyból kell vizsgát tennie: matematikából, statisztikából, közgazdaságtanból.

M **esemény:** matematikából sikeres vizsgát tett.

S **esemény:** statisztikából sikeres vizsgát tett.

K **esemény:** közgazdaságtanból sikeres vizsgát tett.

Fejezze ki M, S, K eseményekkel és az eseményalgebrai műveletekkel a következő eseményeket!

a. Mind a három tárgyból sikeres vizsgát tett.
b. Közgazdaságtanból nem vizsgázott le.
c. Csak matematikából tett sikeres vizsgát (a másik kettőből nem)
d. Csak egy tárgyból tett sikeres vizsgát.
e. Legalább egy tárgyból levizsgázott.
f. Statisztikából levizsgázott, de nem minden tárgyból vizsgázott le.

Megoldás

2. feladat - leírás
2.

Egy kockával háromszor dobunk, a dobott számokat lejegyezzük a dobás sorrendjében.

A **esemény:** minden dobott szám különböző.

B **esemény:** egy darab hatos van a dobott számok között.

Írjuk fel az alábbi eseményeket eseményalgebrai jelekkel, és határozzuk meg a hozzájuk tartozó elemi események számát!

a. Minden dobott szám különböző, és egy darab hatos van köztük.
b. A dobott számok között vannak egyformák.
c. A pontosan egy hatost dobtunk és van a számok között egyforma.
d. A dobott számok különbözőek, vagy pontosan egy hatos van köztük (a két esemény közül legalább az egyik teljesül).
e. A dobott számok között vannak egyformák, és nem egy hatos van köztük.

Megoldás

3. feladat - leírás
3.

Az éléskamrában cseresznye- és meggybefőttek vannak, tavalyi és idei vegyesen. Az egyes befőttek számát az alábbi táblázat mutatja.

	Tavalyi	Idei	Összesen:
Cseresznye	5	10	**15**
Meggy	4	8	**12**
Összesen:	**9**	**18**	**27**

Egy alkalommal 4 üveg véletlenszerűen kiválasztott befőttet bontunk fel egyszerre. (A kiválasztás sorrendje nem számít.)

A **esemény:** Minden felbontott befőtt idei.

B **esemény:** Minden felbontott üvegben cseresznye van.

Írjuk fel az alábbi eseményeket eseményalgebrai jelekkel, és határozzuk meg a hozzájuk tartozó elemi események számát!

a. Van tavalyi a befőttek között.
b. Mind idei és nem mind cseresznye.
c. Nem mind idei és nem mind cseresznye.
d. Van meggy a befőttek között.
e. Mind idei és mindegyikben cseresznye van.
f. Nem mind idei, de mindegyikben cseresznye van.

Megoldás

Megoldókulcs

1. feladat:	Id. a feladatnál!
2.	Id. a feladatnál!

feladat:

3. feladat: ld. a feladatnál!

Bevezető

Mi az a valószínűség?

Láttuk, hogy a véletlen jelenségeknek azonos körülmények között többféle kimenetele van. Előre nem határozható meg, hogy egy-egy kísérletnél melyik fog bekövetkezni.

Például egy érme egyszeri feldobásánál nem tudjuk előre megmondani, hogy melyik oldalára fog esni.

Végezzük el a kísérletet sokszor (100-szor, 1000-szer...), és vizsgáljuk a fejdobások arányát a dobások között. A dobások számának növelésével azt tapasztalhatjuk, hogy a fejdobások aránya egyre kevésbé ingadozik az 1/2 körül.
Ez azt jelenti számunkra, hogy 1/2 a valószínűsége annak, hogy egy-egy dobásnál fejet dobunk.

Egy kísérletsorozat elvégzése után a vizsgált esemény bekövetkezésének **arányát** az esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük.

Más véletlen jelenségeknél is megfigyelhetjük, hogy a *kísérletek számának növelése esetén a vizsgált esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága egyre kevésbé ingadozik egy számérték körül*.
Ezt a számértéket az esemény valószínűségének nevezzük.

Miért fontos, hogy ismerjük egy esemény valószínűségét?

Az életnek számos területe van, ahol a valószínűségszámításnak meghatározó szerepe van, például:

- Egy biztosítási társaság számára elengedhetetlen, hogy ismerje, hogy a biztosítottak körében milyen arányban fordulnak elő az egyes káresetek. Ez alapján kell kikalkulálnia a biztosítási díjakat.
- Egy gyógyszer engedélyeztetésénél nélkülözhetetlen annak ismerete, hogy az egyes mellékhatásokra a betegek mekkora részénél lehet számítani.

Ezekben az esetekben az esemény vizsgálatára széles körű felmérést végeznek és a relatív gyakoriságot határozzák meg. A valószínűséget a relatív gyakorisággal becslik, vagy egyszerűen azzal helyettesítik.
Mi tehát a különbség a valószínűség és a relatív gyakoriság között?

- A **relatív gyakoriság** azt mutatja meg, hogy a kísérletek hányad részében következett be a vizsgált esemény. Ez az arányszám változik a kísérlet számának változásával.
- A **valószínűség** azonban egy rögzített szám. Bizonyítható, hogy a kísérletek számának növelésével a vizsgált esemény relatív gyakorisága egyre kevésbé ingadozik egy számérték körül, amely számot az esemény valószínűségének nevezünk.

Láthatjuk tehát, hogy a relatív gyakoriság és a valószínűség rokon fogalmak, de nem azonosak egymással.

9. lecke. A valószínűség fogalma

A bevezetőben láttuk, hogy a véletlen események bekövetkezéseinek esélyeit nagy számú kísérlet elvégzése után ismerhetjük meg.

1. Gyakoriság, relatív gyakoriság

Egy véletlen esemény (A) vizsgálatára végezzünk el n számú kísérletet. Tegyük fel, hogy az A esemény k **-szor következett be**. Ekkor
k : az A esemény **gyakorisága**
k/n : az A esemény **relatív gyakorisága**. Ez azt mutatja meg, hogy a kísérletek hányadrészében következett be az A esemény.
A tapasztalat* azt mutatja, hogy a kísérletet minél többször végezzük el, a vizsgált esemény relatív gyakorisága annál kevésbé ingadozik egy számérték körül. Ezt a számértéket az esemény valószínűségének nevezzük.

(A relatív gyakoriság ingadozásával kapcsolatos tapasztalatunk bizonyítható is. Lásd: később a nagy számok törvényénél, 26. lecke).*

jel: $P(A)$ - az A esemény valószínűsége
(A valószínűség jelölésére használt P betű a latin probabilitas szóból származik.)

1. feladat

Egy érme 100 feldobása során az alábbiakat jegyeztük le:

n : a dobások száma
k : a fejdobások száma (gyakorisága)
k/n : a fejdobások relatív gyakorisága

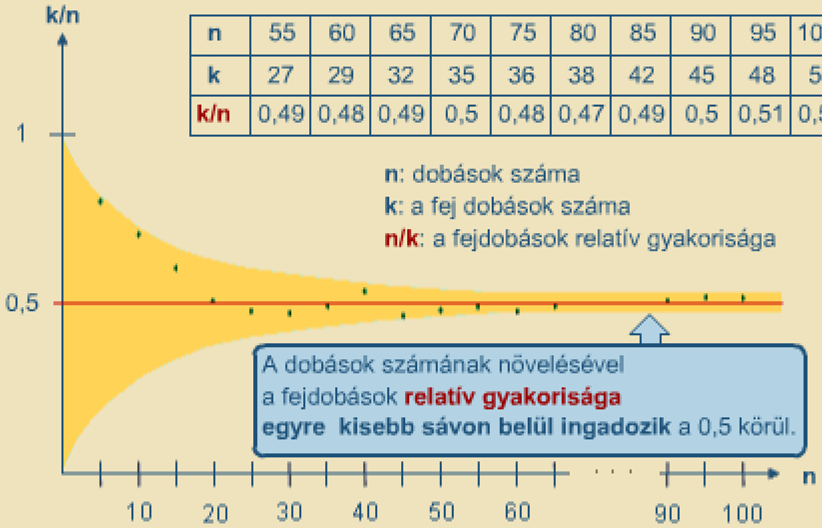
n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
k	4	7	9	10	12	14	17	21	22	24
k/n	**0,8**	**0,7**	**0,6**	**0,5**	**0,48**	**0,47**	**0,49**	**0,53**	**0,49**	**0,48**

n	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
k	27	29	32	35	36	38	42	45	48	51
k/n	**0,49**	**0,48**	**0,49**	**0,5**	**0,48**	**0,47**	**0,49**	**0,5**	**0,51**	**0,51**

Ábrázoljuk a fejdobások relatív gyakoriságát (k/n) a dobások számának (n) függvényében!

n	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
k	4	7	9	10	12	14	17	21	22	24
k/n	0,8	0,7	0,6	0,5	0,48	0,47	0,49	0,53	0,49	0,48

n	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
k	27	29	32	35	36	38	42	45	48	51
k/n	0,49	0,48	0,49	0,5	0,48	0,47	0,49	0,5	0,51	0,51



Látható, hogy a dobások számának növelésével a fejdobások relatív gyakorisága egyre kevésbé ingadozik a 0,5 érték körül. Így fejdobás valószínűsége 0,5.

2. A relatív gyakoriság tulajdonságai

Végezzünk n számú kísérletet. Jelölje k_A a vizsgált A esemény bekövetkezéseinek számát.

1. Tetszőleges A esemény gyakoriságára igaz, hogy $0 \le k_A \le n$. Ebből n-nel való osztással következik, hogy $0 \le \frac{k_A}{n} \le 1$, azaz a **relatív gyakoriság csak** $[0;1]$ **intervallumba eső szám lehet**.

2. Ha az A biztos esemény, akkor minden kísérletnél bekövetkezik, azaz $k_A = n$. Ezért **a biztos esemény relatív gyakorisága 1**.

3. Legyen az eseménytér **két egymást kizáró** eseménye A és B. Jelölje k_A illetve k_B az események bekövetkezéseinek számát. Mivel A és B egyszerre nem következhetett be,

- az $A+B$ esemény bekövetkezésének száma: $k_{A+B} = k_A + k_B$

- az $A+B$ esemény relatív gyakorisága: $\frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$

Vagyis az **egymást kizáró** A **és** B események esetén az $A+B$ esemény relatív gyakorisága egyenlő az A és B események relatív gyakoriságának összegével.

Mivel a relatív gyakoriságok a valószínűségi érték körül ingadoznak, ezért a fenti állításoknak a valószínűségre is igaznak kell lenniük.

2.1 A valószínűségszámítás axiómái

A H eseménytér minden A eseményéhez hozzárendelünk egy $P(A)$ valós számot, amelyet az A esemény valószínűségének nevezünk, és amely eleget tesz az alábbi axiómáknak:

I. axióma: Bármely A eseményre igaz, hogy $0 \le P(A) \le 1$

II. axióma: A biztos esemény valószínűsége 1.

III. axióma: Ha A **és** B **egymást kizáró** események, akkor annak a valószínűsége, hogy közülük legalább az egyik bekövetkezik egyenlő az események valószínűségének összegével, azaz $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Megjegyzés: Ez az állítás több, véges számú egymást páronként kizáró eseményre is igaz: $P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)$

IV. axióma: Ha az $A_1,A_2,...A_n,...$ nem véges számú egymást páronként kizáró esemény, akkor $P(A_1+A_2+...+A_n+...)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)+...$

3. Valószínűségszámítási tételek

1. tétel

Komplementer esemény valószínűségének számítása:
$P(\overline{A})=1-P(A)$

Megjegyzés: Az esemény és a komplementere közül az egyik és csak az egyik biztosan bekövetkezik, ezért: $P(A)+P(\overline{A})=1$.

2. tétel

A lehetetlen esemény valószínűsége 0.

3. tétel

Ha $A_1,A_2...A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor
$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1$

Megjegyzés: Az $A_1,A_2...A_n$ egymást kizárók és valamelyik biztosan bekövetkezik, így az események valószínűségének összege 1-et ad.

4. tétel

Események különbségének valószínűsége:
$P(A-B)=P(A)-P(A\cdot B)$

Megjegyzés:

1. Ez az állítás párhuzamba állítható az $A-B$-hez tartozó elemi események számítási módjával: $|A-B|=|A|-|A \cdot B|$
2. Ha a B esemény maga után vonja A-t ($B \subset A$), akkor $P(A-B)=P(A)-P(B)$

5. tétel

Események összegének valószínűsége:
$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$

Megjegyzések:

1. Ez az állítás párhuzamba állítható az $A+B$-hez tartozó elemi események számítási módjával: $|A+B|=|A|+|B|-|A \cdot B|$
2. Ha az A és B események egymást kizáróak, azaz $P(A \cdot B)=0$, akkor $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Így a III. axiómához jutunk.

6. tétel

A valószínűségszámítás klasszikus képlete:
Legyen a H eseménytér elemi eseményeinek száma n és tegyük fel, hogy **minden elemi esemény ugyanakkora valószínűséggel következik be**. (Ekkor bármely elemi esemény valószínűsége $1/n$)
Ha az A esemény pontosan k elemi esemény összegeként következik be, akkor

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}=\frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$$

2. feladat

Vili elhatározta, hogy a jövő héten kétszer megy úszni és sorsolással dönti el, hogy melyik napokon. (Az uszoda a hét minden napján nyitva van.)

a, Mennyi a valószínűsége, hogy egymást követő napokon megy úszni?

b, Mennyi a valószínűsége, hogy nem egymást követő napokon megy úszni?

c, Mennyi a valószínűsége, hogy egymást követő napokon megy úszni, de a kedd nincs a napok között?

d, Mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik teljesül azok közül, hogy egymást követő napokon megy vagy kedd az egyik uszodai nap?

2. feladat megoldása

A két nap lehetséges kiválasztásainak száma (ismétlés nélküli kombinációval): $\binom{7}{2}=21$

Vezessük be a következő eseményeket:

A: Egymást követő napokon megy úszni. $\rightarrow |A| = 6$
(**Lehetséges esetei:** hétfő-kedd, kedd-szerda, szerda- csütörtök, csütörtök-péntek, péntek-szombat, szombat-vasárnap)

B: A kedd az egyik uszodai nap. $\rightarrow |B| = 6$
(**Lehetséges esetei:** hétfő-kedd, kedd-szerda, kedd-csütörtök, kedd-péntek, kedd-szombat, kedd- vasárnap)

$A \cdot B$**:** Egymást követő napokon megy és a kedd az egyik nap. $\rightarrow |A \cdot B| = 2$
(Lehetséges esetei: hétfő-kedd, kedd- szerda)

Mivel bármely két nap kihúzásának valószínűsége azonos, ezért a feladat megoldásánál alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség képletet.

a, Egymást követő napokon megy úszni. $\rightarrow P(A) = \dfrac{\text{A esemény elemi eseményeinek száma}}{\text{összes elemi esemény}}$
$= \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

b, Nem egymást követő napokon megy úszni. $\rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

c, Egymást követő napokon megy úszni, de a kedd nincs a napok között.
$P(A - B) = P(A) - P(A \cdot B) = \frac{6}{21} - \frac{2}{21} = \frac{4}{21}$

d, Legalább az egyik teljesül azokból, hogy egymást követő napokon megy, vagy a kedd az egyik uszodai nap. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{6}{21} + \frac{6}{21} - \frac{2}{21} = \frac{10}{21}$

Az anyaghoz kapcsolódóan oldja meg a Valószínűségszámítás példatár **4.** fejezetében található **4.2, 4.4.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

9. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy áruház pénztárainál 3060 vásárló fizetett hitelkártyával egy adott napon. A hitelkártyával fizetők relatív gyakorisága 0,45.

Hány vásárlója volt az áruháznak ezen a napon?

Megoldás: (1).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány fehér golyót kell hozzátenni, ha azt akarjuk, hogy a fehér húzásának valószínűsége 0,9 legyen?

A fehér golyók száma: (1)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- 0,2
- 0,5
- 0,6
- 0,9

Egy idegenforgalommal foglalkozó cégnél 20-an dolgoznak. A dolgozók közül 14-en tudnak angolul, 8-an pedig németül. Az angolul és németül tudók között 4 olyan van, aki mind a két nyelvet beszéli. A dolgozók közül kiválasztunk véletlenszerűen egyet. Mi az alábbi eseményekhez tartozó valószínűség?

Nem tud németül: (1)................

Legalább az egyik nyelvet beszéli: (2)................

Angolul tud, de németül nem: (3)................

Angolul is és németül is tud: (4)................

4. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- 1/4
- 0
- 1/6
- 35/36
- 1/9

Egy piros és egy kék kockával egyszerre dobunk. Mi az alábbi eseményekhez tartozó valószínűség?

Segítség 9. lecke 4. önellenőrző feladat

A dobott számok összege 7: (1)................

Mind a két kockával 4-nél kevesebbet dobunk: (2)................

A dobott számok szorzata 6: (3)................

A dobott számok összege 1: (4)................

A dobott számok szorzata kevesebb 36-nál: (5)................

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 6800
2. feladat:	(1) - 45
3. feladat:	(1) - 0,6 (2) - 0,9

(3) - 0,5
(4) - 0,2

4. feladat:
(1) - 1/6
(2) - 1/4
(3) - 1/9
(4) - 0
(5) - 35/36

10. lecke. Feladatok a klasszikus valószínűség alkalmazására

1. feladat

A szekrényben 5 pár különböző színű zokni darabjai vannak összekeverve. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott két darab zokni egy összetartozó párt alkot?

1. feladat megoldása

A zoknik kihúzásánál **a sorrend nem lényeges**.

A két zokni kihúzásának összes lehetséges esete (ismétlés nélküli kombináció): $\binom{10}{2} = 45$

Ezek mindegyike azonos valószínűségű, tehát alkalmazhatjuk a **klasszikus valószínűség** képletét.

Mivel 5 pár zokni van a szekrényben, így 5-féle lehetőségünk van összetartozók kihúzására.

Tehát a kérdezett valószínűség: $P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$.

2. feladat

Magyar kártyából kihúzunk egyszerre 6 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy:

a, minden kihúzott lap piros,

b, a lapok között van király,

c, a zöld hetes a lapok között van,

d, alsó vagy felső közül legalább az egyik van a lapok között,

e, legalább két zöld van a lapok között?

2. feladat megoldása

Mivel a lapokat egyszerre húztuk ki, ezért a sorrend nem számít. A kedvező- és az összes elemi események számát ismétlés nélküli kombinációval számoljuk.
Összes elemi esemény száma (ahányféleképpen 32 lapból 6 kiválasztható):

$\binom{32}{6}=906\ \ 192$, ezek mindegyike azonos valószínűségű. $\rightarrow$ Alkalmazhatjuk a **klasszikus valószínűség** képletét.

a, A esemény: Csak piros lapot húztunk.

Ez azt jelenti, hogy minden kihúzott lap a 8 piros közül került ki, amelyre $\binom{8}{6}=28$ lehetőség van.

A kérdezett valószínűség: $P(A)=\binom{8}{6}:\binom{32}{6}=0{,}00003 \rightarrow 0{,}003\%$

b, B esemény: A lapok között van király. (Ez akár több királyt is jelenthet.)

A B esemény komplementere:
A kihúzott lapok között nincs király. Ez azt jelenti, hogy minden kihúzott lap a többi 28 lap közül került ki, amelyre $\binom{28}{6}=376\ \ 740$ lehetőség van.

A kérdezett valószínűség:

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{\binom{28}{6}}{\binom{32}{6}}=1-0{,}416=0{,}584 \rightarrow 58{,}4\%$$

c, C esemény: A zöld hetes a lapok között van.

Ez annyiféleképpen lehetséges, ahányféleképpen 31 lapból kiválasztható ki 5. Erre $\binom{31}{5}=169\ \ 911$ lehetőség van. A kérdezett valószínűség:
$P(C)==\binom{31}{5}:\binom{32}{6}=0{,}1875 \rightarrow 18{,}75\%$

d, D esemény: Alsó vagy felső közül legalább az egyik a lapok között van.

Itt is könnyebb a **komplementerrel** számolni:
$\overline{D}$: Sem alsó sem felső nincs a lapok között. Ez azt jelenti, hogy a kihúzott lapok a többi 24 lapból kerültek ki, így a kedvező esetek száma $\binom{24}{6}=134\ \ 596$.

A kérdezett valószínűség:

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{\binom{24}{6}}{\binom{32}{6}}=1-0{,}149=0{,}851 \rightarrow 85{,}1\%$$

e, E esemény: legalább két zöld van a kihúzott lapok között.

$\overline{E}$: **nincs zöld** vagy **egy zöld** van a lapok között. Ezek egymást kizáró események, ezért a valószínűségük összegződik. (Egy zöld annyiféleképpen lehet a kihúzott lapok között, ahányféleképpen kiválasztható a 8 zöldből 1 lap, és a 24 egyéb lapból 5.)

$$P(D)=1-P(\overline{E})=1-\frac{\binom{24}{6}+\binom{24}{5}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{32}{6}}=1-0{,}524=0{,}476 \rightarrow 47{,}6\%$$

3. feladat

Egy csomag magyar kártyát jól összekeverünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy király egymás után következik?

3. feladat megoldása

A 32 lap összes lehetséges sorrendjének száma: $32!$.
A kedvező esetek számának meghatározásához "ragasszuk össze" a királyokat egy tetszőleges sorrendben. Így a többi lappal együtt már csak 29 lapunk van.
Azaz a királyok bármely rögzített sorrendjéhez $29!$ lapsorrend lehetséges.
Mivel $4!$ sorrendje van a királyoknak, ezért $4!\cdot 29!$ esetben lesznek a királyok közvetlenül egymás mellett.

Tehát a kérdezett valószínűség: $\frac{4!\cdot 29!}{32!}\approx 0{,}0008 \rightarrow 0{,}08\%$

4. feladat

Egy kockát feldobunk ötször egymás után, és a számokat a dobás sorrendjében feljegyezzük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy:

a, minden dobott szám különböző,

b, minden dobott szám azonos,

c, van a dobott számok között azonos,

d, van a dobott számok között különböző,

e, pontosan 2 darab hármas van a dobott számok között?

4. feladat megoldása

Az elemi eseményeket a dobott számokból álló számötösök alkotják. Ezek száma $6^5=7776$, és mindegyik ugyanakkora valószínűségű, tehát alkalmazhatjuk a **klasszikus valószínűség** képletét.

a, A esemény: Minden szám különböző.

A kedvező elemi események számát ismétlés nélküli variációval kaphatjuk meg:
$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=6!=720$

$P(A)=\frac{6!}{6^5}\approx 0{,}093 \rightarrow 9{,}3\%$

b, B: Minden szám azonos: 6 elemi esemény $P(B)=\frac{6}{6^5}=0{,}0008 \rightarrow 0{,}08\%$

c, Van a dobott számok között azonos, azaz **nem mind különböző** (az A **esemény komplementere**):

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{6\,!}{6^5}\approx 1-0{,}093=0{,}907 \rightarrow 90{,}7\%$

d, Van a dobott számok között különböző, azaz **nem mind azonos** (a B **esemény komplementere**):

$P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{6}{6^5}\approx 1-0{,}0008=0{,}9992 \rightarrow 99{,}92\%$

e, C esemény: **Pontosan 2 darab hármas** van a dobott számok között.

A dobott számok alkotta számötösben a **2 darab 3-as helyét** $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, míg a többi három hely mindegyikére 5-féle szám kerülhet.

Így a **két darab 3-as bármely rögzített helye esetén** 5^3**-féleképpen választható meg a másik három szám**.

A kedvező elemi események száma $\binom{5}{2}\cdot 5^3=1250$.

$\rightarrow P(C)=\frac{\binom{5}{2}\cdot 5^3}{6^5}\approx 0{,}161 \rightarrow 16{,}1\%$

5. feladat

Legalább hányszor kell egy érmét feldobni, hogy 0,99-nél nagyobb valószínűséggel legyen a dobások között fej?

5. feladat megoldása

A esemény: A dobások között van fej:

$\overline{A}$ esemény: A dobások között nincs fej, azaz mind írás.

n számú dobás esetén az **összes eset** 2^n, mert minden dobásnak 2 kimenetele lehet.

$P(\overline{A})=\frac{1}{2^n} \rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{2^n}$

A feladat feltétele szerint olyan n értéket keresünk, amelyre a $P(A)$ valószínűség nagyobb 0,99-nél:

$P(A)=1-\frac{1}{2^n}>0{,}99$ Ebből algebrai átalakításokkal kifejezzük az n változót:

$0{,}01>\frac{1}{2^n} \rightarrow 2^n>\frac{1}{0{,}01} \rightarrow 2^n>100$

Vegyük az egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát:

$n\cdot lg2>lg100$, amiből $n>6{,}64$. **Vagyis legalább 7-szer kell dobni ahhoz, hogy 99 %-nál nagyobb valószínűséggel legyen a dobások között fej.**

6. feladat

Egy társasházban 6 család lakik. Egy alkalommal a postás minden család részére hozott egy levelet. Ezeket a postaládákba véletlenszerűen dobált be (minden ládába egy levelet). Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan 4 család kapta meg a saját levelét?

6. feladat megoldása

A levelek annyiféleképpen dobálhatók be a ládákba, ahány **lehetséges sorrendjük** van. Így az összes lehetséges eset számát ismétlés nélküli permutációval kapjuk meg: $6! = 720$
Kedvező esetben 4 család kapja meg a saját levelét, és a maradék kettő felcserélve kapja. Erre annyi lehetőség van, ahányféleképpen a 6 családból 4 kiválasztható:
$\binom{6}{4} = 15$

(Bármely 4 jó helyre dobott levélhez csak egyféleképpen - felcseréléssel - tartozhat 2 db rosszul kézbesített.)

Így a kérdezett valószínűség: $15/720 = 0{,}02 \rightarrow 2\%$

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **4.** fejezetében található **4.1, 4.2.** kidolgozott példákat és oldja meg a **4.5-8., 11.,15.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

10. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy kockát feldobunk hétszer, és a számokat a dobás sorrendjében feljegyezzük.

Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 2 ötöst dobunk? (Komplementerrel számoljon!)
(1)................%

Mennyi annak a valószínűsége, hogy eggyel több párosat dobunk, mint páratlant?
(2)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Magyar kártyából kihúzunk egyszerre 5 lapot.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy van zöld a kihúzott lapok között?
(Komplementerrel számoljon!) (1)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - egyszeres választás
Egy csomag magyar kártyát jól összekeverünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 8 piros egymás után következik?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) $8!$
( ) $8^8 \cdot 24^{24}$
( ) $\frac{8! \cdot 25!}{32!}$
( ) $24!$

4. feladat - egyszeres választás

Dobjunk fel egy érmét hétszer egymás után, az eredményeket írjuk le a dobás sorrendjében!
Mennyi a valószínűsége annak, hogy 3 fej lesz a dobások között?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 2^3
( ) 3^2
( ) $\frac{\binom{7}{3}}{2^7}$
( ) $7!$
( ) 7^2

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 33 (2) - 27,3
2. feladat:	(1) - 78,9
3. feladat:	$\frac{8!\cdot 25!}{32!}$
4. feladat:	$\frac{\binom{7}{3}}{2^7}$

11. lecke. Mintavételek

A mintavételes feladatok a klasszikus valószínűségi képletnek egy fontos alkalmazási területét alkotják.

Véletlen minta: egy halmazból találomra kihúzott elemek összessége. Az eljárás során minden minta (bármely elem-összetételű) kihúzása egyenlő valószínűségű.

Kétféle mintavételt különböztetünk meg:

1. Visszatevés nélküli mintavétel
2. Visszatevéses mintavétel

1. Visszatevés nélküli mintavétel

Egy halmazból meghatározott számú elemet húzunk ki.

A kihúzott elemeket nem tesszük vissza a többi közé, így a húzások során egyre kevesebb elemből választunk. Figyeljük a kiválasztott elemek sorrendjét is.

Az elemek kiválasztása történhet **egyszerre** is. Ekkor az elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel.

1. feladat

Egy rejtvénypályázatra 15 helyes megfejtés érkezett, a megfejtők között 9 nő és 6 férfi volt. A megfejtők között 5 egyforma ajándékot sorsoltak ki. Mennyi a valószínűsége, hogy a nyertesek között 3 nő van? (Oldjuk meg a feladatot a sorrend figyelembe vételével és anélkül is!)

1. feladat megoldása

A 9 női megfejtő közül került ki 3 nyertes, és a 6 férfi megfejtő közül 2 nyertes:

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát a kérdezett valószínűség: $P(A)=\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{2}\cdot 5\ !}{\binom{15}{5}\cdot 5\ !}\approx 0{,}42 \rightarrow 42\%$.

Megjegyzés: A megoldás során láttuk, hogy a valószínűség értéke n**em függ attól, hogy figyeljük-e a kiválasztottak sorrendjét vagy sem**. Ezért a továbbiakban a **visszatevés nélküli mintavételnél nem vesszük figyelembe a kiválasztott elemek sorrendjét**.

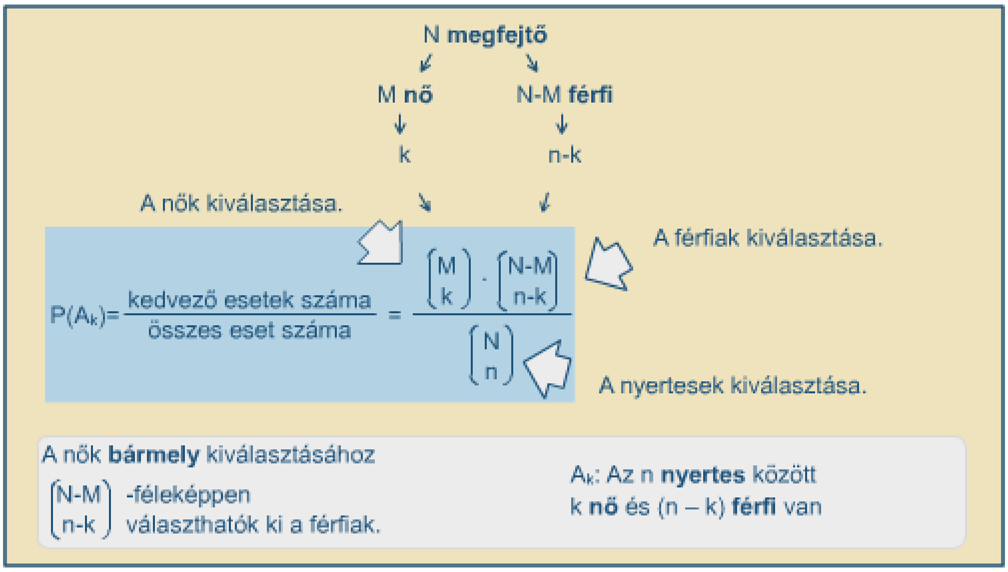
Általánosítsuk az 1. feladatot!

2. feladat

Egy rejtvénypályázatra N helyes megfejtés érkezett, a megfejtők között M nő és $(N-M)$ férfi van. A megfejtők közül n **számú** nyertest sorsolnak ki. Mennyi a valószínűsége, hogy k nő van a kihúzottak között?

2. feladat megoldása

Jelöljük A_k-val azt az eseményt, hogy k darab nő van a nyertesek között.



A visszatevés nélküli mintavételnél alkalmazott általános képlet:

$$P(A_k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

ahol $k=0,1,...,n$ és $n\leq min(M,N-M)$.

A probléma általános megfogalmazása:
Adott N elem, amelyek között M **kitüntetett** (a vizsgálat szempontjából megkülönböztetett) van.
Az elemekből n **-szer** húzunk visszatevés nélkül.
Annak a valószínűségét keressük, hogy a mintában k kitüntetett van.

3. feladat

Mennyi a valószínűsége, hogy a lottó kihúzott számai között 1 darab 5-tel osztható van?

3. feladat megoldása

Lottósorsolás egy visszatevés nélküli mintavétel. A vizsgálat szempontjából a $(N=)90$ számot két csoportra osztjuk szét:
5-tel oszthatók: $M=90/5=18$
5-tel nem oszthatók: $N-M=72$

Annak a valószínűsége, hogy a kihúzott $(n=)5$ elemből $(k=)1$ öttel osztható van:

$$P(A_k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{18}{1}\cdot\binom{72}{4}}{\binom{90}{5}}\approx 0,42$$
$$\rightarrow 42\%$$

Ez azt jelenti, hogy 100 lottósorsolásból várhatóan 42 esetben lesz a kihúzott számok között 1 darab öttel osztható.

2. Visszatevéses mintavétel

Az elemeket egyesével húzzuk ki a halmazból. A kihúzott elemet visszatesszük a többi közé, és csak ezután húzzuk ki a következőt. Így **minden húzásnál az összes elemből választunk**. A kiválasztott elemek sorrendjét minden esetben figyelembe vesszük.

4. feladat

Szeszélyes tanár úr minden órán egy tanulót feleltet. A felelőt véletlenszerűen választja ki az **összes** tanuló közül. (Így előfordulhat, hogy valaki több egymás utáni órán is felel.) Egy általa tanított osztályban 12 fiú és 8 lány van. Mi a valószínűsége, hogy a következő 5 tanórán 3 lány fog felelni.

4. feladat megoldása

Szeszélyes tanár úr **visszatevéses mintavétellel** választja ki óráról-órára a felelőket, hiszen minden órán az összes tanuló közül választ.

A **kedvező esetek** számát megkapjuk, ha kiszámoljuk, hogy hányféleképpen felelhet az 5 tanórán 3 lány. Ekkor 2 olyan tanóra van amikor fiúk felelnek.

Ehhez figyelembe kell venni a következőket:

Mely tanórákon feleltek lányok?
A 3 "lányos" óra kiválasztására (ismétlés nélküli kombináció)

$\binom{5}{3}$ lehetőség van.

Hányféleképpen választható ki 3 lány felelő?
Minden órán 8 lányból választhat, így a 3 nap alatt összesen 8^3-féle lehetőség van (ismétléses variáció.)

Hányféleképpen választható ki 2 fiú felelő?
Minden órán 12 fiúból választhat, így a 2 nap alatt összesen 12^2-féle lehetőség van (ismétléses variáció.)

Tehát a kedvező esetek száma $\binom{5}{3}\cdot 8^3\cdot 12^2$

Az **összes lehetséges kiválasztás**:
Minden órán 20 tanulóból választ, így az összes eset száma: 20^5.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A kérdezett valószínűség: $P(A_3)=\frac{\binom{5}{3}\cdot 8^3\cdot 12^2}{20^5}=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{8}{20}\right)^3\cdot\left(\frac{12}{20}\right)^2\approx 0{,}23$

Megjegyzés:
A képletben lévő $\frac{8}{20}$ az osztályban lévő **lányok arányát**, a $\frac{12}{20}$ a **fiúk arányát** mutatja meg.
Azaz **1-1 tanórán** $\frac{8}{20}$ valószínűségű, hogy **a kiválasztott felelő lány** lesz, és $\frac{12}{20}$ valószínűségű, hogy **fiú**.

Általánosítsuk a 4. feladatot!

5. feladat

N elem között M kitüntetett van. Az elemek közül n-szer húzunk visszatevéssel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elemek között k kitüntetett van?

5. feladat megoldása

Kedvező estek számolása:
$\binom{n}{k}$ lehetőség van azon húzások megválasztására, amelyeknél kitüntetett elemet húzunk.

A **kitüntetett elemek** kiválasztására minden húzásnál M lehetőség van. Így k húzás esetén M^k-féleképpen választhatók ki kitüntetett elemek.

A **nem kitüntetettek** kiválasztására minden húzásnál $(N-M)$ lehetőség van. Így $(n-k)$ húzás esetén $(N-M)^{n-k}$ lehetőség van a nem kitüntetettek kihúzására.

Az összes eset számolása:
Minden húzásnál N elemből választhatunk, így az n elem kiválasztására N^n lehetőség van.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A visszatevéses mintavételnél alkalmazott általános képlet:

$$P(A_k)=\frac{\binom{n}{k}\cdot M^k\cdot(N-M)^{n-k}}{N^n}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^k\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

ahol $q=1-p$ és k lehetséges értékei: $k=0,1,2,3...,n$

Megjegyzés:
A képletben lévő $\frac{M}{N}$ a kitüntetett elemek **részarányát** mutatja meg. Azaz $p=\frac{M}{N}$ annak a valószínűsége, hogy **1-1 húzásnál kitüntetettet húzunk**.
$q=\frac{N-M}{N}$ a **nem kitüntetettek részaránya**, illetve annak a valószínűsége, hogy **1-1 húzásnál nem kitüntetettet húzunk**.

6. feladat

Magyar kártyából visszatevéssel húzunk 6-szor. A lapokat a húzás sorrendjében feljegyezzük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 2 piros van a kihúzottak között?

6. feladat megoldása

$(N=)32$ lapból húzunk $(n=)6$-szor ismétléssel, és vizsgáljuk annak a valószínűségét, hogy $(k=)2$ piros lesz a kiválasztottak között. A piros lapok aránya $(p=)8/32$, a nem pirosaké $(q=)24/32$.
Így a kérdezett valószínűség:

$$P(A_k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{8}{32}\right)^2\cdot\left(\frac{24}{32}\right)^4\approx 0{,}3$$

Megfigyelhetjük, hogy a **visszatevéses mintavétel** során, **minden húzásnál ugyanakkora esélyünk van a "kitüntetett" elem kiválasztására**. Például, ha a magyar kártyából visszatevés nélkül húzunk, minden húzásnál 8/32 annak a valószínűsége, hogy pirosat húzunk.

Ha **nagy számú elemből** visszatevés nélkül választunk, ahol **a "kitüntetettek" száma is nagy a mintaelemek számához képest**, akkor a kitüntetettek aránya nem változik lényegesen az egyes húzások során. Ilyen esetben a **visszatevéses mintavétellel számolt valószínűség** kielégítő pontossággal **közelíti a visszatevés nélkülivel számolt valószínűséget**.

Összefoglalva: Ha N **és** M **nagy** az n**-hez képest**, akkor a visszatevés nélküli mintavételnél a visszatevéses mintavétel képletével is számolhatunk valószínűséget.

7. feladat

Egy főiskola gazdálkodás szakán **100 hallgató** tanul, közülük **45 tud angolul**. Válasszunk ki a hallgatók közül **4-et**.

a, Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy **1 angolul tudó** van a kiválasztottak között?

b, Ellenőrizzük azt a feltevést, hogy a visszatevéses és visszatevés nélküli mintavétel képlete közel azonos valószínűséget ad!

7. feladat megoldása

A feladatban szereplő paraméterek: $N=100$, $M=45$, $n=4$, $k=1$

Visszatevés nélküli mintavétel képletével:

$$P(A_k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{45}{1}\cdot\binom{55}{3}}{\binom{100}{4}}\approx 0,3011$$

A **visszatevéses** mintavétel képletével:

$$P(A_k)=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^k\cdot\left(\frac{N-M}{N}\right)^{n-k}=\binom{4}{1}\cdot\left(\frac{45}{100}\right)^1\cdot\left(\frac{55}{100}\right)^3\approx 0,2995$$

Látható, hogy a hallgatók száma és köztük az angolul tudók száma is jóval nagyobb a minta elemszámánál, így a **kétféle mintavételi képlettel számolt valószínűség nagyon kis mértékben tér el egymástól**.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **5.** fejezetében található **5.1.,5.2.** kidolgozott példákat és oldja meg a **5.1-9., 12., 14-18.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

11. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - egyszeres választás
Magyar kártyából kihúzunk egyszerre 5 lapot. Hány százalék a valószínűsége annak, hogy két király van a kihúzott lapok között?

Segítség 11. lecke 1. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 5,6
( ) 16,8
( ) 9,8
( ) 12,4

2. feladat - egyszeres választás
Hány százalék a valószínűsége, hogy a kihúzott lottó számok között 4 darab 20-nál nagyobb van?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 47,2
( ) 44,9
( ) 50
( ) 41,7

3. feladat - egyszeres választás

Pontos Pál 3-féle busszal és 2-féle villamossal tud munkába menni. A járművek közül mindig azt választja, amelyik a legkorábban érkezik. (A járművek ugyanolyan sűrűn járnak, így mindegyik érkezése egyenlő valószínűségű.) Hány százalék a valószínűsége, hogy 6 egymást követő munkanapból 4-szer megy busszal?

Segítség 11. lecke 3. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 31,1
( ) 29,1
( ) 33,5
( ) 40

4. feladat - egyszeres választás

Szigorú Szilárd egy vállalat 11 karbantartójának és 6 raktárosának főnöke. Minden műszak végén kiválaszt a dolgozók közül véletlenszerűen egyet, akinek az aznapi munkáját ellenőrzi. Hány százalék a valószínűsége annak, hogy 10 műszak után 4 raktáros munkáját ellenőrizte?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 23,9
( ) 18,5
( ) 20
( ) 22,6

5. feladat - egyszeres választás

Egy ládában 30 fehér és 20 sárga labda van. A ládából kiválasztunk 5 labdát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a mintában 2 fehér labda van? Határozza meg a kérdezett valószínűséget visszatevéses- és visszatevés nélküli mintavétellel számolva!
Hány százalék a két valószínűség közti különbség? (A %-ban kiszámolt valószínűséget egy tized pontosságig határozza meg!)

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 3
( ) 4
( ) 0,3
( ) 0,4

6. feladat - egyszeres választás

Az 5. feladatban mivel magyarázható a csekély eltérés a kétféle mintavétellel számolt valószínűség között?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) A visszatevéses és visszatevés nélküli képlet mindig ugyanazt a végeredményt adja, az esetleges eltérések a számolás során fellépő kerekítések miatt van.
( ) A kétféle mintavétellel számolt valószínűség csak kis mértékben tér el egymástól, ha a minta elemszáma kisebb 10-nél.
( ) A kétféle mintavétellel számolt valószínűség csak kis mértékben tér el egymástól, ha a választható elemek száma sokkal nagyobb a minta elemszámánál.

Megoldókulcs

1. feladat:	9,8
2. feladat:	41,7
3. feladat:	31,1
4. feladat:	23,9
5. feladat:	0,4
6. feladat:	A kétféle mintavétellel számolt valószínűség csak kis mértékben tér el egymástól, ha a választható elemek száma sokkal nagyobb a minta elemszámánál.

12. lecke. Vegyes feladatok

1. feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lottón legalább két találatunk van?

1. feladat megoldása

A lottósorsolás visszatevés nélküli mintavétel.

A lottó 5 számának kisorsolására $\binom{90}{5} = 43\ 949\ 268$ lehetőség van, és mindegyik ugyanakkora valószínűségű.
Vezessük be a következő eseményeket:
A_0: 0 találat
A_1: 1 találat
...
A_5: 5 találat

Ezek az események **egymást páronként kizárják**.

A **legalább két** találat: **2, 3, 4 vagy 5** találat.
Számoljuk ki először a **2 találathoz tartozó elemi események számát**:
A kedvező elemi események meghatározásához, képzeljük el, hogy az összes lehetséges módon kitöltöttük a lottószelvényeket. 2 találat azokon a szelvényeken lesz, amelyeken a kihúzottak közül kettő, a nem kihúzottak közül 3 szerepel, azaz
$|A_2| = \binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$.
Hasonlóan gondolható végig a másik három eset is. A végeredményeket az alábbi táblázat tartalmazza.

Események	Elemi események száma	Valószínűség
A_2 : 2 találat	$\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}$	987 700 : 43 949 268 ≈ **2,25 %**
A_3 : 3 találat	$\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}$	35 700 : 43 949 268 ≈ **0,08 %**
A_4 : 4 találat	$\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}$	425 : 43 949 268 ≈ **0,001 %**
A_5 : 5 találat	1	1 : 43 949 268 ≈ 0

Tehát annak a valószínűsége, hogy legalább 2 találat lesz:
$P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)+P(A_5)\approx 2{,}33\%$

Mit is jelent ez?
10 000 kitöltött szelvényből átlagosan 233 -on van legalább 2 találat. Ezek közül várhatóan 225 szelvényen csak kettes van.

2. feladat

Egy mosóport gyártó cég forgalmának fellendítése végett a mosóporos dobozok 5%-ban nagy értékű nyereményszelvényt helyezett el.

a, Mennyi a valószínűsége annak, hogy 10 doboz mosópor vásárlása esetén találunk legalább egy nyereményszelvényt?

b, Legalább hány doboz mosóport kellene vásárolnunk ahhoz, hogy legalább 90 % -os valószínűséggel találjunk nyereményszelvényt?

2. feladat megoldása

A **vásárlás** nyilvánvalóan **visszatevés nélküli mintavétel**. Ebben az esetben nem ismert, hogy hány doboz mosóport dobtak piacra, és az sem, hogy hány nyereményszelvényt tartalmaztak a dobozok. Egy azonban biztos, hogy sokkal többet, mint ahány elemű mintát vettünk. Így a **visszatevés nélküli mintavétel képlete helyett a visszatevésest is alkalmazhatjuk** (lásd 11. lecke 7. feladat.).

a, A esemény: Legalább egy dobozban van nyeremény.

Ismertek az alábbi paraméterek:
A minta elemszáma: $n=10$
A nyereményt tartalmazó dobozok aránya: $p=0{,}05\ (5\%)$
A nyereményt tartalmazó dobozok száma a mintában legalább egy: $k\geq 1$.
Érdemes a **komplementer** esemény segítségével megoldani a feladatot.
Annak a valószínűsége, hogy **nincs nyeremény a vásárolt dobozokban**:
$P(\overline{A})=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\binom{10}{0}\cdot(0{,}05)^0\cdot(0{,}95)^{10}=0{,}95^{10}$

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}95^{10}=1-0{,}599=0{,}401$

Tehát 10 doboz vásárlása esetén 40 % annak a valószínűsége, hogy van legalább egy nyeremény a vásárolt dobozokban.

b, Nyilvánvalóan minél több dobozt vásárlunk, annál nagyobb lesz annak az esélye, hogy lesz nyeremény a dobozokban. Azt az n értéket keressük, amelyre ez a valószínűség legalább 90 %.

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}95^{n}\geq 0{,}9 \rightarrow 0{,}1\geq 0{,}95^{n} \rightarrow \lg 0{,}1\geq n\cdot\lg 0{,}95$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát osszuk el lg 0,95-kal. Ügyeljünk arra, hogy amivel osztunk negatív, így megváltozik a reláció iránya: $\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}95}\leq n \rightarrow n\geq 44{,}9$.

Mivel n - a vásárolt dobozok száma - csak egész szám lehet, így legalább 45 doboz mosóport kell venni ahhoz, hogy 90 %-nál nagyobb valószínűséggel legyen közte nyeremény.

3. feladat

Egy ládában nagyon sok alkatrész van. Feladatunk a selejtarány meghatározása.
Az alkatrészek közül **10 elemű mintát** veszünk, és feljegyezzük a selejtek számát. Ezt a mintavételi eljárást még nagyon sokszor elvégezzük, mindig feljegyezve a mintában lévő selejtek számát. Azt tapasztaljuk, hogy az esetek **60 % -ban a 10 elemű minta selejtmentes**. Határozzuk meg a ládában lévő alkatrészek selejtarányát!

3. feladat megoldása

A **esemény: nincs selejt a 10 elemű mintában.**
A fenti eljárás után arra következtethetünk, hogy **a selejtmentes minta valószínűsége 60 %** (10 elemű mintavétel esetén). $\rightarrow P(A)=0{,}6$
$P(A)=\binom{n}{k}\cdot p^{k}\cdot q^{n-k}=\binom{10}{0}p^{0}q^{10}=0{,}6$, ahol p **a selejtarányt, q a jó alkatrészek arányát** mutatja meg.

Mivel az első két szorzó értéke 1, ezért
$q^{10}=0{,}6 \rightarrow q=\sqrt[10]{0{,}6}=0{,}95$
Tehát a ládában lévő jó alkatrészek aránya 95 %, a selejtesek aránya 5%.

4. feladat

Töltsük ki véletlenszerűen a totó első 13 sorát.

a, Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 11 találatunk lesz?

b, Mennyi annak a valószínűsége, hogy 4 találatunk lesz?

4. feladat megoldása

Elemi esemény: a szelvény 13 sorának egy konkrét kitöltése.

Az **összes lehetséges kitöltések számát** ismétléses variációval kaphatjuk meg. Mivel minden sornak 3-féle kitöltése lehetséges, ezért az **elemi események** száma: $3^{13} = 1594323$.

Vezessük be a következő eseményeket:
A_{13}: 13 találat
A_{12}: 12 találat
A_{11}: 11 találat
...

A **kedvező elemi események** meghatározásához, képzeljük el, hogy az összes lehetséges módon kitöltöttük a totószelvényeket. Vizsgáljuk meg, hogy hány 11, 12 illetve 13 találatos szelvény lesz köztük.

13 találatos csak 1 darab lesz (ez a teljesen jó kitöltés): $|A_{13}| = 1$

12 találat: Ezeknél a szelvényeknél egy hibát követtünk el. **13-féleképpen** választhatjuk meg, hogy **melyik sorban** követjük el a hibát, és bármely **sor 2-féleképpen tölthető ki hibásan**. Például, ha x lenne a helyes válasz, akkor 1 vagy 2 beírásával tévedhetünk.
$|A_{12}| = 13 \cdot 2 = 26$

11 találat: A szelvény két sora van hibásan kitöltve. $\binom{13}{2}$-féleképpen választható ki a 2 hibás sor. Mindkét sort 2-féleképpen lehet rosszul kitölteni. Tehát 2 sor estében a hibás kitöltések száma 2^2.
(Például az első két sor x helyes válasza helyett 11, 12, 21, 22 szerepel.)
$|A_{11}| = \binom{13}{2} \cdot 2^2 = 312$.

4 találat: A szelvénynek 9 sora van rosszul kitöltve. A hibás sorokat $\binom{13}{9}$-féleképpen választhatjuk ki, bármely 9 sor esetén 2^9 hibás kitöltés lehetséges. Így
$|A_4| = \binom{13}{9} \cdot 2^9 = 336080$

Események	Elemi események száma	Valószínűség
11 találat	$\binom{13}{2} \cdot 2^2$	312 : 1 594 323 ≈ 0,02 %
12 találat	$\binom{13}{1} \cdot 2^1$	26 : 1 594 323 ≈ 0,0016 %
13 találat	1	1 : 1 594 323 ≈ 0 %
4 találat	$\binom{13}{9} \cdot 2^9$	366 080 : 1 594 323 ≈23 %

A **legalább 11 találat** valószínűségét 11, 12, 13 találatok valószínűségének összegzésével kapjuk: $\approx 0{,}0216\ \%$.

Milyen kár, hogy a 4 találat nem fizet!

5. feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 15 fős társaságban van legalább 2 ember, akiknek ugyanazon a napon van a születésnapja? (Az év 365 napból áll.)

5. feladat megoldása

A esemény: Van legalább 2 ember, akiknek azonos napon van a születésnapjuk.

Célszerű a komplementer eseménnyel számolni:
$\overline{A}$: Minden ember különböző napon született.
Az $\overline{A}$ kedvező eseteiből annyi van, ahányféleképpen kiválasztható 15 nap az évből, és "kiosztható" 15 ember között. Itt ismétlés nélküli variációról van szó, mert "kiválasztottuk és sorba rendeztük" a napokat:
$|\overline{A}| = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 351$.
Az összes eset számolásánál azt kell figyelembe venni, hogy minden ember az év bármely 365 napján születhetett, ezért ez ismétléses variáció: 365^{15}.
Tehát annak a valószínűsége, hogy van legalább két ember, akiknek azonos napon van a születésnapja:
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 351}{365^{15}} = 1 - 0{,}81 = 0{,}19 \rightarrow 19\%$$

Ha a 15 ember között ikrek is vannak, akkor szinte biztos, hogy vannak azonos napon születettek.

Az anyaghoz kapcsolódóan oldja meg a Valószínűségszámítás példatár **4. és 5.** fejezetében található **4.5-8., 11.,15., 5.1-9., 12., 14-18.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

12. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - egyszeres választás
Hány százalék a valószínűsége annak, hogy a lottón legfeljebb egy találatunk van?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 97,7
( ) 95,6
( ) 97
( ) 96,1

2. feladat - egyszeres választás
A sorsjegyek 15 %-a nyer. 4 sorsjegyet vásárolva hány százalék a valószínűsége annak, hogy pontosan eggyel nyerünk?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 40,9

( ) 35,8
( ) 45,4
( ) 36,8

3. feladat - egyszeres választás

Egy piaci árus véletlenül összeöntött 2 rekesz magvas és 3 rekesz mag nélküli mandarint. Minden rekeszben ugyanannyi mandarin volt. A kétféle mandarint külsőre nem lehet megkülönböztetni egymástól. Egy vásárló 10 db mandarint vásárolt. Hány százalék a valószínűsége, hogy a mandarinok között legalább 3, de legfeljebb 5 magvas van?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 66,7
( ) 70,6
( ) 73,5
( ) 85,1

4. feladat - egyszeres választás

Egy ládában nagyon sok alkatrész van. Feladatunk a selejtarány meghatározása. Az alkatrészek közül 8 elemű mintát veszünk visszatevéssel és feljegyezzük a selejtek számát. Ezt a mintavételi eljárást 1000-szer elvégezzük, mindig feljegyezve a mintában lévő selejtek számát. Azt tapasztaljuk, hogy a mintavételeknél 750 esetben selejtmentes a minta. Határozzuk meg ládában lévő alkatrészek selejtarányát!

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 3,5
( ) 4,5
( ) 4
( ) 5

5. feladat - egyszeres választás

Egy teszt 10 kérdést tartalmaz, minden kérdésre 4 lehetséges választ adnak, amelyek közül csak egy a helyes. Hány százalék a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kitöltött tesztben 7 vagy 8 találatot érünk el?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 6,2
( ) 4,5
( ) 5,2
( ) 7,9

Megoldókulcs

1. feladat:	97,7
2. feladat:	36,8
3. feladat:	66,7
4. feladat:	3,5
5. feladat:	6,2

13. lecke. Geometriai valószínűség

Számos valószínűségszámítási feladat megoldása geometria alakzatok mértékének (hosszúság, terület, térfogat) meghatározására vezethető vissza. Ilyenkor **az eseménytér egy geometriai alakzat**tal szemléltethető. **Az elemi események a geometriai alakzat pontjai.**

1. feladat

Egy 20 cm sugarú céltáblára lövéseket adunk le. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a találat a céltábla középpontjától legfeljebb 10 cm-re van!
(Feltételezzük, hogy a találat a céltábla adott A részterületére esésének valószínűsége arányos a területtel.)

1. feladat megoldása

Tekintsük biztos eseménynek, hogy a céltáblát eltaláljuk, így a H eseménytér egy 20 cm sugarú kör.
Az A kedvező események egy 10 cm sugarú kör belső pontjai.

$$P(A)=\frac{\text{az A tartomány területe}}{\text{a H tartomány területe}}=\frac{10^2\cdot\pi}{20^2\cdot\pi}=\frac{100\cdot\pi}{400\cdot\pi}=\frac{1}{4}$$

Mivel a 10 cm sugarú kör területe 1/4-része a céltábla területének, így e kör eltalálásának valószínűsége 1/4.

Geometriai valószínűségről akkor beszélünk, ha:

- a H eseménytér egy geometriai alakzat,
- az A esemény ennek részhalmaza, és
- egy véletlen pont A tartományba esésének valószínűsége arányos az A tartomány mértékével.

A valószínűség csak az A tartomány nagyságától függ, de nem függ a H eseménytérben való elhelyezkedésétől.
A valószínűséget az A és a H mértékének hányadosával határozzuk meg, azaz:

- **hosszmértéknél**: $P(A)=\frac{\text{az A tartomány hossza}}{\text{a H tartomány hossza}}$
- **területmértéknél**: $P(A)=\frac{\text{az A tartomány területe}}{\text{a H tartomány területe}}$
- **térfogatnál**: $P(A)=\frac{\text{az A tartomány térfogata}}{\text{a H tartomány térfogata}}$
- **időtartamnál**: $P(A)=\frac{\text{az A tartomány időtartama}}{\text{a H tartomány időtartama}}$

2. feladat

Egy 20 cm sugarú céltábla esetén, mennyi a valószínűsége annak, hogy

a, a találat a középponttól legalább 5, de legfeljebb 12 cm-re található?

b, a találat a középponttól pontosan 8 cm-re található?

2. feladat megoldása

a, A kedvező esethez két, azonos középpontú 5 cm illetve 12 cm sugarú kör által határolt körgyűrű tartozik.

$$P(A)=\frac{\text{a körgyűrű területe}}{\text{a H tartomány területe}}=\frac{12^2\cdot\pi-5^2\cdot\pi}{20^2\cdot\pi}=\frac{119\cdot\pi}{400\cdot\pi}\approx 0{,}3$$

b, A kör középpontjától 8 cm-re lévő pontok egy körvonalon vannak. A körvonal területe 0, így a kérdezett valószínűség is 0.

Megjegyzés: Tudjuk, hogy **a lehetetlen esemény valószínűsége 0**. Ebből a példából látható, hogy ez az **állítás nem megfordítható**. Bár a körvonal eltalálásának valószínűsége 0, ez nem lehetetlen esemény.

3. feladat

Egy villamos menetrendjéről annyit tudunk, hogy 15 percenként jár. Véletlenszerűen kimegyünk a megállóba. Mennyi a valószínűsége, hogy

a, legfeljebb 3 percet kell várni?

b, 4 percnél többet, de 6 percnél kevesebbet kell várakoznunk?

c, pontosan 4 percet kell várnunk?

3. feladat megoldása

Tegyük fel, hogy van a megállóban egy óra, amely méri az előző villamos elhaladása után eltelt időt.

A H eseménytér a villamos érkezése előtti 15 perces időintervallum.

a, A kedvező esemény a villamos érkezése előtti 3 perces időintervallum, így $P=3/15=0{,}2$.

b, A kedvező esemény egy 2 perces időintervallum, így $P=2/15$

c, A kedvező esemény egyetlen időpillanat, vagyis az időintervallum hossza 0, így a hozzá tartozó valószínűség is 0.

4. feladat

Angéla és Bálint megbeszélik, hogy 13 és 14 óra között találkoznak kedvenc éttermükben. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a korábban érkezőnek legfeljebb 15 percet kell várnia?

4. feladat megoldása

Jelölje x illetve y, hogy Angéla illetve Bálint hány perccel érkezett 13 óra után.
Az $(x;y)$ számpárokat egy koordinátarendszerben ábrázolhatjuk.
Az x illetve az y értékekre az alábbiaknak kell teljesülni:
Legfeljebb 60 perccel érkezhetnek 13 óra után, így $0 \le x \le 60$ és $0 \le y \le 60$.
Legfeljebb 15 percet kell várakoznia a korábban érkezőnek. Ha a x és y közötti eltérés legfeljebb 15, akkor $|x-y| \le 15$.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A megoldás lépései:

1. A $|x-y| \le 15$ kifejezés $-15 \le x-y \le 15$ alakban is felírható.
Ez két egyenlőtlenség együttes teljesülését jelenti. Ezekből y-t kifejezve az alábbiakhoz jutunk:
$y \le x+15$ és $y \ge x-15$

2. Ábrázoljuk az **egyenlőséget** teljesítő $y = x+15$ és $y = x-15$ egyenes pontjait.

3. Bejelöljük az **egyenlőtlenséget** teljesítő pontokat.

4. Kiszámoljuk a kedvező esetek által meghatározott területet (komplementer segítségével).

5. Kiszámoljuk a valószínűséget. A koordinátarendszerben ábrázoltak alapján:

$$P(A) = \frac{\text{az A tartomány területe}}{\text{a H tartomány területe}} = \frac{60^2 - 2\cdot\frac{45^2}{2}}{60^2} = 0{,}4375$$

5. feladat

Egy számítógépes játéknál a képernyőn egy 10 cm oldalhosszúságú négyzet jelenik meg. A négyzet belsejébe véletlenszerűen kiválasztott helyre festékbombákat küldhetünk.
A találat helyétől a program párhuzamosokat húz a négyzet oldalaival, és a keletkező négy téglalap közül a bal alsót befesti. Mennyi a valószínűsége, hogy egy találattal sikerül a négyzet területének legalább a felét befesteni.

5. feladat megoldása

Illesszünk egy koordinátarendszert a négyzetre (a bal alsó sarkán van az origó). A találat helyének koordinátái legyenek x és y. Így a találatok koordinátáira igaz, hogy $0 \le x \le 10$ és $0 \le y \le 10$.
A találat után a négyzetnek egy $x \cdot y$ területű részét festi be a program. Kedvező esetben legalább a négyzet felét befestjük, ha $x \cdot y \ge 50$.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A megoldás során bejelöltük a koordinátarendszerben a kedvező esethez tartozó pontokat. A kimaradó rész egy 5 x 10 -es téglalap és az $y = 50 \cdot \frac{1}{x}$ hiperbola függvény alatti területe a

$[5;10]$ intervallumon.
A hiperbola alatti terület meghatározása:

$$T_2 = \int_5^{10} 50 \cdot \frac{1}{x}\ dx = 50 \cdot [\ln|x|]_5^{10} = 50 \cdot (\ln 10 - \ln 5) = 34{,}7$$

A kérdezett valószínűség:

$$P(A) = \frac{10^2 - (5 \cdot 10 + 34{,}7)}{10^2} = 0{,}153$$

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **6.** fejezetében található **6.1.** kidolgozott példákat és oldja meg a **6.1-4.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

13. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy erdős, nehezen megközelíthető sziget területe 2500 km^2. Ennek egy 20x15 km^2-es részen harcok dúlnak. Egy repülőgép kényszerleszállást hajtott végre ezen a 2500 km^2 - es területen. Geometriai valószínűséget feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy nem a harcok helyszínén szállt le?

A kérdezett valószínűség (1)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Egy 2 cm átmérőjű gombon 2 darab egyenként 0,2 cm átmérőjű lyuk van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy varrás közben a gombot (és nem a rajta lévő lyukat) találjuk el?

A kérdezett valószínűség (1)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Számkijelzős óránkban lemerült az elem. Este 8-kor, mikor megnéztük, még működött, de reggel 6-kor már nem tudott az ébresztője megszólalni. Mennyi a valószínűsége, hogy hajnali 1 és 3 óra között merült le az elem?

A kérdezett valószínűség (1)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
Tehetős Tamás kertjében egy 10 m hosszú úszómedence van. A medence alja úgy van kiképezve, hogy a benne lévő víz egyenletesen mélyüljön 80- 160 cm-ig. Egy alkalommal véletlenül beleejtette a medencébe a gyűrűjét. Egy hálóval legfeljebb 140 cm mélységig tud lenyúlni. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a gyűrű a medence olyan részére esett, ahonnan hálóval is elérhető?

Segítség 13. lecke 4. önellenőrző feladat

A kérdezett valószínűség (1)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - egyszeres választás

A számológépünkön véletlenszám-generátor is van, amellyel a (0;1) intervallumból lehet véletlenszerűen számot kiválasztani. Mennyi a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen generált szám összege legfeljebb 3/4?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 9/32
( ) 23/32
( ) 7/16
( ) 9/16

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 88
2. feladat:	(1) - 98
3. feladat:	(1) - 20
4. feladat:	(1) - 75
5. feladat:	9/32

III. fejezet. Gyakorló feladatok

1. feladat - leírás

1.

Egy társasházban 6 család lakik. Egy alkalommal a postás minden család részére hozott egy levelet. Sajnos otthon felejtette a szemüvegét, így a leveleket a postaládákba véletlenszerűen dobálta be (minden ládába egy levelet). Mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan 4 család kapta meg a saját levelét?

Megoldás

2. feladat - leírás

2.

Az ötös lottó kihúzott számaira vonatkoznak az alábbi kérdések.

a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden kihúzott szám osztható 3-mal?
b. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott számok között van 3-mal osztható?
c. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden kihúzott szám osztható 3-mal vagy mind nagyobb 20-nál (a két esemény közül legalább az egyik teljesül)?
d. Mennyi a valószínűsége annak, hogy minden kihúzott szám osztható 3-mal, de nem mind nagyobb 20-nál?
e. Egészítsük ki az alábbi eseményeket teljes eseményrendszerré és határozzuk meg a valószínűségüket:
    A: Minden kihúzott szám osztható 3-mal.

C: A kihúzott számok egyike sem osztható 3-mal.
D: ?

Megoldás

3. feladat - leírás
3.

Egy 10 kérdésből álló teszt minden kérdésére 5 lehetséges választ (a, b, c, d, e) adtak, amelyek közül pontosan egy helyes. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen bejelölt válaszok között:

a. nem lesz helyes válasz,
b. legalább 8 hibás választ adunk,
c. kettőnél a c-t, háromnál a b-t, és ötnél a d-t jelölünk meg?

Megoldás

4. feladat - leírás
4.

Egy ruhagyár által készített zoknik 7%-nak van valamilyen hibája. Egy nagyon sok zoknit tartalmazó szállítmányból kiválasztunk néhány zoknit.

a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 10 elemű mintában van hibás zokni?
b. Hány elemű minta esetén lesz legalább 90 % annak a valószínűsége, hogy van a zoknik között hibás?

Megoldás

5. feladat - leírás
5.

Egy labdát véletlenül nekirúgtak egy 10m hosszú és 5m magas háznak. A házon 2 db 2m×1,5m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy ablakot talált el a labda?

Megoldás

Megoldókulcs

1. feladat:	Id. a feladatnál!
2. feladat:	Id. a feladatnál!
3. feladat:	Id. a feladatnál!
4. feladat:	Id. a feladatnál!
5. feladat:	Id. a feladatnál!

Bevezető

A következő fejezetekben a **feltételes valószínűségről** és a **független eseményekről** lesz szó.
Ezen fogalmak megértésére nézzük meg a következő történetet!
Mohó Mihály töténete a páros lottó számokkal (első rész)

A lottón sok-sok hét óta nem volt 5 találatos szelvény, így minden idők legnagyobb nyereménye halmozódott fel.

Mohó Mihály szeretett volna mindent megtenni a főnyeremény érdekében. Egész életében fontos szerepet játszottak a páros számok, így elhatározta, hogy az **összes olyan kitöltést elvégzi, ahol csak páros számok szerepelnek**. Ez tudjuk, annyiféleképpen lehetséges, ahányféleképpen a 45 páros számból 5 kiválasztható (sorrendre való tekintet nélkül), azaz $\binom{45}{5}=1\ 221\ 759$.

A rokonok és barátok összefogása segítségével sikerült is tervét megvalósítani. Még ekkor sem volt túl nagy az 5 találat valószínűsége ($\binom{45}{5}:\binom{90}{5}=0{,}028$), csak 2,8 %, de arra gondoltak, hogy a kevesebb találatokért fizetett összegekkel együtt megtérül a vállalkozás.

Elérkezett hát a nagy nap, mindenki összegyűlt a tévé körül, hogy lássák a sorsolást. Az első kihúzott szám a 22-es volt, és ebben a pillanatban a tévében adáshiba következett be.

Először bosszankodtak, majd elkezdtek számolgatni, hogy mennyi most az öt találat valószínűsége. Nagyon megörültek, hogy az első szám páros volt. Egy páratlan szám egyből szertefoszlatta volna álmaikat, hiszen a szelvényeken csak páros számok szerepeltek. Az is nagy öröm volt, hogy a maradék 4 szám kihúzására már csak $\binom{89}{4}=2\ 441\ 626$ lehetőség van, szemben azzal a majdnem 44 millió esettel ($\binom{90}{5}=43\ 949\ 268$), ahányféleképpen a lottó összesen kitölthető.

Örömük azonban nem tartott sokáig, mert rá kellett döbbenniük, hogy a megírt szelvények nagy részén már nem lehet ötösük, mert nincs bejelölve rajtuk a 22-es szám. Gyorsan kiszámolták, hogy hány szelvényen szerepel a 22-es. A 45 páros számból egyet már kihúztak, így azt kell meghatározni, hogy a maradék 44-ből hányféleképpen választható ki további 4 páros szám: $\binom{44}{4}=135\ 751$

Mennyi tehát a csupa páros szám (5 találat) kihúzásának valószínűsége, ha tudjuk, hogy a kihúzott számok között szerepel a 22-es.

A számolásnál a klasszikus valószínűség képletét alkalmazzuk, de csak azokat az eseteket vesszük figyelembe, ahol szerepel a 22-es számjegy.

$$P=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}=$$

$$= \frac{\text{a 22 – est és csak páros számot tartalmazó kitöltések száma}}{\text{a 22 – est tartalmazó összes kitöltés száma}} =$$

$$= \binom{44}{4} : \binom{89}{4} = \frac{135\ 754}{2\ 441\ 626} = 0{,}0556$$

Megnyugodhattak hát, hiszen az öt találat esélye a kétszeresére nőtt.

(Mohó Mihály történetének folytatását a Valószínűségi változók c. fejezet bevezetőjében olvashatja.)

Búcsúzzunk most el egy rövid időre Mohó Mihálytól, és fordítsuk le a történetet a matematika nyelvére.

Miért változott meg az 5 találat valószínűsége azáltal, hogy megtudtuk, hogy kihúzták a 22-es számot?

Az első szám kihúzása után **a valószínűséget egy feltétel teljesülése** (a 22-es szám kihúzása) **esetén kerestük**. Ez a feltétel leszűkítette nemcsak az összes eset számát, hanem a kedvező esetekét is.

Minden olyan esetben **feltételes valószínűségről** beszélünk, amikor **egy esemény valószínűségét egy feltétel bekövetkezése esetén** vizsgáljuk.

A 16. leckében szó lesz még **független eseményekről** és **azok együttes bekövetkezésének valószínűségéről**.

Például ha tudjuk, hogy egy adott héten kihúzták a 22-es számot (aminek 5,5 % a valószínűsége), akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy a következő héten is kihúzzák ezt a számot? Ugye tudják, hogy szintén 5,5 %, mert az előző hét kihúzott számai egyáltalán nem befolyásolják a mostaniakat, más szóval egymástól **függetlenek**.

Egy másik kérdés:
Mennyi a valószínűsége annak, hogy egymást követő két, három vagy több hét mindegyikén kihúzzák a 22-es számot? Ugye gondolják, hogy egyre kevesebb. Ez a kérdés független események **együttes bekövetkezésére** vonatkozik A megoldás kulcsát a 16. lecke tartalmazza.

14. lecke. A feltételes valószínűség fogalma

1. A feltételes valószínűség fogalma

1. feladat

Dobjunk a kockával kétszer, a számokat jegyezzük le a dobás sorrendjében. Vizsgáljuk azokat a dobásokat, ahol a dobott számok összege 6. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a **6 összegű dobások között van 2-es**?

1. feladat megoldása

B **esemény:** a dobott számok összege 6.
A **esemény:** a dobott számok között van 2-es.

Ebben a feladatban a lehetséges eseteket leszűkítjük azokra, amelyeknél az összeg 6.
$B=\{15;\ 51;\ 24;\ 42;\ 33\}$

Ezen dobások között van kettes, ha **24** vagy **42** a két dobott szám. Ezek az $A{\cdot}B$ elemi eseményeinek felelnek meg.

A fenti példa az A **esemény** B **feltétel melletti feltételes valószínűségét** vizsgálja, amelynek jelölése:
$P(A|B)$ (ejtsd: A vonás B)

Láttuk, hogy az **összes esetek** számát a **feltétel -** B **esemény - elemi eseményeinek** száma adta, míg a **kedvező esetek** számolásánál az A **és** B **együttes bekövetkezését** vizsgáltuk.

Tehát a kérdezett valószínűség:

$$P(A|B)=\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}=\frac{\text{A}\cdot\text{B elemi eseményeinek száma}}{\text{B elemi eseményeinek száma}}=\frac{2}{5}$$

Osszuk el a számlálót és a nevezőt az összes elemi esemény számával, 36-tal.
Ekkor a számlálóban az $A{\cdot}B$, nevezőben a B esemény valószínűségét kapjuk:

$$P(A|B)=\frac{2}{5}=\frac{2/36}{5/36}=\frac{P(A{\cdot}B)}{P(B)}$$

Az A esemény B feltételre vonatkozó valószínűsége visszavezethető tehát a B és az $A{\cdot}B$ események **valószínűségére**. A fenti összefüggést a **feltételes valószínűség definíciójának** tekintjük.
Definíció:
Legyen A és B a H eseménytér két eseménye, ahol $P(B)\neq 0$.
$P(A|B)=\dfrac{P(A{\cdot}B)}{P(B)}$ hányadost az A esemény B feltételre vonatkozó feltételes valószínűségének nevezzük.

Megjegyzés:

1. $P(A|B)$-vel azt vizsgáljuk, hogy mennyi az A esemény valószínűsége, ha tudjuk, hogy B már bekövetkezett. Másképpen megfogalmazva: a B esemény bekövetkezése mennyire befolyásolja az A esemény bekövetkezését.

2. A definíció segítségével bizonyítható, hogy a $P(A|B)$ **feltételes valószínűségre is igazak a valószínűség axiómái:**

I. $0\le P(A|B)\le 1$
(A feltételes valószínűség értéke a $[0;1]$ intervallumba esik.)

II. $P(B|B)=1$

(A biztos esemény valószínűsége 1.)

III. Ha A_1, A_2, **...** A_n **egymást páronként kizáró események**, akkor
$P(A_1+A_2+...+A_n|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+...+P(A_n|B)$,
azaz annak a valószínűsége, hogy B feltétel mellett az események közül legalább az egyik bekövetkezik egyenlő az egyes események B feltételre vonatkozó valószínűségeinek összegével.

2. A valószínűségek szorzási szabálya

A feladatokban gyakran feltételes valószínűségek segítségével kell az események együttes bekövetkezésének valószínűségét kiszámolni. Erre vonatkoznak az alábbi tételek.

$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}$ képlet átrendezésével megkaphatjuk a $P(A\cdot B)$ valószínűséget.

Tétel:

Legyen A és B a H eseménytér eseményei, ahol $P(B)\neq 0$. Ekkor
$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)$,
azaz az A és B események együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő a B esemény valószínűségének és az A esemény B feltételre vonatkozó feltételes valószínűségének szorzatával.

2. feladat

Egy bolti ellenőrzés során megállapították, hogy a joghurtok 20 % -nak lejárt a szavatossága, a lejárt szavatosságú joghurtok 60 %-a gyümölcsös. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott joghurt lejárt szavatosságú és gyümölcsös?

2. feladat megoldása

A feladat szövegéből is kiolvasható, hogy a joghurtok 20 %-nak a 60 %-a lejárt szavatosságú és gyümölcsös, azaz a kérdezett valószínűség:
$0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12\rightarrow 12\%$.

Oldjuk meg a feladatot a **szorzási szabály felhasználásával** is!

B **esemény:** A véletlenszerűen kiválasztott joghurtnak **lejárt a szavatossága**.

A **esemény:** A véletlenszerűen kiválasztott joghurt **gyümölcsös**.

Ismertek az alábbi valószínűségek:
$P(B)=0{,}2$
$P(A|B)=0{,}6$, mivel csak a lejárt szavatosságúak között vizsgáltuk meg a gyümölcsösök arányát.

Lejárt **szavatosságú és gyümölcsös joghurt** kiválasztásának valószínűsége:
$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)=0{,}2\cdot 0{,}6=0{,}12\rightarrow 12\%$

3. A szorzási szabály általánosítása

Több esemény együttes bekövetkezése is megadható feltételes valószínűségekkel.

Tétel:

Legyenek A_1, A_2, ... A_n a H eseménytér tetszőleges eseményei. Ekkor ezen események együttes bekövetkezésének valószínűsége:
$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) =$
$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

Kattintson ide a nagyításhoz!

3. feladat

Magyar kártyából 4 lapot húzunk egymás után visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első két lap piros, a harmadik zöld és a negyedik tök lesz?

3. feladat megoldása

Vezessük be az alábbi eseményeket.

A_1: Az **1.** kihúzott lap **piros**.
A_2: A **2.** kihúzott lap **piros**.
A_3: A **3.** kihúzott lap **zöld**.
A_4: A **4.** kihúzott lap **tök**.
A kérdezett valószínűség: $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)$.
A feladatot a szorzási szabály felhasználásával oldjuk meg:

Kattintson ide a nagyításhoz!

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = P(A_1) \cdot P\left(A_2|A_1\right) \cdot P\left(A_3|A_1 \cdot A_2\right) \cdot P\left(A_4|A_1 \cdot A_2 \cdot A_3\right) = \frac{8}{32} \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{8}{30} \cdot \frac{8}{29}$$

4. feladat

Egy főiskolára 800 diák jár, a diákok 60 %-a idegenforgalmi-, a többiek gazdász szakosok. Egy felmérés szerint a diákok 3/4-részének nincs nyelvvizsgája, viszont az idegenforgalmi szakosok 1/3-része rendelkezik már nyelvvizsgával.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott

a, diáknak van nyelvvizsgája?

b, diák **gazdász és nincs** nyelvvizsgája?

c, **gazdász szakos diáknak van nyelvvizsgája**?

d, Mennyi a valószínűsége annak, hogy három egymás után kiválasztott diák közül az első nyelvvizsgával nem rendelkező gazdász, a második és harmadik idegenforgalmis és van nyelvvizsgája.

4. feladat megoldása

A feladat szövege alapján:

Az idegenforgalmi szakosok száma: $800 \cdot 0{,}6 = 480$, akikből $480 \cdot \frac{1}{3} = 160$ hallgatónak van nyelvvizsgája.

Nincs nyelvvizsgája $800 \cdot \frac{3}{4} = 600$ diáknak.

Foglaljuk táblázatba az adatokat!

Megnevezés:	A: idegenforgalmi	$\overline{A}$: gazdász	Összesen:
B: van nyelvvizsga	160	$200 - 160 = 40$	$800 - 600 = 200$
$\overline{B}$: nincs nyelvvizsga	$480 - 160 = 320$	$600 - 320 = 280$	600
Összesen:	480	$800 - 480 = 320$	800

a, $P(B) = 200/800 = 0{,}25$

b, $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 280/800 = 0{,}35$ vagyis a hallgatók 35 %-a gazdász és nincs nyelvvizsgája.

c, Ez a kérdés leszűkíti a hallgatókat a gazdászokra (tudjuk, hogy gazdászt választottunk ki), ezért ez feltételes valószínűség. Így a nyelvvizsgával rendelkező 40 gazdászt viszonyítjuk az összes gazdászhoz:
$P(B|\overline{A}) = 40/320 = 0{,}125$. Ez azt jelenti, hogy a gazdászok 12,5 % -nak van nyelvvizsgája.

d, Erre a kérdésre a szorzási szabály segítségével válaszolhatunk. Minden kiválasztásnál nézzük meg, hogy hány hallgatóból választunk, és közöttük hány olyan van, aki megfelel a kérdésnek:
Így a kérdezett valószínűség: $P = \frac{280}{800} \cdot \frac{160}{799} \cdot \frac{159}{798} \rightarrow 1{,}4\%$

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár **7.** fejezetében található **7.2.** kidolgozott példákat és oldja meg a **7.1., 3., 8-10.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

14. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - egyszeres választás
Kétgyermekes családokat vizsgálunk. Egy véletlenszerűen kiválasztott családról megtudtuk, hogy van lány a családban. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van fiú is ebben a családban?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 3/4
( ) 1/3
( ) 2/3
( ) 1/2

2. feladat - egyszeres választás
Egy dobókockával 3-szor dobunk egymás után, a dobott számokat feljegyezzük a dobás sorrendjében. Mennyi a valószínűsége, hogy van a számok között 3-as, feltéve, hogy a dobott számok összege 6?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 2/3
( ) 0,5
( ) 0,6
( ) 1/3

3. feladat - szókitöltés
Egy atlétikai klub ünnepséget szervez, amelyen 3 magasugró, 8 futó, 4 távolugró vesz részt. Az ünnepségen 3 különböző nyereményt sorsolnak ki a versenyzők között. Mennyi a valószínűsége, hogy az első nyereményt egy futó, a másodikat egy magasugró és a harmadikat ismét egy futó kapja? Számolja ki három tizedesjegyig a végeredményt!

$P=$(1)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
Egy iskolában felmérést végeztek a gyerekek iskolába járási szokásáról. A lakóhely távolsága (közel, vagy távol) és az iskolába járás módja (gyalog, autóval, busszal) szerint csoportosították a tanulókat. A felmérés eredményét az alábbi táblázat mutatja.

	A_1: gyalog	A_2: autóval	A_3: busszal	Összesen:
Közel	80	196	24	300
Távol	20	44	36	100
Összesen:	100	240	60	400

Párosítsa összes a kérdéseket a valószínűségi jelölésekkel és a számszerű végeredménnyel! (A jelölések és végeredmények között olyanok is vannak, amelyeket nem kell felhasználni.)
Hány százalék a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott...

diák busszal közlekedik: (1)................%.
busszal közlekedő diák távol lakik: (2)................%.
diák közel lakik, és autóval jár iskolába: (3)................%.
közel lakó diák gyalog jár iskolába: (4)................%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
Egy háziorvoshoz 400 csontritkulásban idős személy tartozik. A háziorvos

felmérést végzett a tejtermék fogyasztás és a csontritkulás kapcsolatának vizsgálatára. A felmérésből kiderült, hogy az idős emberek 75 %-a erős csontritkulástól szenved, ugyanakkor az idős emberek 3/8-része nem fogyaszt rendszeresen tejterméket. A tejterméket rendszeresen fogyasztók 32 %-nak csak enyhe csontritkulása van.

Hány százalék a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott....

idős ember rendszeresen fogyaszt tejterméket, és erős csontritkulása van: (1)................ %.
erős csontritkulású ember nem fogyaszt rendszeresen tejterméket: (2).................%.
tejterméket rendszeresen fogyasztó embernek erős csontritkulása van: (3)................%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	2/3
2. feladat:	0,6
3. feladat:	(1) - 0,062
4. feladat:	(1) - 15 (2) - 60 (3) - 49 (4) - 26,7
5. feladat:	(1) - 42,5 (2) - 43,3 (3) - 68

15. lecke. A teljes valószínűség tétele

1. A teljes valószínűség tétele

1. feladat

Egy alkatrészt három gépsoron gyártanak. Az első gépsor gyártja az alkatrészek 40%-át, amelyek között 5% a selejt. A második gépsoron készül az alkatrészek 50%-a, 2%-os selejtaránnyal, és a harmadik régi, elavult gépsoron készül a maradék 10%-a, 7%-os selejtaránnyal. Az elkészült alkatrészeket egy közös raktárban összekeverve helyezik el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész selejtes?

1. feladat megoldása

A kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az alkatrészek hány százaléka selejtes?

A selejtes termékeket (és a jókat is) érdemes aszerint megkülönböztetni, hogy **melyik gépsor gyártotta.**
Jelentse B_1, B_2 illetve B_3 azt az eseményt, hogy a terméket az első, 2. illetve 3. gépsor

gyártotta, továbbá

A esemény: a kiválasztott termék selejtes,

$\overline{A}$ esemény: a termék nem selejtes (jó).

A selejtarány meghatározásához **összegezni** kell azt, hogy az **egyes gépek hány százalékkal járultak hozzá a selejtes termékekhez**.

Az első gép által gyártott selejtek a teljes termelés a 40 %-nak az 5 %-t teszik ki.
Ezt a valószínűségszámítás jeleivel így írható fel:
$P(A \cdot B_1) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}02$

Tehát a **teljes termelésből** 2 %-ot tesz ki az első gép által gyártott selejtek aránya.

Hasonlóan számolhatjuk ki, hogy a többi gép hány %-kal járult hozzá a selejtarányhoz.

A lehetséges eseteket és a hozzájuk tartozó valószínűséget foglaljuk táblázatba!
A táblázat **belsejében** két esemény **együttes** bekövetkezésének valószínűsége található, míg a **peremeken** az **egyes gépsorokról** való választás illetve a **selejt/nem selejt** húzásának valószínűsége van.

Kattintson ide a nagyításhoz!

Események	Gépsorok			Összesen:
	B_1	B_2	B_3	
A: selejt	0,02	0,01	0,007	0,037
$\overline{A}$: nem selejt	0,38	0,49	0,093	0,963
Összesen:	0,4	0,5	0,1	1

A teljes termelés selejtarányának meghatározása:
$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + P(A \cdot B_3)$

A valószínűségek szorzási szabályának alkalmazásával a **teljes valószínűség tételéhez** jutunk:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}07 = 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}007 = 0{,}037$$

Tehát a teljes termelés 3,7 %-a selejt. Ez azt jelenti, hogy egy alkatrész véletlenszerű kihúzásánál 3,7 % a selejt kiválasztásának valószínűsége.

Teljes valószínűség tétele:

Legyen B_1, B_2, ... B_n teljes esemény rendszer a H eseménytérben, és jelölje A a H eseménytér egy tetszőleges eseményét. Ekkor az A esemény valószínűsége:
$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + ... + P(B_n) \cdot P(A|B_n)$

Megjegyzések:

1. A tétel elnevezése onnan ered, hogy **a teljes valószínűség a részvalószínűségekből adódik össze**, mint ahogy a teljes termelés selejtszázaléka a résztermelésekből

származó selejtszázalékokból tevődött össze.

2. A tétel **lényeges kitétele, hogy** B_1, B_2, ... B_n **teljes eseményrendszer** legyen, azaz egymást páronként kizárják, és összegük a biztos esemény.
(A feladatban a gépsorok termelésében nem volt átfedés, és lefedték a teljes termelést.)

2. A Bayes-tétel

2. feladat

Az 1. példa alapján válaszoljunk az alábbi kérdésre!
Egy **selejtes alkatrész** kiválasztása esetén, mennyi a valószínűsége annak, hogy azt az **első gépsor gyártotta**?

2. feladat megoldása

Ez ismét egy feltételes valószínűség, mert a vizsgálódás csak a selejtes alkatrészek körében folyik.
Tulajdonképpen azt kérdezzük, hogy a **selejt gyártásában mekkora szereper játszott az első gépsor**, azaz az **okok valószínűségére** kérdezünk vissza. Ekkor az első gépsor által gyártott selejt mennyiségét viszonyítjuk az összes selejthez:

Kattintson ide a a nagyításhoz!

A kérdezett valószínűséget a feltételes valószínűség definíciója alapján így írhatjuk fel:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1\cdot A)}{P(A)}$$

A tört **számlálójára a szorzási szabályt, nevezőjére** pedig a **teljes valószínűség tételét** alkalmazva a Bayes-tételhez jutunk:

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1\cdot A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+P(B_3)\cdot P(A|B_3)}=$$
$$=\frac{0{,}4\cdot 0{,}05}{0{,}4\cdot 0{,}05+0{,}5\cdot 0{,}02+0{,}1\cdot 0{,}07}=\frac{0{,}02}{0{,}037}=0{,}541$$

Tehát **54,1%** annak a valószínűsége, hogy **egy selejtes termék az első gépsorról származik**.
Másképp megfogalmazva a **selejtes termékek 54,1%-át az első gépsor gyártotta**.
Legyen B_1, B_2, ... B_n teljes eseményrendszer a H eseménytérben, és jelölje A a H eseménytér egy tetszőleges pozitív valószínűségű eseményét. Ekkor a B_k részeseményének az A eseményre vonatkozó feltételes valószínűsége:

$$P(B_k|A)=\frac{P(B_k)\cdot P(A|B_k)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+...+P(B_n)\cdot P(A|B_n)}$$

3. feladat

A belgyógyászaton egy gyógyszer hatását vizsgálják a betegeken. Az első kezelés után a betegek 60%-a távozott gyógyultan. Az első kezelés után betegen maradottak 40%-a gyógyul meg a második kezelés után, és a betegen maradtak 20%-a gyógyult meg a harmadik kezelés után.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott beteg

a, háromszori kezelés után is beteg maradt?

b, feltéve, hogy az első kezelés után beteg maradt, a harmadik kezelés gyógyította meg?

c, feltéve, hogy meggyógyult, a második kezelés gyógyította meg?

3. feladat megoldása

Foglaljuk táblázatba az adatokat, minden adat az **összes betegre vonatkozzon**!

Kattintson ide a nagyításhoz!

Események	Kezelések után			Összesen:
	K_1	K_2	K_3	
B: beteg maradt	0,4	0,24	0,192	–
$\overline{B}$: meggyógyult	0,6	0,16	0,048	0,808

a, A táblázat alapján 19,2 % annak a valószínűsége, hogy a 3. kezelés után is beteg marad a kezelt.

b, A harmadik kezelés során meggyógyultakat viszonyítjuk az első kezelés után betegen maradtakhoz:

$P = \frac{0{,}048}{0{,}4} = 0{,}12$ → Az első kezelés után betegen maradtak 12%-a gyógyult meg a 3. kezelésnél.

c, A 2. kezelés során meggyógyultakat viszonyítjuk az összes gyógyulthoz:

$P = \frac{0{,}16}{0{,}808} = 0{,}198$ → Az összes gyógyult 19,8%-át a 2. kezelés gyógyította meg.

4. feladat

Egy választásnál a házaspárok részvételét vizsgálták. A férjek 3/5 része, a feleségek fele ment el szavazni. Azon házaspárok közül, akiknél a férj elment a szavazásra, a feleségek 2/3-része is szavazott.
Válasszunk ki a házaspárok közül véletlenszerűen egyet.

a, Mennyi a valószínűsége, hogy a feleség sem és a férj sem ment el szavazni?

b, Feltéve, hogy a feleség elment szavazni, mi a valószínűsége annak, hogy a férj is elment?

4. feladat megoldása

Jelöljük A-val azt az eseményt, hogy a **férj szavazott**, és B-vel, hogy a **feleség szavazott**.
A feladat szövege szerint:
$P(A)=3/5$, $P(B)=1/2$, $P(B|A)=2/3$
Az adatokból kiszámolható, hogy a házaspárok hányad részénél ment el a férj is és a feleség is szavazni:
$P(A{\cdot}B)=P(A){\cdot}P(B|A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

Foglaljuk táblázatba az adatokat!

Események	A: a férj szavazott	$\overline{A}$: férj nem szavazott	Összesen:
B: a feleség szavazott	2/5	1/10	½
$\overline{B}$: a feleség nem szavazott	1/5	3/10	½
Összesen:	3/5	2/5	1

a, A táblázatból ki olvasható, hogy a házaspárok 3/10 részénél sem a férj, sem a feleség nem ment el szavazni. ($P(\overline{A}{\cdot}\overline{B})=3/10$)

b, Feltételes valószínűség: A házaspárok körét azokra szűkítjük le, akiknél a felség elment szavazni (1/2 rész). Hozzájuk viszonyítjuk azokat, akiknél mindketten szavaztak (2/5 rész):
$$P(B|A)=\frac{P(A{\cdot}B)}{P(A)}=\frac{2/5}{1/2}=\frac{4}{5}$$

Tehát, ha feleség szavazott, akkor 4/5 (80%) valószínűséggel a férj is szavazott.

Az anyaghoz kapcsolódóan oldja meg a Valószínűségszámítás példatár **7.** fejezetében található **7.12-14., 16-22.** feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

15. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy boltba három termelőtől érkeztek barackok. Az összes gyümölcs 40 %-a az A termelőtől, 25 % -a a B termelőtől, a többi a C termelőtől származott. Az egyes termelők gyümölcsének rendre a 75 %-a, 60 %-a és 40 %-a volt sárgabarack, a többi őszibarack volt. A gyümölcsök a bolt polcára összekeverve kerültek ki.

Mekkora a valószínűsége, hogy...

egy véletlenszerűen kiválasztott gyümölcs az A termelőtől származó őszibarack:
(1).................
egy véletlenszerűen kiválasztott gyümölcs sárgabarack: (2).................
a véletlenszerűen kiválasztott őszibarack az B termelőtől származik: (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Egy főiskolára informatika és gazdálkodás szakos hallgatók járnak. Az első évfolyamon négyszer annyi gazdálkodás szakos van, mint informatikus. Matematikából a gazdászok 68 %-a, az informatikusok 82 %-a tett sikeres vizsgát.

Mekkora a valószínűsége, hogy...

egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató sikeres vizsgát tett: (1).................
egy sikeres vizsgát tett hallgató gazdálkodás szakos: (2).................
egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató informatikus és nem vizsgázott le: (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
A Béres-csepp hatását vizsgálták beteg emberek egy csoportján. A vizsgálat alá vont betegek 60%-a szedte a Béres-cseppet, ezen betegek 70%-a meggyógyult. A betegek nem szedte a Béres-cseppet és nem is gyógyult meg 27%-a.

Mi a valószínűsége annak, hogy a csoportból...

véletlenszerűen kiválasztott beteg meggyógyult: (1).................

betegen maradt ember szedte a Béres cseppet: (2).................

véletlenszerűen kiválasztott beteg nem szedte a cseppeket, és mégis meggyógyult: (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
Ha valaki pilóta akar lenni, akkor át kell esnie egy intelligencia-, egy pszichikai, egy egészségügyi vizsgán, valamint egy beszélgetésen is meg kell felelni. A vizsgák a fent felsorolt sorrendben vannak. Aki valamelyiken nem felel meg, nem vesz részt az azt követő vizsgákon. A statisztika szerint az intelligencia-vizsgán a jelöltek 80%-a, a pszichikain 50%-a, az egészségügyin 40%-a, és az elbeszélgetésen 90%-a felel meg.

Hány százalék a valószínűsége annak, hogy

egy véletlenszerűen kiválasztott személy megfelelt minden vizsgán: (1).................

egy pszichikailag megfelelt személy a többi vizsgán is megfelel: (2).................

egy nem megfelelt személy az egészségügyi vizsga miatt lett alkalmatlan: (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
A tojásokat 10 darabos csomagolásban árulják egy élelmiszerboltban. Egy szállítmányban a dobozok 80%-ban nem volt törött tojás, 15%-ban egy, és 5%-ban két törött tojás volt.

Hány százalék annak a valószínűsége, hogy...

egy véletlenszerűen kiválasztott tojás törött: (1).................

egy kiválasztott ép tojás olyan dobozból származik, amelyben 1 törött volt: (2).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 0,1 (2) - 0,59 (3) - 0,244
2. feladat:	(1) - 0,708 (2) - 0,768 (3) - 0,036
3. feladat:	(1) - 0,55 (2) - 0,4 (3) - 0,13
4. feladat:	(1) - 14,4 (2) - 36 (3) - 28
5. feladat:	(1) - 2,5 (2) - 13,8

16. lecke. Események függetlensége

1. Két esemény függetlensége

Két esemény függetlenségén hétköznapi értelemben azt értjük, hogy az egyik esemény bekövetkezése (vagy be nem következése) nem befolyásolja a másik eseményt.
A szemlélet alapján, azonban sokszor nehéz eldönteni, hogy az egyes események befolyásolják-e egymást vagy sem, másrészről az élet számos területén valóban szükség van ennek objektív megítélésére.

Például:

Egy gyógyszer forgalomba hozásakor fontos kérdés, hogy a gyógyszer szedése okoz-e rákos megbetegedést, azaz valóban van-e kapcsolat a gyógyszer szedése és a rákos megbetegedések között.

Ezért szükség van egy egzakt matematikai definícióra.

Nyilvánvaló, hogy ha az előbb említett példában a gyógyszer szedése **nincs hatással** a rákos betegség kialakulása, akkor a **gyógyszert szedők között éppen olyan arányban találunk rákos betegeket, mint a teljes népesség körében**.
Jelölje A az esemény a **rákos betegség** meglétét, B esemény pedig a **gyógyszer szedését**.

Ha a B esemény valóban **nincs hatással az** A eseményre, akkor az A **esmény** B **feltétel melletti bekövetkezésének valószínűsége megegyezik az** A **esemény valószínűségével:**

$P(A|B) = P(A)$.

A fenti összefüggés és a szorzási szabály felhasználásával vizsgáljuk meg, két

független esemény együttes bekövetkezésének valószínűségét:
$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$

Tehát két független esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események bekövetkezésének szorzatával. Ezt az összefüggést fogadjuk el a két esemény függetlenségének definíciójául.

Definíció:
Legyen A és B a H eseménytér két eseménye. Az A és B eseményeket függetlennek mondjuk, ha együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségének szorzatával, azaz
$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Megjegyzés:
A definícióból látható, hogy a függetlenség szimmetrikus fogalom: ha A független B-től, akkor B is független A-tól.

Könnyen belátható az alábbi tétel:

Tétel:
Ha A és B események függetlenek, akkor
A és $\overline{B}$; $\overline{A}$ és B; $\overline{A}$ és $\overline{B}$ események is függetlenek.

1. feladat

Egy gyártósorról lekerülő termékek közötti selejt a deformáció és a mérethiba miatt adódik. A termékek vizsgálatakor megállapították, hogy 15%-uk deformálódott, 6%-uk mérethibás. A hibás termékek között akadtak olyanok, amelyeknek mind a két hibája megvolt, ez a teljes termelés 0,9%-át tette ki.
Vizsgáljuk meg, hogy a deformáció és a mérethiba egymástól függetlenül fellépő hibák-e?

1. feladat megoldása

Jelölje D azt az eseményt, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott termék deformálódott, M pedig a mérethibát.
A vizsgálat szerint $P(D) = 0{,}15, P(M) = 0{,}06$, $P(M \cdot D) = 0{,}009$. A definíció szerint a függetlenség akkor teljesül, ha $P(M \cdot D) = P(D) \cdot P(M)$. Mivel $0{,}15 \cdot 0{,}06 = 0{,}009$, ezért a kétféle hiba előfordulása valóban független egymástól.

2. Három esemény teljes függetlensége

A H eseménytér A, B és C eseményét teljesen függetlennek mondjuk, ha a következő összefüggések mindegyike teljesül:
$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cdot C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cdot C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

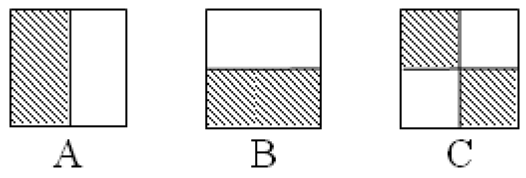
Megjegyzések:

1. **Az első három összefüggést páronkénti függetlenségnek nevezzük.**
2. **A páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség.**

2. feladat

Egy négyzet alapú táblára nyilakat dobunk. Jelölje az A, B illetve C eseményeket, hogy a következő ábrán látható részét találjuk el a céltáblának. Vizsgáljuk meg, hogy az A, B és C események teljesen függetlenek-e! (Az eseményeknél geometriai valószínűséget feltételezzünk!)

2. feladat megoldása



Megoldás:

A geometriai valószínűség miatt az A, B és C események bekövetkezésének valószínűsége 1/2.
$P(A)=1/2 \quad P(B)=1/2 \quad P(C)=1/2$

A teljes függetlenséghez azt kell megvizsgálni, hogy teljesül-e a fenti definíció 4 darab feltétele.

Az A és B esemény akkor következik be, ha a találat a bal alsó negyedben van, aminek a valószínűsége 1/4.

Ekkor teljesül, hogy $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$, mert $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Hasonlóan belátható, hogy $P(A \cdot C)=P(A) \cdot P(C)$ és $P(B \cdot C)=P(B) \cdot P(C)$.
Mindhárom esemény nem teljesülhet, mert a besatírozott területeknek nincs közös része.
Így $P(A \cdot B \cdot C)=0$, míg $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)=1/8$ ezért
$P(A \cdot B \cdot C) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.
Látható, hogy a A, B és C páronként függetlenek, de teljesen nem.

3. Több esemény teljes függetlensége

A H eseménytér A_1, A_2, ... A_n eseményei teljesen függetlenek, ha közülük bármely k számú esemény együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínségének szorzatával.

Láttuk, hogy ez 3 darab esemény esetén 4 feltételnek kell teljesülnie. Bizonyítható, hogy

n számú esemény esetén ($2^n - n - 1$) feltétel teljesülése szükséges a teljes függetlenséghez.

4. Független kísérletek sorozata

A fenti esetekben azonos eseménytérhez (egy adott kísérlethez) tartozó események függetlenségét vizsgáltuk.
A továbbiakban kísérletek függetlenségével foglalkozunk, vagyis olyan kísérletekkel, amelyeknél a kísérletek kimenetelei nem befolyásolják egymást. Tipikus példája ennek a kocka többszöri feldobása, vagy az egymást követő lottósorsolások. Ezekben az esetekben az egyes dobások vagy sorsolások kimenetelei nem befolyásolják egymást, azaz függetlenek.

Végezzünk n számú kísérletet. Az első kísérlet egyik lehetséges kimenetele legyen A_1, a másodiké A_2, ... az n. kísérleté A_n.
Az n számú kísérletet függetlennek mondjuk, ha az egyes kísérletek A_1, A_2, ... A_n eseményeinek együttes bekövetkezésének valószínűsége egyenlő az egyes események valószínűségének szorzatával, azaz
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$

3. feladat

András és Béla egyet-egyet kosárra dobnak. Egymástól függetlenül András 30%-os, Béla 40%-os valószínűséggel talál bele a kosárba.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a, mindketten beletalálnak?

b, hogy András beletalál és Béla nem?

c, az egyik fiú beletalál és a másik nem?

3. feladat megoldása

Jelölje A esemény András találatát, B esemény Béla találatát.
a, A függetlenség definícióját felhasználva:
$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$
Tehát 12 % annak a valószínűsége, hogy mindketten beletalálnak.

b, Az A és $\overline{B}$ események együttes bekövetkezésére alkalmazzuk a függetlenség definícióját:
$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$$

c, Ez akkor következik be, ha András beletalál és Béla nem vagy Béla beletalál és András nem.
$$P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}18 + 0{,}28 = 0{,}46$$
Tehát 46% annak a valószínűsége, hogy pontosan az egyik talál bele a kosárba.

5. Bernoulli-kísérletsorozat

Bernoulli-kísérletsorozatról akkor beszélünk, ha függetlenül megismételt kísérletek mindegyikének csak két lehetséges kimenetele van (jelöljük ezeket A-val és $\overline{A}$-rel), és ezen események valószínűsége a kísérletsorozat során változatlan marad.

4. feladat

Dobjunk fel egy kockát 5-ször egymás után, és a dobott számokat jegyezzük le a dobás sorrendjében. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a, az első két dobás 6-os és a többi nem?

b, pontosan két 6-os van a dobások között?

4. feladat megoldása

A: a dobott szám 6-os.
$\overline{A}$: a dobott szám nem 6-os.

Tudjuk, hogy az egyes dobások egymástól függetlenek és $P(A)=1/6$, $P(\overline{A})=5/6$. Alkalmazzuk a független események valószínűségére vonatkozó definíciót.

a, A kérdés 5 olyan esemény együttes bekövetkezésének valószínűségére vonatkozik, amelyekből az első kettő 6-os, a többi nem:

$$P\left(A\cdot A\cdot \overline{A}\cdot \overline{A}\cdot \overline{A}\right)=P(A)\cdot P(A)\cdot P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{A}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

b, Nyilvánvaló, hogy az a.) kérdésben kiszámolt valószínűséghez jutunk, bármely két helyen szerepel is a 2 db 6-ost az 5 hosszúságú dobássorozatban. Így az előző részfeladatban szereplő valószínűséget szorozni kell annyival, ahányféle elhelyezkedése lehet a 2 db 6-osnak, vagyis $\binom{5}{2}$-vel.

Így a pontosan 2 db 6-os dobásának valószínűsége: $P=\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$

Általánosítsuk a példát:

Tétel:

Végezzünk n számú független kísérletet. Annak a valószínűsége, hogy a vizsgált A esemény pontosan k-szor következik be:

$$P_k=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot (q)^{n-k},$$

ahol $P(A)=p$, vagyis egy-egy kísérletnél az A esemény bekövetkezésének valószínűsége p.

(A komplementer esemény valószínűsége egy-egy kísérletnél $P\left(\overline{A}\right)=1-p=q$)

Bizonyítás:

Határozzuk meg először annak a valószínűségét, hogy az első k kísérletnél az A esemény, az utolsó

$(n-k)$ **kísérletnél az $\overline{A}$ esemény következik be.**

$$P\Big(\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}\cdot\ldots\cdot\overline{A}}_{n-k}\Big)=\underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)}_{k}\cdot\underbrace{P(\overline{A})\cdot P(\overline{A})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A})}_{n-k}=p^k\cdot(q)^{n-k}$$

A k számú A és $(n-k)$ számú $\overline{A}$ esemény bármely más sorrendjének bekövetkezéséhez is ugyanekkora valószínűségű. Az n hosszúságú kísérletsorozatban a k számú A esemény $\binom{n}{k}$ féleképpen helyezkedhet el.
Így annak a valószínűsége, hogy n kísérletből pontosan k -szor következett be az A esemény:

$$P_k=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(q)^{n-k}$$

Megjegyzés:
A visszatevéses mintavétel is független kísérletek sorozata, ezért a 11. leckében már találkoztunk ezzel a képlettel.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 8. fejezetében található 8.1, 2. kidolgozott példákat és oldja meg a 8.1, 3., 10-12.,14.,18. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

16. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy készülék három alkatrésze egymástól függetlenül 0,2, 0,6, 0,3 valószínűséggel megy tönkre, ha a készülék túlmelegszik.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy a készülék működőképes marad egy túlmelegedés esetén? (A készülék bármely alkatrész elromlása esetén működésképtelenné válik!)

A kérdezett valószínűség: (1)................%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Egy terméket 3-féle alkatrészből szerelnek össze (jelölje ezeket A, B C). A különböző alkatrészeket külön dobozban tárolják. Mindhárom dobozban 10-10-10 alkatrész van, A-ból 1, B-ből 2, C-ből 3 selejtes alkatrész van a dobozban. Mindegyik dobozból kiválasztunk egy-egy alkatrészt.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy ...

csak jó alkatrészeket választottunk ki: (1).................
a C selejtes és a másik kettő jó: (2).................
pontosan egy selejt van az alkatrészek között: (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Egy légitársaság minden nap három járatot indít Párizsba a nyári időszakban. A felmérések szerint a reggeli járaton 20 %, a délutánin 40 % és az estin 30 % annak a valószínűsége, hogy van üres hely. Az egyes járatokra való helyek foglaltságát tekintsük függetlennek.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon...

egyik járaton sincs üres hely: (1)................%.
csak a délutánin van üres hely: (2)................%.
pontosan két járaton van üres hely: (3)................%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
Egy naponta közlekedő vonat az esetek 10%-ban késik. (A késések egymástól függetlenek.)

Hány százalék a valószínűsége annak, hogy...

3 egymást követő napon késik: (1)................%.
Egy véletlenszerűen kiválasztott hét első 2 napján késik és a többi napon pontos: (2)................%.
Egy héten pontosan kétszer késik: (3)................%.

Feltéve, hogy az adott héten az első két napon késett, mennyi a valószínűsége annak, hogy a többi napon pontos lesz: (4)................%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
Egy kereskedelmi cég ügyfelei közül 8-ból átlagosan egy kínál ráfizetéses terméket. A cég egy adott napon 20 üzletet kötött.

Hány százalék a valószínűsége annak, hogy...

pontosan hárman kínáltak ráfizetéses terméket: (1)................%.
legfeljebb ketten kínálnak ráfizetéses terméket: (2)................%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

6. feladat - egyszeres választás
Minden héten kitöltünk egy lottószelvényt.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy 3 egymást követő hét egyikén sem lesz találatunk az ötös lottón?

Segítség 16. lecke 6. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 41,5%
( ) 63,7%
( ) 32%
( ) 75%

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 22,4
2. feladat:	(1) - 0,504 (2) - 0,216 (3) - 0,398
3. feladat:	(1) - 33,6 (2) - 22,4 (3) - 18,8

4. feladat:	(1) - 0,1 (2) - 0,6 (3) - 12,4 (4) - 59
5. feladat:	(1) - 23 (2) - 53,5
6. feladat:	41,5%

IV. fejezet. Gyakorló feladatok

1. feladat - leírás
1.

Egy urnában 10 piros és 6 fehér golyó van. Hárman egymás után húznak a golyókból visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik fehéret húz, ha az előtte lévők pirosat húztak.

Megoldás

2. feladat - leírás
2.

Magyar kártyából 4 lapot húzunk egymás után visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége, hogy

a. elsőre királyt, másodikra hetest, harmadikra ászt és negyedikre újra királyt húzunk?
b. két királyt, egy hetest és egy ászt húzunk?

Megoldás

3. feladat - leírás
3.

Nyelvvizsgázók körében felmérést végeztek arról, hogy jártak-e célnyelvi országban. A felmérésben résztvevők 60%-a járt célnyelvi országban, ezen vizsgázók 75%-a sikeres vizsgát tett. A célnyelvi országban nem járók 40%-a vizsgázott sikeresen. Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a. egy véletlenszerűen kiválasztott vizsgázó sikertelen vizsgát tett?
b. egy sikertelenül vizsgázó járt célnyelvi területen?
c. egy véletlenszerűen kiválasztott vizsgázó nem járt célnyelvi területen és nem vizsgázott le?

Megoldás

4. feladat - leírás
4.

Suta Sára meglehetősen gyakran csinál téves hívást. Megfigyelte, hogy a

számjegyek 5 %-át üti be rosszul.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy
a. egy hétjegyű telefonszám esetén legalább egy számjegyet rosszul üt be?
b. egy ismerősének a hétjegyű telefonszámát csak 3. próbálkozásra sikerült jól beütnie?
c. az utoljára beütött 5 hétjegyű számból a 2. és a 3. volt téves.

Megoldás

5. feladat - leírás
5.

5 darab magyarkártya-csomagból véletlenszerűen kiválasztunk 1-1 lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között 2 darab piros lesz?

Megoldás

6. feladat - leírás
6.

Kertész Kálmán 500 m2 -es kertjének egy 150m2 -es részében igen ritka növények vannak elültetve. Sajnos a kertben egy vakond rendszeresen feltúrja az ágyásokat.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vakond a legutóbbi 6 alkalomból 2-szer a ritka növények között folytatott ásatást?

Megoldás

Megoldókulcs

1. feladat:	Id. a feladatnál!
2. feladat:	Id. a feladatnál!
3. feladat:	Id. a feladatnál!
4. feladat:	Id. a feladatnál!
5. feladat:	Id. a feladatnál!
6. feladat:	Id. a feladatnál!

Bevezető

Mohó Mihállyal már találkoztunk a Feltételes valószínűség c. fejezet bevezetőjében. Nézzük most meg, hogy hogyan folytatódik a története.

Mohó Mihály története a 3-mal osztható lottó számokkal

**Szegény Mohó Mihály nagyon megjárta a csupa páros számokkal kitöltött lottó szelvényeivel. Az adáshiba után arról értesült, hogy a 22-es szám után már csak páratlan számot húztak ki. Így nemhogy 5 találata, de még 2 találata sem lett.
Hite azonban csak a páros számokban rendült meg, a szerencsejátékokban nem.
A csőd után már csak egy lottószelvény vásárlására futotta, és elhatározta, hogy egy teljesen új stratégiát dolgoz ki.**

A lottószámokat a 3-mal való oszthatóság szerint fogja vizsgálni, és annyi 3-mal osztható számot jelöl be a szelvényen, amennyivel legnagyobb a nyerési esélye.

Kiszámolta tehát annak a valószínűségét, hogy a kihúzott számok között 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 darab 3-mal osztható szám van.

**Nézzük például annak a valószínűségét, hogy 2 darab 3-mal osztható van a kihúzottak között!
A kedvező esetben a 30 darab 3-mal osztható szám közül kettőt, és a többi (3-mal nem osztható) 60 szám közül hármat húznak ki. A kérdezett valószínűséget a visszatevés nélküli mintavétel képletével számolhatjuk ki:**

$$P_2 = \frac{\binom{30}{2}\cdot\binom{60}{3}}{\binom{90}{5}} = 0{,}339$$

A többi valószínűséget is hasonlóan számolhatjuk. A valószínűségeket az alábbi táblázat mutatja:

A kihúzott 3-mal oszthatók száma	0	1	2	3	4	5
Valószínűség (%)	12,4	33,3	33,9	16,4	3,7	0,3

A táblázatból látható, hogy annak a legnagyobb a valószínűsége, hogy 2 darab 3-mal osztható lesz a kihúzottak között. Így Mohó Mihály 2 db 3-mal oszthatót írt a lottószelvényre.

**Fogalmazzuk át Mohó Mihály gondolatait a valószínűség nyelvére!
A lottóhúzás számait csak a köztük lévő 3-mal oszthatók száma szerint vizsgáltuk. A véletlen dolga, hogy hány 3-mal osztható kerül a kihúzott számok közé.
Bevezetünk egy un. valószínűségi változót, amely a kihúzott számok között előforduló 3-mal oszthatók számát méri. A valószínűségi változó lehetséges értékei: 0; 1; 2; 3; 4; 5.**

A valószínűségi változó jelölése: ξ (kszí)

A fenti táblázat az összes lehetséges ξ érték valószínűségét tartalmazza. A valószínűségek összege 100 %. Ezzel tulajdonképpen feltérképeztük az esélyeinket, azaz megadtuk hogy a 100 %, hogyan oszlik meg a ξ lehetséges értékei között. Szakszóval élve az 1. táblázat a ξ valószínűségeloszlását adja meg.

A valószínűségi változók két csoportra oszthatók:

- **diszkrét valószínűségi változók**

- **folytonos valószínűségi változók**

A diszkrét valószínűségi változók általában véges számú értéket vehetnek fel. Ilyen volt a fentiekben tárgyalt Mohó Mihály esete a 3-mal osztható számokkal.

A folytonos valószínűségi változók leggyakrabban időtartamot, hosszúságot, tömeget, egyszóval folytonos mennyiségeket mérnek. A gyakorlati életben fontos a gépek élettartamának vagy a termékek gyártás során fellépő méretingadozásának (tömeg, hosszúság...) vizsgálata.

17. lecke. A diszkrét valószínűségi változók jellemzői

1. A valószínűségi változó fogalma

A bevezetőben már volt a szó a valószínűségi változóról. Nézzünk most erre egy másik feladatot!

1. feladat

Dobjunk fel egy szabályos érmét háromszor.
A ξ valószínűségi változó jelentse a fejdobások számát.
a, Írjuk fel az összes lehetséges dobássorozatot, csoportosítva őket a fejdobások száma szerint.
b, Írjuk fel a ξ valószínűségeloszlását!
c, Ábrázoljuk az eloszlást bot ábrán!

1. feladat megoldása

Dobássorozatok (elemi események)	**Fejek száma** (a ξ valószínűségi változó értékei)	**Valószínűségek**
iii	0	1/8
fii ifi iif	1	3/8
ffi fif iff	2	3/8
fff	3	1/8

a, A fenti táblázat segítségével minden elemi eseményhez hozzárendeltünk egy valós számot (a fejdobások számát). Az így értelmezett függvényt ξ valószínűségi változónak hívjuk, melynek lehetséges értékeit: $\xi = 0,1,2,3$.

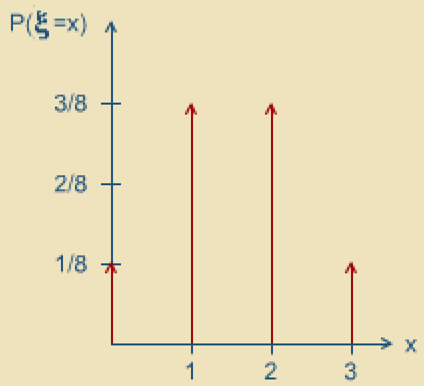
b, A ξ értékeihez tartozó valószínűségekkel a valószínűségeloszlást is meghatároztuk.

c, Bot ábra:

Valószínűségeloszlás

x: fejek száma (a ξ valószínűségi változó értékei)	Valószínűségek $P(\xi = x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Bot ábra



Megjegyzés:
Mivel a megoldás során az összes elemi eseményt pontosan egyszer vettük figyelembe, ezért a hozzájuk tartozó valószínűségek összege kiadja az 1-et: $1/8+3/8+3/8+1/8=1$
.

A feladat alapján definiáljuk a valószínűségi változót!
Definíció:
A H **eseménytér minden elemi eseményéhez hozzárendelünk egy valós számot. Az így értelmezett függvényt valószínűségi változónak hívjuk és** ξ**-vel jelöljük.**
Megjegyzések:

1. **Az elemi eseményekhez rendelt számértékek a** ξ **valószínűségi változó lehetséges értékei.**
2. **Több elemi eseményhez is rendelhetjük ugyanazt a számot.**
   (De minden eseményhez csak egy számot rendelhetünk.)
3. **Ha a** ξ **valószínűségi változó egy lehetséges értéke** x_i**, akkor az ehhez tartozó valószínűséget** $P(\xi = x_i)$ **-vel jelöljük.**

A valószínűségi változók csoportosítása:

- **diszkrét valószínűségi változó**
- **folytonos valószínűségi változó**

2. Diszkrét valószínűségi változó

Ha a ξ **valószínűségi változó lehetséges értékeinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok, akkor a** ξ**-t diszkrét valószínűségi változónak nevezzük.**

A ξ **diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékeihez tartozó valószínűségeket a** ξ **valószínűségeloszlásának nevezzük.**
Megjegyzés:

1. **A valószínűségeloszlást felsorolással vagy táblázatos formában is megadhatjuk.**
2. **Az adatokat bot ábrával szemléltethetjük.**

Tétel:

Legyenek a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei: x_1, x_2, ..., x_n ... .
A ξ értékeihez tartozó valószínűségek összege mindig 1, azaz
$P(\xi = x_1)+P(\xi = x_2)+....+P(\xi = x_n)+... = 1$

3. Eloszlásfüggvény

2. feladat

Az 1. feladat alapján válaszoljunk a kérdésekre.

a, Számoljuk ki az alábbi valószínűségeket!

$P(\xi<-0{,}2)$ $P(\xi<0)$ $P(\xi<0{,}3)$ $P(\xi<1)$
$P(\xi<1{,}6)$ $P(\xi<2)$ $P(\xi<3)$ $P(\xi<3{,}7)$

b, Az a. feladatot általánosítva írjuk fel tetszőleges x érték esetén a $P(\xi<x)$ értékét, azaz annak a valószínűségét, hogy ξ az x-nél kisebb értéket vesz fel!

2. feladat megoldása

a, Vegyük fel egy számegyenesre a x lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A kérdezett valószínűségek:
$P(\xi-0{,}2)=0$ $P(\xi<0)=0$ $P(\xi<0{,}3)=1/8$ $P(\xi<1)=1/8$
$P(\xi<1{,}6)=4/8$ $P(\xi<2)=4/8$ $P(\xi<3)=7/8$ $P(\xi<3{,}7)=1$

b, Az a. feladatban kiszámoltuk, hogy néhány számérték esetén, mennyi a valószínűsége annak, hogy a fejek száma - vagyis a ξ értéke - a megadott értéknél kisebb lesz. Most választ adunk ugyanerre a kérdésre tetszőlege számérték esetén. Nyilvánvaló, hogy ξ értékei közül nemcsak a -0,2 és 0 esetén lesz a kérdezett valószínűség 0, hanem bármely $x \le 0$ esetén igaz az, hogy $P(\xi<x)=0$.

Az is biztos, hogy nemcsak 0,3 és 1 esetén lesz a kérdezett valószínűség 1/8, hanem bármely $0<x\le 1$ esetén igaz, hogy $P(\xi<x)=1/8$.
Folytassuk a sort. A megoldás lépései:

Kattintson ide a nagyításhoz!

Tehát annak a valószínűsége, hogy a ξ - vagyis a dobott fejek száma - kisebb x-nél:

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le 0 \\ 1/8 & \text{ha} \quad 0 < x \le 1 \\ 4/8 & \text{ha} \quad 1 < x \le 2 \\ 7/8 & \text{ha} \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha} \quad 3 < x \end{cases}$$

A fenti feladat b.) része alapján egy olyan függvényt definiálhatunk, amely bármely x értékhez hozzárendeli az x-nél kisebb értékek felvételének valószínűségét. Ezt a függvényt eloszlásfüggvénynek nevezzük.

Definíció:

A ξ valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye minden x valós számhoz hozzárendeli az x-nél kisebb értékek felvételének valószínűségét, azaz

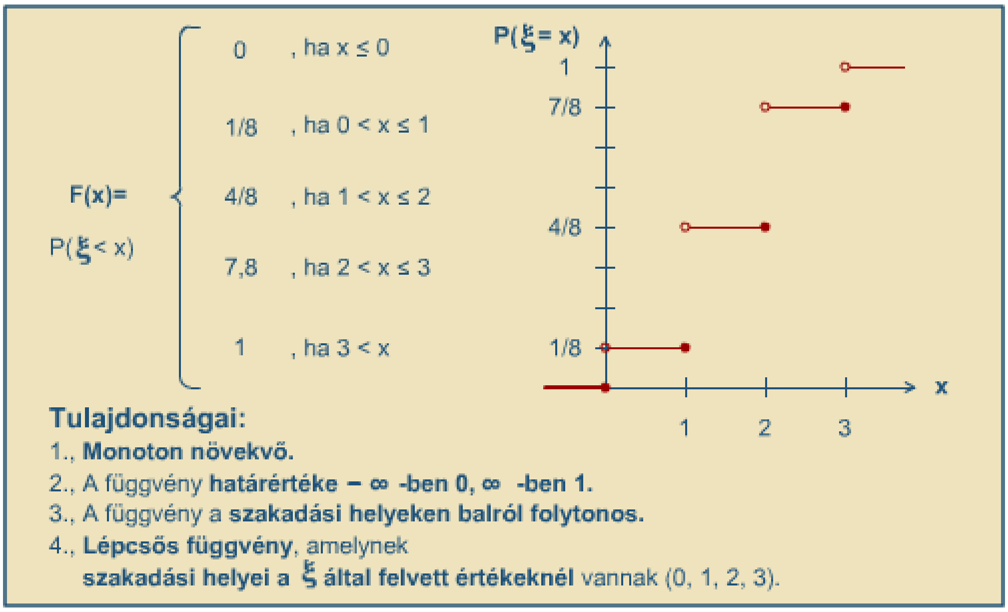
F**:** $x \to P(\xi < x)$ **vagy** $F(x) = P(\xi < x)$

Tétel:

Legyenek a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és a hozzájuk tartozó valószínűségeket jelölje $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ekkor a ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le x_1 \\ p_1 & \text{ha} \quad x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{ha} \quad x_2 < x \le x_3 \\ \ldots & \\ P_1 + p_2 + \ldots + p_k & \text{ha} \quad x_k < x \le x_{k+1} \\ \ldots & \\ 1 & \text{ha} \quad x_n < x \end{cases}$$

Ábrázoljuk az 1. feladathoz tartozó eloszlásfüggvényt!



4. A diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének tulajdonságai

1. **Monoton növekvő.**
2. **A függvény határértéke -∞-ben 0, ∞-ben 1. ($\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$)**
3. **A szakadási helyeken balról folytonos. (Minden a-ra $\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a)$)**
4. **Lépcsős függvény, amelynek szakadási helyei a ξ által felvett értékeknél vannak.**

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 9. fejezetében található 9.1. kidolgozott példákat és oldja meg a 9.1., 9.4. 9.7. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

17. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egy varródobozban 3 jó és 2 rossz (törött végű) gombostű van. Munkánkhoz kiválasztunk közülük egyszerre hármat. Jelentse a ξ valószínűségi változó a kiválasztott jók számát.

Töltse ki a táblázatot a ξ valószínűségeloszlására vonatkozóan!

Segítség 17. lecke 1. önellenőrző feladat

ξ lehetséges értékei:	(1)................	(2)................	(3)................
Valószínűségük:	(4)................	(5)................	(6)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- **kisebb**
- **nagyobb**
- **nem kisebb**
- **nem nagyobb**
- **összegét**
- **szorzatát**
- **minimumát**
- **felvételének valószínűségét**

Egészítse ki a mondatot a megadott szavak segítségével!

A ξ valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye minden x valós számhoz hozzárendeli az x-nél (1)................ értékek (2).................

3. feladat - többszörös választás
Válassza ki a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényére jellemző tulajdonságokat!

Több helyes válasz is lehetséges:

- [ ] **szigorúan monoton csökken**
- [ ] **monoton nő**
- [ ] **lépcsős függvény**
- [ ] **határértéke 0-nál ∞, 1-nél $-\infty$**
- [ ] **szakadási helyei a pozitív egész számoknál vannak**

4. feladat - szókitöltés

Adja meg a ξ valószínűségeloszlását a megadott információk alapján!

$$F(3) = 0{,}6$$
$$F(6) = 0{,}8$$
$$F(7{,}2) = 0{,}86$$

Segítség 17. lecke 4. önellenőrző feladat

ξ lehetséges értékei:	**2**	**4**	**6**	**8**
Valószínűségek:	(1)................	(2)................	(3)................	(4)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés

Adja meg a ξ valószínűségeloszlását az eloszlásfüggvény alapján!

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \le 1 \\ 0{,}4 & \text{ha} \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}9 & \text{ha} \quad 2 < x \le 3 \\ 1 & \text{ha} \quad 3 < x \end{cases}$$

Ebből ξ valószínűségszámítása:

ξ lehetséges értékei:	(1)................	(2)................	(3)................
Valószínűségük:	(4)................	(5)................	(6)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 1 (2) - 2 (3) - 3 (4) - 0,3 (5) - 0,6 (6) - 0,1
2. feladat:	(1) - kisebb (2) - felvételének valószínűségét
3. feladat:	monoton nő lépcsős függvény
4. feladat:	(1) - 0,6 (2) - 0,2

(3) - 0,06
(4) - 0,14

5. feladat:
(1) - 1
(2) - 2
(3) - 3
(4) - 0,4
(5) - 0,5
(6) - 0,1

18. lecke. A diszkrét valószínűségi változók pontjellemzői

Az előző fejezetben egy konkrét példán keresztül definiáltuk a diszkrét valószínűségi változót, annak valószínűségeloszlását és eloszlásfüggvényét. Az alkalmazásoknál előfordul, hogy csak néhány számértékkel jellemezzük az eloszlást.

Ezek a számértékek a valószínűségi változó pontjellemzői:

- **módusz**
- **várható érték**
- **szórás**
- **medián**

Egy társasjátékban két kockával dobnak, és csak a legnagyobb dobott számot veszik figyelembe.

A ξ valószínűségi változó jelölje a legnagyobb dobott számot.

A pontjellemzők kiszámításához szükség van a ξ valószínűségeloszlására.

A H eseménytérhez 36 elemi esemény tartozik: 11, 12, 13, ...65, 66. Ezek mindegyike ugyanakkora valószínűséggel következik be.

A ξ lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Adjuk meg például a $P(\xi = 4)$ értékét.
Írjuk fel azokat a számpárokat, amelyekben a 4 a legnagyobb érték: 14, 41, 24, 42, 34, 43, 44 (7 darab)
Tehát a valószínűség klasszikus képlete alapján: $P(\xi = 4) = 7/36$

A ξ többi értékéhez tartozó valószínűséget hasonlóan számolhatjuk.
A ξ valószínűségeloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

ξ lehetséges értékei:	1	2	3	4	5	6
Valószínűségek:	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

1. Módusz

Definíció:

Módusz: a ξ diszkrét valószínűségi változó módusza a ξ lehetséges értékei közül a legvalószínűbb (ha van ilyen).

jel: mod(ξ)

Az 1. példában a 6 a legvalószínűbb érték, ezért mod(ξ)=6.

Megjegyzés:
Nem minden eloszlásnak van módusza.
Például: egy kockát dobjunk fel egyszer, és ξ jelentse a dobott számot. Ebben a feladatban ξ minden lehetséges értékének valószínűsége 1/6, így nincs módusz.

2. Várható érték

Végezzük el az 1. példában lévő kockadobást 200-szor. Jegyezzük fel minden dobásnál, hogy mennyi volt a legnagyobb dobott szám, majd számoljuk ki ezen számok (számtani) átlagát.

A dobások eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

A legnagyobb dobott szám (ξ)	1	2	3	4	5	6
Az előfordulás gyakorisága	4	18	25	40	48	65

A 2. táblázat adatainak átlaga: $\frac{4\cdot 1+18\cdot 2+25\cdot 3+40\cdot 4+48\cdot 5+65\cdot 6}{200}=4{,}525$

Az alábbiakban belátjuk, hogy ha elég sokszor végezzük el a kísérletet (kockadobást), akkor a kiszámolt átlag egyre kisebb sávban ingadozik egy számérték körül, amely számot a ξ várható értékének hívunk.

Jelölje k_1, k_2, ..., k_6 annak a gyakoriságát, hogy az 1, 2, ... a 6 volt a legnagyobb dobott szám. A feljegyzett számok összege:
$1\cdot k_1+2\cdot k_2+3\cdot k_3+4\cdot k_4+5\cdot k_5+6\cdot k_6$
A feljegyzett számok átlagát úgy kapjuk meg, hogy a számok összegét elosztjuk az összes dobás számával (n):
$1\cdot\frac{k_1}{n}+2\cdot\frac{k_2}{n}+3\cdot\frac{k_3}{n}+4\cdot\frac{k_4}{n}+5\cdot\frac{k_5}{n}+6\cdot\frac{k_6}{n}$
A $\frac{k_1}{n}$ relatív gyakoriságok azonban a dobások növelésével egyre kevésbé ingadozik az $\xi=1$ értékének valószínűsége körül, azaz $\frac{k_1}{n}\approx P(\xi=1)$.
Ugyanez mondható el a többi értékhez tartozó relatív gyakoriságról.

Helyettesítsük az átlagban lévő relatív gyakoriságokat a megfelelő valószínűséggel:
$1\cdot P(\xi=1)+2\cdot P(\xi=2)+3\cdot P(\xi=3)+4\cdot P(\xi=4)+5\cdot P(\xi=5)+6\cdot P(\xi=6)=$

$1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}\approx 4{,}47$

Az így kiszámolt értéket a ξ valószínűségi változó várható értékének nevezzük.

Azt kaptuk tehát, hogy nagy számú kísérlet elvégzése után a dobott értékek átlaga egyre kevésbe ingadozik a 4,47, azaz a várható érték körül.

Az átlag tehát olyan rokonságban van a várható értékkel, mint a relatív gyakoriság a valószínűséggel.
A várható érték egy rögzített szám, az átlag viszont változik a kísérletek számának változásával. Bizonyítható, hogy a kísérletek számának növelésével az átlag egyre kevésbé ingadozik a várható érték körül. (Lásd még 26. lecke: Nagy számok törvénye)

Definíció:
Legyenek a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei x_1, x_2, ..., x_n és a hozzájuk tartozó valószínűségeket jelölje p_1, p_2, ..., p_n. Ekkor a ξ várható értéke:

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Megjegyzések:

1. **A várható érték tulajdonképpen a ξ által felvehető értékek valószínűségekkel súlyozott átlaga.**
2. **A várható érték (hasonlóan az átlaghoz) a legnagyobb és legkisebb ξ érték közé esik.**

A várható érték tulajdonságai:

1. $M(a \cdot \xi + b) = a \cdot M(\xi) + b$
2. $M\left(\xi^k\right)=\sum_{i=1}^{n} (x_i)^k \cdot p_i$ (**k. momentum**) $\rightarrow$ **Például a 2. momentum:** $M\left(\xi^2\right)=\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 \cdot p_i$

3. Szórás

Vizsgáljuk meg az alábbi két 30 fős osztálynak egy dolgozatban elért eredményeit.

		Osztályzatok					
		1	2	3	4	5	átlaga
Jegyek gyakorisága	A osztály	-	3	24	3	-	3
	B osztály	12	3	-	3	12	3

Mindkét osztály jegyeinek átlaga 3. A két osztály jegyei között azonban nagy különbség van. Az A osztályban a jegyek az átlag körül sűrűsödnek (sok a hármas), míg a B osztályban a jegyek távol esnek az átlagtól. A jegyek szórása az A osztályban kicsi, míg a B osztályban nagy.
Az átlag tehát önmagában nem ad elegendő információt egy eloszlásról. Definiálunk egy új pontjellemzőt, a szórást, ami azt mutatja meg, hogy a ξ értékei mennyire sűrűsödnek a várható érték körül.

Legyenek a x diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei x_1, x_2, ..., x_n és a hozzájuk tartozó valószínűségeket jelölje p_1, p_2, ..., p_n. Ekkor a ξ szórásának négyzete:

$$D^2(\xi) = M\left(\left[\xi - M(\xi)\right]^2\right)$$

A diszkrét valószínűségi változó szórásának számolása:

$$D(\xi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M(\xi)\right)^2 \cdot p_i}$$

Megjegyzések:

1. **A szórás megmutatja, hogy a ξ értékei átlagosan (négyzetes átlag) mennyivel térnek el a várható értéktől.**

2. **Bizonyítható, hogy a szórásnégyzetet az alábbi módon is számolható:**

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2$$

3. **A szórás egy fontos tulajdonsága:** $D(a \cdot \xi + b) = |a| \cdot D(\xi)$

Számoljuk ki az 1. példában szereplő ξ szórását!

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 \cdot p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i\right)^2$$

Amiből a szórás $D(\xi) = \sqrt{1{,}96} = 1{,}4$. Tehát ξ értékeinek a várható értéktől való átlagos eltérése 1,4.

4. Medián

A statisztikai ismereteink alapján a medián az a szám, amelynél a ξ valószínűségi változó kisebb illetve nagyobb értéket egyaránt 50 %-os valószínűséggel vesz fel.

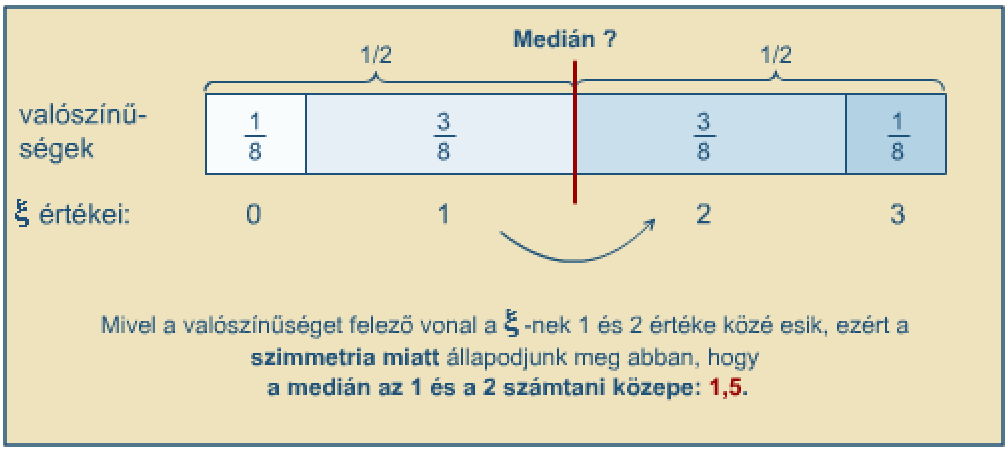
Ez a megfogalmazás, csak a folytonos eloszlásokra igaz (lásd 22. lecke). A diszkrét eloszlásoknál azt vizsgáljuk, hogy a valószínűségek összege, ξ mely értékénél éri el a 0,5-öt.

Határozzuk meg az 1. példában szereplő eloszlás mediánját. Mérjük fel egy számegyenesre a ξ értékeihez tartozó valószínűségeket.

Kattintson ide a nagyításhoz!

Az eloszlás mediánja 5, mert ennél az értéknél "ugorja át" a valószínűségek összege az 1/2-et.

Nézzük meg a 17. lecke 1. feladatában lévő érme dobásos feladat mediánját is!



Ebben az esetben a "$\xi=1$ és a $\xi=2$ között" felezzük a valószínűségek összegét. A szimmetria miatt e két érték számtani közepét fogadjuk el mediánként.
Ezért:
$med(\xi)=1{,}5$

A diszkrét valószínűségi változó mediánjának kiszámolása:

Adjuk össze egyesével a ξ értékeihez tartozó valószínűségeket, a legkisebb ξ értéktől haladva a nagyobbak felé.

1. **Ha az összeadott valószínűségek között nem találunk 0,5-t, akkor a ξ azon értéke a medián, amelynél valószínűségek összege "átugorja" az 1/2-et.**
2. **Ha valamely $\xi=x_k$ értéknél a valószínűségek összege pontosan 1/2, akkor** $med(\xi)=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$

18. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - párosítás
Párosítsa össze a fogalmakat a meghatározásokkal!

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

Az eloszlás legvalószínűbb értéke.	medián
A várható értéktől való átlagos eltérés.	várható érték
Sok kísérlet után ξ értékeinek átlaga egyre kevésbé ingadozik ezen számérték körül.	szórás
Ennél az éténél kisebb illetve nagyobb értékek felvételének valószínűsége 50% (folytonos eloszlás esetén).	módusz

2. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- 86,5
- 200

- 205
- 300

Egy ξ valószínűségi változó valószínűségeloszlását mutatja az alábbi táblázat.

ξ lehetséges értékei:	100	200	300
Valószínűségek:	0,35	0,25	0,4

Írja be a szövegdobozokba az egyes pontjellemzők számszerű végeredményét!

módusz (1)................
medián (2)................
várható érték (3)................
szórás (4)................

3. feladat - többszörös választás
Egy ξ valószínűségi változó lehetséges értékei a [8; 38] intervallumba esnek.
Válassza ki azokat az értékeket, amelyek nem lehetnek az eloszlás várható értékei!

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] 42
[ ] 2
[ ] 20
[ ] 32
[ ] 24

4. feladat - szókitöltés
Egy diszkrét valószínűségi változó által felvehető értékeket és a hozzájuk tartozó valószínűségeket az alábbi táblázat tartalmazza. Az eloszlás várható értéke 2,7.
Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!

Segítség 18. lecke 4. önellenőrző feladat

ξ lehetséges értékei:	1	2	3	4
Valószínűségek:	0,2	0,15	(1)................	(2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - egyszeres választás
Anna és Bea két érmével (50 Ft és 100 Ft) a következő játékot játssza: Anna dob a 2 érmével. Ha a dobások között egy fej van, akkor Anna nyereménye 20 Ft, ha két fej van, akkor 40 Ft. Ha viszont nem sikerült fejet dobnia, akkor 60 Ft-ot fizet Beának.
Jelölje ξ Anna nyereményének lehetséges értékeit!

Válassza ki a megadott értékek közül Anna nyereményének várható értékét!
(A veszteséget negatív számmal vegye figyelembe.)

Segítség 18. lecke 5. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 10

( ) 5
( ) -10
( ) 0

6. feladat - egyszeres választás
András és Béla a következő játékot játsszák. András egy érmével legfeljebb 3-szor dobhat. A játék befejeződik, ha valamelyik dobásnál fejet dob. Ha első, második vagy harmadik dobásnál sikerül fejet dobnia, akkor a nyereményei rendre 32, 16 illetve 8 Ft. Ha harmadikra sem sikerül fejet dobni, akkor fizet Bélának 120 Ft-ot.
Jelentse ξ András nyereményének értékét.

Válassza ki a megadott értékek közül András nyereményének várható értékét!
(A veszteséget negatív számmal vegye figyelembe.)

Segítség 18. lecke 6. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) -32
( ) -64
( ) 0
( ) 6

Megoldókulcs

1. feladat:	módusz - Az eloszlás legvalószínűbb értéke. szórás - A várható értéktől való átlagos eltérés. medián - Ennél az éténél kisebb illetve nagyobb értékek felvételének valószínűsége 50% (folytonos eloszlás esetén). várható érték - Sok kísérlet után ξ értékeinek átlaga egyre kevésbé ingadozik ezen számérték körül.
2. feladat:	(1) - 300 (2) - 200 (3) - 205 (4) - 86,5
3. feladat:	2 42
4. feladat:	(1) - 0,4 (2) - 0,25
5. feladat:	5
6. feladat:	6

19. lecke. Speciális diszkrét eloszlások 1.

1. Hipergeometrikus eloszlás

Alkalmazás:

- **Visszatevés nélküli mintavétel: van N számú elem, amelyből M kitüntetett. Az N elemből n-szer ($n \leq min(M;N-M)$) húzunk visszatevés nélkül.**

Jelölje ξ a mintában lévő kitüntetett elemek számát.
ξ ehetséges értékei: 0; 1; 2; ...n

Annak a valószínűsége, hogy k számú kitüntetett elem lesz a mintában:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

, ahol $k = 0;\ 1;\ 2;\ ...n$

Ezzel a képlettel egyúttal a ξ valószínűségeloszlását is megadtuk.
Bizonyítható, hogy a hipergeometrikus eloszlás pontjellemzői meghatározhatók az N, M, n paraméterekből az alábbi módon:

Várható érték: $M(\xi) = n \cdot p$
($p = M/N$ - kitüntetett elemek részaránya)

Szórás: $D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1}}$
($q = 1 - p$ - a nem kitüntetett elemek részaránya)

Módusz: $\mathrm{mod}(\xi) = \left[(n+1) \cdot \frac{M+1}{N+2} \right]$
(A szögletes zárójel egészrészt jelöl.)

1. feladat

Egy nemzetközi öttusa verseny lovaglás számában 16 ló vesz részt, amelyek között 7 nehezen kezelhető. A versenyen résztvevő magyar csapat 5 főből áll.

Jelölje ξ a magyaroknak kisorsolt rakoncátlan lovak számát.

Írjuk fel ξ valószínűségeloszlását! Számoljuk ki a pontjellemzőket a paraméterek segítségével!

1. feladat megoldása

A hipergeometrikus eloszlás paraméterei:
$N = 16$ **a versenyen résztvevő lovak száma**
$M = 7$ **a rakoncátlan lovak száma**
$n = 5$ **a magyar versenyzők száma**
$k = 0;1;2;3;4;5$ **a magyaroknak kisorsolt rakoncátlan lovak száma**

A ξ valószínűségeloszlása:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{7}{k} \cdot \binom{9}{5-k}}{\binom{16}{5}},$$

ahol $k = 0;1;2;3;4;5$

k	0	1	2	3	4	5
$P(\xi=k)$	0,029	0,202	0,404	0,288	0,072	0,005

Várható érték: $M(\xi)=n\cdot p=5\cdot\frac{7}{16}=\frac{35}{16}\approx 2{,}2 \qquad (p=M/N=7/16)$

Szórás: $D(\xi)=\sqrt{n\cdot p\cdot q\cdot\frac{N-n}{N-1}}=\sqrt{5\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{11}{15}}=0{,}95 \qquad (q=1-p=9/16)$

Módusz: $\mathrm{mod}(\xi)=\left[(n+1)\cdot\frac{M+1}{N+2}\right]=\left[6\cdot\frac{8}{18}\right]=[2{,}67]=2$
(A módusz értéke a táblázatból is leolvasható.)

2. Binomiális eloszlás

Alkalmazás:

- **Visszatevéses mintavétel: Adott N elem, amelyek között M számú kitüntetett van.**
  (Gyakran csak a kitüntetett elemek $p=M/N$ részaránya ismert.)

  Az elemekből n-szer húzunk úgy, hogy minden húzás után a kihúzott elemet visszatesszük.
  A ξ valószínűségi változó a mintában lévő kitüntetett elemek számát jelöli.
- **Bernoulli-probléma (független kísérletek együttes bekövetkezése):**
  n számú független kísérletet végzünk. Egy- egy kísérletnél p valószínűséggel következik be a vizsgált esemény.
  A ξ valószínűségi változó a vizsgált esemény bekövetkezéseinek számát jelöli n kísérlet esetén.

ξ lehetséges értékei: 0; 1; 2; ...n
ξ alószínűségeloszlása:
$P(\xi=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$**, ahol** $k=0;\ 1;\ 2;\ ...n$ **és** $q=1-p$
Bizonyítható, hogy a binomiális eloszlás pontjellemzői meghatározhatók az n és p paraméterekből az alábbi módon:

Várható érték: $M(\xi)=n\cdot p$
Szórás: $D(\xi)=\sqrt{n\cdot p\cdot q}$
Módusz: $\mathrm{mod}(\xi)=[(n+1)\cdot p]$
(A szögletes zárójel egészrészt jelöl.)
Megjegyzések:
A hipergeometrikus eloszlás helyett a binomiális eloszlás képleteit alkalmazhatjuk, ha N és M elég nagyok n-hez képest. (Lásd még a mintavételeknél a 11. leckében.) Minőségellenőrzések során gyakori ez, ahol a vizsgálandó elemek száma sokkal nagyobb, mint a minta elemszáma.

2. feladat

A statisztikai adatok alapján egy terhesség esetén a fiú születésének valószínűsége 48 %.

Jelölje ξ az ötgyermekes családokban született fiúk számát.

Írjuk fel ξ valószínűségeloszlását és ábrázoljuk bot ábrán!

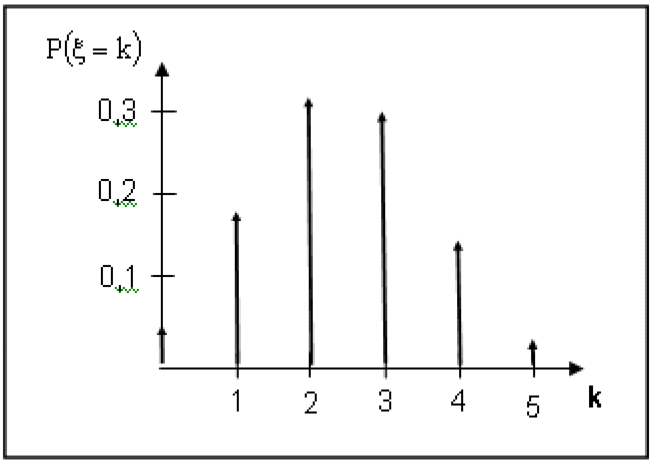
Számoljuk ki a pontjellemzőket a paraméterek segítségével!

2. feladat megoldása

Bármely terhesség esetén a fiú születésének valószínűsége 0,48, így a feladat független események együttes bekövetkezéséről szól. A binomiális eloszlás paraméterei:
$n=5$ **a gyermekek száma a családban**
$p=0{,}48$ **a fiú születésének valószínűsége**
A ξ valószínűségeloszlása:
$P(\xi=k)=\binom{5}{k}\cdot 0{,}48^{k}\cdot 0{,}52^{5-k}$ **, ahol** $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ **és** $q=1-0{,}48=0{,}52$

K	0	1	2	3	4	5
P(ξ =k)	0,038	0,175	0,324	0,299	0,138	0,026

Az eloszlás bot-ábrája:



Várható érték: $M(\xi)=n\cdot p=5\cdot 0{,}48=2{,}4$
Szórás: $D(\xi)=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{5\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}=1{,}12$
Módusz: $\operatorname{mod}(\xi)=[(n+1)\cdot p]=[6\cdot 0{,}42]=[2{,}52]=2$
(A módusz a táblázatból is leolvasható.)

3. Geometriai eloszlás

3. feladat

Egy kockával addig dobunk, amíg először 4-nél nagyobb nem lesz a dobott érték. Jelölje ξ azt a számot, ahányadikra először 4-nél nagyobbat dobunk.

a, Mennyi a valószínűsége annak, hogy harmadikra dobunk először 4-nél nagyobbat.

b, Írjuk fel ξ valószínűségeloszlását és ábrázoljuk bot ábrán! Határozzuk meg a móduszt is!

3. feladat megoldása

a, Minden dobásnál (egymástól függetlenül) 2/6 annak a valószínűsége, hogy 4-nél nagyobbat dobunk. Ha az első két dobás legfeljebb 4 és a harmadik dobás 4-nél nagyobb, akkor ezen események együttes bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(\xi=3)=\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{27}$$

b, Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy k -adikra sikerül először 4-nél nagyobbat dobni. Ebben az esetben az első ($k-1$) dobás legfeljebb 4, és a k. dobás 4-nél nagyobb. Alkalmazzuk a független események együttes bekövetkezésére vonatkozó szorzási szabályt.

$$P(\xi=k)=\left(\frac{4}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{2}{6},$$

ahol $k=1;2;3;\ldots$

K	1	2	3	4	5	6	…
P(ξ =k)	1/3	2/9	4/27	8/81	16/243	32/729	…

A ξ értékeihez tartozó valószínűségek egy csökkenő mértani sorozatot alkotnak, melynek hányadosa 2/3. Így az eloszlás módusza 1, vagyis az a legvalószínűbb, hogy elsőre dobunk 4-nél nagyobbat.
A dobások számának (ξ) nincs elméleti felső korlátja, de nagyon kicsi annak a valószínűsége, hogy 6-nál többször kell dobni ahhoz, hogy először 4-nél nagyobbat dobjunk.

A 4. példa egy geometriai eloszlásra vonatkozott. Fogalmazzuk meg általánosan a geometriai eloszlás alkalmazási körét.

Geometriai eloszlás alkalmazás:
Végezzünk független kísérleteket. Egy-egy kísérletnél p valószínűséggel következik be a vizsgált esemény.
A ξ valószínűségi változó azt a számot jelöli, ahányadikra a vizsgált esemény először bekövetkezik.
ξ lehetséges értékei: 1; 2; 3 ...
A ξ valószínűségeloszlása:

$P(\xi=k)=q^{k-1}\cdot p$, **ahol** $k=1;\ 2;\ 3;...$ **és** $q=1-p$

Bizonyítható, hogy a geometriai eloszlás pontjellemzői meghatározhatók a p **paraméter segítségével az alábbi módon:**

Várható érték: $M(\xi)=\frac{1}{p}$

Szórás: $D(\xi)=\frac{\sqrt{q}}{p}$

Módusz: $\mathrm{mod}(\xi)=1$

Megjegyzések:

1. **A** p **értékétől függetlenül mindig az a legvalószínűbb, hogy a vizsgált esemény elsőre következik be.**
2. **A** ξ **értékeinek nincs felső korlátja, így a** ξ **által felvehető értékek száma megszámlálhatóan végtelen sok.**

Az átlagnál sokkal nagyobb értékek valószínűsége azonban igen csekély.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 10. fejezetében található 10.1.,10.2. kidolgozott példákat és oldja meg a 10.2-5, 10.8., 9., 12a, 17. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

19. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - párosítás
Párosítsa össze az eloszlásokat az alkalmazási területekkel!

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

Független kísérletek során hányadikra következik be a vizsgált esemény először.	geometriai
Visszatevéses mintavétel.	hipergeometrikus
Visszatevés nélküli mintavétel.	binomiális

2. feladat - többszörös választás
Válassza ki, hogy a felsoroltak közül mely esetben alkalmazható a binomiális eloszlás!

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] Visszatevés nélküli mintavétel.
[ ] Annak vizsgálatára, hogy a független kísérletek során hányadikra következik be a vizsgált esemény először.
[ ] Visszatevéses mintavétel.
[ ] Hipergeometrikus eloszlás helyett, ha az N és M paraméterek elég nagyok a minta elemszámához képest.
[ ] Annak vizsgálatára, hogy n számú független kísérlet során mennyi a valószínűsége annak, hogy a vizsgált esemény k-szor következik be.

3. feladat - szókitöltés

A magyar kártya lapjait szétosztják 4 játékos között úgy, hogy mindenki 8 lapot kap. Az egyik játékos lapjait vizsgáljuk.

Mennyi a valószínűsége, hogy 5 piros lapot kapott? (1)................%
Mennyi a piros lapok számának várható értéke? (2)................
Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb egy ászt kapott? (3)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - egyszeres választás
Közúti ellenőrzés során az autók műszaki állapotát is vizsgálják. A felmérések szerint az autók 45 %-ának megfelelő a műszaki állapota. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 6 véletlenszerűen megállított autó esetén legalább egynek nem megfelelő a műszaki állapota?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 99,2%
( ) 70,5%
( ) 83,7%
( ) 98%

5. feladat - szókitöltés
Az APEH statisztikája alapján 8 adózóból átlagosan 3 hibás adóbevallást nyújt be.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy ellenőrzés során megvizsgált 9 adóbevallásból legfeljebb kettő volt hibásan kitöltve? (1)................%
A megvizsgált 9 adóbevallás között hány hibás van legnagyobb valószínűséggel? (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

6. feladat - egyszeres választás
Suta Sára az esetek 30 %-ban eltöri a gyufát ahelyett, hogy meggyújtaná.

Mennyi a valószínűsége, hogy a gáztűzhely meggyújtása csak a negyedik gyufával sikerül neki, mert a korábbiak eltörtek.

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 1%
( ) 5%
( ) 8%
( ) 2%

7. feladat - egyszeres választás
A sportlövészetben a versenyzőknek egy repülő tárgyat (tányért) kell eltalálniuk. A verseny során 10-szer lőnek. Az egyik versenyzőről korábbi eredményei alapján ismeretes, hogy 60% az esélye arra, hogy mind a 10 lövésnél eltalálja a tányért.

Mennyi a találatok számának várható értéke?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 9
( ) 9,5
( ) 8
( ) 6

Megoldókulcs

1. feladat:	geometriai - Független kísérletek során hányadikra következik be a vizsgált esemény először. binomiális - Visszatevéses mintavétel. hipergeometrikus - Visszatevés nélküli mintavétel.
2. feladat:	Visszatevéses mintavétel. Hipergeometrikus eloszlás helyett, ha az N és M paraméterek elég nagyok a minta elemszámához képest. Annak vizsgálatára, hogy n számú független kísérlet során mennyi a valószínűsége annak, hogy a vizsgált esemény k-szor következik be.
3. feladat:	(1) - 1,1 (2) - 2 (3) - 74,6
4. feladat:	99,2%
5. feladat:	(1) - 28,2 (2) - 3
6. feladat:	2%
7. feladat:	9,5

20. lecke. Speciális diszkrét eloszlások 2.

4. Poisson-eloszlás

Alkalmazás:
Pont-elhelyezkedési problémáknál. Ezek adott idő intervallumon, távolságon, területen, térfogatban véletlenszerűen bekövetkező pontszerű események, amelyeknél az egyes tartományokba eső pontok számának várható értéke arányos a tartomány nagyságával.

Például:

- **Egy irodába adott idő alatt befutó telefonhívások száma (időintervallum).**
- **Egy gyárban adott idő alatt meghibásodott gépek száma (időintervallum).**
- **Egy szövőgép fonalának adott hosszúságú részén a szakadások száma (távolság).**
- **Egy út adott szakaszán lévő úthibák száma (terület).**
- **A kalácsban lévő mazsolák száma (térfogat).**

A Poisson-eloszlás ξ valószínűségi változójának lehetséges értékei: 0; 1; 2; ...
A ξ valószínűségeloszlása:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

ahol $k = 0;1;2;...$ és λ az eloszlás paramétere.

Bizonyítható, hogy az eloszlás pontjellemzői:

Várható érték: $M(\xi) = \lambda$
Szórás: $D(\xi) = \sqrt{\lambda}$

Módusz: $\mathrm{mod}(\xi) = \begin{cases} [\lambda], \text{ ha } \lambda \text{ nem egész} \\ \lambda, \text{ és } \lambda-1, \text{ ha a } \lambda \text{ egész} \end{cases}$

(A szögletes zárójel egészrészt jelent.)

Megjegyzések:

1. A várható érték megegyezik az eloszlás paraméterével (λ).

2. A ξ értékeinek nincs felső korlátja, így a ξ lehetséges értékeinek száma megszámlálhatóan végtelen sok. Az átlagnál sokkal nagyobb értékek valószínűsége azonban igen csekély.

3. A várható érték mindig egy adott nagyságú tartományra vonatkozik. A különböző tartományokra vonatkozó várható értéket egyenes arányossággal számoljuk.

4. A binomiális eloszlás helyett a Poisson-eloszlás képleteit alkalmazhatjuk nagy n és kis p esetén, ahol $\lambda = n \cdot p$.

1. feladat

A MÁV diszpécserközpontjába naponta átlagosan 2 felsővezeték-szakadást jelentenek be.
Válasszunk ki véletlenszerűen egy napot.
ξ jelentse az adott napon bejelentett felső vezeték szakadások számát.
Írjuk fel ξ valószínűségeloszlását és ábrázoljuk bot ábrán! Számoljuk ki a pontjellemzőket a paraméterek segítségével.

1. feladat megoldása

A feladat szövege tartalmazza a várható értéket, ami egyben az eloszlás λ paramétere is:
$M(\xi) = \lambda = 2$.

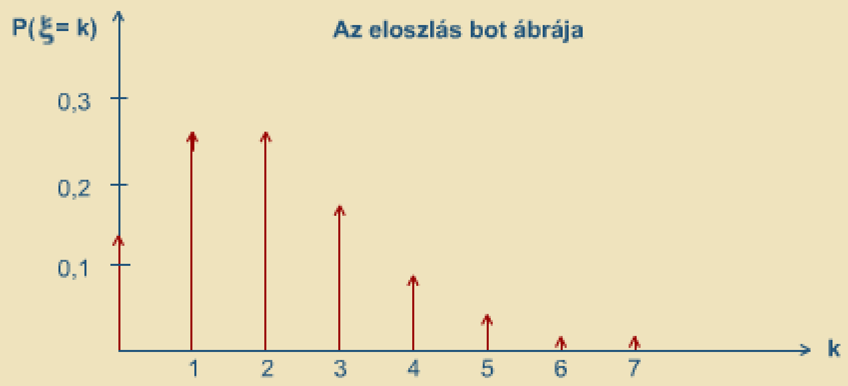
Az ξ valószínűségeloszlása: $P(\xi = k) = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2}$
ahol $k = 0;1;2;...$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
P(ξ =k)	0,135	0,27	0,27	0,18	0,09	0,036	0,012	0,003	0,0	0,0	…

Az egy nap alatt bekövetkező vezetékszakadások számának nincs ugyan elvi felső határa, de mint az a táblázatból is látszik, 7-nél több szakadásnak 0,1%-nál is kisebb az esélye.

Az eloszlás bot ábrája:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	...
P(ξ= k)	0,135	0,27	0,27	0,18	0,09	0,036	0,012	0,003	...



Az eloszlás pontjellemzői:

Várható érték: $M(\xi)=\lambda=2$

Szórás: $D(\xi)=\sqrt{\lambda}=\sqrt{2}=1{,}41$

Módusz: mivel a λ egész, ezért a $\mathrm{mod}(\xi)=\lambda$, és $\lambda-1$, azaz naponta 1 vagy 2 vezeték szakadás a legvalószínűbb. Ez a táblázatból is leolvasható.

2. feladat

Egy szövőgép 150 szállal dolgozik. Tapasztalatok szerint egy műszak alatt a gép szálai egymástól függetlenül 2,2%-os valószínűséggel szakadnak el.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott műszak alatt

a, van legalább egy szálszakadás?

b, a várható értéknél több szálszakadás van?

c, Hány szálszakadás történik legnagyobb valószínűséggel, és mekkora ez a valószínűség?

2. feladat megoldása

Jelölje ξ az egy műszak alatt elszakadt szálak számát.

Mivel szálak szakadása egymástól független, így a ξ binomiális eloszlású, amelynek paraméterei:
$n=150$ **(a szövőgép összes szálának száma)**
$p=0{,}022$ **(egy- egy szál szakadásának valószínűsége).**

Mivel azonban az n elég nagy és a p elég kicsi, a binomiális eloszlás Poisson-nal helyettesíthető, ahol az eloszlás paramétere:

$\lambda = n \cdot p = 150 \cdot 0{,}022 = 3{,}3$.

a, A feladatot a komplementer esemény segítségével oldjuk meg:

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \frac{3{,}3^0}{0!} \cdot e^{-3{,}3} = 1 - 0{,}037 = 0{,}963 \quad (0! = 1)$$

Vagyis 96,3% annak valószínűsége, hogy egy műszak alatt van legalább egy szálszakadás.

b, 3,3-nál több, azaz legalább 4 szálszakadás valószínűségét keressük. Ismét komplementerrel számolunk.

$$P(\xi \geq 4) = 1 - \left[P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) \right] =$$

$$= 1 - \left[\frac{3{,}3^0}{0!} \cdot e^{-3{,}3} + \frac{3{,}3^1}{1!} \cdot e^{-3{,}3} + \frac{3{,}3^2}{2!} \cdot e^{-3{,}3} + \frac{3{,}3^3}{3!} \cdot e^{-3{,}3} \right] =$$

$$= 1 - (0{,}037 + 0{,}122 + 0{,}201 + 0{,}221) = 0{,}419$$

c, Az eloszlás legvalószínűbb értéke a módusz. Mivel a $\lambda = 3{,}3$ nem egész, ezért egészrésszel kell számolni, vagyis a módusz 3. A b.) feladat alapján a hozzá tartozó valószínűség 22,1%.

3. feladat

0,95 annak a valószínűsége, hogy egy folyóirat bármely oldalán legalább egy sajtóhiba található.

a, Mekkora a 10 oldalon található sajtóhibák várható értéke és szórása?

b, Mi a valószínűsége annak, hogy a folyóirat valamely három oldalán háromnál kevesebb hiba található?

3. feladat megoldása

A sajtóhibák a lapon "pontszerűen" helyezkednek el, ezért Poisson-eloszlással számolhatunk.
Először az egy oldalon található sajtóhibák várható értékét számoljuk ki.

ξ jelentse az egy oldalon található sajtóhibák számát.
A feladat állításából következik, hogy 0,05 annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon nincs sajtóhiba: $P(\xi = 0) = 0{,}05$
Alkalmazzuk a Poisson-eloszlást $k = 0$ esetén, és határozzuk meg a λ -t.

$$P(\xi = 0) = \frac{\lambda^0}{0\,!} \cdot e^{-\lambda} = 0{,}05 \rightarrow e^{-\lambda} = 0{,}05 \rightarrow -\lambda \cdot \ln e = \ln 0{,}05 \rightarrow \lambda = 3.$$

a, A 10 oldalon található sajtóhibák várható értéke $M(\xi) = \lambda = 30$, mert az oldalak száma és a hibák száma között egyenes arányosság van. A szórás
$D(\xi) = \sqrt{\lambda} = \sqrt{30} = 5{,}48$

b, 3 oldal esetén: $M(\xi) = \lambda = 9$.

$$P(\xi<3)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=\frac{9^0}{0!}\cdot e^{-9}+\frac{9^1}{1!}\cdot e^{-9}+\frac{9^2}{2!}\cdot e^{-9}=$$
$$=e^{-9}\cdot\left(\frac{9^0}{0!}+\frac{9^1}{1!}+\frac{9^2}{2!}\right)=e^{-9}\cdot(1+9+40{,}5)=0{,}006$$

Tehát 0,6% annak a valószínűsége, hogy 3 oldalon 3-nál kevesebb hiba van.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 10. fejezetében található 10.3, 4. kidolgozott példákat és oldja meg a 10.20ab, 23, 26, 27, 29. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

20. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - többszörös választás
Válassza ki, hogy a felsoroltak közül mely esetben alkalmazható a Poisson-eloszlás!

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] Binomiális eloszlás helyett, ha n nagy és p kicsi.
[ ] Annak vizsgálatára, hogy a független kísérletek során hányadikra következik be először a vizsgált esemény.
[ ] Visszatevés nélküli mintavétel.
[ ] Hipergeometrikus eloszlás helyett, ha az N és M paraméterek kicsik.
[ ] Visszatevéses mintavétel.
[ ] Pontelhelyezkedési problémák.

2. feladat - párosítás
Párosítsa össze az eloszlásokat az alkalmazási területekkel!

Párosítsa össze a megfelelő elemeket:

Bernoulli-probléma.	hipergeometrikus
Annak vizsgálata, hogy független kísérletek során hányadikra következik be először a vizsgált esemény.	Poisson
Pontelhelyezkedési problémák.	binomiális
Visszatevés nélküli mintavétel.	geometriai

3. feladat - egyszeres választás
Süti Sándor cukrászmester átlagosan 50 szem mazsolát tesz egy 200 dkg-os kalácsba. A kalácsból levágunk egy 5 dkg-os szeletet.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy ebben a szeletben 2 vagy 3 szem mazsola van?

Segítség 20. lecke 3. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 52,9%
( ) 31,7%
( ) 26,7%
( ) 48%

4. feladat - egyszeres választás
Egy irodagép garanciális időn belüli meghibásodásának valószínűsége 1,5%. Egy vállalat 100 ilyen gépet működtet.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a várható értéknél több gépet kell javíttatni a garanciális időn belül?

Segítség 20. lecke 4. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

- **( ) 35,7%**
- **( ) 44,2%**
- **( ) 42,3%**
- **( ) 33,3%**

5. feladat - egyszeres választás
98,5% annak a valószínűsége, hogy egy adott napon a székesfehérvári tűzoltókat legalább egyszer tűzesethez hívják.

Hány tűzeset van naponta átlagosan?

Segítség 20. lecke 5. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

- **( ) 4**
- **( ) 3**
- **( ) 5,1**
- **( ) 4,2**

Megoldókulcs

1. feladat:	Pontelhelyezkedési problémák. Binomiális eloszlás helyett, ha n nagy és p kicsi.
2. feladat:	geometriai - Annak vizsgálata, hogy független kísérletek során hányadikra következik be először a vizsgált esemény. binomiális - Bernoulli-probléma. hipergeometrikus - Visszatevés nélküli mintavétel. Poisson - Pontelhelyezkedési problémák.
3. feladat:	31,7%
4. feladat:	44,2%
5. feladat:	4,2

V. fejezet. Gyakorló feladatok

1. feladat - leírás
1.

Egy kosárlabdacsapat egyik centeréről úgy hírlik, hogy a kosárra dobásainak 90 % -a sikeres. Egy meccsen 12-szer volt lehetősége kosárra dobni.

a. **Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb két kosarat hagyott ki?**
b. **Hány sikeres dobása van legnagyobb valószínűséggel?**

Megoldás

2. feladat - leírás
2.

Egy úszóversenyre 24 versenyző nevezett be. A versenyzők nyolcas csoportokban mérik össze erejüket az elődöntőben.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy a 6 legjobb versenyzőből 4 az elődöntő első futamába kerül a sorsolás során?
b. A 6 legjobb közül hány versenyzik együtt az első futamban legnagyobb valószínűséggel?

Megoldás

3. feladat - leírás
3.

Egy tanulóvezető a rutinfeladatok mindegyikét 80 %-os valószínűséggel hajtja végre megfelelően.

a. Mennyi a valószínűsége annak, hogy gyakorláskor 5 feladatból legfeljebb egy nem sikerül?
b. Mennyi a valószínűsége annak, hogy gyakorláskor még harmadikra sem sikerül az egyik gyakorlatot végrehajtani?

Megoldás

Megoldókulcs

1. feladat:	Id. a feladatnál!
2. feladat:	Id. a feladatnál!
3. feladat:	Id. a feladatnál!

Bevezető

Ebben a fejezetben olyan eloszlásokkal fogunk foglalkozni, amelyeknél a valószínűségi változó folytonos mennyiségeket jelöl; leggyakrabban időtartamot, hosszúságot, tömeget...
A gyakorlati életben fontos a gépek élettartamának vagy a termékek gyártás során fellépő méretingadozásának (tömeg, hosszúság stb.) vizsgálata.

Ezek olyan folytonos mennyiségek, amelyek lehetséges értékei egy (vagy több) intervallumot alkotnak. Ez az intervallum nem feltétlenül véges.

Például egy 10 cm sugarú céltáblára lövöldözve a találatok középponttól való távolsága 0-10 cm közé esik, ebben az intervallumban bármilyen értéket felvehet.
Ha felosztjuk a céltáblát körgyűrűkre és elég sokszor lövünk, elképzelhető, hogy azt tapasztaljuk, hogy az egyes körgyűrűkben nem azonos gyakorisággal van találat. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy nem azonos valószínűséggel találunk bele az egyes körgyűrűkbe.

Példa:

Adjunk le 200 lövést a 10 cm sugarú céltáblára, és mérjük meg az egyes találatok középponttól való távolságát. Készítsünk az adatokról táblázatot, amely tartalmazza azt, hogy

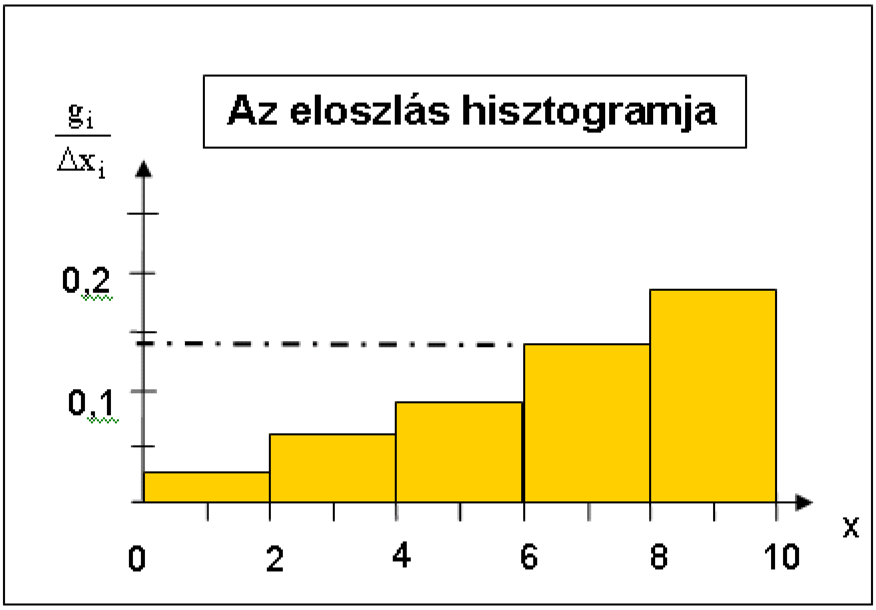
a. a 2 cm-ként felosztott céltábla egyes körgyűrűibe hány találat esett, illetve ez az összes találat hány %-át teszi ki (relatív gyakoriság).

b. Írjuk be a táblázatba azt is, hogy a középponttól legfeljebb 2 cm-re, 4 cm-re, 6 cm-re, 8 cm-re, 10 cm-re összesen a találatok hány %-a esik! Ez esetben a relatív gyakoriságokat kell összegezni, idegen szóval a kumulált relatív gyakoriságot kell kiszámolni.

A mért adatokat, a relatív gyakoriságot (g_i), és a kumulált relatív gyakoriságot (Σg_i) az alábbi táblázat tartalmazza.

Középponttól való távolság (cm)	Gyakoriság (f_i)	Relatív gyakoriság (g_i)	Kumulált relatív gyakoriság (Σg_i)
0 – 2	10	0,05	0,05
2 – 4	25	0,125	0,175
4 – 6	35	0,175	0,35
6 – 8	57	0,285	0,635
8 – 10	73	0,365	1,0
	$\sum f_i = 200$	$\sum g_i = 1$	

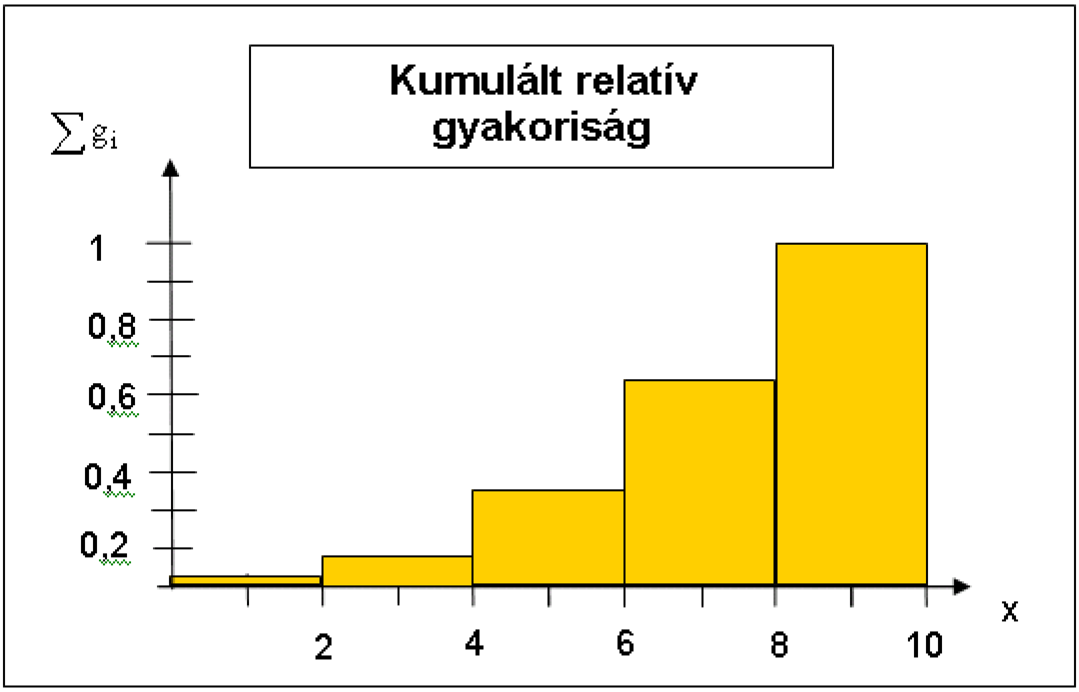
A 2 cm-es körgyűrűkre felosztott céltábla hisztogramja. A hisztogramról látható, hogy a külső gyűrűk felé haladva nő a relatív gyakoriság.



A hisztogramról tehát könnyen leolvasható, hogy mely intervallumba esnek kisebb, és melyekbe nagyobb valószínűséggel a találatok.

Minél több mérési eredményre alapozunk és minél kisebb intervallumokra osztjuk a teljes intervallumot, az eloszlás képe annál pontosabban rajzolódik ki.

Ábrázoljuk most a kumulált relatív gyakoriságot a középponttól való távolság függvényében.



A kumulált relatív gyakoriság azt mutatja meg, hogy a találatok hányad része esett a középponttól a vizsgált távolságnál közelebbre. (Pl. a találatok 63,5 %-nak 8cm-nél kisebb a középponttól való távolsága.)

A 21. fejezetben látni fogjuk, hogy a folytonos eloszlásokat két függvénnyel fogunk jellemezni:

- **eloszlásfüggvény**
- **sűrűségfüggvény**

Az eloszlásfüggvénnyel a kumulált gyakoriság, a sűrűségfüggvénnyel a hisztogram van "rokonságban".

21. lecke. A folytonos valószínűségi változók jellemzői

A gazdasági és a műszaki élet számos területén találkozunk olyan eloszlásokkal, amelyeknél folytonos mennyiségek "ingadozását" vizsgáljuk, mint például:

- **egy alkatrész élettartama**
- **egy folyó vízállása**
- **egy termék gyártás során fellépő méretingadozása (pl: tengely átmérője)**

A ξ valószínűségi változót folytonosnak mondjuk, ha lehetséges értékei egy vagy több intervallumot alkotnak.

Megjegyzés:

1. Ezek az intervallumok nem feltétlenül véges hosszúságúak, lehetnek akár a teljes számegyenes is.

2. A folytonos valószínűségi változó gyakran időtartamot, hosszúságot, térfogatot, tömeget mér.

Nézzük meg ismét a bevezető céltáblás feladatát geometriai valószínűség feltételezésével!

1. feladat

Egy kör alakú céltábla sugara 10 cm. A céltáblára lövéseket adunk le. A ξ valószínűségi változó mérje a találat távolságát a céltábla középpontjától.

Geometriai valószínűséget feltételezve számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy a találat

a, a középponttól pontosan 2 cm-re van.

b, a középponttól 4 cm-nél közelebb van.

c, a középponttól tetszőleges r távolságnál közelebb van ($0<r<10$).

1. feladat megoldása

Geometriai valószínűség feltételezése esetén a valószínűséget úgy számoljuk ki, hogy a kedvező elemi eseményekhez tatozó területet a teljes céltábla területével osztjuk.

a, A középponttól 2 cm re lévő pontok egy 2 cm sugarú körívet alkotnak. Mivel a körív területe 0, így a kérdezett valószínűség is 0: $P(\xi=2)=0$

b, A középponttól 4 cm-nél közelebb lévő pontok egy 4 cm sugarú kör belső pontjai. Tehát a kérdezett valószínűség:

$$P(\xi<4)=\frac{r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi}=\frac{4^2\cdot\pi}{10^2\cdot\pi}=\frac{16}{100}=0{,}16.$$

c, A középponttól tetszőleges r távolságra lévő pontok esetén a kérdezett valószínűség: $P(\xi<r)=\frac{r^2\cdot\pi}{R^2\cdot\pi}=\frac{r^2\cdot\pi}{10^2\cdot\pi}=\frac{r^2}{100}$ ($0<r<10$)

Megjegyzés:
Az 1. feladat a. részét általánosíthatjuk:
A ξ egyes értékeihez (nem intervallumhoz) tartozó valószínűségek értéke 0.
Ez az állítás más folytonos valószínűségi változókra is igaz. Így tehát - a diszkrét valószínűségi változókkal ellentétben - a ξ folytonos valószínűségi változó minden egyes értékének 0 a valószínűsége.

A folytonos valószínűségi változókat két függvénnyel fogjuk jellemezni:

1. **Eloszlásfüggvény**
2. **Sűrűségfüggvény**

1. Eloszlásfüggvény

Az eloszlásfüggvényt a 17. leckében az alábbi módon definiáltuk.

Definíció:

A ξ valószínűségi változó F eloszlásfüggvénye minden x valós számhoz hozzárendeli az x-nél kisebb értékek felvételének valószínűségét, azaz

$F: x \to P(\xi < x)$

vagy

$F(x) = P(\xi < x)$

2. feladat

Írjuk fel és ábrázoljuk az 1. példa céltáblás feladatához tartozó eloszlásfüggvényt.

Hasonlítsuk össze a bevezetőben leírt kumulált relatív gyakoriság grafikonjával.

2. feladat megoldása

A találat középponttól való távolsága nem lehet negatív, így

$F(x) = P(\xi < x) = 0$**, ha** $x \le 0$**.**

Annak a valószínűsége, hogy a találat a kör középpontjától legfeljebb x távolságra van,

$F(x) = P(\xi < x) = \frac{x^2 \cdot \pi}{10^2 \cdot \pi} = \frac{x^2}{100}$**, ha** $0 < x \le 10$**.**

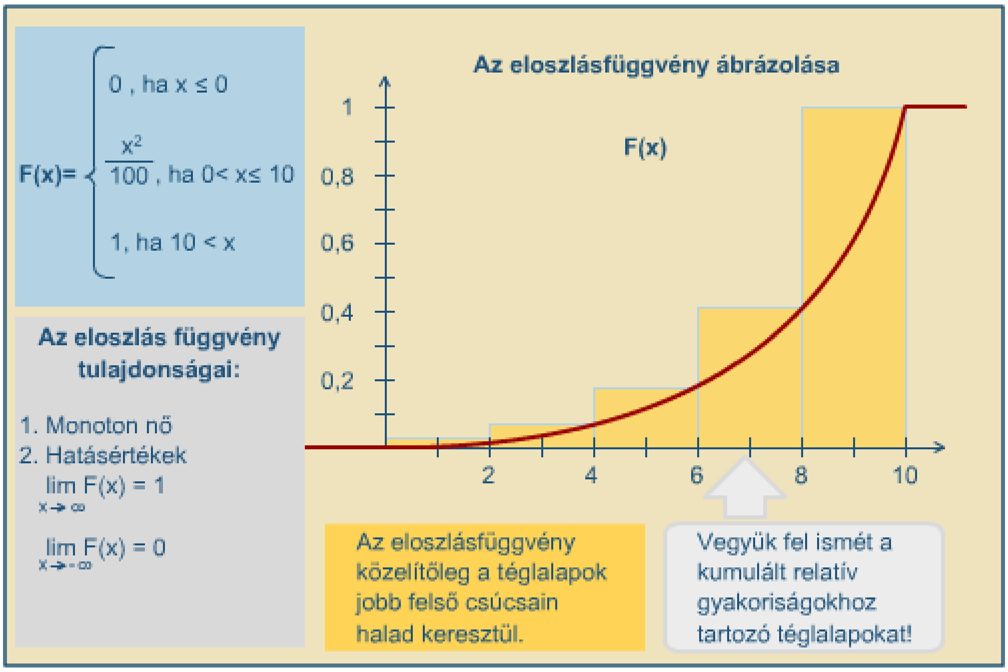
Ha x-et a céltábla sugaránál nagyobbnak választjuk, akkor biztos, hogy a találat x-nél kisebb távolságra van a középponttól, így

$F(x) = P(\xi < x) = 1$**, ha** $x > 10$**.**

A fentiek alapján az eloszlásfüggvény így írható fel:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{100} & \text{ha } 0 < x \le 10 \\ 1 & \text{ha } x > 10 \end{cases}$$

Az eloszlásfüggvény ábrázolása és összehasonlítása a kumulált relatív gyakorisággal:



A folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényének tulajdonságai:

1. **Monoton növekvő.**
2. **A függvény határértéke $-\infty$-ben 0, ∞-ben 1.** ($\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$)
3. **Minden pontjában balról folytonos.(Minden a-ra $\lim_{x \to a-0} F(x) = F(a)$)**

Tétel: Egy függvény csak akkor lehet valamely valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha az előző három feltétel mindegyikét teljesíti.

Valószínűségek számolása az eloszlásfüggvény segítségével:

Kattintson ide a nagyításhoz!

Annak a valószínűsége, hogy
ξ **egy adott** a **értéknél kisebb:** $P(\xi < a) = F(a)$

ξ **értéke legalább b:** $P(\xi \geq b) = 1 - P(\xi < b) = 1 - F(b)$

ξ **két adott érték közé esik:** $P(a \leq \xi < b) = P(\xi < b) - P(\xi < a) = F(b) - F(a)$

2. Sűrűségfüggvény

Láttuk, hogy a folytonos valószínűségi változó minden egyes értékének 0 a valószínűsége. Így a diszkrét valószínűségi változó jellemzésére használt valószínűségeloszlás és annak bot-ábrás ábrázolása értelmetlen a folytonos eloszlásoknál.

Ehelyett egy olyan függvényt vezetünk be, amelynek a függvény alatti területe méri a vizsgált intervallumba esés valószínűségét. Ezt a függvényt sűrűségfüggvénynek

nevezzük és $f(x)$-szel jelöljük.

Megjegyzés:
1. A bevezetőben látott hisztogram esetében a téglalapok területe az adott intervallumba esés relatív gyakoriságát adta meg. A minta elemszámát és az intervallum felosztását növelve, a téglalapokból egyre jobban "kirajzolódik" a sűrűségfüggvény.

2. A sűrűségfüggvény grafikonja (a hisztogramhoz hasonlóan) jól szemlélteti az eloszlást.

Kattintson ide a nagyításhoz!

A nagyobb függvényértékek környezetében a függvény alatti terület nagyobb, mint a kisebb függvényértékek környezetében. Így a ξ értékei abba az intervallumba esnek nagyobb valószínűséggel, amelyekhez nagyobb függvény alatti terület, vagyis nagyobb függvényérték tartozik.

3. Egy adott intervallumban a függvény alatti területet a függvény határozott integráljával számolhatjuk ki. Ezért a ξ folytonos valószínűségi változó adott intervallumba esésének valószínűségét, a sűrűségfüggvény határozott integrálja adja, azaz:

$$P(a \le \xi < b) = \int_a^b f(x)dx = F(x) - F(a)$$,

ahol $F(x)$ a sűrűségfüggvénynek valamely primitív függvénye.

Ugyanezt a valószínűséget már az eloszlásfüggvénnyel is kifejeztük:
$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$$

A kétféle számítást összevetve, láthatjuk, hogy a*z eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvénynek valamely primitív függvénye*. Másképpen fogalmazva a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvénynek első deriváltja. A szakirodalom így definiálja a sűrűségfüggvényt.

Definíció:
A ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlásfüggvényének első deriváltját az eloszlás sűrűségfüggvényének nevezzük és f -fel jelöljük, azaz
$$f(x) = F'(x)$$

Megjegyzés:
Csak folytonos valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, diszkrétnek nincs.

3. feladat

Határozzuk meg és ábrázoljuk az 1. példa céltáblás feladatához tartozó sűrűségfüggvényt!

Hasonlítsuk össze a bevezetőben ábrázolt hisztogrammal!

3. feladat megoldása

Deriváljuk a 2. példában lévő eloszlásfüggvényt.

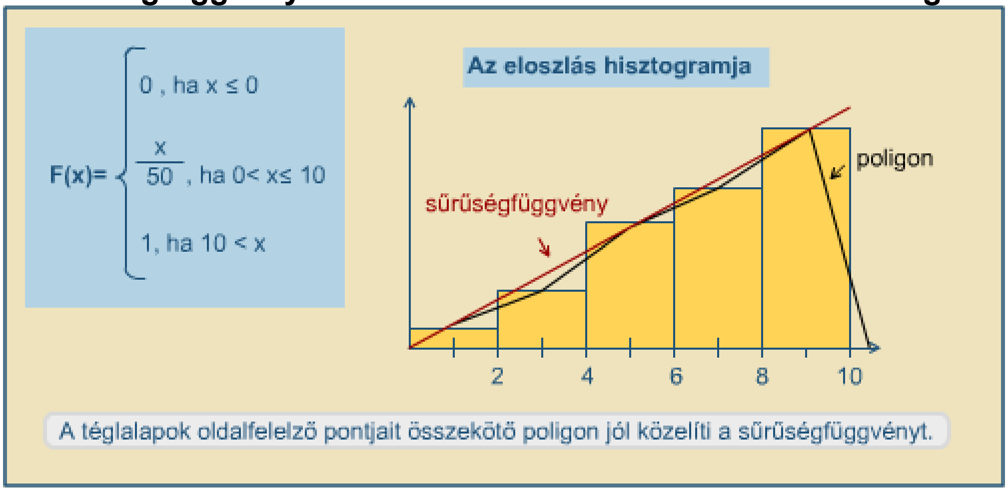
A konstansok deriváltja 0, így csak a $]0;\ 10[$ **intervallumon kell a függvényt deriválni.**

$f(x) = \left(\frac{x^2}{100}\right)' = \frac{2x}{100} = \frac{x}{50}$ **ha** $0 \le x \le 10$.

Tehát az eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x}{50} & \text{ha } 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{ha } 10 < x \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény ábrázolása és összehasonlítása a hisztogrammal:



A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- $f(x) \ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Magyarázatok a fenti tételekhez:

1. A sűrűségfüggvény alatti terület valószínűséget mér, ami nem lehet negatív. Így a sűrűségfüggvény értékei sem lehetnek negatívok.

2. A ξ **értéke biztosan beleseik a** $]-\infty,\ \infty[$ **intervallumba, a biztos esemény valószínűsége pedig 1. Ezért a sűrűségfüggvény teljes számegyenesen vett függvény alatti területe, azaz határozott integrálja 1.**

Tétel:

Egy f **függvény akkor lehet valamely folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha**

$f(x) \ge 0$ **és** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Az eloszlásfüggvény előállítása a sűrűségfüggvényből:

Az eloszlásfüggvény az x-nél kisebb értékek felvételének valószínűségét méri, ezért $F(x)$ úgy állítható a sűrűségfüggvény segítségével, hogy $f(x)$-et az x-nél kisebb értékekre, azaz a $]-\infty;\ x]$ intervallumon integráljuk. (A függvény változóját és az intervallum határát nem jelölhetjük ugyanazzal a betűvel, ezért a függvény változóját t-re változtatjuk.)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

A valószínűségek számolás a sűrűségfüggvény segítségével:

A sűrűségfüggvényt azon az intervallumon kell integrálni, amely intervallumba esés valószínűségét vizsgáljuk:

$$P(\xi<b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=F(b)$$

$$P(a\le\xi<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)$$

$$P(a\le\xi)=\int_{a}^{\infty} f(x)dx=1-F(a)$$

21. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- **diszkrét**
- **folytonos**
- **mindkettő**
- **egyik sem**

Melyik eloszlástípusra (diszkrét vagy folytonos) jellemző? Válassza ki a szövegdobozba a megfelelő szót!

A valószínűségi változó lehetséges értékei egy vagy több intervallumot alkotnak. (1)................

Eloszlásfüggvénye lépcsős függvény. (2)................

Az eloszlás jellemezhető a sűrűségfüggvénnyel. (3)................

Az eloszlás jellemezhető az eloszlásfüggvénnyel. (4)................

Az eloszlásról bot ábra készíthető. (5)................

Eloszlásfüggvénye monoton csökken. (6)................

2. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- **sűrűségfüggvény**
- **eloszlásfüggvény**
- **mindkettő**
- **egyik sem**

Melyik függvényre (sűrűség vagy eloszlás) jellemzőek az alábbi állítások? Válassza ki a szövegdobozba a megfelelő szót!

Egy adott intervallumban kiszámolt függvény alatti terület valószínűséget mér. (1)................

A függvény értékei lehetnek negatívok is. (2)................

Diszkrét eloszlásnál nem értelmezhető ez a függvény. (3)................

Diszkrét és folytonos eloszlásnál is értelmezhető ez a függvény. (4)................

Monoton növekvő. (5)................

A függvényértékek a $[0;1]$ **intervallumba esnek. (6)................**

Monoton csökkenő. (7)................

3. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- **igaz**
- **hamis**

Állapítsa meg, hogy igazak-e az alábbi állítások!

A sűrűségfüggvény függvényértékei a $[0,1]$ **intervallumba esnek. (1)................**

Az eloszlásfüggvény végtelenben vett határértéke 0. (2)................

Csak folytonos eloszlásnak van sűrűségfüggvénye. (3)................

Az eloszlásfüggvény mindig monoton növekvő. (4)................

A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény első deriváltja. (5)................

A sűrűségfüggvény tetszőleges x **értékhez tartozó függvényértéke az** x**-nél kisebb értékek felvételének valószínűségét méri. (6)................**

4. feladat - szókitöltés

Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x \le 0\\ \frac{x}{4}\cdot(4-x) & \text{ha } 0<x\le 2\\ 1 & \text{ha } x>2\end{cases}$$

Írja be a szövegdobozba a következő valószínűségek megfelelő értékét! (A törteket / jellel jelölje!)

A - $P(\xi$

B - $P(-1 \le \xi$

C - $P(\xi \ge 3/2) = ?$

$A =$ **(1)................**
$B =$ **(2)................**
$C =$ **(3)................**

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x \le 0\\ \frac{x}{4}\cdot(4-x) & \text{ha } 0<x\le 2\\ 1 & \text{ha } x>2\end{cases}$$

Töltse ki a táblázatot a sűrűségfüggvény értékeire vonatkozóan!

Segítség: állítsa elő a sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvény deriválásával!

x	-1	0,5	1	3
$f(x)$	(1)................	(2)................	(3)................	(4)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

6. feladat - egyszeres választás
Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x<2 \quad \text{vagy} \quad x>4\\ -\frac{x}{2}+2 & \text{ha } 2 \le < x \le 4\end{cases}$$

Válassza ki a megadott értékek közül annak a valószínűségét, hogy $P(5/2 \leq \xi < 3)$!

Segítség 21. lecke 6. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 11/16
( ) 3/4
( ) 5/16
( ) 1/4

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - folytonos (2) - diszkrét (3) - folytonos (4) - mindkettő (5) - diszkrét (6) - egyik sem
2. feladat:	(1) - sűrűségfüggvény (2) - mindkettő (3) - sűrűségfüggvény (4) - eloszlásfüggvény (5) - eloszlásfüggvény (6) - eloszlásfüggvény (7) - egyik sem
3. feladat:	(1) - hamis (2) - hamis (3) - igaz (4) - igaz (5) - igaz (6) - hamis
4. feladat:	(1) - 16/25 (2) - 3/4 (3) - 1/16
5. feladat:	(1) - 0 (2) - 0,75 (3) - 0,5 (4) - 0
6. feladat:	5/16

22. lecke. A folytonos valószínűségi változók pontjellemzői

A 18. leckében megismerkedtünk a valószínűségi változók pontjellemzőivel és diszkrét valószínűségi változó esetén meghatároztuk ezek kiszámítási módját. Diszkrét esetben a pontjellemzőket a ξ valószínűségi változó lehetséges értékei és az azokhoz tartozó valószínűségek segítségével határoztuk meg.

Folytonos esetben a ξ valószínűségi változó minden egyes értékéhez 0 valószínűség tartozik, ezért a pontjellemzők meghatározása eltér a diszkrét esettől. A folytonos valószínűségi változó pontjellemzőit a sűrűségfüggvény és az eloszlásfüggvény segítségével határozzuk meg.

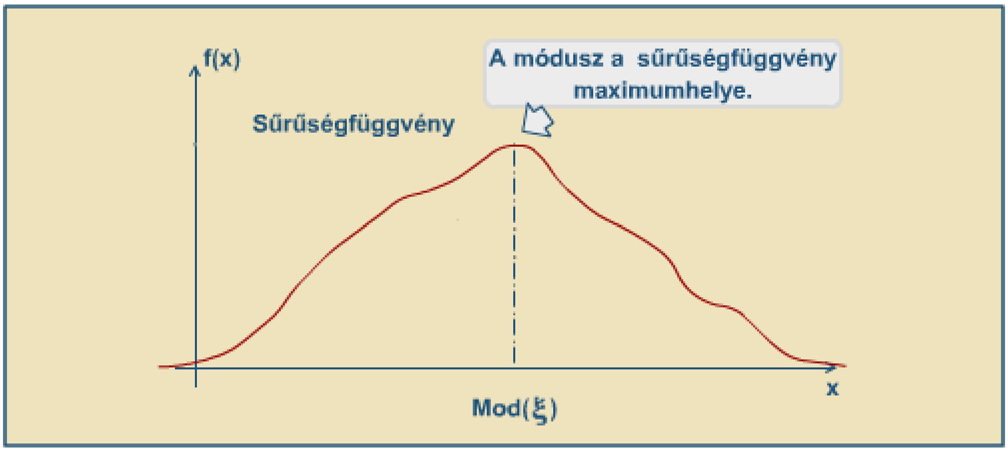
1. Módusz

A folytonos valószínűségi változó a sűrűségfüggvény maximumhelye környezetében vesz fel legnagyobb valószínűséggel értékeket.

Definíció:

A folytonos valószínűségi változó módusza a sűrűségfüggvény maximumhelye.

Jelölés: $mod(\xi)$



2. Medián

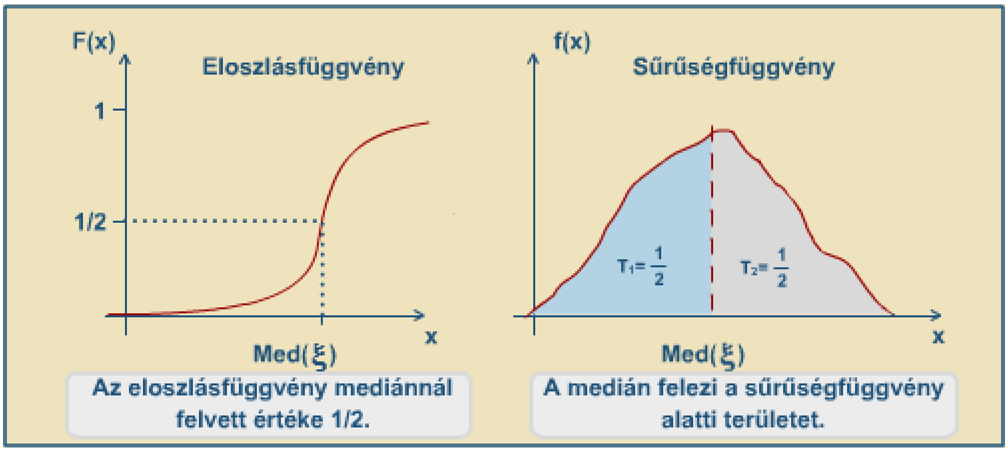
A folytonos valószínűségi változó mediánján a ξ **azon értékét értjük, amelynél kisebb értékek felvételének valószínűsége 0,5 (50%), azaz**

$$P\left(\xi<med(\xi)\right)=F\left(med(\xi)\right)=0{,}5$$

Megjegyzések:

1. Az eloszlásfüggvény mediánnál felvett függvényértéke 0,5.

2. A medián felezi a sűrűségfüggvény alatti területet, azaz 0,5 - 0,5 nagyságú részekre osztja, tehát $\int_{-\infty}^{med(\xi)} f(x)dx=0{,}5$



3. Várható érték

A folytonos valószínűségi változó várható értékét és szórását a sűrűségfüggvény

segítségével számolhatjuk ki.

A ξ folytonos valószínűségi változó várható értéke: $M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$

4. Szórás

Diszkrét esetben láttuk, hogy a szórás a $D(\xi)=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}$, összefüggés segítségével is meghatározható.
Ez folytonos esetben is alkalmazható az alábbi helyettesítéssel:

$M(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx$ **és $M^2(\xi)$ a várható érték négyzete.**

Megjegyzés:
Természetesen a folytonos valószínűségi változó várható értéke és szórása ugyanazt fejezi ki, mint a diszkrét esetben:
Nagy számú kísérlet elvégzése után a ξ mért értékeinek átlaga nagy valószínűséggel csak kis mértékben tér el a várható értéktől.
A szórás pedig ξ értékeinek a várható értéktől való átlagos eltérését adja meg.

1. feladat

Egy kör alakú céltábla sugara 10 cm. A céltáblára lövéseket adunk le. A ξ valószínűségi változó mérje a találat távolságát a céltábla középpontjától. Geometriai valószínűséget feltételezve számoljuk ki az eloszlás

a, móduszát,

b, mediánját,

c, várható értékét,

d, szórását!

1. feladat megoldása

Ennek a feladatnak a sűrűség- és eloszlásfüggvényét a 21. leckében már meghatároztuk:

$$f=\begin{cases} 0 & \text{ha } x\le 0 \\ \dfrac{x}{50} & \text{ha } 0<x\le 10 \\ 0 & \text{ha } x>10 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{100} & \text{ha } 0<x\le 10 \\ 1 & \text{ha } x>10 \end{cases}$$

Ezek felhasználásával számoljuk a pontjellemzőket.

a, Módusz:
A sűrűségfüggvény maximumhelye: $mod(\xi)=10$.

***Pongyolán azt mondhatnánk*, hogy annak a legnagyobb a valószínűsége, hogy a találat a középponttól 10 cm-re van, azaz a céltábla peremén. Folytonos eloszlásoknál azonban a ξ minden egyes értékéhez 0 valószínűség tartozik.**
***Pontosabban így fogalmazhatunk*: Ha a céltáblát felosztanánk vékony körgyűrűkre, akkor a találat legnagyobb valószínűséggel a céltábla pereméhez legközelebb lévő körgyűrűben lenne.**

b, Medián:
Azt kell meghatározni, hogy az eloszlásfüggvény mely x értéknél veszi fel a 0,5 függvényértéket.

$$F(x)=0{,}5 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{100}=0{,}5 \;\rightarrow\; x=\sqrt{50}\approx 7{,}07$$

Tehát 50% annak a valószínűsége, hogy a találat középponttól való távolsága kisebb 7,07-nél.
Úgy is fogalmazhatunk, hogy a 7,07 sugarú kör osztja két egyenlő területű részre a céltáblát.

c, Várható érték:

$$M(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\ dx+\int_{0}^{10} x\cdot\frac{x}{50}\,dx+\int_{10}^{\infty} x\cdot 0\ dx=$$

$$=0+\int_{0}^{10}\frac{1}{50}\cdot x^2dx+0=\left[\frac{1}{50}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=\frac{20}{3}$$

Tehát a találatok középponttól való távolságának várható értéke 20/3.
Ez azt jelenti, hogy sok kísérlet után a találatok középponttól való távolságának átlaga nagy valószínűséggel nagyon közel van a 20/3 értékhez.

d, Szórás:
Először a $M(\xi^2)$ értékét számoljuk ki.

$$M\left(\xi^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\ dx+\int_{0}^{10} x^2\cdot\frac{x}{50}\,dx+\int_{10}^{\infty} x\cdot 0\ dx=$$

$$=0+\int_{0}^{10}\frac{1}{50}\cdot x^3dx+0=\left[\frac{1}{50}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^{10}=50$$

$$D(\xi)=\sqrt{M\left(\xi^2\right)-M^2(\xi)}=\sqrt{50-\left(\frac{20}{3}\right)^2}=2{,}4$$

A találatok középponttól való távolsága a várható értéktől átlagosan 2,4 cm-rel tér el.

2. feladat

Az f függvény egy folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye.

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\frac{1}{x^3} & \text{ha } 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{ha } x<1 \text{ vagy } x>2 \end{cases}$$

a, Határozzuk meg az a paraméter értékét!

b, Határozzuk meg az eloszlásfüggvényt!

c, Számoljuk ki az eloszlás várható értékét és szórását!

d, Mennyi a valószínűsége annak, hogy a ξ valószínűségi változó legalább1,5 értéket vesz fel?

2. feladat megoldása

a, Egy függvényt akkor lehet egy eloszlás sűrűségfüggvénye, ha

$f(x)\ge 0$ **és** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=1$

Az f függvény elég az $[1;2]$ intervallumon integrálni, mert ezen az intervallumon kívül 0 a sűrűségfüggvény értéke és a határozott integrálja is. Keressük tehát az a paraméter azon értékét, amelyre $\int_1^2 a\cdot\frac{1}{x^3}dx=1$**.**

$$\int_1^2 a\cdot\frac{1}{x^3}dx=\int_1^2 a\cdot x^{-3}dx=\left[a\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2=\left[a\cdot\frac{1}{-2\cdot x^2}\right]_1^2=a\cdot\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}a$$

Ezen határozott integrál értéke akkor 1, ha az a = 8/3. Ezzel a paraméterrel teljesül az is, hogy $f(x)\ge 0$.

b, Tudjuk, hogy $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

- Ha $x\le 1$, akkor $f(x)=0$, így az integrál értéke is 0, azaz $F(x)=0$, ha $x\le 1$.

- Ha $1<x\le 2$ akkor az f függvényt elég az $[1;\ x]$ intervallumon integrálni, mert a $]-\infty;\ 1]$ intervallumon az integrál értéke 0:

$$\int_1^x \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{t^3}dt=\int_1^x \frac{8}{3}\cdot t^{-3}dt=\left[\frac{8}{3}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\right]_1^x=\left[\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{-2\cdot t^2}\right]_1^x=$$

$=\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)$ **ha** $1<x\le 2$

Megjegyzés:
1. A függvény változóját t-re cseréltük, mert az integrálás intervallumának végpontját jelöltük x-szel.
2. Ha $1<x\le 2$, akkor $F(x)=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+1\right)$.
3. Az eloszlásfüggvény $x=2$-nél eléri az 1 függvényértéket.
- Ha $x>2$, akkor az integrál értéke 1.

$$F(x)\begin{cases} 0 & \text{ha } x\le 1 \\ \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}+1\right) & \text{ha } 1<x\le 2 \\ 1 & \text{ha } x>2 \end{cases}$$

c, A várható érték és szórás számolásánál is csak azon az intervallumon integrálunk, ahol a sűrűségfüggvény értéke nem 0, azaz az $[1;2]$ intervallumon.

$$M(\xi)=\int_1^2 x\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x^3}dx=\int_1^2 x\cdot\frac{8}{3}\cdot x^{-3}dx=\int_1^2\frac{8}{3}\cdot x^{-2}dx\left[\frac{8}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2=$$
$$=\left[-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{4}{3}$$
$$M\left(\xi^2\right)=\int_1^2 x^2\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x^3}dx=\int_1^2 x^2\cdot\frac{8}{3}\cdot x^{-3}dx=\int_1^2\frac{8}{3}\cdot x^{-1}dx\left[\frac{8}{3}\cdot\ln|x|\right]_1^2=$$
$$=\frac{8}{3}\cdot(\ln 2-\ln 1)\approx 1{,}85$$
$$D(\xi)=\sqrt{M\left(\xi^2\right)-M^2(\xi)}=\sqrt{1{,}85-(4/3)^2}=0{,}27$$

d, $P(\xi\ge 1{,}5)=1-P(\xi<1{,}5)=1-F(1{,}5)=1-\left[\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{1{,}5^2}+1\right)\right]=0{,}26$

22. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- **- eloszlás**
- **- sűrűség**

Az alábbi mondatok folytonos valószínűségi változóra vonatkoznak.
Melyik függvényre vonatkoznak az állítások?

A módusz a(z) (1)................. függvény maximumhelye.
A medián felezi a(z) (2)................. függvény alatti területet.

A mediánnál a(z) (3)................ függvény értéke 1/2.
A(z) (4)................ függvény a(z) (5)................ függvénynek az első deriváltja.
A várhatóérték és a szórás a(z) (6)................ függvényből számolható.

2. feladat - szókitöltés
Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x<0 \text{ vagy } x>2 \\ -\dfrac{x}{2}+1 & \text{ha } 0\le x\le 2 \end{cases}$$

Határozza meg a várható értéket és a szórást!

Várható érték:(1)................
Szórás:(2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x\le 4 \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{x}-1 & \text{ha } 4<x\le 16 \\ 1 & \text{ha } x>16 \end{cases}$$

Határozza meg az eloszlás mediánját!

Segítség 22. lecke 3. önellenőrző feladat

Medián=(1)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - egyszeres választás
Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x<0 \text{ vagy } x>2 \\ a\cdot(-x^2+2x) & \text{ha } 0\le x\le 2 \end{cases}$$

Válassza ki a felsoroltak közül az a paraméter értékét!

Segítség 22. lecke 4. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 1/2
( ) 1/4
( ) 3/4
( ) 4/3

5. feladat - szókitöltés
Az alábbi függvény egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x<1 \text{ vagy } x>3 \\ \frac{3}{4}\cdot(-x^2+4x-3) & \text{ha } 1\le x\le 3 \end{cases}$$

Határozza meg az eloszlás móduszát!

Segítség 22. lecke 5. önellenőrző feladat

Módusz=(1)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - sűrűség (2) - sűrűség (3) - eloszlás (4) - sűrűség (5) - eloszlás (6) - sűrűség
2. feladat:	(1) - 0,67 (2) - 0,47
3. feladat:	(1) - 9
4. feladat:	3/4
5. feladat:	(1) - 2

23. lecke. Speciális folytonos eloszlások 1.

1. Egyenletes eloszlás

Egyenletes eloszlásról akkor beszélünk, ha:

- **a ξ valószínűségi változó az értékeit egy $[a;b]$ intervallumon veszi fel, és**
- **az $[a;b]$ bármely részintervallumába esésének valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.**

1. feladat

Agárd és Velence közötti 5 km-es vasútvonalon a viharos időjárás következtében egy helyen felső vezeték szakadás következett be. A javítást a székesfehérvári karbantartó munkások végzik. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a szakadás távolsága a székesfehérvári állomástól. (Agárd és Székesfehérvár távolsága 10 km.)

a, Határozza meg a sűrűség és eloszlásfüggvényét!

b, Határozzuk meg a várható értéket és a szórást!

1. feladat megoldása

a, A szakadás Székesfehérvártól való távolsága [10; 15] km-es intervallumba esik. Az eloszlásfüggvény:

Kattintson ide a nagyításhoz!

- A szakadás nem lehet 10 km-nél közelebb, így $F(x)=0$, ha $x\leq 10$.

- Ha $10<x\leq 15$, akkor annak a valószínűsége, hogy a szakadás Székesfehérvártól x - nél közelebb van:

$$F(x)=\frac{x-10}{5}$$

A szakadás Székesfehérvártól való távolsága biztos, hogy legfeljebb 15 km, ezért $F(x)=1$, ha $x>15$.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x\leq 10\\ \dfrac{x-10}{5} & \text{ha} \quad 10<x\leq 15\\ 1 & \text{ha} \quad x>15\end{cases}$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvény deriválásával kapjuk:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad x<10 \quad \text{vagy} \quad x>15\\ \dfrac{1}{5} & \text{ha} \quad 10\leq x\leq 15\end{cases}$$

b, Várható érték:

Az f függvény elég az $[10;15]$ intervallumon integrálni, mert ezen az intervallumon kívül 0 a sűrűségfüggvény értéke és a határozott integrálja is.

$$M(\xi)=\int_{10}^{15} x\cdot f(x)dx=\int_{10}^{15} x\cdot\frac{1}{5}dx=\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{15}=\frac{1}{5}\cdot\frac{15^2}{2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{10^2}{2}=12{,}5$$

Szórás:

$$M\left(\xi^2\right)=\int_{10}^{15} x^2\cdot f(x)dx=\int_{10}^{15} x^2\cdot\frac{1}{5}dx=\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_{10}^{15}=\frac{1}{5}\cdot\frac{15^3}{3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{10^3}{3}=158\tfrac{1}{3}$$

$$D(\xi)=\sqrt{M\left(\xi^2\right)-M^2(\xi)}=\sqrt{158\tfrac{1}{3}-12{,}5^2}=1{,}44$$

Vagyis az Agárd-Velence szakasz javításával foglalkozó karbantartó munkások Székesfehérvártól átlagosan 12,5 km-re találják meg a hibát. Ennek az értéknek az átlagtól való átlagos eltérése 1,44 km.

Megjegyzés:

1. A feladat megoldásánál geometriai valószínűséggel számoltunk.

2. A feladat általánosan is megoldható:
A keresett hiba a kiindulási ponttól legalább a, de legfeljebb b távolságra van.
Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a hibának a kiindulási ponttól való távolsága.
Ebben az esetben a ξ valószínűségi változót az $[a;b]$ intervallumon egyenletes eloszlásúnak mondjuk, mert az intervallum bármely részintervallumába esés valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.
Az ξ-hez tartozó eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény:

Kattintson ide a nagyításhoz!

3. A szakirodalom az eloszlásokat a sűrűségfüggvényükkel definiálja, és ebből vezeti le az eloszlásfüggvényt és a pontjellemzőket.

A ξ valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az $[a;b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x<a \text{ vagy } x>b\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{ha } a\le x\le b\end{cases}$$

A sűrűségfüggvény segítségével előállítható az eloszlásfüggvény:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{ha } a<x\le b\\ 1 & \text{ha } x>b\end{cases}$$

Az egyenletes eloszlás várható értéke és szórása:

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2}\qquad D(\xi)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Megjegyzések:

1. A ξ valószínűségi változó gyakran egyenletes eloszlású, ha hosszúságot vagy időtartamot mér, és a geometriai valószínűség feltételezhető.

2. Látható, hogy a várható érték éppen az $[a;b]$ intervallum felezőpontja.

2. feladat

Egy buszról tudjuk, hogy egyenlő időközönként közlekedik. A megállóba véletlenszerűen érkezve megfigyeltük, hogy az esetek 75 %-ban 9 percnél kevesebbet kell várni. A ξ valószínűségi változó jelentse a várakozási időt a buszmegállóban.

a, Határozzuk meg az eloszlás- és a sűrűségfüggvényt!

b, Határozzuk meg a várható értéket és a szórást!

2. feladat megoldása

A busz egyenlő időközönként közlekedik, és tudjuk, hogy az esetek 75 %-ban 9 percnél kevesebbet kell várni. Ez csak úgy lehetséges, ha az időköz a 75 %-a 9 perc, azaz a busz

$\frac{9}{75} \cdot 100 = 12$ **percenként közlekedik.**

A várakozási idő tehát $[0;12]$ intervallumba esik, és az egyenletes eloszlás feltételezhető.
Ekkor $a = 0$ és $b = 12$.

a, Sűrűség- és eloszlásfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \text{ vagy } x > 12 \\ \frac{1}{12} & \text{ha } 0 \le x \le 12 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \frac{x}{12} & \text{ha } 0 < x \le 12 \\ 1 & \text{ha } x > 12 \end{cases}$$

b, Várható érték és szórás:

$$M(\xi) = 6$$

$$D(\xi) = \frac{12}{2\sqrt{3}} = 3{,}5$$

Tehát a buszmegállóba véletlenszerűen érkezve átlagosan 6 percet kell várakoznunk, és a várakozási idő átlagtól való átlagos eltérése 3,5 perc.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 11. fejezetében található 11.1. kidolgozott példákat és oldja meg a 11.1. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

23. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - többszörös választás
Válassza ki, hogy mely esetben lesz a folytonos valószínűségi változó egyenletes eloszlású!

Több helyes válasz is lehetséges:

- **[ ] Olyan esetekben, ha a ξ az értékeit egy $[a;b]$ intervallumon veszi fel, és az $[a;b]$ bármely részintervallumába esésének valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.**
- **[ ] Visszatevés nélküli mintavételnél, ahol a ξ a mintában lévő kitüntetett elemek számát jelenti.**
- **[ ] Független események együttes bekövetkezésének vizsgálatakor, ha a ξ a bekövetkezések számát méri n számú kísérlet esetén.**

2. feladat - szókitöltés
Egy társasház nyugdíjas lakói megfigyelték, hogy a postás legkorábban reggel 8-kor érkezik, és az esetek 80 %-ban 9 óra 36 perc előtt. A postás érkezésének ideje egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

Határozza meg a postás érkezésének várható értékét és szórását!

Segítség 23. lecke 2. önellenőrző feladat

Várható érték (óra): (1)................
Szórás (óra): (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	Olyan esetekben, ha a ξ az értékeit egy $[a;b]$ intervallumon veszi fel, és az $[a;b]$ bármely részintervallumába esésének valószínűsége arányos a részintervallum hosszával.
2. feladat:	(1) - 9 (2) - 0,58

24. lecke. Speciális folytonos eloszlások 2.

2. Exopnenciális eloszlás

Előfordulási területek:

- **Ez az eloszlás olyan gépek és berendezések élettartamára jellemző, amelyek valamely hirtelen behatás (pl.: törés, szakadás) következtében mentek tönkre. Tipikus példa az exponenciális eloszlásra az izzólámpa élettartama, amelyben az izzószál gyakran a ki- vagy bekapcsoláskor fellépő túláram hatására megy tönkre, azaz nem elöregedés következtében.**
- **A várakozási-, sorban állási idő is gyakran exponenciális eloszlással jellemezhető. Például a mentő- vagy tűzoltóállomáson két egymást követő riasztás között eltelt idő exponenciális eloszlású.**

Definíció:
A ξ valószínűségi változót exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x} & \text{ha } x\geq 0\end{cases}$$

Számítással igazolható, hogy az eloszlásfüggvény:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} x\leq 0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{ha } x>0\end{cases}$$

Az eloszlás várható értéke és a szórása a λ paraméter reciproka:

$$M(\xi)=\frac{1}{\lambda} \qquad D(\xi)=\frac{1}{\lambda}$$

1. feladat

Egy bizonyos fajta gépkocsi a tapasztalatok szerint átlagosan 5000 km-t tesz meg az első műszaki hibáig. Az első műszaki hibáig megtett utat tekintsük exponenciális eloszlású valószínűségi változónak.

a, Írjuk fel az eloszlásfüggvényt és a sűrűségfüggvényt!

b, Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy autó 6000 km-nél kevesebbet tesz meg

az első műszaki hibáig?

c, 1000 eladott gépkocsiból várhatóan hány tesz meg 6000 km-nél többet az első műszaki hibáig.

d, A gyár kicseréli az autót, ha egy bizonyos km-nél kevesebbet tud megtenni műszaki hiba nélkül. Hány km-re adja a garanciát, hogy 5% legyen a kicserélt autók várható aránya?

1. feladat megoldása

ξ**: az első műszaki hibáig megtett út hossza (km)**
Az eloszlás várható értéke:

$$M(\xi)=5000\ (\mathrm{km}) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\lambda}=5000 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{1}{5000}$$

a, A sűrűség- és eloszlásfüggvény:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x<0 \\ \frac{1}{5000}\cdot e^{-\frac{x}{5000}} & \text{ha } x\geq 0 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{ha } x\leq 0 \\ 1-e^{-\frac{x}{5000}} & \text{ha } x>0 \end{cases}$$

b, $P(\xi<6000)=F(6000)=1-e^{-\frac{6000}{5000}}=1-e^{-1,2}=1-0,3=0,7$

Tehát 70 % annak a valószínűsége, hogy a gépkocsi 6000 km-nél kevesebb utat tesz meg az első műszaki hibáig. Másképp fogalmazva várhatóan a gépkocsik 70 % 6000 km-nél kevesebbet, 30 % -a pedig ennél többet tesz meg az első műszaki hibáig.

c, Így 1000 eladott gépkocsiból várhatóan 300 (30 %) fog 6000 km-nél többet megtenni az első műszaki hibáig.

d, A feladat b. része alapján 6000 km garancia esetén az autók 70 %-át kellene garanciálisan cserélni. Nyilvánvalóan ennél jóval kevesebb km-re fog a vállalat garanciát vállalni. Ennél a kérdésnél az x **értéke az ismeretlen, és a valószínűség értékét ismerjük (5 %).**

$$P(\xi<x)=0,05 \quad \rightarrow \quad F(x)=0,05 \quad \rightarrow \quad 1-e^{-\frac{x}{5000}}=0,05$$

$$\rightarrow \quad e^{-\frac{x}{5000}}=0,95 \quad \rightarrow \quad -\frac{x}{5000}=\ln 0,95 \quad \rightarrow \quad -\frac{x}{5000}=-0,0513 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=256$$

Tehát 256 km-es garancia esetén várhatóan az autók 5 %-át kell kicserélni.

2. feladat

Egy izzólámpa élettartama exponenciális eloszlású. A tapasztalatok szerint az égők 8 %-a 3000 óránál tovább ég.
Mekkora az égők élettartamának várható értéke?

2. feladat megoldása

ξ**: az égő élettartama (óra)**
Tudjuk, hogy 8 % annak a valószínűsége, hogy az égő 3000 óránál tovább működik:
$P(\xi>3000)=0{,}08$

Ismeretlen a várható érték és a λ paraméter.
Érdemes a komplementer esemény valószínűségével számolni, vagyis 92 % annak a valószínűsége, hogy az izzó 3000 óránál kevesebb ideig működik.

$$P(\xi<3000)=0{,}92 \quad\to\quad F(3000)=0{,}92 \quad\to\quad 1-e^{-\lambda\cdot 3000}=0{,}92 \quad\to$$
$$\to\quad e^{-\lambda\cdot 3000}=0{,}08$$
$$\to\quad -\lambda\cdot 3000=\ln 0{,}08 \quad\to\quad -\lambda\cdot 3000=-2{,}526 \quad\to\quad \lambda=0{,}00084$$

Ebből a várható érték: $M(\xi)=\frac{1}{\lambda}=1188$

Az izzók átlagos élettartama 1188 óra.

3. Az exponenciális és a Poisson-eloszlás kapcsolata

Ha egy jelenség adott idő alatti bekövetkezéseinek száma Poisson-eloszlású, akkor a jelenség bármely két egymás utáni bekövetkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású. Az állítás megfordítása is igaz.

3. feladat

Egy mentőszolgálathoz átlagosan 2 óránként érkezik sürgős hívás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy:

a, a következő két hívás között 1,5 óránál több, de 2,5 óránál kevesebb idő telik el?

b, a következő 3 órában két sürgős hívás lesz?

3. feladat megoldása

a, exponenciális eloszlás:

ξ**: két hívás között eltelt idő (óra)**
Várható érték: $M(\xi)=2 \quad\to\quad \lambda=\frac{1}{2}$

$$P(1{,}5<\xi<2{,}5)=F(2{,}5)-F(1{,}5)=\left(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 2{,}5}\right)-\left(1-e^{-\frac{1}{2}\cdot 1{,}5}\right)=e^{-0{,}75}-e^{-1{,}25}=$$
$$=0{,}472-0{,}286=0{,}186$$

Tehát a kérdezett valószínűség 18,6 %.

b, Poisson-eloszlás:

ξ**: 3 óra alatt bekövetkező hívások száma**
Az adott idő alatt beérkező hívások számának várható értékét (λ) egyenes arányossággal számolhatjuk ki:

Ha 2 óra alatt átlagosan 1 hívás van, akkor 3 óra alatt átlagosan 3/2 hívás. (Ezt az értéket nem kell kerekíteni, az átlagnak nem kell egész számnak lennie.)

Várható érték: $M(\xi)=3/2 \quad \rightarrow \quad \lambda=3/2$

$$P(\xi=2)=\frac{\lambda^k}{k\ !}\cdot e^{-\lambda}=\frac{(3/2)^2}{2\ !}\cdot e^{-3/2}=0{,}251$$

A kérdezett valószínűség 25,1 %.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 11. fejezetében található 11.2ab,11.3. kidolgozott példákat és oldja meg a 11.6., 7., 8ab, 9a, 10., 11a, 12, 15. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

24. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- **Poisson**
- **exponenciális**

Egészítse ki a mondatokat!

Ha egy jelenség adott idő alatti bekövetkezéseinek száma (1)................ eloszlású, akkor a jelenség bármely két egymás utáni bekövetkezése között eltelt idő (2)................ eloszlású.

2. feladat - szókitöltés
Egy lámpa nélküli forgalmas útkereszteződésben a balra kanyarodó járműnek átlagosan 50 másodpercet kell várakoznia. A várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségű változó.

Segítség 24. lecke 2. önellenőrző feladat

Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a balra kanyarodónak legalább 30, de legfeljebb 60 másodpercet kell várakoznia: (1)................%

Hány másodpercnél várakozik kevesebbet az autók fele: (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - egyszeres választás
Egy főiskolás gyakran megy haza stoppal. Megfigyelte, hogy átlagosan 20 percet kell várnia arra, hogy felvegyék. A várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségű változó.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő stoppolásnál fél óránál többet kell várakoznia?

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 22,3%
( ) 91,5%
( ) 63%

( ) 43,8%

4. feladat - egyszeres választás
Egy szerszámgépnél az első műszaki hibáig eltelt idő exponenciális eloszlású, 4000 üzemóra várható értékkel.
Az előállító cég vállalja, hogy egy adott időn belül meghibásodott gépeket kicseréli javítás helyett.

Hány üzemóráig vállaljon cserét, hogy a kicserélendő gépek aránya várhatóan 4,5% legyen?

Segítség 24. lecke 4. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 546
( ) 1000
( ) 184
( ) 892,5

5. feladat - szókitöltés
Egy üzletembert egy óra alatt átlagosan 4-szer hívják fel mobiltelefonján.
Két hívás között eltelt időt tekintsük exponenciális eloszlásúnak!

Segítség 24. lecke 5. önellenőrző feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő két hívás között legfeljebb 21 perc telik el: (1).................%
Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő 36 perc alatt 2-nél többször hívják fel: (2).................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - Poisson (2) - exponenciális
2. feladat:	(1) - 24,8 (2) - 34,7
3. feladat:	22,3%
4. feladat:	184
5. feladat:	(1) - 75,3 (2) - 43

25. lecke. Speciális folytonos eloszlások 3.

4. Normális eloszlás

A véletlen folyamatokban ez a leggyakrabban előforduló eloszlás. Egy kis túlzással azt is mondhatnánk, hogy a véletlen folyamatok "normálisan" ezzel az eloszlással írhatók le.

Előfordulási területek:

- **Gyártási folyamatban fellépő méretingadozások.**
- **Gépek és berendezések élettartama, amelyek természetes elhasználódással mennek tönkre.**
- **Nagyon sok természetben, gazdaságban előforduló folyamat, például:**
    - **Egy adott korosztályhoz tartozó gyerekek magassága.**
    - **A görögdinnye (vagy más fajta termény) tömege.**
    - **Egy bolt napi árbevétel vagy valamely termékből egy nap alatt eladott mennyiség.**

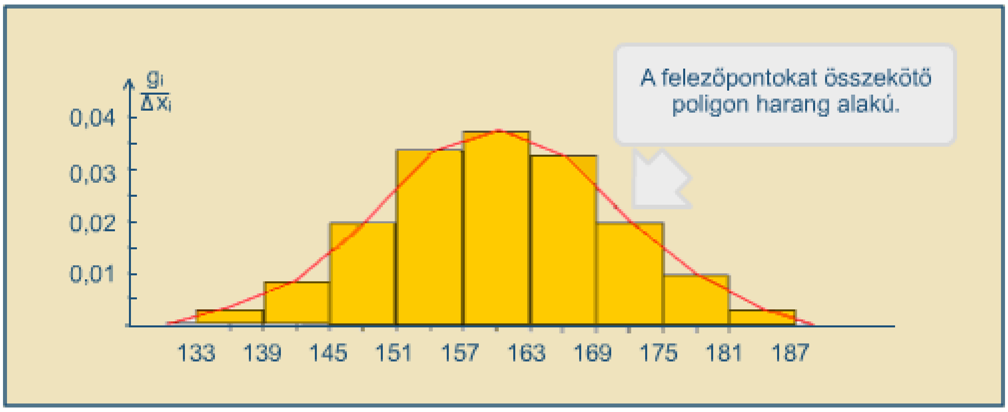
Ezeknek az eloszlásoknak jellegzetes harang alakú hisztogramjuk van.

1. feladat

A 14 éves gyerekek magasságát vizsgálták egy 400 elemű mintával.

Magasság (cm) (x_i)	Gyakoriság (f_i)	Relatív gyakoriság (g_i)	$\frac{g_i}{\Delta x_i} = \frac{g_i}{6}$
- 139	4	0,01	0,0017
139 – 145	21	0,0525	0,00875
145 – 151	48	0,12	0,02
151 – 157	81	0,2025	0,03375
157 – 163	90	0,225	0,0375
163 – 169	78	0,195	0,0325
169 – 175	48	0,12	0,02
175 – 181	24	0,06	0,01
181 -	6	0,015	0,025
Összesen:	400	1	

A gyerekek magasságáról készült hisztogram:



1. feladat megoldása

A megoszlására jellemző, hogy a magasság 157 - 163 cm-es intervallumába sok gyerek tartozik, míg az ennél kisebb vagy nagyobb magassági értékekhez egyre kevesebb. A

hisztogram harang alakú, közelítőleg szimmetrikus a 157 - 163 cm-es magassági intervallumra.
Az adatokból kiszámolt mintaátlag 160 cm, szórása 10 cm.

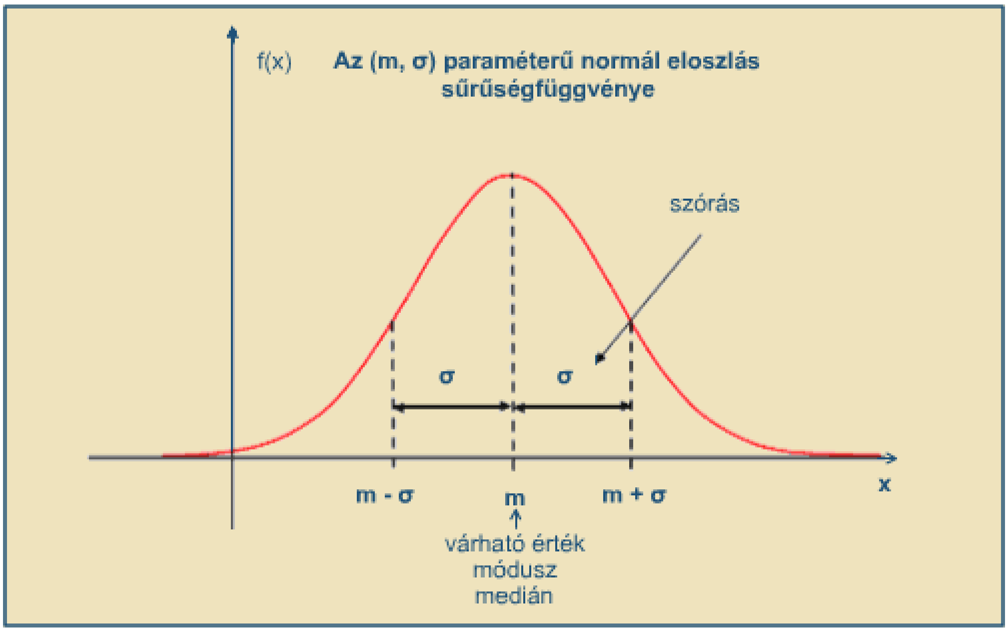
Definíció:

A ξ **valószínűségi változót** $(m;\sigma)$ **paraméterű normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye:**

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

ahol $x\in R$**.**

A normális eloszlás sűrűségfüggvényének ábrázolása:



Megjegyzések:
1. Az eloszlásnak két paramétere van. Ezek a paraméterek az eloszlás várható értéke (m**) és a szórása (**σ **- szigma).**

2. Az m **tetszőleges valós szám lehet, míg** $\sigma>0$**.**

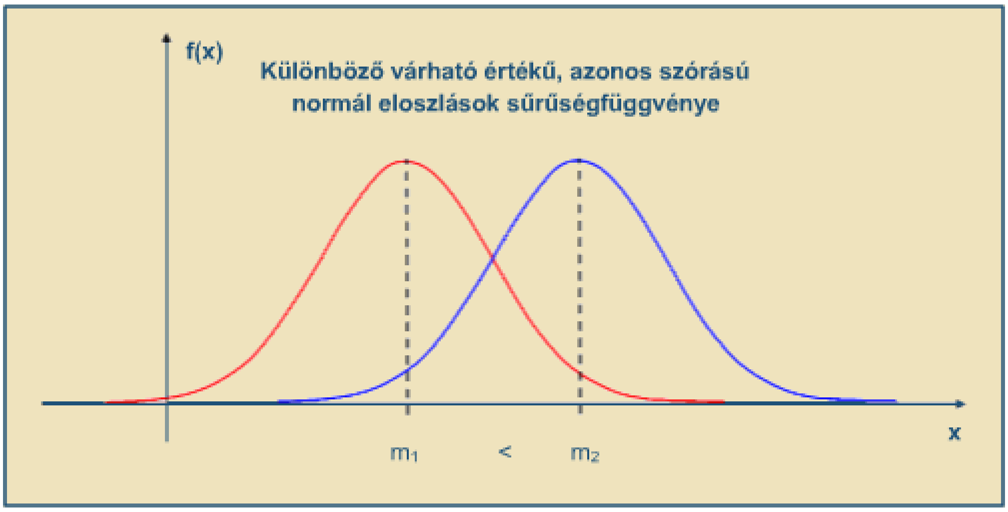
3. Bármely m **és** σ **esetén a sűrűségfüggvény haranggörbe alakú. Ez a függvény a maximumát** m**-nél veszi fel, amely egyben a szimmetria tengelye is az eloszlásnak. A szimmetria miatt** m **az eloszlás várható értéke, módusza és mediánja is egyben.**

4. Az eloszlás szórása a σ **paraméter. A haranggörbe inflexiós pontjai a várható értéktől** σ **távolságra vannak.**

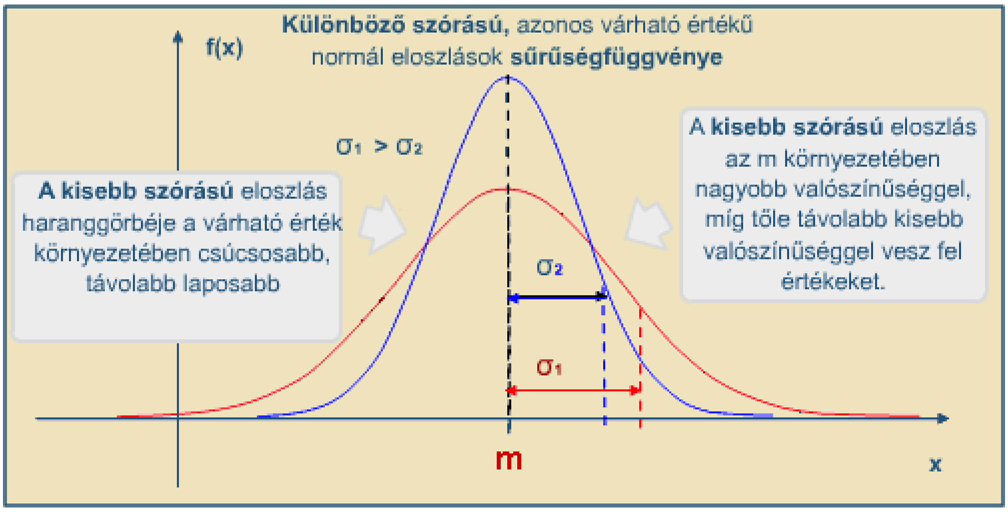
5. A normál eloszlást szokás még Gauss-eloszlásnak, a sűrűségfüggvényt Gauss-görbének is hívni.

5. Különböző paraméterű normális eloszlások sűrűségfüggvényének összehasonlítása

Különböző várható értékű, de azonos szórású eloszlások sűrűségfüggvényét a függvénygörbe x **tengellyel párhuzamos eltolásával kapjuk.**



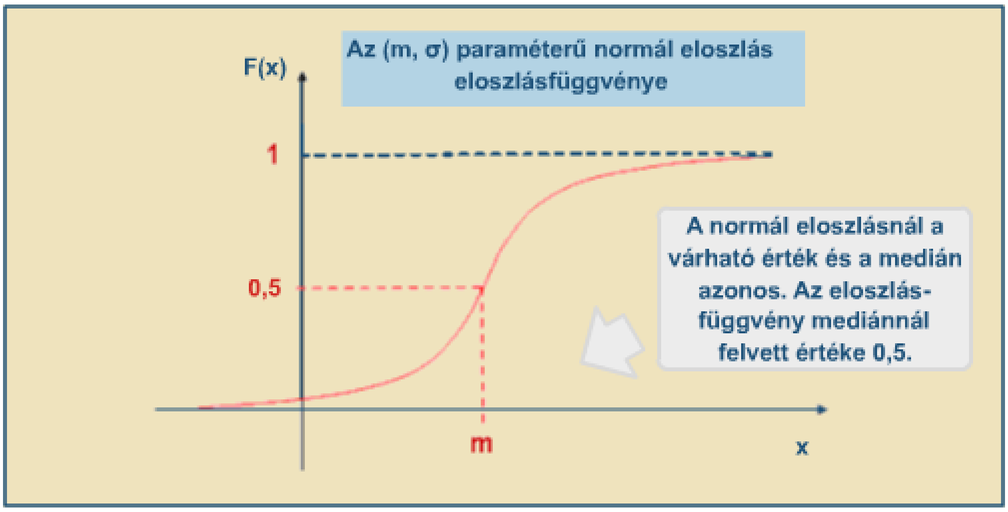
Azonos várható értékű, de különböző szórású eloszlások sűrűségfüggvénye:



A kisebb szórású eloszlás esetében a ξ valószínűségi változó a várható érték környezetébe nagyobb, távolabb kisebb valószínűséggel vesz fel értékeket. Az eloszlás haranggörbéje a várható érték környezetében csúcsosabb, tőle távolabb pedig laposabb.

A normál eloszlás eloszlásfüggvénye:

A sűrűségfüggvény integrálja nem állítható elő elemi függvények segítségével, így az eloszlásfüggvény értékeit közelítő számítások segítségével lehet előállítani.
Az eloszlásfüggvény ábrázolása:



6. Standard normális eloszlás

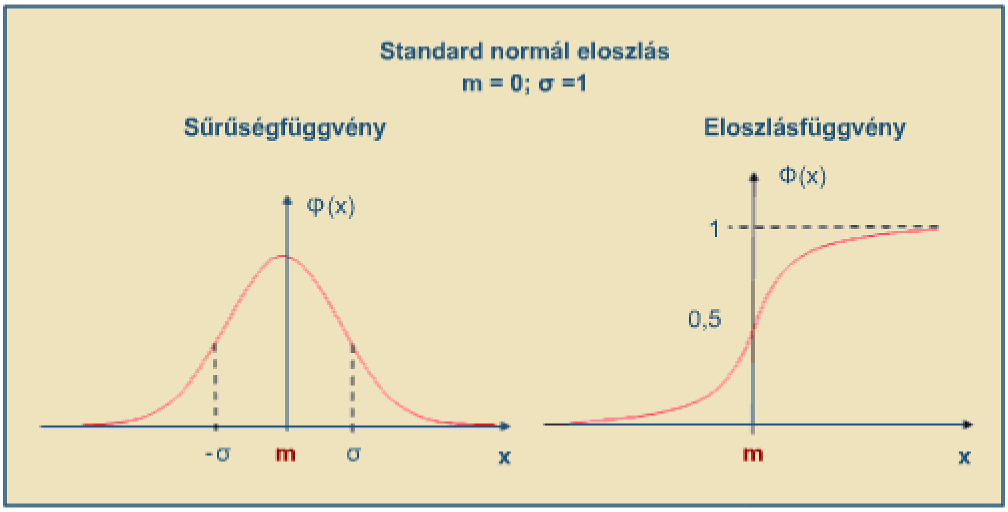
Ez az eloszlás a normális eloszlás egy speciális esete: $m=0$; $\sigma=1$.

A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:
$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ **(** φ **: ejtsd fi)**

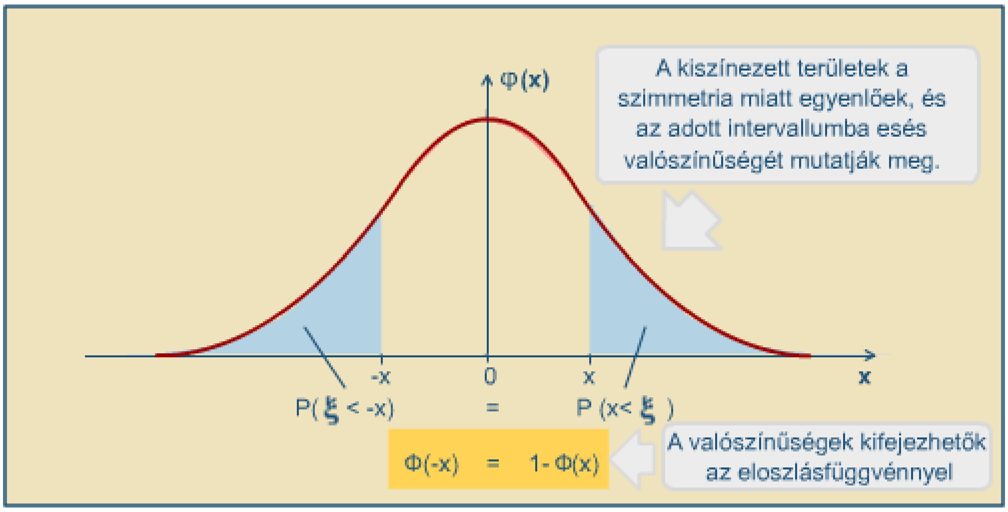
A standard normális eloszláshoz tartozó eloszlásfüggvény szintén nem állítható elő elemi függvények segítségével, de közelítő értékeit táblázatba foglalták.

Jelölése: $\phi(x)$ **(ejtsd fi)**
A standard normális eloszláshoz tartozó táblázat megtalálható a letölthető dokumentumok között.

A standard normális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvénye:



Az eloszlásfüggvény értékei közötti kapcsolat különböző előjelű változóérték esetén:
$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$



7. Kapcsolat a normális és a standard normális eloszlás között

A normális eloszlás eloszlásfüggvénye előállítható a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének transzformáltjaként és az alábbi módon.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Ezt a transzformációt standardizálásnak hívjuk. Ez nagyon fontos abból a szempontból, hogy nem kell minden m és σ paraméterhez külön táblázatot készíteni, hanem minden érték leolvasható a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázatából. Az $\frac{x-m}{\sigma}$ hányadost standardizált valószínűségi változónak hívjuk, és azt fejezi ki, hogy az x értékének hány szórásnyi az eltérése az m várható értéktől (az eltérés előjelét is figyelembe véve).

2. feladat

Nézzük ismét az 1. feladatban szereplő gyermekek magasságát!

Számoljuk ki, hogy a gyerekek magasságának hány szórásnyi az átlagtól való eltérése!

Ennek megfelelően készítsük el újra a táblázatot és a hisztogramot!

Tekintsük az átlagot 160 cm-nek, a szórást 10 cm-nek!

2. feladat megoldása

Vizsgáljuk meg, hogy a 157- 163 cm közé eső gyerekek magassága az átlagtól hány szórásnyival tér el. 163 cm esetén az átlagtól való eltérés 3 cm, ami 0,3 szórásnak felel meg.

A 157 cm-es gyerekek is 3 cm-rel térnek el az átlagtól, de negatív irányba, így az eltérés -0,3 szórásnyi. Így a 157-163 cm magas gyerekek átlagtól való eltérése -0,3 - 0,3 szórásnyi.

Az intervallumhoz tartozó téglalap magassága a relatív gyakoriság és az intervallum hosszának hányadosa: 0,225/0,6 = 0,375.

A többi esetet is hasonlóan számolhatjuk ki.

$\frac{x_i - m}{\sigma} = \frac{x_i - 160}{10}$ (x_i = magasság)	Gyakoriság (f_i)	Relatív gyakoriság (g_i)	$\frac{g_i}{\Delta_i} = \frac{g_i}{0,6}$ (Δ_i = intervallum hossza)
-2,1	4	0,01	0,017
-2,1 – -1,5	21	0,0525	0,0875
-1,5 – 0,9	48	0,12	0,2
-0,9 – 0,3	81	0,2025	0,3375
-0,3 – 0,3	90	0,225	0,375
0,3 – 0,9	78	0,195	0,325
0,9 – 1,5	48	0,12	0,2
1,5 – 2,1	24	0,06	0,1
2,1 -	6	0,015	0,25
Összesen:	400	1	

A magasságok és standardizáltjuk összehasonlítása:

Kattintson ide a nagyításhoz!

A standardizálással kapott hisztogram is harang alakú, közelítőleg szimmetrikus a 0-ra. Bizonyítható, hogy a standardizált valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1.

3. feladat

Egy felmérés során megállapították, hogy a 16 éves lányok átlagmagassága 168 cm, ettől az értéktől való átlagos eltérés 10 cm. A lányok magassága normális eloszlású valószínűségi változó.

a, A lányok hány %-a alacsonyabb 173 cm-nél?

b, Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott lány az átlagnál legalább 8 cm-rel magasabb?

c, A lányok hány %-nak lesz az átlagtól való eltérése legfeljebb 1,2 szórásnyi?

3. feladat megoldása

ξ: a 16 éves lányok magassága (cm)
Az eloszlás paraméterei: $m = 168$; $\sigma = 10$

Vázoljuk az eloszlás sűrűségfüggvényét, és oldjuk meg a feladatot:

Kattintson ide a nagyításhoz!

a, $P(\xi < 173) = F(173) = \Phi\left(\frac{173-168}{10}\right) = \Phi(0,5) = 0,6915$

kikeresés a táblázatból:
$x = 0,5$

$\Phi(x)=0{,}6915$

A táblázat x oszlopában kikeressük a 0,5 értéket, és a $\Phi(x)$ oszlopában leolvassuk, hogy a hozzá tartozó függvényérték 0,6915, azaz $\Phi(0{,}5)=0{,}6915$

Tehát a lányok 69,2 % alacsonyabb 173 cm-nél.

b,

$$P(\xi>m+8)=P(\xi>176)=1-F(176)=1-\Phi\left(\frac{176-168}{10}\right)=1-\Phi(0{,}8)$$

$$1-\Phi(0{,}8)=1-0{,}7881=0{,}2119$$

kikeresés a táblázatból:

$x=0{,}8$

$\Phi(x)=0{,}7881$

Vagyis a lányok 21,2 % -a az átlagnál legalább 8 cm-rel magasabb.

c, A szórás 1,2 szerese: $1{,}2\cdot\sigma=12$

Azoknak a lányoknak lesz az átlagtól való eltérése legfeljebb 12 cm, akik legalább 156 cm és legfeljebb 180 cm magasak.

$$P(156<\xi<180)=F(180)-F(156)=\Phi\left(\frac{180-168}{10}\right)-\Phi\left(\frac{156-168}{10}\right)=\Phi(1{,}2)-\Phi(-1{,}2)=$$

$$=\Phi(1{,}2)-\left(1-\Phi(1{,}2)\right)=2\cdot\Phi(1{,}2)-1=2\cdot 0{,}8849-1=0{,}7698$$

A $\Phi(-1{,}2)$ számolásánál felhasználjuk, hogy a $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$, így a $\Phi(-1{,}2)=1-\Phi(1{,}2)$.

kikeresés a táblázatból:

$x=1{,}2$

$\Phi(x)=0{,}8849$

Vagyis a lányok 77 %-ának magassága 156 - 180 cm közé esik.

4. feladat

Egy gépkocsi tesztelése során a gyár 7,5 l átlagos fogyasztást állapított meg (100 km-re), amely értéknek az átlagtól való átlagos eltérése 0,5 l. A fogyasztás normális eloszlásúnak tekinthető. A gyár vállalja, hogy a 8,5 l-nél nagyobb fogyasztású autókat garanciálisan kicseréli. Az eladott autók hány %-nak kicserélésére kell számítania?

4. feladat megoldása

ξ**: a gépkocsi fogyasztása (l/100 km)**

Az eloszlás paraméterei: $m=7{,}5$, $\sigma=0{,}5$

$$P(\xi>8{,}5)=1-F(8{,}5)=1-\Phi\left(\frac{8{,}5-7{,}5}{0{,}5}\right)=1-\Phi(2)=1-0{,}9772=0{,}0228$$

kikeresés a táblázatból:
$x=2$
$\Phi(x)=0{,}9777$

Tehát az eladott autók 2,3 %-nál kell garanciális cserére számítani.

5. feladat

Egy tyúkfarmon lévő tojások 15%-a nehezebb 70g-nál. A tojások tömege normál eloszlásúnak tekinthető, amelynek szórása 5 g.

a, Mennyi a tojások átlagos tömege?

b, Az 55 g-nál kisebb tömegű tojásokat már nem veszik át a kereskedők. 1000 tojásból átlagosan hányat nem vesznek át?

5. feladat megoldása

ξ**: a tojások tömege (g)**
Az eloszlás paraméterei: $m=?$, $\sigma=5$
Ismert továbbá, hogy a tojások 15 % nehezebb 70 g-nál, azaz $P(\xi>70)=0{,}15$.

a, Úgy is fogalmazhatunk, hogy a tojások 85 %-a könnyebb 70 g-nél, azaz $P(\xi<70)=0{,}85$.
Fejezzük ki azt a valószínűséget a normál-, majd a standard normál eloszlásfüggvénnyel:

$$F(70)=0{,}85 \quad\rightarrow\quad \Phi\left(\frac{70-m}{5}\right)=0{,}85$$

kikeresés a táblázatból:
$x=1{,}04$
$\Phi(x)=0{,}8508$

Keressük ki a táblázatból, hogy a standard normál eloszlásfüggvény a változó mely értékénél veszi fel a 0,85 (vagy ehhez legközelebb álló értéket):

$$\Phi(1{,}04)=0{,}8508$$

Vagyis $\frac{70-m}{5}=1{,}04 \quad\rightarrow\quad m=64{,}8$

Tehát a tojások átlagos tömege 64,8 g.

b,

$$P(\xi<55)=F(55)=\Phi\left(\frac{55-64{,}8}{5}\right)=\Phi(-1{,}96)=1-\Phi(1{,}96)$$

$1-\Phi(1{,}96)=1-0{,}975=0{,}025$

kikeresés a táblázatból:
$x=1{,}96$

$\Phi(x)=0{,}975$

Vagyis a tojások 2,5 % -át nem veszik át a kereskedők. 1000 tojás esetén várhatóan 25-t lesz eladhatatlan.

6. feladat

Egy automata gép tejet tölt dobozokba. A dobozokba töltött tej mennyisége normál eloszlásúnak tekinthető 10 dl-es várható értékkel. Az automatán lehetőség van a dobozba töltött tej szórásának szabályozására. Mekkorára állítsák be a szórás értékét, ha azt akarják, hogy a dobozok 98%-ban a beletöltött mennyiség 9,8 dl és 10,2 dl közé essen?

6. feladat megoldása

ξ**: a dobozban lévő tej mennyisége (dl)**
Az eloszlás paraméterei: $m=10$, $\sigma=?$
Ismert továbbá, hogy
$P(9{,}8<\xi<10{,}2)=0{,}98$

Rendezzük az egyenlet bal oldalát:

$$P(9{,}8<\xi<10{,}2)=F(9{,}8)-F(10{,}2)=\Phi\left(\frac{10{,}2-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{9{,}8-10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-0.2}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma}\right)\right)=2\cdot\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma}\right)-1$$

Ennek a kifejezésnek az értéke 0,98:

$$2\cdot\Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma}\right)-1=0{,}98 \qquad \rightarrow \qquad \Phi\left(\frac{0{,}2}{\sigma}\right)=0{,}99$$

A táblázatban a $\Phi(x)$ **oszlopában keressük meg a 0,99-hez legközelebb álló értéket és olvassuk le a másik oszlopban a hozzá tartozó** x **értéket:**

kikeresés a táblázatból:
$x=2{,}32$

$\Phi(x)=0{,}9898$

$$\Phi(2{,}32)=0{,}9898 \qquad \rightarrow \qquad \frac{0{,}2}{\sigma}=2{,}32 \qquad \rightarrow \qquad \sigma=\frac{0{,}2}{2{,}32}=0{,}086$$

A szórás értékét tehát 0,086 dl-re kell beállítani.

Az anyaghoz kapcsolódóan nézze meg a Valószínűségszámítás példatár 11. fejezetében található 11.4., 5a, 6a. kidolgozott példákat és oldja meg a 11.19ab, 21., 22ab, 26., 28ab, 29. feladatokat. A feladatok megoldásai megtalálhatók a példatárban.

25. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - többszörös választás
Válassza ki a normális eloszlásra jellemző alkalmazási területeket!

Több helyes válasz is lehetséges:

[ ] Gépek berendezések élettartama, ha természetes elhasználódás következtében mennek tönkre.
[ ] Gyártási folyamatokban fellépő méretingadozás.
[ ] Gépek berendezések élettartama, ha hirtelen behatás következtében mennek tönkre.
[ ] Geometriai valószínűség alkalmazása esetén, ha a x hosszúságot vagy időtartamot mér.
[ ] Várakozási, sorban állási idő.

2. feladat - szókitöltés
Egy géppel 5 dkg-os vaj csomagolását végzik. A tapasztalatok szerint a csomagolt vaj tömege normális eloszlású, szórása 0,2 dkg.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vaj könnyebb 4,9 dkg-nál: (1)................%
A vajcsomagok hány %-nak a tömeg tér el az átlagtól legfeljebb 0,8 szórásnyival? (2)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Egy pénzváltó helyen naponta átlagosan 1200 angol fontot váltanak át forintra az angol turisták, az ettől való átlagos eltérés 300 font. A naponta átváltott font mennyisége normál eloszlású.

Segítség 25. lecke 3. önellenőrző feladat

Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább 1500 fontot váltanak be: (1)................%
Hány fontnak megfelelő forintot tároljanak az adott pénzváltó helyen, ha az igényeket 96 %-os valószínűséggel ki akarják elégíteni: (2)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - egyszeres választás
Egy pékségben árult fánkok tömegének szórása 1 dkg. A fánkok 2,28% nehezebb 10 dkg-nál. Hány dkg a fánkok átlagos tömege, ha normál eloszlást feltételezünk!

Csak egy helyes válasz lehetséges:

( ) 9
( ) 8
( ) 10
( ) 11

5. feladat - egyszeres választás
Egy autógumikat gyártó vállalat állítása szerint az általa gyártott gumik 97,5%-a legalább 50 000 km futására alkalmas. A gumik átlagosan 60 000 km megtételére alkalmasak. A gumik használhatósága (km) normál eloszlású.

Határozzuk meg a gumik használhatóságának szórását km-ben kifejezve!

Segítség 25. lecke 5. önellenőrző feladat

Csak egy helyes válasz lehetséges:

- **( ) 7500,5**
- **( ) 8006**
- **( ) 5100**
- **( ) 3840**

Megoldókulcs

1. feladat:	Gépek berendezések élettartama, ha természetes elhasználódás következtében mennek tönkre. Gyártási folyamatokban fellépő méretingadozás.
2. feladat:	(1) - 30,8 (2) - 57,6
3. feladat:	(1) - 15,87 (2) - 1725
4. feladat:	8
5. feladat:	5100

26. lecke. Nagy számok törvénye (kiegészítő anyag)

1. Markov-tétel, Csebisev-tétel

Először két tételt fogalmazunk meg, melyek a tetszőleges valószínűségi változó várható értéknél nagyobb értékeinek felvételére, illetve átlag körüli ingadozásának valószínűségére adnak becslést.

Markov-tétel:

Legyen ξ olyan nem negatív valószínűségi változó, melynek várható értéke $M(\xi)>0$ és t legyen tetszőleges pozitív szám. Ekkor

$P\left(\xi \geq tM(\xi)\right) \leq \frac{1}{t}$ $(t>0$ **és** $\xi \geq 0)$

Ez azt jelenti, hogy legfeljebb $1/t$ annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó által felvett érték legalább a várható érték t-szerese.

Megjegyzések:

1. Ha $0<t<1$ esetén az állítás biztosan igaz, hiszen az $1/t$ értéke 1-nél nagyobb, amelynél a valószínűség biztosan kisebb.

2. A tétel segítségével ismeretlen eloszlású valószínűségi változó esetén csak a várható érték ismeretére van szükség ahhoz, hogy becslést adjunk az átlagnál nagyobb értékek valószínűségére.

3. A tétel $a = t \cdot M(\xi)$ helyettesítéssel az alábbi alakban is írható:

$P(\xi \geq a) \leq \frac{M(\xi)}{a}$ $(a>0$ **és** $\xi>0)$

1. feladat

Egy kenyérbolt naponta átlagosan 300 kg házi kenyeret ad el.
Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott napon legalább 350 kg házi kenyeret adnak el!

1. feladat megoldása

Jelölje a ξ valószínűségi változó az egy nap alatt eladott kenyér mennyiségét (kg).

Ekkor a $P(\xi \geq 350)$ valószínűségre kell becslést adni.

Helyettesítsünk a Markov tételbe $a = 350$; $M(\xi) = 300$ értékeket:

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{M(\xi)}{a} \rightarrow P(\xi \geq 350) \leq \frac{300}{350} = 0{,}86$$

Tehát legfeljebb 86% annak a valószínűsége, hogy 350 kg kényérnél többet adnak el a vizsgált napon.

Csebisev-tétel:

Azaz legfeljebb annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó várható értéktől való eltérése legalább a szórás -szerese.

Megjegzések:

1. Ha esetén az állítás biztosan igaz, hiszen az értéke 1-nél nagyobb, amelynél a valószínűség biztosan kisebb.

2. A tétel segítségével ismeretlen eloszlású valószínűségi változó esetén csak a várató érték és a szórás ismeretére van szükség ahhoz, hogy becslést adjunk az átlag valamely szimmetrikus környezetébe esés valószínűségére.

3. A tétel helyettesítéssel az alábbi alakban is írható:

2. feladat

Felmérésekből ismert, hogy egy forgalmas útkereszteződésben egy óra alatt átlagosan 500 autó halad át, ennek az értéknek a szórása 25. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a vizsgált órában a kereszteződésen áthaladó autók száma az átlagtól legfeljebb 100-zal tér el!

2. feladat megoldása

: A kereszteződésen egy óra alatt áthaladó autók száma (db)
A Csebisev tétel segítségével a kérdezett esemény komplementerének valószínűségére adunk becslést.
M(?) = 500; D(?) = 25; ? = 100

Tehát legfeljebb 6,25% a valószínűsége annak, hogy az egy óra alatt áthaladó kocsik száma az átlagtól 100-nál többel eltér.

Becslés a kérdezett eseményre: Legalább 93,75% annak a valószínűsége, hogy az egy óra alatt áthaladó autók száma az átlagtól legfeljebb 100-zal tér el.

2. Nagy számok törvénye

A valószínűség fogalmát úgy határoztuk meg, hogy minél több kísérletet végzünk egy adott esemény vizsgálatára, az esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága annál kevésbé ingadozik a valószínűség értéke körül.

Hasonló kijelentést tettünk a várható érték és az átlag kapcsolatára is. Minél több kísérletet végzünk egy valószínűségi változó vizsgálatára, a mért értékeinek átlaga annál kevésbé ingadozik a várható érték körül.

A fenti állításokat úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a valószínűség, illetve várható érték kísérletileg meghatározható a gyakorlatot kielégítő pontossággal.

Ennek az állításnak a valószínűségre vonatkozó szigorú matematikai megalapozását először Bernoulli végezte el.

2.1 A nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakja

Végezzünk független kísérletet a valószínűsége esemény vizsgálatára. Jelölje az esemény bekövetkezésének számát.

Ekkor tetszőleges és esetén van olyan hogy esetén

.

Azaz megfelelő számú kísérlet elvégzése után tetszőleges kicsi -nál is kisebb annak a valószínűsége, hogy a relatív gyakoriság valószínűségtől való eltérése bármilyen kis -nál nagyobb.

A bizonyítás alapja a Csebisev-tétel, amelynek segítségével belátható, hogy .
Ennek megfelelően a Nagy számok törvénye a következő alakban is írható:

Látható, hogy tetszőlegesen kicsivé tehető megfelelő választásával.

Tehát megfelelő számú kísérlet elvégzésével nagyon kicsi a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriság és valószínűség egymástól lényegesen eltérjenek.

Könnyen belátható, hogy a másodfokú kifejezés maximális értéke ,amelyet esetén vesz fel.

Így az előző képletben szereplő valószínűségre egy "gyengébb" becslést is adhatunk:

3. feladat

Egy választás előrejelzéséhez közvélemény kutatást végeztek. Egy jelöltre leadott szavazatok arányára szeretnénk becslést adni.
1000 személy megkérdezése után milyen hibahatár adható a mintabeli szavazati arány és a tényeleges szavazati arány eltérésére, ha azt szeretnénk, hogy állításunk legalább 85%-os valószínűséggel megbízható legyen?

3. feladat megoldása

Alkalmazzuk a relatív gyakoriság és a valószínűség eltérésére vonatkozó becslés komplementer alakját:

A feladatból ismert adatok:

,

Keressük a hibahatár, azaz értékét:

Tehát 1000 szavazó megkérdezése esetén legalább 85%-os valószínűséggel állíthatjuk, hogy a mintabeli- és a tényleges szavazati arány eltérése 4%-nál kisebb.

4. feladat

Hány szavazó megkérdezése szükséges ahhoz, hogy a harmadik feladat szavazati arányára adott becslés hibáját 1%-ra csökkentsük, 85%-os megbízhatóság mellett?

4. feladat megoldása

Alkalmazzuk ismét a képletet, amelyben az adatok: , .

Látható, hogy a becslés hibájának az részére csökkentéséhez (azonos megbízhatóság mellett) a megkérdezettek számát több, mint a 16-szorosára kell növelnünk.

Hasonló valószínűségi becslést írhatunk fel az átlag és a várható érték kapcsolatára is.

2.2 A nagy számok törvénye: átlag és várható érték kapcsolata

Végezzünk független mérést a valószínűségi változóra. Az egyes mérések eredményét jelölje a , amelyek azonos várható értékű () és szórású () független valószínűségi változók. Ekkor

Rögzített esetén a hányados tetszőlegesen kicsivé tehető az n megfelelően nagy megválasztásával.

Tehát megfelelő számú kísérlet elvégzése után nagyon kicsi annak a valószínűsége, hogy a mintaátlag és a várható érték egymástól lényegesen eltérjen.

A nagy számok törvényének nagyon fontos szerepe van a statisztikában, ahol sok esetben a minta alapján vonnak le sokaságra vonatkozó következtetéseket.

A következő tételnek szintén nagy jelentősége van a statisztikában:

3. A centrális határeloszlás tétele

Végezzünk nagy számú () mérést egy ismeretlen eloszlású független valószínűségi változó vizsgálatára.

Ekkor a értékeinek a mintából számolt átlaga közelítőleg normális eloszlású, ahol

- a mintaátlag várható értéke a sokaság átlagával egyenlő.

- a mintaátlag szórása a sokaság szórásának -ed része.

Megjegyzés:

1. A tétel csak akkor alkalmazható, ha a mintaelemek (közelítőleg) függetlenek egymástól, azaz

-visszatevéses mintavételnél

- visszatevés nélküli mintavételnél, ha a kiválasztási arány kicsi (5% alatti).

2. A valószínűségi változó bármely eloszlása esetén a nagy mintából számolt átlagok normál eloszlásúak. A mintaátlag a sokasági átlag (várható érték) körül ingadozik a sokaság szórásánál jóval kisebb mértékben. Például 100 elemű minta esetén a mintaátlag szórása a sokasági szórás 10-edrész.

3. A statisztika szempontjából nagyon fontos, hogy a mintaátlagból intervallumbecslést lehet adni a sokasági átlagra egy megfelelő megbízhatósági szinten. (Lásd később a statisztika 2. tantárgyban)

4. A tétel egy fontos következménye, hogy a binomiális eloszlás normálissal közelíthető, ha

- elég nagy a független kísérletek száma ( ),

- a visszatevéses mintavételnél elég nagy a minta elemszáma ( ).

Ekkor a normál eloszlás paraméterei: ;

5. feladat

Egy főiskola a 150 fős előadó termébe íródeszkával felszerelt székeket helyezett el, amelynél az írórész jobb illetve baloldalra is felszerelhető. A statisztikák szerint az emberek 10%-a balkezes, ezért a terembe 15 széket tettek a balkezesek számára. Mennyi a valószínűsége, hogy a 150 fős évfolyamban 18-nál is több balkezes van?

5. feladat megoldása

: A balkezesek száma a 150 fős évfolyamon.

A balkezesek száma binomiális eloszlású, amely normálissal közelíthető az évfolyam nagy létszáma miatt.

Az eloszlás paraméterei:

Tehát 20,9% annak a valószínűsége, hogy a hallgatók között 18-nál több balkezes van.

26. lecke. Önellenőrző feladatok

1. feladat - szókitöltés
Egészítse ki a mondatot a Markov-tételre vonatkozóan!

Legfeljebb annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó által felvett érték (1)................ a(z) (2)................ -szerese.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Egészítse ki a mondatot a Csebisev tételre vonatkozóan!

(1)................ annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó várható értéktől való eltérése legalább a(z) (2)................ -szerese.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Egészítse ki a mondatot a nagy számok törvényére vonatkozóan!

Megfelelő számú kísérlet elvégzése után tetszőleges kicsi -nál is kisebb annak a valószínűsége, hogy a relatív gyakoriság a(z) (1)................ való eltérése bármilyen kis -nál nagyobb.
Megfelelő számú kísérlet elvégzése után tetszőleges kicsi -nál is kisebb annak a valószínűsége, hogy a mintaátlagnak a(z) (2)................való eltérése bármilyen kis -nál nagyobb.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
Egészítse ki a mondatot a centrális határeloszlás tételével kapcsolatban:

Nagy elemszámú ( ) mintánál tetszőleges eloszlású független valószínűségi változó esetén a mintából számolt átlag közelítőleg (1)..................
A binomiális eloszlás normálissal közelíthető, ha elég nagy a (2)................ kísérletek száma, vagy a (3)................ mintavételnél a minta elemszáma.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
Egy pedagógiai intézetben 6 éves gyerekek koncentráló képességét vizsgálják. Megállapították, hogy a gyerekek átlagosan 25 percet képesek egyfolytában figyelni, amelynek szórása 10 perc.

Becsülje meg, annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott gyermek legalább 30 percet képes figyelni!
Becsülje meg, hogy a gyerekek hányad részének tér el az átlagtól legalább 15 perccel az odafigyelési ideje!

Egészítse ki a mondatokat úgy, hogy a százalékban kapott értéket egészre kerekíti!

A gyerekek legfeljebb (1)................ százaléka tud 30 percnél tovább koncentrálni.
A gyerekek legfeljebb (2)................ százalékának lesz az odafigyelési ideje 10

percnél kevesebb, vagy 40 percnél több.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

6. feladat - szókitöltés
Pontosabb vizsgálatok kiderítették, hogy az 5. feladatban vázolt esetben a gyerekek koncentrálási ideje normál eloszlásúnak tekinthető. Számítsuk ki ennek ismeretében az előzőleg kérdezett valószínűségeket újra! Hasonlítsuk össze becsült és számolt valószínűségeket!

Segítség 26. lecke 6. önellenőrző feladat

A normál eloszlás feltételezésével számolt valószínűségek (%-ban kifejezve és egészre kerekítve):

A gyerekek (1)................ százaléka tud 30 percnél tovább koncentrálni.
A gyerekek(2)................ százalékának lesz az odafigyelési ideje 10 percnél kevesebb, vagy 40 percnél több.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

7. feladat - szókitöltés
Egy csavarok gyártásával foglalkozó cég termékeinek 10%-a menethibás. A minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak a mintát, ha ebben legfeljebb 12% hibás. Mekkora legyen a minta elemszáma, hogy legalább 95%-os megbízhatósággal a hibás áruk relatív gyakoriságának valószínűségtől való eltérése kisebb legyen 2%-nál.

Egészítse ki a mondatot!

Segítség 26. lecke 7. önellenőrző feladat

Legalább (1)................ darab csavar átvizsgálása esetén számíthatunk arra 95%-os megbízhatósággal, hogy a mintabeli selejtarány és a tényeleges selejtarány eltérése legfeljebb 2%.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

8. feladat - szókitöltés
Egy ország felnőtt lakosságának 60% rendelkezik jogosítvánnyal. A vezetési szokásokat kutatva embereket kérdezünk meg az utcán. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 500 véletlenszerűen kiválasztott ember közül 320-nál kevesebbnek van jogosítvány?

Egészítse ki a mondatot úgy, hogy a valószínűség értékét %-ban kifejezve tizedekre kerekíti!

Segítség 26. lecke 8. önellenőrző feladat

(1)................% annak a valószínűsége, hogy az 500 megkérdezett között legfeljebb 320-nak van jogosítványa.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - legalább (2) - várható érték

2. feladat:	(1) - Legfeljebb (2) - szórás
3. feladat:	(1) - valószínűségtől (2) - várható értéktől
4. feladat:	(1) - normál eloszlású (2) - független (3) - visszatevéses
5. feladat:	(1) - 83 (2) - 44
6. feladat:	(1) - 31 (2) - 13
7. feladat:	(1) - 4500
8. feladat:	(1) - 96,5

VI. fejezet. Gyakorló feladatok

1. feladat - leírás
1.

Egy kórház baleseti osztályán megfigyelték, hogy egy 8 órás műszakban 95 % annak a valószínűsége, hogy érkezik legalább egy baleseti sérült. Az adott idő alatt behozott sérültek számát tekintsük Poisson-eloszlásúnak.

a. Hány sérültet hoznak átlagosan egy 8 órás műszak alatt?

b. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a következő 6 órában legfeljebb két sérültet hoznak?

Megoldás

2. feladat - leírás
2.

Egy étteremben a rendeléstől a kiszolgálásig átlagosan 10 percet kell várni. A rendeléstől a kiszolgálásig eltelt idő exponenciális eloszlású.
Mennyi annak a valószínűsége, hogy

a. legalább 6, de legfeljebb 9 percet kell várni,

b. 8 percnél kevesebbet kell várni?

Megoldás

3. feladat - leírás
3.

Egy irodába 40 perc alatt átlagosan 6 telefonhívás fut be. Az adott idő alatt beérkező hívások száma Poisson-eloszlású. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy

a. a következő fél óra alatt 2-nél több hívás lesz,

b. a következő két hívás között 5 percnél több, de 10 percnél kevesebb idő telik el.

Megoldás

4. feladat - leírás
4.

Egy automata gép által csomagolt liszt tömege normál eloszlású, melynek várható értéke 100 dkg. A zacskók 90%-a 103 dkg-nál kisebb tömegű.
a. Mekkora a zacskós liszt tömegének átlagtól való átlagos eltérése?
b. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy találomra kiemelt zacskó tömege az átlagtól legfeljebb szórásnyival tér el?

Megoldás

5. feladat - leírás
5.

Egy gépsoron 8 mm átmérőjű tengelyeket gyártanak, a tengelyek átmérőjének átlagtól való átlagos eltérése 0,4 mm. Mivel a tengelyt egy igen precíz gép alkatrészeként használják fel, így a 8 mm-től 4%-nál nagyobb eltérésű tengelyeket selejtnek kell tekinteni.
a. 1000 elkészült tengelyből várhatóan hány selejtes lesz?
b. Hány tengelyt kell készíteni, hogy várhatóan 1000 jó legyen közte?

Megoldás

Megoldókulcs

1. feladat:	Id. a feladatnál!
2. feladat:	Id. a feladatnál!
3. feladat:	Id. a feladatnál!
4. feladat:	Id. a feladatnál!
5. feladat:	Id. a feladatnál!

Segítség az önellenőrző feladatok megoldásához

Segítség 1. lecke 3. önellenőrző feladat

Hogyan következhetnek a fiúk és lányok egymás után? A sor kezdődhet fiúval vagy lánnyal, mindkét esetben a fiúk és a lányok felváltva követik egymást. Hány lehetséges sorrend van az egyes esetekben?

Segítség 1. lecke 4. önellenőrző feladat

Rendeljük hozzá a fiúkhoz a lányokat, azaz rögzítsük a fiúk sorrendjét és állítsuk velük szembe a lányokat.

Segítség 1. lecke 5. önellenőrző feladat

Egy szám akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik. A valódi szám képzésekor az első helyiértéken nem állhat 0.
Bontsuk ketté a megoldást a végződés szempontjából, mert nem ugyanannyi van az 5-re végződőkből, mint a 0-ra végződőkből!

Segítség 1. lecke 6. önellenőrző feladat

Kössük össze a három szótárt valamilyen sorrendben, hogy biztosan egymás mellé kerüljenek. Így a három szótárt egy könyvnek tekinthetjük. Vegyük figyelembe, hogy a szótárak többféle sorrendben is összeköthetők!

Segítség 11. lecke 1. önellenőrző feladat

Visszatevés nélküli mintavétel, mert egyszerre húzzuk ki a lapokat.

Segítség 11. lecke 3. önellenőrző feladat

A feladat felfogható egy visszatevéses mintavételnek, mert minden nap minden jármű egyformán esélyes.

Segítség 13. lecke 4. önellenőrző feladat

A medence hosszának hányadrészénél éri el a vízmélység a 140 cm-t?

Segítség 16. lecke 6. önellenőrző feladat

Határozza meg, annak a valószínűségét, hogy egy adott héten nincs találat. Vegye figyelembe, hogy az egyes hetek találatainak száma egymástól független.

Segítség 17. lecke 1. önellenőrző feladat

Ez visszatevés nélküli mintavétel, mivel egyszerre választottuk ki a gombostűket.

Segítség 17. lecke 4. önellenőrző feladat

Alkalmazza az eloszlásfüggvény definícióját!

Segítség 18. lecke 4. önellenőrző feladat

Határozza meg a 3-hoz és 4-hez tartozó valószínűségek összegét. Jelölje $\square$-vel a 3-hoz tartozó valószínűséget! Fejezze ki $\square$ segítségével a 4-hez tartozó valószínűséget is, és alkalmazza a várható érték képletét!

Segítség 18. lecke 5. önellenőrző feladat

Határozza meg Anna nyereményeinek lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket!

Segítség 18. lecke 6. önellenőrző feladat

Határozza meg András nyereményeinek lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket!

Segítség 2. lecke 2. önellenőrző feladat

5 elem (ismétléses) permutációja, amelyek között 2 darab, illetve 3 darab ismétlődő van.

Segítség 2. lecke 3. önellenőrző feladat

10 képeslapot küldünk el, amelyek között 2, 3, illetve 5 egyforma van.

Segítség 2. lecke 5. önellenőrző feladat

A kiolvasásban csak jobbra és lefelé haladhatunk. A MATEMATIKA szó bármely kiolvasásánál 4-szer lépünk jobbra és 5-ször lefelé. Ezek bármely sorrendje lehetséges. A lehetséges kiolvasásoknál jelölje J, ha jobbra és L ha lefelé léptünk.
Például: J J L J L L L J L

Segítség 20. lecke 3. önellenőrző feladat

Számolja ki, hogy átlagosan hány mazsola van egy 5 dkg-os szeletben!

Segítség 20. lecke 4. önellenőrző feladat

A binomiális eloszlás Poissonnal közelíthető!

Segítség 20. lecke 5. önellenőrző feladat

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egyszer sem hívják tűzesethez őket egy adott napon?

Segítség 21. lecke 6. önellenőrző feladat

Fejezzük ki a valószínűséget a sűrűségfüggvény segítségével!

Segítség 22. lecke 3. önellenőrző feladat

A mediánnál az eloszlásfüggvény értéke 0,5.

Segítség 22. lecke 4. önellenőrző feladat

Az a paraméter értékét úgy kell megválasztani, hogy és igaz legyen.

Segítség 22. lecke 5. önellenőrző feladat

A módusz a sűrűségfüggvény maximumhelye.

Segítség 23. lecke 2. önellenőrző feladat

Határozza meg, hogy mikor érkezhet legkésőbb a postás!

Segítség 24. lecke 2. önellenőrző feladat

Azon értéket keressük, amelynél kisebb értéket a valószínűségi változó 50%-os valószínűséggel vesz fel. Hogyan írható fel ez a mondat valószínűségi jelölésekkel?

Segítség 24. lecke 4. önellenőrző feladat

Azon értéket keressük, amelynél kisebb értéket a valószínűségi változó 4,5%-os valószínűséggel vesz fel. Hogyan írható fel ez a mondat valószínűségi jelölésekkel?

Segítség 24. lecke 5. önellenőrző feladat

1. Vizsgálja meg, hogy mely feladat vizsgál két esemény bekövetkezése között eltelt időt (exponenciális eloszlás), és mely feladat vizsgálja az adott idő alatti bekövetkezések számát (Poisson eloszlás)!

2. Várhatóérték-számítás: Exponenciális eloszlásnál: átlagosan mennyi idő telik el két hívás között? Poisson-eloszlásnál: arányos számítással határozza meg, hogy a vizsgált időtartamra átlagosan hány hívás jut.

Segítség 25. lecke 3. önellenőrző feladat

Az igények kielégítéséhez annyi font kell, amennyinél kevesebbet 96%-os valószínűséggel váltanak át a turisták. Hogyan írható ez fel matematikai jelekkel?

Segítség 25. lecke 5. önellenőrző feladat

A feladat úgy is megfogalmazható, hogy a gumik 2,5% legfeljebb 50 ezer km megtételére képes. Hogyan írható ez fel matematikai jelekkel?

Segítség 26. lecke 6. önellenőrző feladat

Mivel az odafigyelési idő eloszlása ismeretlen, ezért a becslést a.) esetben a Markov tétellel, b.) esetben a Csebisev tétellel végezzük.

Segítség 26. lecke 7. önellenőrző feladat

Alkalmazzuk a nagy számok relatív gyakoriság és valószínűség kapcsolatát tartalmazó törvényét.

Segítség 26. lecke 8. önellenőrző feladat

A feladatban a kiválasztott vezetni tudók száma binomiális eloszlású, amelyet normál eloszlással közelíthetünk a minta nagy elemszáma miatt. Határozzuk meg a várható értéket és a szórást!

Segítség 3. lecke 3. önellenőrző feladat

Engedjük egyesével a diákokat a terembe! Vizsgáljuk, hogy az egyes diákok hány hely közül választhatnak!

Segítség 4. lecke 5. önellenőrző feladat

Hány darab 5-tel osztható szám van 1 - 90-ig? Hányféleképpen választható ki az 5-tel oszthatók közül 2 darab, a többiből 3 darab?

Segítség 4. lecke 7. önellenőrző feladat

Jelölje □-nel a fogadáson résztvevők számát és adja meg □-től függően a kézfogások számát!

Segítség 7. lecke 1. önellenőrző feladat

Az elemi események 2 számból áll dobássorozatok. Például első dobás 3, második dobás 4.
Csak olyan esemény lehet elemi, amelynél egyértelműen meghatározható, hogy melyik két számot dobtuk és azok sorrendje is egyértelmű.

Segítség 7. lecke 2. önellenőrző feladat

Elemi esemény: az 5 kihúzott szám.
Csak azok az események lehetnek összetettek, amelyek többféleképpen bekövetkezhetnek, azaz többféle számötös kihúzása lehetséges.
Ha a 36-os számot kihúzták, akkor még többféleképpen húzhatták ki a másik négy számot.

Segítség 7. lecke 5. önellenőrző feladat

Az egymást kizáró események egyszerre biztosan nem következhetnek be.
A négy király esetében mind a négy szín előfordul.

Segítség 9. lecke 4. önellenőrző feladat

1. Vegyük figyelembe, hogy melyik számot melyik kockával dobtuk. Például különböző esetnek kell tekinteni azt, hogy a pirossal 4-est és a kékkel 3-ast, vagy a pirossal 3-ast és a kékkel 4-est dobunk.
2. Határozzuk meg az összes lehetséges eset számát, majd írjuk fel azokat az eseteket, amelyre a vizsgált esemény teljesül!

Kurzuszáró feladatsor 1.

1. feladat - szókitöltés
Egy 5 személyes család hányféleképpen tud beszállni egy 5 személyes autóba, ha csak ketten tudnak vezetni, de bárki ülhet előre (a magassága és a kora megengedi)?

A lehetséges esetek száma: (1)..................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés

Egy hallgató 50 tételből csak 40-et tanult meg. A vizsgán 3 tételt kell húznia. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb egyet nem fog tudni?

A kérdezett valószínűség %-ban kifejezve: (1)................%.
A feladat megoldásánál alkalmazható a (2)................ eloszlás.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Egy könyvszekrényben 6 polc van, minden polcon a könyvek 60%-a regény. Minden polcról véletlenszerűen leveszünk egy-egy könyvet.

a.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 4 regényt vettünk le?

b.) Hány regény van a kiválasztott könyvek között legnagyobb valószínűséggel?

c.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak a 2. és a 3. polcról vettünk le regényt?

Írja be a válaszokat a kijelölt helyekre! A valószínűségeket %-ban adja meg!

a) (1)................%
b) (2)................
c) (3)................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
(3. feladat folytatása) Töltse ki az alábbi mondatokat a feladatra vonatkozóan:

Az a.) és c.) feladat (1)................ események együttes bekövetkezésének valószínűségét vizsgálja.
Az a.) és b.) feladatoknál alkalmazható a (2)................ eloszlás.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
Egy vizsgán a hallgatók 30%-a ☐, 45% a ☐, 25%-a ☐ csoportot írt. Az ☐ csoportot író hallgatók 60%-a, a ☐ csoportot íróknak 40%-a, a ☐ csoportot íróknak 80%-a volt fiú.
Töltse ki a táblázatot a feladat szövege alapján, majd határozza meg a kérdezett valószínűséget a kijelölt pontosságig. A valószínűségeket ne %-ban kifejezve adja meg.

Események		**Feladatsorok**		**Összesen:**
	A	**B**	**C**	
F: fiú	(1)................	(2)................	(3)................	(4)................
L: lány	(5)................	(6)................	(7)................	(8)................
Összesen:	(9)................	(10)................	(11)................	(12)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

6. feladat - szókitöltés
(5. feladat folytatása) Egy vizsgán a hallgatók 30%-a ☐, 45% a ☐, 25%-a ☐ csoportot írt. Az ☐ csoportot író hallgatók 60%-a, a ☐ csoportot íróknak 40%-a, a

csoportot íróknak 80%-a volt fiú. Mi a valószínűsége annak, hogy

a.) egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozatot fiú írta?

b.) egy véletlenszerűen kiválasztott lány csoportot írt?

c.) egy véletlenszerűen kiválasztott dolgozatot fiú írta és csoportot írt!

a) (1).................
b) (2).................
c) (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

7. feladat - szókitöltés
Egy almáskertben az almák tömegének szórása 3 dkg, és az almák 15,87%-a nehezebb 23 dkg-nál. Az almák tömege normál eloszlású.

Határozza meg az almák átlagos tömegét! (1).................dkg
A táblázatból kikeresett értékek:
: (2).................
: (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

8. feladat - feleletválasztás

Egészítse ki a fenti szöveget az alábbi kifejezésekkel:

- nőtt
- csökkent
- nem változott

(7. feladat folytatása) Egy hibrid előállításával ismét megvizsgálták az almák tömegének eloszlását. A normális eloszlású görbe a várható érték környezetében magasabb, távolabb laposabb lett. Az eredeti és a hibrid alma eloszlásának módusza megegyezik. Hogyan változott az alma tömegének várható értéke és szórása?

Várható érték: (1).................
Szórás: (2).................

9. feladat - szókitöltés
Egy diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.

Határozza meg a hiányzó valószínűségértéket, és írja be a táblázatba!

lehetséges értékei:	2	4	5	10
Valószínűségek:	0,1	0,2	0,25	(1).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

10. feladat - szókitöltés
A 9. feladat táblázata alapján egészítse ki a feladatot!

Adja meg a várható értékét! (1).................

Adja meg F(5) értékét! (2).................
Mennyi az eloszlás módusza! (3).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 48
2. feladat:	(1) - 90,2 (2) - hipergeometrikus
3. feladat:	(1) - 31,1 (2) - 4 (3) - 0,9
4. feladat:	(1) - független (2) - binomiális
5. feladat:	(1) - 0,18 (2) - 0,18 (3) - 0,2 (4) - 0,56 (5) - 0,12 (6) - 0,27 (7) - 0,05 (8) - 0,44 (9) - 0,3 (10) - 0,45 (11) - 0,25 (12) - 1
6. feladat:	(1) - 0,56 (2) - 0,614 (3) - 0,2
7. feladat:	(1) - 20 (2) - 1 (3) - 0,8413
8. feladat:	(1) - nem változott (2) - csökkent
9. feladat:	(1) - 0,45
10. feladat:	(1) - 6,75 (2) - 0,3 (3) - 10

Kurzuszáró feladatsor 2.

1. feladat - szókitöltés
6 autó hányféleképpen tud leparkolni egy 10 férőhelyes parkolóban?

(1).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

2. feladat - szókitöltés
Kertész Klárának 30 piros és 10 fehér muskátlija van. A tavaszi átültetésnél a még nem virágzó muskátlikból 10-et egy ládába tett.

Mi a valószínűsége, hogy a ládába egynél több fehér muskátli került? (1)................. %
Milyen eloszlás alkalmazható a feladat megoldásánál? (2).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

3. feladat - szókitöltés
Egy szoba falán három könyvespolc van. A legfelső polcon van az összes könyv 28%-a. Ezen a polcon lévő könyvek 40%-a regény. A középső polcon van a könyvek 32%-a, amelyeknek 60%-a regény. A legalsó polcon lévő könyvek 80%-a regény. A gazdi hancúrozó cicája egy alkalommal levert valamelyik polcról egy könyvet.
Mennyi a valószínűsége annak, hogy:

regényt vert le? (1)................
a levert könyv a legfelső polcról származik és nem regény? (2)................
a levert regény a középső polcról származik? (3)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

4. feladat - szókitöltés
Töltse ki a táblázatot a 3. feladat szövege alapján (pontos érték), majd határozza meg a kérdezett valószínűséget a számjegyekkel kijelölt pontosságig! A valószínűségeket ne %-ban kifejezve adja meg!

Események		polcok		Összesen:
	F: felső	K: középső	A: alsó	
R: regény	(1)................	(2)................	(3)................	(4)................
E: egyéb	(5)................	(6)................	(7)................	(8)................
Összesen:	(9)................	(10)................	(11)................	(12)................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

5. feladat - szókitöltés
Egy felvételi elbeszélgetésen az egymást követő vizsgázók behívása között átlagosan 15 perc telik el. Az egymást követő vizsgázók behívása között eltelt időt tekintsük exponenciális eloszlásúnak.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy vizsgázó behívása után legalább 20 percig nem hívnak be senkit?
A(z) (1)................ eloszlás várható értéke (2)................. A kérdezett valószínűség: (3)................%

Mennyi a valószínűsége annak, hogy 90 perc alatt 7 felvételizőt vizsgáztatnak le?
A(z) (4)................ eloszlás várható értéke (5)................. A kérdezett valószínűség: (6)................%.
Ha egy esemény adott idő alatti bekövetkezésének száma (7)................ eloszlású, akkor bármely két egymást követő bekövetkezés alatt eltelt idő (8)................ eloszlású.

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

6. feladat - szókitöltés
Egy iskola tanulóinak a 60 m -es síkfutásból elért átlagos időeredménye 10,2 másodperc, az eredményeknek az átlagtól való átlagos eltérése 0,4 másodperc. A tanulók időeredménye normális eloszlású.

A tanulók hány százaléka futotta le a távot 9,6 másodpercnél rövidebb idő alatt?

Írja be az alábbi szövegdobozokba, hogy a feladat megoldása során mely értékeket keresett ki a normális eloszlás táblázatából!

A táblázatból kikeresett értékek:
(1).................
(2).................
A kérdezett valószínűség: (3).................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

7. feladat - szókitöltés
A 6. feladat tanulói körében hány százalék eredménye tér el az átlagtól legfeljebb 0,5 másodperccel?

Írja be az alábbi szövegdobozokba, hogy a feladat megoldása során mely értékeket keresett ki a normális eloszlás táblázatából!

A táblázatból kikeresett értékek:
(1).................
(2).................
A kérdezett valószínűség: (3).................%

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

8. feladat - szókitöltés
Egy diszkrét valószínűségi változó valószínűségeloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.
Ismert, hogy .

Határozza meg a hiányzó valószínűségértékeket!

(1).................
(2).................
Határozza meg a várható értékét! (3).................
Határozza meg az eloszlás móduszát! (4).................

A helyes választ a megoldókulcsban találja!

Megoldókulcs

1. feladat:	(1) - 151200
2. feladat:	(1) - 79,6 (2) - hipergeometrikus
3. feladat:	(1) - 0,624 (2) - 0,168 (3) - 0,308
4. feladat:	(1) - 0,112 (2) - 0,192

	(3) - 0,32 (4) - 0,624 (5) - 0,168 (6) - 0,128 (7) - 0,08 (8) - 0,376 (9) - 0,28 (10) - 0,32 (11) - 0,4 (12) - 1
5. feladat:	(1) - exponenciális (2) - 15 (3) - 26,4 (4) - Poisson (5) - 6 (6) - 13,8 (7) - Poisson (8) - exponenciális
6. feladat:	(1) - 1,5 (2) - 0,9332 (3) - 6,68
7. feladat:	(1) - 1,25 (2) - 0,8944 (3) - 78,88
8. feladat:	(1) - 0,1 (2) - 0,35 (3) - 5,6 (4) - 10

Beküldendő feladatsorról

1. A beküldendő feladatok tartalma és külső alakja:

- **A beküldendő feladatot word-ben készítse. A matematikai képleteknél alkalmazza az egyenletszerkesztőt.**
- **A megoldás legyen részletes!**
- **Írja le a megoldás minden lépését!**
- **A megoldás végén szövegesen is értelmezze, vagy foglalja össze a kapott végeredményt.**

A beküldött feladatok borítólapján szerepeljenek az alábbiak:

- **A hallgató neve és Neptun-kódja**
- **Tagozat, szak, évfolyam, oktatás helye (Bp., Szfvár.)**
- **A tárgy neve**
- **A tantárgy tutorának neve**

Az elküldött file neve: név_valszam.doc ***(A névhez a saját nevét írja!)***

2. A feladatok leadásának határideje

A félév során 1 alkalommal kell beadni megoldásokat. A határidő a feladatsoron megtalálható.

A dolgozatot a tantárgyhoz kapcsolódó portfólióba küldje el.

3. A határidőig beküldött feladatsor értékelése:

A beadott feladatsorral összesen 25 pont szerezhető. A be nem küldött dolgozatokat 0 ponttal vesszük figyelembe. A beküldött dolgozat pontszámát hozzáadjuk az írásbeli vizsgadolgozatban elérhető 100 ponthoz. Így összesen 125 pont szerezhető, amely alapján vizsga értékelése

```
 0  -  49  pont   elégtelen
50  -  62  pont   elégséges
63  -  75  pont   közepes
76  -  88  pont   jó
89  - 125  pont   jeles
```

Beküldendő feladatsor

Beküldési határidő: 2009. május 9.

A megoldáshoz a 4, 9-12, 14-15, 17-21, 24-25 leckék ismerete szükséges.

FONTOS:
A feladatoknál ne csak a végeredményt közölje, hanem írja le a megoldás minden lépését! Ügyeljen az áttekinthető munkára!

A feladatsor megoldásáért 25 pont szerezhető!

Őrizze meg a számítógépes dokumentumot, hogy később a helyes megoldással összehasonlíthassa!

Csak önálló munka fogadható el!

Az elküldött file neve: név_valszam.doc *(A névhez a saját nevét írja!)*

1. feladat (1 pont)

Készítse el a borítólapot a *Beküldendő feladatsorról* c. részben leírtak alapján!

2. feladat (4 pont)

Kitöltöttük az ötös lottót minden olyan esetre, amikor 2 darab egyjegyű és 3 darab kétjegyű szám szerepel.

a) Hány szelvényt kellett ehhez kitöltenünk?

b) Mennyi az esélye annak, hogy 5 találatunk lesz ezek közül valamelyikkel?

3. feladat (4 pont)

Egy üzletben lévő lisztes zacskók 6 %-a lyukas. 8 zacskó lisztet vásárolunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egy lyukas közöttük?

4. feladat (5 pont)

Egy alkatrész gyártását 3 gépsoron (A, B és C gépsor) végzik. A termékek 45 %-a az A gépsoron, 25 %-a a B gépsoron, a többi a C gépsoron készül. Az A gépsoron előállított termékek 2%-a selejtes, a B gépsoron előállítottak 4 %-a selejtes, és a C gépsoron előállítottak 6 %-a selejtes. Az alkatrészeket egy közös raktárban tárolják összekeverve.

Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a) egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész selejtes?

b) egy selejtes terméket kiválasztva, az az A gépsoron készült?

c) egy véletlenszerűen kiválasztott termék a C gépsoron készült és nem selejtes?

5. feladat (6 pont)

András megfigyelte, hogy naponta (24 óra alatt) átlagosan 6 SPAM érkezik az e-mail ládájába. Az adott idő alatt beérkező SPAM-ek számát tekintsük Poisson eloszlásúnak.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy 8 óra alatt legfeljebb 2 SPAM érkezik?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két SPAM érkezése között legfeljebb 6 óra telik el?

(Milyen eloszlásúnak tekinthető a két SPAM érkezése között eltelt idő?)

6. feladat (5 pont)

Egy dobozos üditő adagoló automatáról a következőket tudjuk:
A gép által adagolt folyadék mennyisége normál eloszlású valószínűségi változónak tekinthető.
A gép által a dobozokba töltött ital mennyisége átlagosan 15dl, szórása 0,2 dl.

Várhatóan a dobozos üditők hány százalékára teljesül, hogy a dobozban lévő mennyiség az átlagtól legfeljebb 0,3 dl-rel tér el?

Felhasznált irodalom

- **N. J. Vilenkin: Kombinatorika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.**
- **Dr. Csernyák László: Valószínűségszámítás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.**
- **Dr. Nemetz Tibor: Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.**

- Szelezsán János: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. LSI Informatikai Oktakóközpont, Budapest, 2002.
- Solt György: Valószínűségszámítás példatár. Bolyai könyvek sorozat, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1995.
- Dr. Obádovics J. Gyula: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika. Scolar Kiadó, Budapest, 1995.
- Nagyné Csóti Beáta: Valószínűségszámítás példatár. Nagy Duó BT., Tatabánya, 2001.
- Dr. Denkinger Géza: Valószínűségszámítás. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
- Korpás Attiláné dr.: Általános statisztika II. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.