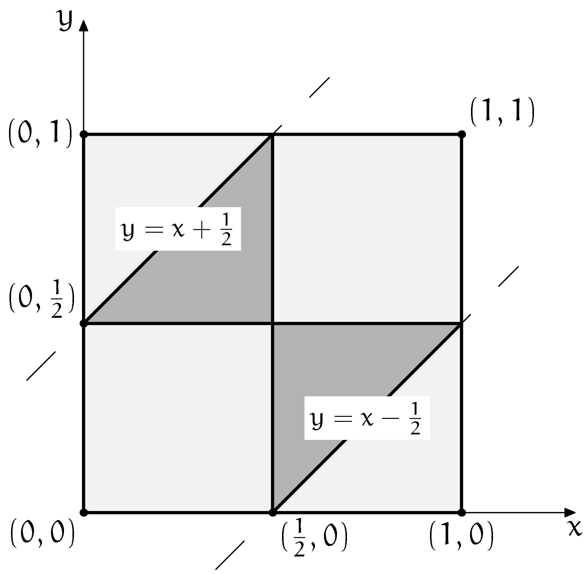
VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS
FELADATOK és MEGOLDÁSOK

Készítették: Szirmai Katalin, Sztrik János, Kis Béla



Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai és Informatikai Intézet
Debrecen, 2000.

Tartalomjegyzék

Előszó

A számítástechnika, az informatika magas színvonalú művelése elképzelhetetlen szilárd matematikai alapok nélkül. Ezen alapok megszerzéséhez kíván segítséget nyújtani a jelen oktatási segédlet, amelynek anyagát főleg informatika szakos tanárjelöltek számára tartott kurzusok tapasztalatainak felhasználásával válogattuk össze.

A feladatok - néhány kivételével - nem nehezek, ezért általában azok is sikerrel próbálkozhatnak a megoldásukkal, akiknek a másik szakja nem matematika. Természetesen a megoldásokat csak akkor érdemes megnézni, ha már hosszabb próbálkozás után sem sikerült megoldani őket.

A megfelelő elméleti háttér elsajátításához az előadáskövető jegyzeteken túl az irodalomjegyzékben javasolt munkák is segítséget jelenthetnek.

Reméljük, hogy a jelen segédlet használata hozzásegíti az olvasót az informatika művelésénél jól hasznosítható matematikai ismeretek és készségek elmélyítéséhez.

Az előforduló hibákra vonatkozó észrevételeket és mindenfajta javító szándékú megjegyzést örömmel veszünk az alábbi címeken:

`jsztrik,bkis@math.klte.hu`
`http://it.math.klte.hu/user/jsztrik/index.html`

Az anyag elkészítéséhez a Széchenyi Professzori Ösztöndíj és az Oktatási Minisztérium FKFP-04/1999 pályázata részleges anyagi támogatást nyújtottak.

Debrecen, 2000.

A Szerzők

A feladatok

1 Elemi feladatok

1.1 Klasszikus valószínűségi mezők

1. FELADAT: Ha tíz könyvet helyezünk el tetszőleges sorrendben egy könyvespolcon és hármat előre megjelölünk, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az elhelyezés során a megjelölt könyvek egymás mellé kerülnek?

2. FELADAT: Tíz lapra felírjuk a tíz számjegyet. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy két lapot kihúzva, egymás mellé téve a kapott szám osztható 18-cal!

3. FELADAT: A magyar kártyacsomagból egyszerre három lapot kihúzva mi a valószínűsége annak, hogy közülük legalább egy zöld?

4. FELADAT: Egy dobozban n golyó van az $1, 2, \dots, n$ számokkal jelölve. Egyenként kihúzzuk az összes golyót. Mi a valószínűsége, hogy

(a) minden alkalommal nagyobb számú golyót húzunk ki, mint az előző volt,

(b) a k-val jelölt golyót éppen a k-adiknak húzzuk ki?

5. FELADAT: Egy kör alakú asztal mellett tízen vacsoráznak. Mi a valószínűsége annak, hogy két nő nem kerül egymás mellé, ha az asztalnál öt férfi és öt nő volt?

6. FELADAT: Egy kerek asztalhoz n különböző magasságú ember ül le. Mi annak a valószínűsége, hogy a legnagyobb és legkisebb egymás mellé kerül?

7. FELADAT: Egy urnában hat piros, több fehér és fekete golyó van. Annak valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva az fehér vagy fekete $\frac{3}{5}$, piros vagy fekete $\frac{2}{3}$. Hány fehér és hány fekete golyó van az urnában?

8. FELADAT: Egy dobozban öt piros golyó van. Hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen 0.9-nél?

9. FELADAT: Két sakkcsapat körmérkőzést rendezett. Mindkét csapat kettőnél több játékossal rendelkezett. Mindenki mindenkivel játszott egy

játszmát. A mérkőzés során 136 játszámára került sor. A mérkőzésre való felkészülés során házi versenyt is rendezett mindkét csapat, ezekben is mindenki egy játszmát játszott mindenkivel a saját csapatából. A két csapatban így 66 játszmára került sor. A mérkőzés befejezése utáni banketten, amin minden játékos részt vett, véletlenszerűen két játékossal beszélgetett a riporter. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét játékos a nagyobb létszámú csapat tagja volt?

10. FELADAT: 20 db 40 W-os és 30 db 60 W-os égőből egymás után kiveszünk két darabot anélkül, hogy az elsőt visszatennénk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

(a) mindkettő 40 W-os lesz,

(b) egyik sem 40 W-os,

(c) csak az egyik 40 W-os?

11. FELADAT: Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege hét?

1.2 Geometriai valószínűség

12. FELADAT: Egy ember elfelejtette felhúzni az óráját, és így az megállt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a nagymutató a hármas és a hatos között állt meg? Tételezzük fel, hogy annak a valószínűsége, hogy a nagymutató a számlap kerületének valamely megadott ívén áll meg, az illető ív hosszával arányos.

13. FELADAT: Egy R sugarú körre véletlenszerűen rádobunk egy r sugarú körlapot, ahol $r < R$. Feltesszük, hogy annak a valószínűsége, hogy a rádobott körlap középpontja az R sugarú kör valamely tartományába esik, arányos a tartomány területével. Mi annak a valószínűsége, hogy az R sugarú kör teljes egészében tartalmazza a r sugarú kört?

14. FELADAT: Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kijelölünk két pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a köztük lévő távolság kisebb, mint egy előre megadott h hossz, ahol $0 < h < 1$?

15. FELADAT: Egy egységnyi hosszúságú szakaszon válasszunk ki találomra két pontot. Mi a valószínűsége annak, hogy a keletkezett szakaszokból háromszög szerkeszthető?

16. FELADAT: A $(0, 1)$ intervallumra véletlenszerűen rádobunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a keletkezett szorzat

(a) kisebb, mint $\frac{1}{2}$,

(b) nagyobb, mint $\frac{1}{4}$?

17. FELADAT: Véletlenszerűen felírunk két egynél kisebb pozitív számot. Mekkora a valószínűsége, hogy

(a) összegük kisebb 1-nél,

(b) szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-nél,

(c) összegük kisebb 1-nél és szorzatuk kisebb $\frac{2}{9}$-nél?

1.3 Vegyes feladatok

18. FELADAT: Mutassuk meg, hogy ha $P(A) \geq 0.7$ és $P(B) \geq 0.9$, akkor $P(AB) \geq 0.6$!

19. FELADAT: Egy urnában az $1, 2, \ldots, N$ számjegyekkel jelzett lapocskák vannak. Mi a valószínűsége annak, hogy sorjában kihúzva a lapocskákat, legalább egyet ugyanolyan sorszámú húzáskor húzunk ki, mint a rajta levő szám?

20. FELADAT: n vizsgázó lefelé fordítva rakja le az indexét az asztalra, majd mindegyik felvesz egy indexet találomra.

(a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k hallgató választja a saját indexét?

(b) Mihez tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$?

21. FELADAT: Egy n házaspárból álló társaság táncol. Az összes párokra való oszlás egyenlően valószínű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos pillanatban senki sem táncol a feleségével?

22. Feladat: Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B eseményekre érvényes a

$$P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$$

egyenlőség, feltéve, hogy $P(B) > 0$.

23. Feladat: Igazoljuk, hogy bármely $A, B, C, P(C) > 0$ eseményekre teljesül, hogy

$$P((A + B)|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)!$$

24. Feladat: Legyen $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{4}$ és $P(B|A) = \frac{1}{2}$. Számítsuk ki a $P(A + B)$ és a $P(\bar{A}|\bar{B})$ valószínűségeket!

25. Feladat: Mennyi a $P(A)$ és $P(B)$, ha $P(A|B) = \frac{7}{10}$, $P(B|A) = \frac{1}{2}$ és $P(A|\bar{B}) = \frac{1}{5}$?

26. Feladat: Igazoljuk, hogy ha $P(A) = \frac{4}{5}$ és $P(B) = \frac{9}{10}$, akkor

$$\frac{7}{9} \leq P(A|B) \leq \frac{8}{9}!$$

27. Feladat: Két kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege hét, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?

28. Feladat: Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jut ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következőnek sem jut?

29. Feladat: Egy 32 lapos kártyacsomagból négy lapot húzunk ki visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első kettő király, a harmadik felső, a negyedik pedig ász?

30. Feladat: A és B egymástól függetlenül hazudnak ill. mondanak igazat $\frac{2}{3}$ ill. $\frac{1}{3}$ valószínűséggel. Feltéve, hogy A azt állítja, hogy B hazudik, mennyi a valószínűsége, hogy B igazat mond?

31. Feladat: Egy egyetemi vizsgán az A-szakos hallgatók 60%-a, a B-szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az A-szakos hallgatók az év-

folyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázott?

32. FELADAT: Egy dobozban öt fehér és két piros golyó van. Előbb két golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadiknak kivett golyó piros?

33. FELADAT: Két doboz mindegyikében 100 db csavar van. Az első dobozban 10 db, a másodikban 6 db selejtes. Találomra kiveszünk egy csavart valamelyik dobozból. A dobozok közül egyenlő valószínűséggel választunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kivett csavar jó?

34. FELADAT: Két város közötti távíróösszeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$-e vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$-a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és vonalak aránya $5 : 3$. Mi annak a valószínűsége, hogy ha a vevő oldalon pontot kaptak, akkor az adó pontot továbbított?

35. FELADAT: Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 25%-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiból álló csoportból egy személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?

36. FELADAT: n doboz mindegyikében n számú golyó van, mégpedig úgy, hogy az i-edikben i db piros, a többi fehér, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból kihúzunk egy golyót. Ez piros lett. Mennyi annak a valószínűsége, hogy azt az utolsó két doboz valamelyikéből húztuk?

37. FELADAT: Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő áru 75% valószínűséggel első osztályú. A kikerült termékeket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek, 0.02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek, 0.05. Mennyi a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

38. FELADAT: Egy gyárban három gép gyárt csavarokat. A termékek 25%-

át az A-gép, 35%-át a B-gép, a többit a C gép gyártja. Az A-gép 5%-ban, a B-gép 4%-ban, a C-gép pedig 2%-ban termel selejtet. Ha egy találomra kiválasztott csavar selejtes, mennyi a valószínűsége, hogy azt az A-gép gyártotta?

39. FELADAT: Igazoljuk, hogy ha A és B független események, akkor $\bar{A}$ és $\bar{B}$ is az!

40. FELADAT: Ketten lőnek egy céltáblára. A találat valószínűsége az első személy esetében 0.7, a második esetében 0.6. A találatok egymástól függetlenek. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább egy találat van a céltáblán?

41. FELADAT: Ketten felváltva lőnek egy céltáblára az első találatig. A kezdő találatának a valószínűsége 0.2, a másodiké 0.3. Mennyi a valószínűsége, hogy a kezdőé lesz az első találat?

42. FELADAT: Az összes számjegyet egyenként felírjuk tíz lapra. A lapok közül találomra választunk egyet, megnézzük a rajta lévő számjegyet, majd visszatesszük. Legalább hányszor kell így húznunk, hogy 0.9-nél nagyobb valószínűséggel legyen a kihúzott számok között legalább egy páros szám?

43. FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subseteq B$ és A és B függetlenek, akkor $P(B) = 1$ vagy $P(A) = 0$!

44. FELADAT: Legyenek az $A_1, \ldots, A_n$ események **teljesen** függetlenek, és legyen $P(A_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Igazoljuk, hogy

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$

45. FELADAT: Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?

(a) $\{p^k q^2\}_{k=1,2,\ldots}$, ahol $q \doteq 1 - p$ és $0 < p < 1$.

(b) $\{p^{k-n} q\}_{k=n,n+1,\ldots}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ és $q \doteq 1 - p$.

(c) $\{\frac{1}{k(k+1)}\}_{k=1,2,\ldots}$.

(d) p^3, $3p^2q$, $3pq^2$, q^3, ahol $q \doteq 1 - p$ és $0 < p < 1$.

(e) $\{\frac{3^k e^{-3}}{k!}\}_{k=0,1,2,\dots}$.

2 Valószínűségi változók

2.1 Sűrűség- és eloszlásfüggvények

46. FELADAT: Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?

(a)

$$F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\arctan x;$$

(b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

(c)

$$F(x) = e^{-e^{-x}};$$

(d)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

(e)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{ha } x \ge 0. \end{cases}$$

47. FELADAT: Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül két pontot választunk találomra. Legyen a valószínűségi változó a két pont közötti távolság. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt és a sűrűségfüggvényt! Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a két pont távolsága legalább $\frac{3}{4}$!

48. FELADAT: Egységnyi hosszúságú szakaszt találomra választott pontjával két részre osztva, mi a keletkezett szakaszok közül a kisebbiknek az eloszlásfüggvénye?

49. FELADAT: Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máskor;} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \geq 1, \\ 0, & \text{máskor;} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x}{x+1}, & \text{ha } x \geq 0; \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 4x^3 e^{-x^4}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 2e^{-x}(1 - e^{-x}), & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

(g)

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in R;$$

(h)

$$f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máskor;} \end{cases}$$

(i)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x^2}, & \text{ha } x > 0; \end{cases}$$

(j)

$$f(x) = \frac{\lambda^n}{2(n-1)!} |x|^{n-1} e^{-\lambda |x|}, \quad x \in R, \quad \lambda > 0.$$

50. Feladat: Az A, a, b állandók milyen értékei esetén sűrűségfüggvény az
$$f(x) = \frac{A}{1 + a(x-b)^2}, \quad x \in R?$$

51. Feladat: Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{a}{x^3}, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$
Határozzuk meg az a együttható értékét! Számítsuk ki, hogy milyen x értékénél adódik $P(\xi \geq x) = \frac{1}{2}$!

52. Feladat: Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 2, \\ \frac{A}{(1-x)^2}, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$
Határozzuk meg az A együttható értékét! Mekkora valószínűséggel esik a ξ a $(2, 3)$ intervallumba?

53. Feladat: Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} A \cos \frac{x}{2}, & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(a) Mekkora az A érték?

(b) Írjuk fel az eloszlásfüggvényt!

(c) Számítsuk ki a $P\left(\xi > \frac{\pi}{2}\right)$ valószínűségét!

54. Feladat: Az $F(x)$ eloszlásfüggvényt 0-ra szimmetrikusnak nevezzük, ha sűrűségfüggvényére
$$f(x) = f(-x).$$
Bizonyítsuk be, hogy
$$F(x) + F(-x) = 1!$$

55. Feladat: Legyen ξ-nek az eloszlásfüggvénye $F(x)$, amely folytonos és szigorúan növekvő. Határozzuk meg az $\eta = F(\xi)$ valószínűségi változó eloszlását!

56. FELADAT: Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye folytonos, "örökifjú", azaz tetszőleges $t, s > 0$ esetén

$$P(\xi > t + s | \xi > t) = P(\xi > s).$$

Határozzuk meg a ξ eloszlásfüggvényét!

57. FELADAT: Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta = \xi^2$ eloszlását!

58. FELADAT: Legyen ξ normális eloszlású m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy az $\eta = a\xi + b$ szintén normális eloszlású, ha $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$!

59. FELADAT: Csapágygolyók átmérője normális eloszlású valószínűségi változó m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Írjuk fel a golyók felszínének eloszlását jellemző sűrűségfüggvényt!

60. FELADAT: Legyen ξ egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $2\xi + 3$ sűrűségfüggvényét!

61. FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy ha ξ egyenletes eloszlású a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, akkor $\eta = \tan \xi$ egy $(1, 0)$ paraméterű Cauchy-eloszlású[1] valószínűségi változó!

62. FELADAT: Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Határozzuk meg a $\eta = e^{\xi}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

2.2 Várható érték és szórás

63. FELADAT: A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei : -1, 0, 1, 2. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. Számítsuk ki a várható értéket és a szórást!

64. FELADAT: Egy kockával addig dobunk, amíg hatost nem kapunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk?

[1] Azaz, sűrűségfüggvénye: $f(x) \doteq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.

65. FELADAT: Legyen ξ olyan valószínűségi változó , amely lehetséges értékei: $\frac{(-1)^k 2^k}{k}$, ahol $k = 1, 2, \dots$. A hozzájuk tartozó valószínűségek rendre: $p_k = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \dots$. Mutassuk meg, hogy a $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ valószínűség eloszlás, de nem létezik várható értéke!

66. FELADAT: A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $0, 1, 2, \dots$ és a hozzájuk tartozó valószínűségek $p_0, p_1, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy ha $M(\xi) < \infty$, akkor

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k)!$$

67. FELADAT: Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, ill. p_2 valószínűséggel ér el találatot, ahol $p_1 < p_2$. Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, nyer. Mennyi a valószínűsége, hogy az ügyesebb nyer? Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést adnak le?

68. FELADAT: Legyen ξ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $\frac{1}{1+\xi}$ valószínűségi változó várható értékét!

69. FELADAT: Milyen A értékre lehet az

$$f(x) = \frac{A}{1 + x^2}, \quad x \in R,$$

függvény sűrűségfüggvény? Mutassuk meg, hogy az e sűrűségfüggvénnyel jellemzett valószínűségi változónak nem létezik várható értéke!

70. FELADAT: Egy folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{3}{x^4}, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Számítsuk ki a várható értéket és a szórásnégyzetet!

71. FELADAT: Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1, \\ \frac{2}{x^3}, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak létezik várható értéke, de szórása nem!

72. FELADAT: Két pontot válasszunk találomra egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét és szórásnégyzetét!

73. FELADAT: A gázmolekulák sebességét tekintsük olyan valószínűségi változónak, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2 x^2}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki a várható értéket!

74. FELADAT: Számítsuk ki az

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in R$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét!

75. FELADAT: Számítsuk ki a következő sűrűségfüggvénnyel jellemzett eloszlások várható értékét és szórását!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

76. FELADAT: Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg $M(\xi)$-t és $D^2(\xi)$-t!

77. FELADAT: Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy létezik $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$ és $D(\eta)$. Határozzuk meg $D^2(\xi\eta)$-t!

78. FELADAT: Számítsuk ki az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó n-edik momentumát!

2.3 A Csebisev-egyenlőtlenség és környéke

79. FELADAT: A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye csak a $(0, 6)$ intervallumon különbözik 0-tól, és $M(\xi) = 1$. Igazoljuk, hogy

$$P(\xi < 5) \geq \frac{4}{5}!$$

80. FELADAT: Egy forgalmas pályaudvaron meghatározott időben egy újságárus egy óra alatt eladott újságainak száma Poisson eloszlású $\lambda = 64$ várható értékkel. Adjunk alsó becslést a $P(48 < \xi < 80)$ valószínűségre, ha ξ az eladott olvasnivalók számát jelöli!

81. FELADAT: Egy ξ valószínűségi változóra $M(\xi) = 50$, $D(\xi) = 20$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel tér el ξ a várható értékétől abszolút értékben legalább 60 egységgel! Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha ξ normális eloszlású?

82. FELADAT: Egy ξ pozitív valószínűségi változóra teljesül, hogy $M(\xi) = 10$ és $D(\xi) = 10$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel vesz fel ξ 55-nél nem kisebb értéket! Mekkora a valószínűség pontos értéke, ha ξ exponenciális eloszlású?

83. FELADAT: Egy textilgyárban előállított szövet hosszának várható értéke 35 m, szórása pedig 0.3 m. Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a szövet hossza legalább 1 m-rel eltér a várható értéktől?

84. FELADAT: Egy forgalmas útkereszteződésben áthaladó gépkocsik száma legyen ξ. Tegyük fel, hogy $M(\xi) = 500$ és $D(\xi) = 25$. Legalább mekkora valószínűséggel esik 400 és 600 közé az 1 óra alatt áthaladó gépkocsik száma?

85. Feladat: Adjunk alsó, ill. felső becslést a

$$P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) \quad \text{ill.} \quad P(|\xi - M(\xi)| < 3D(\xi))$$

valószínűségekre! Számítsuk ki a $P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi))$ valószínűséget, ha ξ

(a) normális eloszlású,

(b) exponenciális eloszlású,

(c) egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$-n,

(d) Poisson eloszlású és $M(\xi) = 0.9$!

86. Feladat: Hányszor kell egy szabályos érmét feldobnunk, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.9 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől?

87. Feladat: Hányszor kell egy szabályos kockát feldobnunk, hogy a hatos dobás valószínűségét az esemény relatív gyakorisága legalább 0.8 valószínűséggel 0.1-nél kisebb hibával megközelítse?

88. Feladat: A gyártmányok 10%-a hibás. A minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak a tételt, ha ebben legfeljebb 12% a hibás. Mekkora legyen a tételben a gyártmányok darabszáma, hogy a hibás áruk relatív gyakorisága a megfelelő valószínűségtől legalább 0.95 valószínűséggel ne térjen el 0.02-nél nagyobb értékkel?

89. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha ξ_n egy n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4\epsilon^2 n}!$$

90. Feladat: Valamely társadalmi rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell elvégezni ahhoz, hogy a megfigyelésből adódó arány a valódi aránytól 95% valószínűséggel legfeljebb 1%-kal térjen el?

91. FELADAT: Legyen a $g(x), x \geq 0$ függvény nemnegatív és monoton növekvő. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós valószínűségi változóra igaz, hogy

$$P(|\xi| \geq \epsilon) \leq \frac{M(g(|\xi|))}{g(\epsilon)},$$

feltéve, hogy $M(g(\xi)) < \infty$.

2.4 Többdimenziós eloszlások

92. FELADAT: Végezzünk két kockával dobásokat. A ξ jelentse az egyik kockán dobott számot, η jelentse a másikon dobottat. Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását!

93. FELADAT: A (ξ, η) eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a ξ és η peremeloszlásokat! Számítsuk ki a $P(\xi < 1, \eta < 1)$ valószínűséget!

94. FELADAT: állapítsuk meg, lehet-e sűrűségfüggvény az

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}}$$

függvény!

95. FELADAT: Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Számítsuk ki $\xi + \eta$ és $\xi - \eta$ várható értékét!

96. FELADAT: Legyen (ξ, η) normális eloszlású

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}}$$

sűrűségfüggvénnyel. Számítsuk ki $M(\xi\eta)$-t!

97. Feladat: Számítsuk ki az

$$\eta_1 = 1 - \xi_1 \quad \text{és} \quad \eta_2 = 1 - \xi_2$$

korrelációs együtthatóját, ha $R(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}$!

98. Feladat: Adott az A és B esemény. Ismeretes, hogy $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$ és $P(B|A) = \frac{1}{4}$. Legyen $\xi = 1$, ha A bekövetkezik, és $\xi = 0$, ha nem következik be. Hasonlóan, legyen $\eta = 1$, ha B bekövetkezik és $\eta = 0$, ha B nem következik be. Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t! Független-e η és ξ?

99. Feladat: Egy dobozban négy jó, három hibás és három selejtes termék van. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két terméket. Jellemezze ξ az első húzás eredményét, mégpedig $\xi = 0$, ha selejteset húzunk, $\xi = 1$, ha hibásat, $\xi = 2$, ha jót. Jellemezze η a második húzás eredményét ugyanúgy.

(a) Független-e ξ és η?

(b) Mekkora ξ szórása?

100. Feladat: A (ξ, η) lehetséges értékeit a $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ és $(4,0)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében lévő egész koordinátájú pontok alkotják. A (ξ, η) ezeket a pontokat egyenlő valószínűséggel veszi fel – a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki az $R(\xi, \eta)$-t. Független-e ξ és η?

101. Feladat: A (ξ, η) lehetséges értékei: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ és $(0,-1)$. A (ξ, η) ezeket az értékeket egyenlő valószínűséggel veszi fel.

(a) Független-e ξ és η?

(b) Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t!

102. Feladat: Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x + y^2), & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t!

103. FELADAT: Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}.$$

Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t!

104. FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy ha

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)e^{-y^2} + \left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)e^{-x^2}\right]$$

akkor $f_\xi(x) = f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $R(\xi, \eta) = 0$, de ξ és η nem függetlenek!

105. FELADAT: Legyenek ξ és η független λ ill. μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\zeta = \xi + \eta$. Határozzuk meg $R(\xi, \zeta)$-t!

106. FELADAT: Azt mondjuk, hogy (ξ, η) 2-dimenziós normális eloszlású, ha az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2xy}{\sigma_1\sigma_2}\rho + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)},$$

ahol $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ és $|\rho| < 1$

(a) Bizonyítsuk be, hogy $\xi \in \mathcal{N}(0, \sigma_1)$, $\eta \in \mathcal{N}(0, \sigma_2)$ és $R(\xi, \eta) = \rho$!

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha $R(\xi, \eta) = 0$, akkor ξ és η függetlenek!

3 Nevezetes eloszlások

3.1 Binomiális eloszlás

107. FELADAT: Annak valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0.75.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy héten (hat napon) keresztül csak három napon át lesz az ellátás zavartalan?

(b) Mennyi lesz az egy heti zavartalan ellátású napok számának várható értéke?

108. FELADAT: 100 db alkatrész közül 2 db selejtes. Egymás után ötször veszünk ki 5 elemű mintát, véletlenszerűen visszatevéssel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind az ötször csupa jó alkatrészt húzunk?

109. FELADAT: Egy alkatrészhalmazból hatelemű mintát vettünk visszatevéssel. Annak valószínűsége, hogy a minta 3 db selejtet tartalmaz $\frac{4}{25}$. Mennyi a selejtarány?

110. FELADAT: Egy automata gépnél megfigyelték, hogy naponta átlagosan 12 db termék lesz selejtes, ezek számának szórása 3.41.

(a) Hány terméket készít naponta a gép?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy napon a selejtes termékek száma tíznél kevesebb?

111. FELADAT: Hányszor dobjunk fel egy kockát, ha azt akarjuk, hogy $\frac{1}{2}$-nél ne legyen kisebb annak a valószínűsége, hogy a hatos dobások száma legalább kettő legyen?

112. FELADAT: Egy forgalmas postahivatalban egy év alatt 1017 címzetlen levelet adtak fel. Mekkora a valószínűsége, hogy egy nap kettőnél több címzés nélküli levelet adtak fel?

3.2 Poisson eloszlás

113. FELADAT: Egy augusztusi éjszakán átlag tíz percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?

114. FELADAT: Egy konzervgyár valamelyik üveggyártól egyliteres üvegeket rendel. 200 db üveg közül átlagosan három üveg selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 1000 üveget átnézve, abban pontosan 10 selejtes üveget találunk?

115. FELADAT: Kalácssütéskor 1 kg tésztába 30 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 dkg-os szeletben kettőnél több mazsola lesz?

116. FELADAT: Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba található. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott lapon nem lesz sajtóhiba?

117. FELADAT: Egy ruhaszövet anyagában 100 m-enként átlag 5 hiba van. Egy 300 m-es szövetet 3 m-es darabokra vágnak. Előreláthatólag hány hibátlan darab lesz ezek között?

118. FELADAT: Egy áruházban adott Δt hosszúságú időtartam alatt megjelent látogatók száma Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Ismeretes, hogy egy látogató p valószínűséggel vásárol valamit. Mennyi a valószínűsége, hogy adott Δt időintervallumban éppen k személy vásárol?

119. FELADAT: Bizonyítsuk be, hogy ha ξ egy λ paraméterű, η pedig egy μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, amelyek egymástól függetlenek, akkor $\xi+\eta$ egy $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó! Általánosítsuk a feladatot n valószínűségi változó esetére!

120. FELADAT: Legyen ξ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az

$$M\left(\frac{1}{1+\xi}\right)$$

várható értéket!

3.3 Egyenletes eloszlás

121. FELADAT: Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől szórásánál nagyobb értékkel tér el?

122. FELADAT: A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és $M(\xi) = D^2(\xi) = 4$. Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét!

123. FELADAT: A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $(a, 5)$ intervallumon. Ismeretes, hogy

$$P\left(\xi \geq M(\xi^2 - 2\xi + 1)\right) = \frac{1}{6}.$$

Mekkora a $P(\xi \geq M(\xi - 1))$ valószínűség?

3.4 Exponenciális eloszlás

124. FELADAT: Egy ξ valószínűségi változó jelenti annak az útnak a hosszát, amelyet egy gépkocsi az első műszaki hibáig megtesz. Tegyük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású 500 km várható értékkel. Számítsuk ki, mennyi a valószínűsége annak, hogy ξ a várható értékénél kisebb értéket vesz fel!

125. FELADAT: Mutassuk meg, hogy az exponenciális eloszlás rendelkezik az "örökifjú" tulajdonsággal, azaz

$$P(\xi < x + t | \xi \geq t) = P(\xi < x),$$

illetve

$$P(\xi \geq x + t | \xi \geq t) = P(\xi \geq x),$$

ahol $x, t > 0$.

126. FELADAT: Legyenek ξ_i-k egymástól független, λ_i paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $i = 1, 2, \ldots, n$. Mutassuk meg, hogy

$$P(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)x},$$

ahol $x > 0$.

127. FELADAT: Egy szövőgép 400 szállal dolgozik. Az egyes szálak "élettartama", tehát az az idő, amíg az adott szál el nem szakad, exponenciális eloszlású, minden szálra 150 óra várható értékkel. Feltételezve, hogy a szálak egymástól függetlenek, mennyi a valószínűsége, hogy a gép fonalszakadás miatt a megindulástól számított három órán belül megáll?

128. FELADAT: Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra hat percnél többet kell várakozni, a tapasztalat szerint 0.1. Feltételezve, hogy a várakozási idő exponenciális eloszlású, mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkező gépkocsi három percen belül sorra kerül?

129. FELADAT: Legyen a ξ valószínűségi változó λ paraméterű exponenciális eloszlású. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók sűrűségfüggvényét:

(a) $\sqrt{\xi}$,

(b) ξ^2,

(c) $\frac{1}{\lambda} \ln \xi$!

3.5 Normális eloszlás

130. FELADAT: Legyen a ξ normális eloszlású $m = 3$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Mekkora legyen az A szám, ha azt kívánjuk, hogy a ξ a $(0, A)$ intervallumba legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel essen?

131. FELADAT: Hogyan jellemezhetőek azok a normális eloszlású ξ valószínűségi változók, melyekre 0.95 valószínűséggel teljesül az, hogy a ξ-nek a várható értékétől való eltérése egynél kisebb?

132. FELADAT: Egy fafeldolgozó telepen deszkákat készítenek. Ezek hossza normális eloszlású $m = 400$ cm , $\sigma = 3$ cm.

(a) A deszkák hány százaléka lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a deszkák hossza a 400 cm-től legfeljebb 2.5 cm-rel tér el?

133. FELADAT: Egy löveg tüzel egy 1200 m távoli célpontra. A lőtávolság ingadozása az 1200 m körül normális eloszlású 40 m szórással. Hatásosnak tekinthető egy lövés, ha a találat a célhoz 50 m-nél közelebb esik. A lövések hány százaléka lesz hatástalan?

134. FELADAT: Valamely gép 15 mm átmérőjű alkatrészeket gyárt 0.5 mm szórással. Normális eloszlásúnak tekintve a legyártott alkatrész átmérőjét, mekkora valószínűséggel gyárt a gép a névleges érték 5 százalékánál nagyobb eltérésű alkatrészt?

A megoldások

4 Elemi feladatok

4.1 Klasszikus valószínűségi mezők

A következő feladatok megoldásához **klasszikus** (vagy **kombinatorikus**[2]) valószínűségi mezőket alkalmazunk. Ezek jellemzői, hogy végesek és az elemi események valószínűségei egyenlőek. Ennek következtében a valószínűségek a

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}}$$

formulával számolhatóak.

A következőkben feltesszük, hogy az olvasó az alapvető kombinatorikai fogalmakkal tisztában van (gyakran fogunk rájuk hivatkozni).

1. FELADAT: Tíz könyvet egy polcon pontosan $n = 10!$-féle sorrendben lehet elhelyezni. Ha a kiválasztott három könyv elhelyezését is figyelemmel kísérjük, akkor azok az esetek, amikor egymás mellé kerülnek, a következő módon számlálhatóak le: a kiválasztott könyvek közül az első kötet nyolc helyre kerülhet; másrészt mind a kiválasztott, mind pedig a ki nem választott könyvek sorrendje tetszőleges lehet ($3! \cdot 7!$ lehetőség), tehát a kedvező esetek száma $k = 8 \cdot 3! \cdot 7!$. Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{8 \cdot 3! \cdot 7!}{10!} = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}.$$

2. FELADAT: Az első lapon 10, a második lapon 9 számjegy lehet, tehát az összes esetek száma $n = 10 \cdot 9 = 90$. A tizennyolccal osztható számok száma egy és száz között öt $(18, 36, 54, 72, 90)$. Miután ezek közül mindegyik kihúzható a feladatban említett módon (mivel számjegyeik különbözőek), a kedvező esetek száma ugyanennyi, $k = 5$. Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}.$$

3. FELADAT: A kihúzott lapok közül akkor zöld legalább egy, ha pont egy zöld vagy pont kettő zöld vagy pont három zöld; ezek az események nyilvánvalóan páronként kizáróak. Vizsgáljuk a megfelelő események valószínűségét! Három lapot egy 32 lapos kártyacsomagból $n = \binom{32}{3}$ féleképpen

[2] A “kombinatorikus” jelző a számolások szükségszerűen kombinatorikus jellegére utal.

húzhatunk ki; ennyi az összes esetek száma. Ezek közül azon esetek száma, amikor pontosan m (ahol $m = 1, 2, 3$) zöld, a következő módon számlálható le: az összes zöld lapból m-et $\binom{8}{m}$-féleképp lehet kiválasztani; a 24 nem zöld lapból a maradék $3-m$ lap pedig $\binom{24}{3-m}$-féleképp választható ki. Így annak a valószínűsége, hogy három kihúzott lap közül pontosan m zöld

$$P_m = \frac{\binom{8}{m} \cdot \binom{24}{3-m}}{\binom{32}{3}}.$$

Innen a keresett valószínűség:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{8}{3} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{32}{3}} = 0.59.$$

4. FELADAT: n számozott golyó $n!$-féleképp húzható ki egy dobozból.

(a) A kedvező esetek száma pont egy (mert csak egy emelkedő sorrend létezik), tehát

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{1}{n!}.$$

(b) Ha megköveteljük, hogy a k-val jelölt golyót k-adiknak húzzuk ki, akkor csak a maradék $k-1$ golyó kihúzása tetszőleges, tehát a keresett valószínűség

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

5. FELADAT: Egy ültetési sorrend teljesen meghatározott, ha a férfiak helyét megadjuk. Mivel nem teszünk közöttük különbséget, ez $\binom{10}{5}$-féleképpen lehetséges. “Jó” ültetési sorrend összesen kettő van:

$$\triangle \circ \triangle \circ \triangle \circ \triangle \circ \triangle \circ,$$

ill.

$$\circ \triangle \circ \triangle \circ \triangle \circ \triangle \circ \triangle,$$

ahol $\triangle=$ férfi, $\circ=$nő. Tehát a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{2}{\binom{10}{5}} = \frac{2}{252}.$$

6. FELADAT: Mivel a szereplőket a magasságuk megkülönbözteti, az ültetési sorrendek száma $n!$. A számunkra kedvező eseteket a következő módon számláljuk le: nevezzük a legkisebb, ill. legnagyobb embert *kiválasztottaknak*. A kiválasztottak közül az első n helyre ülhet le; mind a kiválasztottak, mind pedig a ki nem választottak sorrendje lényeges, tehát a kedvező esetek száma $n \cdot 2! \cdot (n-2)!$. Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{n \cdot 2! \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}.$$

7. FELADAT: Jelölje a fehér golyók számát W, a fekete golyókét pedig B; összesen tehát $6 + W + B$ golyónk van. A megadott valószínűségek alapján tudjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{B+W}{6+B+W} &= \tfrac{3}{5} \\ \frac{6+B}{6+B+W} &= \tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

A fenti egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy $B = 4$ és $W = 5$. Tehát 4 darab fekete és 5 fehér golyó van az urnában.

8. FELADAT: Legyen a szükséges fehér golyók száma F; ekkor az összes golyók száma $5 + F$. Annak a valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk

$$P = \frac{F}{5+F}.$$

A feladat alpján az

$$\frac{F}{5+F} > 0.9$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mint az egyszerűen látható, a megoldás $F > \frac{4.5}{0.1} = 45$; azaz legalább 46 fehér golyót kell a pirosakhoz hozzátennünk.

9. FELADAT: Az első feladatunk a csapatok létszámainak meghatározása; jelölje x az első, y pedig a második csapat létszámát. A feladat alapján

$$\begin{aligned} \binom{x+y}{2} &= 136 \\ \binom{x}{2} + \binom{y}{2} &= 66. \end{aligned}$$

Az első egyenletből (akár egy másodfokú egyenletre való redukcióval, akár a Pascal-háromszög alkalmazásával) egyből kapjuk, hogy $x + y = 17$. A második egyenlet alapján

$$66 = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = \frac{(x^2+y^2)-(x+y)}{2} = \frac{(x+y)^2 - 2xy - (x+y)}{2} = \frac{17^2-17}{2} - xy = 136 - xy,$$

amiből $xy = 70$. A gyökök és együtthatók közötti ismert összefüggés alapján x ill. y a

$$t^2 - 17t + 70 = 0$$

másodfokú egyenlet megoldása; tehát $x = 10$ és $y = 7$ (vagy megfordítva, persze). A keresett valószínűség meghatározására ezek után az ismert formulát alkalmazzuk:

$$P = \frac{\binom{x}{2}\binom{y}{0}}{\binom{x+y}{2}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{7}{0}}{\binom{17}{2}} = \frac{45}{136}.$$

10. Feladat: Annak a valószínűsége, hogy 20 + 30 égőből kiválasztva kettőt a kiválasztottak közül m darab ($m = 0, 1, 2$) legyen 40 W az ismert formula szerint

$$P_m = \frac{\binom{20}{m}\binom{30}{2-m}}{\binom{20+30}{2}}.$$

Ezek szerint:

(a) hogy mindkét kiválasztott égő 40 W-os lesz, annak valószínűsége:

$$P_2 = \frac{\binom{20}{2}\binom{30}{0}}{\binom{50}{2}} = \frac{190}{1225} = \frac{38}{245} \approx 0.155.$$

(b) hogy egyik sem 40 W-os:

$$P = \frac{\binom{20}{0}\binom{30}{2}}{\binom{50}{2}} = \frac{435}{1225} \approx 0.355$$

(c) hogy csak az egyik 40 W-os:

$$P = \frac{\binom{20}{1}\binom{30}{1}}{\binom{50}{2}} \approx 0.49.$$

11. Feladat: Az összes lehetőségek száma $6 \cdot 6 = 36$. Ebből a kedvező esetek $(1+6,\ 2+5,\ 3+4,\ 4+3,\ 5+2,\ 6+1)$ száma 6. Tehát a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

4.2 Geometriai valószínűség

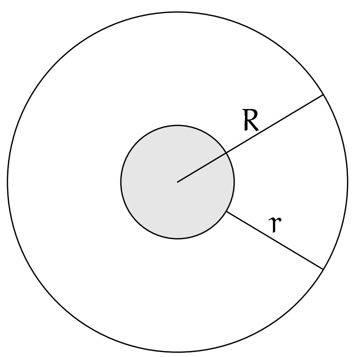
A geometriai valószínűség kiszámításánál az eseménytér elemeit valamely T_Ω geometriai alakzat pontjaival azonosítjuk, majd feltesszük, hogy egy $A \subset \Omega$ esemény valószínűsége arányos a neki megfelelő T_A részhalmaz mértékével (hosszával, területével vagy térfogatával). Így a keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{\mu(T_A)}{\mu(T_\Omega)},$$

ahol μ a megfelelő geometriai mértéket jelöli.

12. Feladat: Az ívhosszak aránya alapján a keresett valószínűség $\frac{1}{4}$.

13. Feladat: Az eseménytér pontjai – az r sugarú körlap középpontjának lehetséges helyzetei – egy R sugarú körlapon helyezkednek el. Az r sugarú

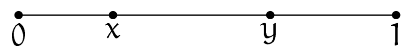


1. ábra: 13. feladat

körlapot akkor tartalmazza az R sugarú körlap, ha annak középpontja egy $R - r$ sugarú körlapon belül van (lásd 1. ábra). A keresett valószínűség a két körlap területének aránya, tehát

$$P = \frac{\mu(T_A)}{\mu(T_\Omega)} = \frac{(R-r)^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi} = \frac{(R-r)^2}{R^2}.$$

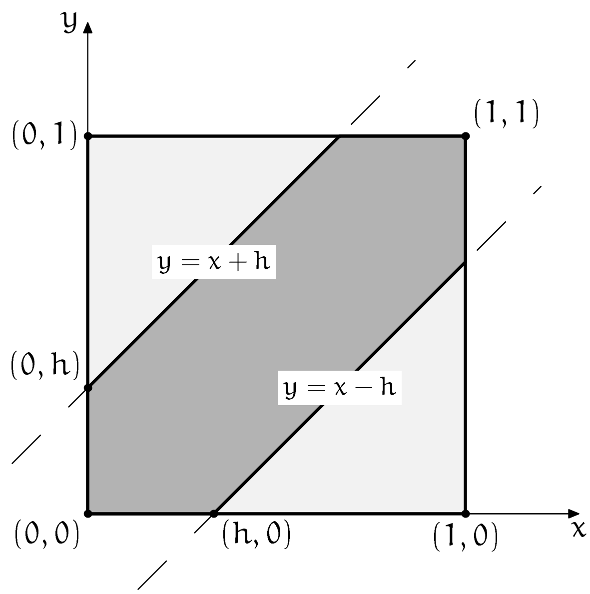
14. Feladat: Jelölje a két pont távolságát a szakasz kezdőpontjától x és y (lásd 2. ábra). Ekkor az eseménytér tetszőleges elemét azonosíthatjuk



2. ábra: 14 feladat

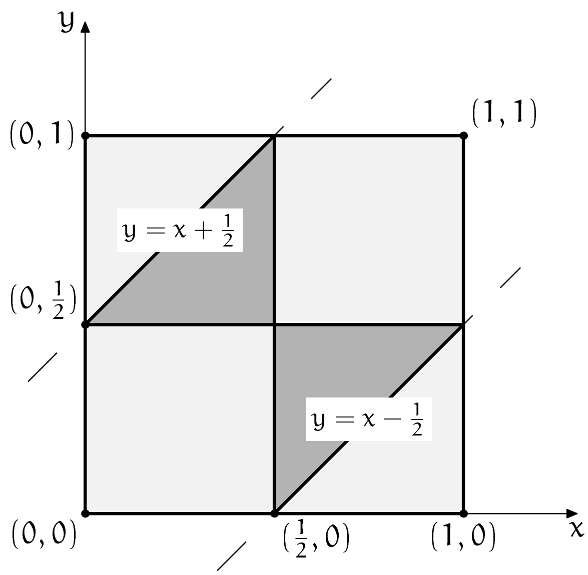
az egységnégyzet (x, y) koordinátájú pontjával (lásd 3. ábra). Annak valószínűségét keressük, hogy $|x - y| < h$, vagyis, hogy $y < x + h$ és $y > x - h$. Ha ezt koordinátarendszerben ábrázoljuk, jól látszik a területek közti összefüggés. A keresett valószínűség tehát:

$$P = \frac{\mu(T_A)}{\mu(T_\Omega)} = \frac{1 - 2\frac{(1-h)^2}{2}}{1} = 1 - (1-h)^2 = 2h - h^2.$$



3. ábra: 14. feladat

15. Feladat: Akárcsak az előbb, jelölje a két pont távolságát a szakasz kezdőpontjától x és y. Két eset lehetséges.



4. ábra: 15. feladat

1. Ha $y \geq x$, akkor a keletkezett szakaszok hosszai x, $(y - x)$ és $(1 - y)$. Háromszög csak akkor szerkeszthető ezekből, ha bármely két szakasz együttes hossza nagyobb a harmadik szakasznál, azaz

$$\begin{aligned} x &< (y - x) + (1 - y) \equiv 1 - x \\ y - x &< x + (1 - y) \\ 1 - y &< x + (y - x) \equiv y. \end{aligned}$$

   Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} x &< \frac{1}{2} \\ y &< x + \frac{1}{2} \\ y &> \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Az $y < x$ esetben – hasonló megfontolások alapján – az

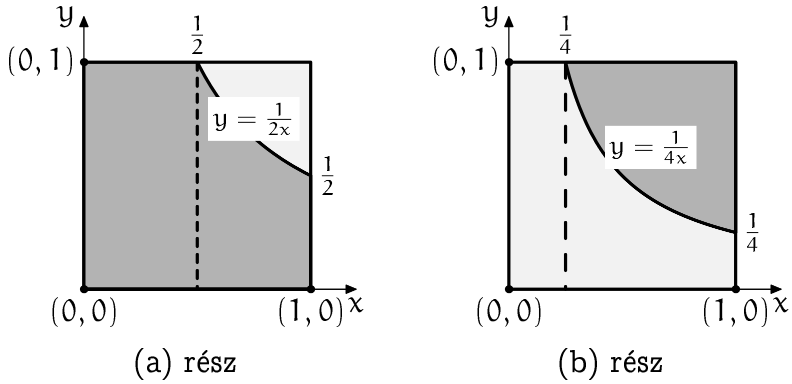
$$\begin{aligned} y &< \frac{1}{2} \\ x &< y + \frac{1}{2} \\ x &> \frac{1}{2} \end{aligned}$$

feltételek adódnak.

Most, az előző feladat megoldásához hasonlóan, a keresett valószínűség a fenti feltételek valamelyikének megfelelő (x, y) pontok A halmazának a területének és az egységnégyzet területének aránya:

$$P = \frac{\mu(T_A)}{\mu(T_\Omega)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}.$$

16. Feladat: Az előző feladatoknál alkalmazott modellt és jelöléseket használjuk.



5. ábra: 16. feladat

(a) A feltétel alapján $xy < \frac{1}{2}$, azaz $y < \frac{1}{2x}$. A valószínűség a megfelelő területek aránya, tehát (lásd 5. ábra)

$$P = \frac{\mu(T_A)}{\mu(T_\Omega)} = \frac{\mu(T_A)}{1} = T_A =$$

$$\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

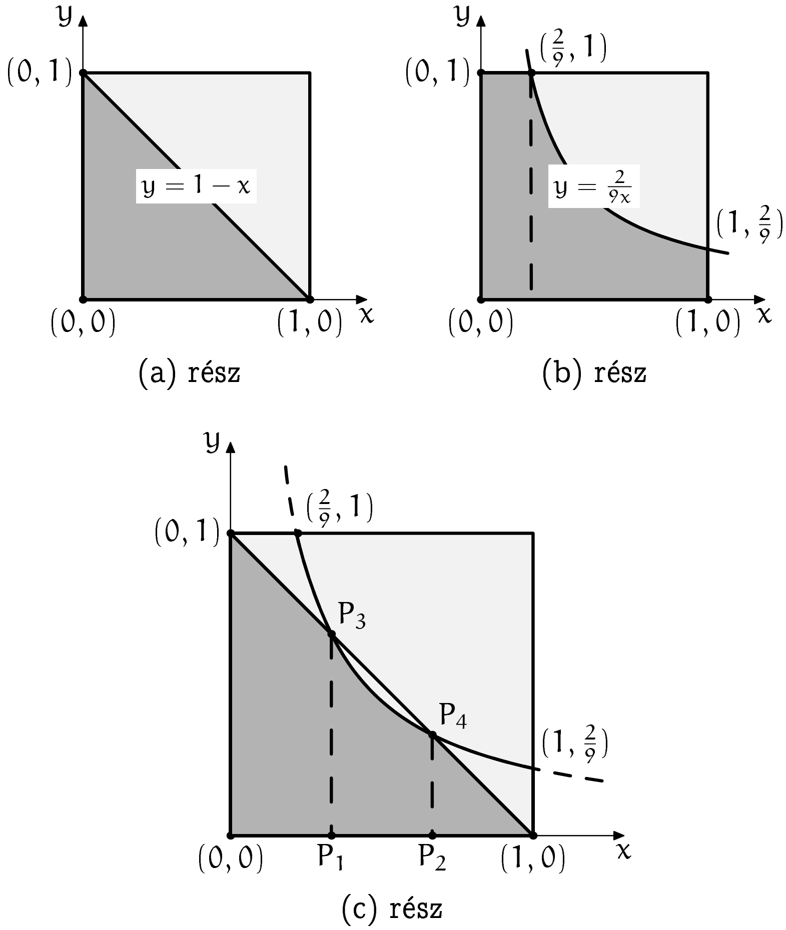
(b) Hasonlóan, a feltételek alapján $xy > \frac{1}{4}$, vagyis $y > \frac{1}{4x}$. A keresett valószínűséghez ismét területet számolunk (lásd 5. ábra)

$$P = \frac{3}{4} - \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{4x} dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\ln 4.$$

17. FELADAT: Ismét a “klasszikus” receptet (és jelöléseket) alkalmazzuk.

(a) A feltétel alapján $x + y < 1$, tehát $P = \frac{1}{2}$ (lásd 6. ábra).



6. ábra: 17. feladat

(b) A feladat szerint $xy < \frac{2}{9}$, tehát a keresett valószínűség (lásd 6. ábra)

$$P = \frac{2}{9} + \int_{\frac{2}{9}}^{1} \frac{2}{9x} dx = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\ln 9 - \frac{2}{9}\ln 2.$$

(c) A következő feltételeknek kell teljesülnie:

$$\begin{aligned} x + y &< 1 \\ xy &< \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

A feltételeket teljesítő pontok halmazának, a "satírozott" rész területét kell meghatároznunk. Csak a a $P_1P_2P_3P_4$ alakzat területének meghatározása nem triviális, tehát erre koncentrálunk. Az első lépés a P_1 és P_2 pontok koordinátáinak kiszámítása. Ehhez meg kell határoznunk a P_3 és P_4 pontok koordinátáit, azaz az

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ xy &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásait. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti ismert összefüggések alapján a fenti x ill. y változók a

$$t^2 - t + \frac{2}{9} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei; egyszerű számolások után kapjuk, hogy a keresett koordináták $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, ill. $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Ezek szerint a keresett terület:

$$P_1 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x}\,dx = \frac{2}{9}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{9}\left[\ln x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}\ln 2.$$

és így a meghatározandó valószínűség

$$P = P_1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}+1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\ln 2$$

4.3 Vegyes feladatok

18. FELADAT: A közismert

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \tag{1}$$

és $P(A+B) \le 1$ összefüggések alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) \ge 0.7 + 0.9 - 1 \equiv 0.6.$$

A következőkben gyakran alkalmazni fogjuk (1) következő általánosítását, az úgynevezett *szitaformulát*. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$

teteszőleges események; ekkor

$$P(A_1+\dots+A_n)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{\substack{k\neq l\\ k,l\in 1\dots n}}P(A_kA_l)+$$

$$\sum_{\substack{k\neq l,l\neq m,k\neq m\\ k,l,m\in 1\dots n}}P(A_kA_lA_m)\pm\dots\pm P(A_1A_2\dots A_n) \quad (2)$$

A szitaformula indukcióval bizonyítható; vegyük észre, hogy az $n=2$ eset pont az (1) formula. A bizonyítás közismert, így itt nem végezzük el, de – erzékeltetendő az általános gondolatmenetet – bizonyítjuk a formulát az $n=3$ esetre. Legyenek tehát A_1, A_2, A_3 tetszőleges események; ekkor az (1) egyenlőség alapján

$$\begin{gathered}P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1+(A_2+A_3))=\\ P(A_1)+P(A_2+A_3)-P(A_1(A_2+A_3))=\\ P(A_1)+[P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)]-P(A_1A_2+A_1A_3)=\\ [P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_2A_3)]-\\ [P(A_1A_2)+P(A_1A_3)-P(A_1A_2A_1A_3)]=\\ P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-[P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_2A_3)]+\\ P(A_1A_2A_3)\end{gathered}$$

.

19. Feladat: Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a k-adik lapocskát k-adiknak húzzuk ki. Első lépésként kiszámítjuk a $P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_m})$ valószínűséget. Az $A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_m}$ esemény jelentése, hogy az $i_1i_2\dots i_m$ lapocskák mind megfelelő sorrendben jönnek ki; a maradék lapocskák sorrendje $(n-m)!$-féle lehet. Mivel az összes húzási sorrendek száma $n!$, a keresett valószínűség

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_m})=\frac{(n-m)!}{n!}.$$

A feladatban az $A_1+\dots+A_n$ esemény valószínűségét keressük; a szitaformula szerint

$$P(A_1+\cdots+A_n)=\sum_{k=1}^{n}P_{A_k}-\sum_{\substack{k\neq l\\ k,l\in 1\dots n}}P(A_kA_l)+$$

$$\sum_{\substack{k\neq l, l\neq m, k\neq m\\ k,l,m\in 1\dots n}}P(A_kA_lA_m)\pm\cdots\pm P(A_1A_2\dots A_n)=$$

$$n\frac{(n-1)!}{n!}-\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}+\binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!}\pm\ldots\pm\binom{n}{n}\frac{(n-n)!}{n!}=$$

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\pm\ldots\pm\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

Érdemes megjegyezni, hogy

$$e^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!},$$

tehát az $n\to\infty$ esetben

$$\lim_{n\to\infty}P(A_1+\cdots+A_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}=1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\equiv 1-\frac{1}{e}.$$

20. FELADAT: Mielőtt a feladatok megoldásához kezdenénk, néhány általános jellegű megjegyzést teszünk. Sorszámozzuk meg a hallgatókat, ill. indexeiket 1-től n-ig. Egy sorrend, ahogy a hallgatók az indexeiket felvehetik az asztalról ekkor leírható $1\dots n$ egy permutációjával; más szóval az Ω eseménytér az $1\dots n$ számok összes permutációinak halmaza. Legyen $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ az $\{1,\dots,n\}$ halmaz egy k-elemű részhalmaza, és jelölje $A_{i_1,\dots,i_k}$ azt az eseményt, hogy az $i_1,i_2,\dots,i_k$ sorszámú hallgatók a saját indexüket húzzák és a megmaradó $n-k$ számú hallgatók egyike sem húzza saját indexét; legyen továbbá J_{n-k} ennek az eseménynek mint Ω részhalmazának, a számossága[3]. Nyilvánvaló, hogy az $A_{i_1,\dots,i_k}$ esemény valószínűsége

$$P(A_{i_1,\dots,i_k})=\frac{J_{n-k}}{n!}.$$

Határozzuk meg most a J_{n-k} számot! Ha megfeledkezünk az $i_1,\dots,i_k$ sorszámú hallgatókról, akkor, egyrészről, annak a B_{n-k} eseménynek a valószínűsége, hogy a maradék $n-k$ hallgató közül senki sem húzza a saját

[3]Nyilvánvaló, hogy $A_{i_1,\dots,i_k}$ k számossága független az $\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$ halmaz elemeinek megválasztásától.

indexét, pontosan

$$P(B_{n-k}) = \frac{J_{n-k}}{(n-k)!}.$$

Másrészt, B_{n-k} annak a C_{n-k} eseménynek a komplementere, amely annak felel meg, hogy a maradék hallgatók közül legalább egy a saját indexét húzza. A 19. feladat alapján tudjuk ennek az eseménynek a valószínűségét, tehát

$$\frac{J_{n-k}}{(n-k)!} = P(B_{n-k}) = 1 - P(C_{n-k}) = 1 - \sum_{j=1}^{n-k} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Innen:

$$J_{n-k} = (n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}. \tag{3}$$

(a) Az $A_{i_1,\dots,i_k}$ események páronként kizáróak, és összegük pontosan az az $A_{n;k}$ esemény, aminek a valószínűségét keressük. Így

$$P(A_{n;k}) = P\left(\sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} A_{i_1,\dots,i_k} \right) =$$

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} P(A_{i_1,\dots,i_k}) = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\} \subset \{1,\dots,n\}} \frac{J_{n-k}}{n!} =$$

$$\binom{n}{k} \frac{J_{n-k}}{n!} = \binom{n}{k} \frac{(n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

(b) Figyelembe véve, hogy

$$\frac{1}{e} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!},$$

kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{n;k}) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{e \cdot k!}.$$

21. FELADAT: Ha a táncrendet úgy képzeljük, hogy minden férfi választ magának egy párt, akkor az előző feladat megoldásában alkalmazott módszert követve annak a valószínűsége, hogy n párból senki sem táncol a saját párjával:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

22. FELADAT: Egyrészt, a definíció és a $P(B) \neq 0$ feltevés szerint,

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)}.$$

Másrészt, $(\overline{A}B)(AB) = \emptyset$ és $\overline{A}B + AB = (\overline{A} + A)B = \Omega B = B$ miatt $P(B) = P(\overline{A}B) + P(AB)$. Innen $P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$, és végül

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(AB)}{P(B)} = 1 - \frac{P(AB)}{P(B)} = 1 - P(A|B).$$

23. FELADAT: Ha az (1) formulát alkalmazzuk az AC és BC eseményekre, akkor a $P(AC + BC) = P(AC) + P(BC) - P(ABC)$ azonosságot kapjuk. Így

$$\begin{aligned}
&P((A+B)|C) = \\
&\quad \frac{P((A+B)C)}{P(C)} = \frac{P(AC+BC)}{P(C)} = \frac{P(AC) + P(BC) - P(ABC)}{P(C)} = \\
&\qquad \frac{P(AC)}{P(C)} + \frac{P(BC)}{P(C)} - \frac{P(ABC)}{P(C)} = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C).
\end{aligned}$$

24. FELADAT: A

$$\begin{aligned}
P(B|A) &\equiv \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{1}{2}, \\
P(A) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

egyenlőségekből kapjuk, hogy

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Vegyük észre, hogy – mivel $AB \subset B$ – ez azt is jelenti, hogy $P(B) \neq 0$. Most a

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{P(B)} = \frac{1}{4}$$

egyenlőségből kapjuk, hogy

$$P(B) = \frac{1}{2}.$$

Most már minden készen áll arra, hogy a keresett valószínűségeket kiszámítsuk. Az (1) egyenlőség alapján

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Felhasználva ezt az eredményt és néhány elemi azonosságot, kapjuk, hogy

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cdot \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A+B})}{1-P(B)} = \frac{1-P(A+B)}{1-P(B)} = \frac{1-\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$

25. Feladat: Tudjuk, hogy

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B) = \frac{7}{10}, \quad \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A) = \frac{1}{2}.$$

Másrészt $(A\overline{B})(AB) = \emptyset$ és $A\overline{B} + AB = A(B + \overline{B}) = A$ alapján $P(A\overline{B}) + P(AB) = P(A)$, tehát

$$\frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A|\overline{B}) = \frac{1}{5}.$$

Ha most $x \doteq P(AB)$, $y \doteq P(A)$ és $z \doteq P(B)$, akkor a fentiekből a következő egyenletrendszer következik:

$$\begin{aligned} 10x - 7z &= 0 && (4) \\ 2x - y &= 0 && (5) \\ 5x - 5y - z &= -1 && (6) \end{aligned}$$

Az egyenletrendszert a szokásos módszerek valamelyikével megoldva a keresett valószínűségek:

$$P(A) = y = \frac{14}{45}, \quad P(B) = z = \frac{2}{9}$$

és (mellesleg)

$$P(AB) = x = \frac{7}{45}.$$

26. Feladat: Az első dolog, amit észreveszünk, hogy

$$P(AB) \leq \min(P(A), P(B)) = \frac{4}{5},$$

tehát

$$P(A|B) \equiv \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{10}{9} P(AB) \leq \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{9},$$

ami pont a keresett egyenlőtlenség egyik (jobb oldali) fele. A másik fél bizonyítása egy picit bonyolultabb. Felhasználva az (1) azonosságot, valamint, hogy $P(A+B) \leq 1$, kapjuk, hogy

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B) \geq P(A) + P(B) - 1 = \frac{4}{5} + \frac{9}{10} - 1 = \frac{7}{10},$$

tehát

$$P(A|B) \equiv \frac{P(AB)}{P(B)} \geq \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}.$$

27. Feladat: Az összes lehetséges kockadobások halmazának – az eseménytér – számossága $6 \cdot 6 = 36$. Jelölje A azt az eseményt, hogy a dobott számok összege 7, B pedig azt az eseményt, hogy a dobott számok összege páratlan; nyilván $P(AB) = P(A)$ mert $A \subset B$. Mivel A számossága 6, B számossága pedig 18, kapjuk, hogy

$$P(AB) = P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2},$$

tehát a keresett valószínűség

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

28. Feladat: Két megoldást adunk a feladatra.

1. A feladat szempontjából csak a kiválasztott és az utána következő játékos lényeges; a többiekről elfeledkezünk (ők majd elosztják egymás között a maradék lapokat). Legyen B az az esemény, hogy a kiválasztott játékos nem kap ászt és A az az esemény, hogy a rá következő játékos nem kap ászt. Mivel a kiválasztott játékos $\binom{32}{8}$ féle

leosztást kaphat, és ezek közül $\binom{28}{8}$ nem tartalmaz ászt rögtön kapjuk, hogy

$$P(B) = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}.$$

Másrészről, az első két játékos együtt $\binom{32}{8} \cdot \binom{24}{8}$ féle leosztást kaphat; ezek közül $\binom{28}{8} \cdot \binom{20}{8}$ nem tartalmaz ászt; így

$$P(AB) = \frac{\binom{28}{8}\binom{20}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}}.$$

Így aztán a keresett valószínűség:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{\binom{28}{8}\binom{20}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}}}{\frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}} = \frac{\binom{20}{8}}{\binom{24}{8}} = \frac{130}{759} \approx 0.17.$$

2. Mikor a kiválasztott játékos utáni játékosnak (akit egyszerűen második játékosnak fogunk hívni) osztják a lapokat, a következő a helyzet: a kiválasztott játékos kapott 8 lapot, ezek közül egy sem volt ász, tehát a maradék 24 kártya között van még négy ász. A második játékos tehát $\binom{24}{8}$ féle leosztást kaphat és ezek közül $\binom{20}{8}$ nem tartalmaz ászt; így aztán a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\binom{20}{8}}{\binom{24}{8}} = \frac{130}{759} \approx 0.17.$$

29. Feladat: A keresett valószínűség:

$$P = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{4}{30} \cdot \frac{4}{29},$$

mivel az első húzáskor 32 lap közül kell választani, a kedvező lehetőségek - királyok - száma pedig 4, a második húzáskor már csak 31 lap közül lehet választani, a királyok száma pedig 3, stb.

30. Feladat: Jelölje A_1 azt, hogy A igazat mond, A_2 pedig, hogy B mond igazat. Vegyük észre, hogy a feladat szerint B akkor mond igazat, ha A hazudik; figyelembe véve tehát, hogy $P(\overline{A_1}) = \frac{2}{3}$ és $P(\overline{A_2}) = \frac{1}{3}$, a keresett valószínűség:

$$P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{P(A_2\overline{A_1})}{P(\overline{A_1})} = \frac{P(A_2)P(\overline{A_1})}{P(\overline{A_1})} = P(A_2) = \frac{2}{3}.$$

Persze erre intuitíve is következtethettünk volna, hiszen A és B kijelentései nem befolyásolják egymást, tehát a keresett valószínűség $P(A_2) = 1 - P(\overline{A_2}) = \frac{2}{3}$.

31. Feladat: Jelölje A_1 azt, hogy valaki A szakos, A_2, hogy B szakos, X pedig azt, hogy sikeresen vizsgázik. A következő értékeket ismerjük:

$$P(A_1) = 0.15, \quad P(A_2) = 0.85, \quad P(X|A_1) = 0.6, \quad P(X|A_2) = 0.8,$$

és keressük $P(X)$ értékét. Használjuk a teljes valószínűség tételét:

$$P(X) = P(X|A_1)P(A_1) + P(X|A_2)P(A_2) = 0.6 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 0.85 = 0.77.$$

32. Feladat: Két golyóból hány piros van az első húzáskor? Jelölje A_0, A_1, illetve A_2 sorban azt, hogy nulla, egy, illetve kettő. A három valószínűség ekkor a következőképpen írható fel:

$$P(A_0) = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{0}}{\binom{7}{2}}, \quad P(A_1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{2}}, \quad P(A_2) = \frac{\binom{5}{0}\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}}.$$

Jelölje B azt az eseményt, hogy a következő golyó piros lesz. Ekkor három lehetőség van:

$$P(B|A_0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{2}{5}, \quad P(B|A_1) = \frac{\binom{4}{0}\binom{1}{1}}{\binom{5}{1}} = \frac{1}{5}, \quad P(B|A_2) = 0.$$

A_0, A_1 és A_2 teljes eseményrendszer, és páronként kizárják egymást. Használjuk tehát a teljes valószínűség tételét:

$$P(B) = P(B|A_0) \cdot P(A_0) + P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) = \frac{2}{7}.$$

33. Feladat: Két megoldást adunk a feladatra.

1. Jelölje B azt, hogy jó a csavar, A_1 azt, hogy az első, A_2 azt, hogy a második dobozban van. Ekkor a következőket tudjuk:

   $$P(A_1) = 0.5, \quad P(A_2) = 0.5, \quad P(B|A_1) = 0.9, \quad P(B|A_2) = 0.94.$$

   Most használjuk a teljes valószínűség tételét:

   $$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) = \\ 0.9 \cdot 0.5 + 0.94 \cdot 0.5 = \frac{184}{200}.$$

2. Vagy, még egyszerűbben, elfeledkezve arról, hogy a golyók két dobozban vannak:
$$P = \frac{\text{“kedvező esetek száma”}}{\text{“összes esetek száma”}} = \frac{90+94}{200} = \frac{184}{200}.$$

34. FELADAT: Két megoldást adunk a feladatra.

1. Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a továbbított jel pont, A_2 azt, hogy vonal, B azt, hogy torzul a jel. Ekkor a feladat alapján tudjuk a következőket:
$$P(A_1) = \frac{5}{8}, \quad P(A_2) = \frac{3}{8}, \quad P(\overline{B}|A_1) = \frac{3}{5}, \quad P(\overline{B}|A_2) = \frac{2}{3},$$
és ki kell számítanunk a $P(A_1|\overline{B})$ valószínűséget; ehhez a Bayes-tételt alkalmazzuk:
$$P(A_1|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|A_1)\cdot P(A_1)}{P(\overline{B}|A_1)\cdot P(A_1) + P(\overline{B}|A_2)\cdot P(A_2)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{3}{5}.$$

2. Mivel a pontok $\frac{2}{5}$-e torzul vonallá, ennek komplementere az a valószínűség, hogy a pont nem torzul vonallá. Ez pedig $1-\frac{2}{5}$, ami éppen $\frac{3}{5}$.

35. FELADAT: Jelöljük A_1-gyel azt az eseményt, hogy valaki férfi, A_2-vel azt, hogy nő, B-vel pedig azt, hogy színvak. A feladat alapján a következőket tudjuk:
$$P(A_1) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \qquad P(A_2) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5},$$
$$P(B|A_1) = 0.05, \qquad P(B|A_2) = 0.25,$$
és keressük a $P(A_2|B)$ valószínűséget. A Bayes-tételt alkalmazzuk:
$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)\cdot P(A_2)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2)} = \frac{0.25\cdot\frac{4}{5}}{0.05\cdot\frac{1}{5}+0.25\cdot\frac{4}{5}} = 0.95.$$

36. FELADAT: Ismét két megoldást adunk.

1. Jelöje A_i, $i = 1, 2, \dots, n$ azt az eseményt, hogy az i-dik dobozból húzunk, B pedig, hogy piros golyót húzunk. Ekkor nyilvánvalóan

$$P(B|A_i) = \frac{i}{n}, \qquad P(A_i) = \frac{1}{n}.$$

A Bayes-tétel segítségével kiszámítjuk a $P(A_n|B)$ ill $P(A_{n-1}|B)$ valószínűségeket:

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) \cdot P(A_n)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{\frac{n}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1};$$

illetve

$$P(A_{n-1}|B) = \frac{P(B|A_{n-1})P(A_{n-1})}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} i} = \frac{n-1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2(n-1)}{n(n+1)}.$$

Az A_n és A_{n-1} események kizáróak, tehát az A_nB és $A_{n-1}B$ események is kizáróak. Így a keresett valószínűség:

$$P(A_n + A_{n-1}|B) = \frac{P((A_n + A_{n-1})B)}{P(B)} = \frac{P(A_nB + A_{n-1}B)}{P(B)} = \frac{P(A_nB) + P(A_{n-1}B)}{P(B)} = \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \frac{P(A_{n-1}B)}{P(B)} = P(A_n|B) + P(A_{n-1}|B) = \frac{2}{n+1} + \frac{2(n-1)}{n(n+1)} = \frac{4n-2}{n(n+1)}.$$

2. Írjuk rá mindegyik golyóra, hogy hányas urnában van, majd öntsük őket össze egy kalapba. A feladat ezek után a következőképpen fogalmazható át: ha a kalapból kihúzva egy golyót az piros, akkor mi a valószínűsége, hogy n vagy $n-1$ van ráírva? Vegyük észre, hogy az így átfogalmazott feladatban a fehér golyók nem játszanak semilyen szerepet, tehát elegendő azt megvizsgálni, hogy **csak** a piros golyók közül húzva egyet, mi annak a valószínűsége, hogy a golyóra n vagy

$n-1$ van írva. Ezt a valószínűséget már egyszerű meghatározni: összesen

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

piros golyónk van; közülük $n+(n-1)=(2n-1)$-en szerepel n vagy $n-1$. Így a keresett valószínűség

$$\frac{2n-1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{4n-2}{n(n+1)}.$$

37. Feladat: Jelöljük A_1-gyel azt, hogy egy áru elsőosztályú, A_2-vel azt, hogy másodosztályú, B-vel azt, hogy egy áru elsőosztályú minősítést kap. A feladat szerint

$$P(A_1)=0.75, \quad P(A_2)=0.25, \quad P(B|A_1)=0.98, \quad P(B|A_2)=0.05.$$

Keressük a $P(A_1|B)$ valószínűséget. A Bayes-tétel szerint:

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)}= \\ \frac{0.98\cdot 0.75}{0.98\cdot 0.75+0.05\cdot 0.25}=\frac{2.94}{2.99}.$$

38. Feladat: Jelölje A_i azt az eseményt, hogy a terméket az i. gép gyártotta ($i=1,2,3$), B pedig, hogy a termék selejtes. A feladat szerint:

$$P(A_1)=0.25, \quad P(A_2)=0.35, \quad P(A_3)=0.40,$$
$$P(B|A_1)=0.05, \quad P(B|A_2)=0.04, \quad P(B|A_3)=0.02.$$

A keresett $P(A_1|B)$ valószínűség a Bayes-tétel segítségével számolható:

$$P(A_1|B)=\frac{P(B|A_1)\cdot P(A_1)}{P(B|A_1)\cdot P(A_1)+P(B|A_2)\cdot P(A_2)+P(B|A_3)\cdot P(A_3)}= \\ \frac{0.05\cdot 0.25}{0.05\cdot 0.25+0.04\cdot 0.35+0.02\cdot 0.40}=0.36.$$

39. Feladat: Először belátjuk, hogy ha A és B függetlenek, akkor $\overline{A}$ és B is azok. $(\overline{A}B)$ és (AB) kizáróak, tehát

$$P(\overline{A}B)+P(AB)=P((\overline{A}B)+(AB))=P(B(\overline{A}\cup A))=P(B).$$

Innen:

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB) = \\ P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(\overline{A})P(B).$$

Most bebizonyítjuk, hogy $\overline{A}$ és $\overline{B}$ függetlenek. Az eljárás ugyanaz, mint az előbb.

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P((\overline{A}\,\overline{B}) + (\overline{A}B) = P(\overline{A}(B + \overline{B})) = P(\overline{A}).$$

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) - P(\overline{A}B) = P(\overline{A}) - P(\overline{A})P(B) = P(\overline{A})(1 - P(B)) = \\ P(\overline{A})P(\overline{B}).$$

40. Feladat: Jelölje A azt, hogy az első személy talál, B azt, hogy a második. A feladat szerint $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.6$. Az A és B események függetlenek, tehát $P(AB) = P(A)P(B) = 0.7 \cdot 0.6 = 0.42$; így a meghatározandó valószínűség $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B) = 0.7+0.6-0.42 = 0.88$.

41. Feladat: Jelölje A_n, ill. B_n azt az eseményt, hogy az n-edik körben az első, ill. a második lövő talál. Ha most A jelöli azt az eseményt, hogy a kezdő talál először, akkor

$$A = \\ A_1 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot A_2 + \overline{A_1} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{B_2} \cdot A_3 + \cdots = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{A_i} \cdot \overline{B_i} \right) \cdot A_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n,$$

ahol

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1, \\ C_n &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{A_i} \cdot \overline{B_i} \right) \cdot A_n, \qquad (n > 2). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $C_n \subset A_n$ és $C_n \subset \overline{A_m}$ minden $n \in \mathbb{N}$ és $m = 1, \dots, n-1$, esetén. Ennek fontos következménye, hogy a $C_1, C_2, \dots$ események páronként kizáróak. Valóban, ha $n < m$, akkor

$$C_n \cdot C_m \subset A_n \cdot \overline{A_n} = \emptyset.$$

Tehát:

$$P(A) = P\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n).$$

Most meghatározzuk a $P(C_n)$ valószínűségeket. A feladat implicit feltevése, hogy mind az A_i, A_j ill. B_i, B_j, ahol $i \neq j$, mind pedig az A_i, B_j, $i, j = 1, 2, \dots$ események függetlenek; mint a 39. feladatnál láttuk, ekkor a C_n definíciójában szereplő összes esemény páronként független, tehát

$$P(C_n) = P\left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} \overline{A_i} \cdot \overline{B_i}\right) \cdot A_n\right) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(P(\overline{A_i}) \cdot P(\overline{B_i})\right) \cdot P(A_n).$$

Feltevés szerint $P(A_n) = p_1$, $P(B_n) = p_2$ (ahol $p_1 = 0.2$ és $p_2 = 0.3$); legyen $q_1 \doteq P(\overline{A_n}) = 1 - p_1 = 0.8$, $q_2 \doteq P(\overline{B_n}) = 1 - p_2 = 0.7$; így

$$P(C_n) = (q_1 q_2)^{n-1} p_1$$

és a keresett valószínűség:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{n-1} p_1 =$$

$$p_1 \sum_{n=1}^{\infty} (q_1 q_2)^{n-1} = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} = \frac{0.2}{1 - 0.8 \cdot 0.7} = \frac{5}{11}.$$

42. FELADAT: Annak a valószínűsége, hogy egy húzásnál a kihúzott szám páros legyen, 0.5; annak a valószínűsége pedig, hogy n húzásból egy se legyen páros, $(1 - 0.5)^n = 2^{-n}$. Következésképp annak a valószínűsége, hogy n húzásból **legalább** egy páros legyen $1 - 2^{-n}$; így az

$$1 - 2^{-n} > 0.9,$$

ill.

$$2^n > 10$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Figyelembe véve, hogy $2^3 = 8$ és $2^4 = 16$, az eredmény $n = 4$.

43. FELADAT: Egyrészt, ha $A \subset B$, akkor $AB = A$; másrészt, ha A és B függetlenek, akkor $P(AB) = P(A)P(B)$. Innen kapjuk, hogy $P(A) = P(A)P(B)$, amiből $P(A)(1 - P(B)) = 0$. Ez csak úgy lehetséges, hogy ha $P(A) = 0$ vagy $P(B) = 1$.

44. FELADAT: Két megoldást adunk.

1. Mindenekelőtt belátjuk, hogy az $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ események is teljesen függetlenek, vagyis, ha $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\} \subset \{A_1, \dots, A_n\}$, akkor

$$P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_k}}) = P(\overline{A_{i_1}}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_{i_k}}) = (1 - p_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{i_k}).$$

Az $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ eseménycsalád k számossága szerinti indukcióval bizonyítunk; a 39. feladat szerint $k = 2$-re az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítást már beláttuk tetszőleges $k-1$ elemű részhalmazcsaládra. Most az (1) azonosság szerint

$$\begin{aligned} &P(A_{i_1} + \dots + A_{i_k}) = P((A_{i_1} + \dots + A_{i_{k-1}}) + A_{i_k}) = \\ &\quad P(A_{i_1} + \dots + A_{i_{k-1}}) + P(A_{i_k}) - P(A_{i_1} + \dots + A_{i_{k-1}})P(A_{i_k}) = \\ &\quad P(\overline{\overline{\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}}}}) + P(A_{i_k}) - P(\overline{\overline{\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}}}})P(A_{i_k}) = \\ &[1 - P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}})] + P(A_{i_k}) - [1 - P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}})]P(A_{i_k}) = \\ &\quad 1 - P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}})[1 - P(A_{i_k})] = \\ &\quad 1 - P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}})P(\overline{A_{i_k}}), \end{aligned} \tag{7}$$

tehát

$$\begin{aligned} &P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_k}}) = P(\overline{A_{i_1} + \dots + A_{i_k}}) = \\ &\quad 1 - P(A_{i_1} + \dots + A_{i_k}) = P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}})P(\overline{A_{i_k}}), \end{aligned}$$

és az indukciós feltevés szerint

$$\begin{aligned} &P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_k}}) = P(\overline{A_{i_1}} \cdot \dots \cdot \overline{A_{i_{k-1}}})P(\overline{A_{i_k}}) = \\ &\quad P(\overline{A_{i_1}}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_{i_{k-1}}})P(\overline{A_{i_k}}). \end{aligned}$$

A fenti levezetés nem csak az $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}$ események teljes függetlenségét bizonyítja, de a feladatunkat is megoldja. Valóban, az utolsó egyenlőséget a (7) egyenlőséggel összevetve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P(A_{i_1} + \dots + A_{i_k}) = 1 - P(\overline{A_{i_1}}) \cdot \dots \cdot P(\overline{A_{i_k}}) = \\ &1 - (1 - P(A_{i_1})) \cdot \dots \cdot (1 - P(A_{i_k})) = 1 - (1 - p_{i_1}) \cdot \dots \cdot (1 - p_{i_k}), \end{aligned}$$

amiből pedig az $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, n\}$ esetben a bizonyítandó állítás következik.

2. Használjuk a (2) szitaformulát!

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{\substack{k\neq l \\ k,l\in 1\ldots n}} P(A_kA_l) +$$
$$\sum_{\substack{k\neq l, l\neq m, k\neq m \\ k,l,m\in 1\ldots n}} P(A_kA_lA_m) \pm \cdots \pm P(A_1A_2\ldots A_n) =$$
$$\sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{\substack{k\neq l \\ k,l\in 1\ldots n}} p_kp_l + \sum_{\substack{k\neq l, l\neq m, k\neq m \\ k,l,m\in 1\ldots n}} p_kp_lp_m \pm \cdots \pm p_1p_2\ldots p_n =$$
$$1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

Végezetül két megjegyzést teszünk. Az első, hogy a feladat azonosságának egy erősebb változatából következik a teljes függetlenség. Egész pontosan igaz a következő állítás:

> *Tegyük fel, hogy az* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *eseményrendszer tetszőleges* $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ *részrendszerére teljesül, hogy*
>
> $$P(A_{i_1} + \cdots + A_{i_k}) = 1 - (1 - P(A_{i_1})) \cdot \cdots \cdot (1 - P(A_{i_k})). \quad (8)$$
>
> *Ekkor az* $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *események teljesen függetlenek.*

Valóban, (8) alapján

$$P(\overline{A_{i_1}} \cdot \cdots \cdot \overline{A_{i_k}}) = P(\overline{A_{i_1} + \cdots + A_{i_k}}) = 1 - P(A_{i_1} + \cdots + A_{i_k}) =$$
$$(1 - P(A_{i_1})) \cdot \cdots \cdot (1 - P(A_{i_k})) = P(\overline{A_{i_1}}) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A_{i_k}}),$$

vagyis az $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}$ eseményrendszer teljesen független. Azonban az (a) megoldásban bizonyítottak alapján ez azt jelenti, hogy az

$$\{\overline{\overline{A_1}}, \ldots, \overline{\overline{A_n}}\} = \{A_1, \ldots, A_n\}$$

eseményrendszer is teljesen független. A második megjegyzésünk, hogy a feladathoz tényleg szükséges az $\{A_1, \ldots, A_n\}$ eseményrendszer teljes függetlensége. Valóban, tegyük fel, hogy az $\{A_1, A_2, A_3\}$ eseményrendszer elemei páronként függetlenek és teljesül a

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3))$$

azonosság. Az A_1, A_2, A_3 események páronkénti függetlensége miatt ha $\{A_{i_1}, A_{i_2}\} \subset \{A_1, A_2, A_3\}$, akkor

$$P(A_{i_1} + A_{i_2}) = P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) - P(A_{i_1}A_{i_2}) = \\ P(A_{i_1}) + P(A_{i_2}) - P(A_{i_1})P(A_{i_2}) = (1 - P(A_{i_1}))(1 - P(A_{i_2})),$$

tehát teljesülnek az előző megjegyzésben bizonyított állítás feltételei, így aztán az A_1, A_2, A_3 események **szükségszerűen** teljesen függetlenek. (Az olvasóra bízzuk annak belátását, hogy vannak páronként független, de nem teljesen független háromelemű eseményrendszerek.)

45. FELADAT: Mint az tudott, a $\{p_k\}_{k \in A \subset \mathbb{N}}$ számsorozat pontosan akkor valószínűségeloszlás, ha teljesíti a következő két feltételt:

$$p_k \geq 0 \qquad \text{tetszőleges } k \in A \text{ esetén,}$$

és

$$\sum_{k \in A} p_k = 1.$$

Miután az első feltétel a részfeladatok mindegyikére nyilvánvalóan teljesül, csak a második feltételt fogjuk ellenőrizni.

(a) Mivel

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k q^2 = q^2 \sum_{k=1}^{\infty} p^k = pq^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{pq^2}{1-p} = pq = \\ \frac{(p+q)^2 - (p-q)^2}{4} \leq \frac{(p+q)^2}{4} = \frac{1}{4} < 1,$$

a sorozat **nem** alkot valószínűségeloszlást[4].

(b) Mivel

$$\sum_{k=n}^{\infty} p^{k-n} q = q \sum_{k=n}^{\infty} p^{k-n} = q \sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{q}{1-p} = 1,$$

a sorozat valószínűségeloszlást alkot.

[4] Vegyük észre, hogy a fentiekben – mellesleg – levezettük a számtani és mértani közepek közötti közismert $pq \leq \frac{(p+q)^2}{4}$ egyenlőtlenséget. Természetesen az egyenlőtlenségre való közvetlen hivatkozás is megtette volna.

(c) Az

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

azonosságból kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1,$$

tehát a sorozat valószínűségeloszlás.

(d) Mivel $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$, a sorozat valószínűségeloszlás.

(e) Köztudomásúlag

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = e^3,$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k e^{-3}}{k!} = e^{-3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = e^{-3}e^3 = 1,$$

és a sorozat valószínűségeloszlás.

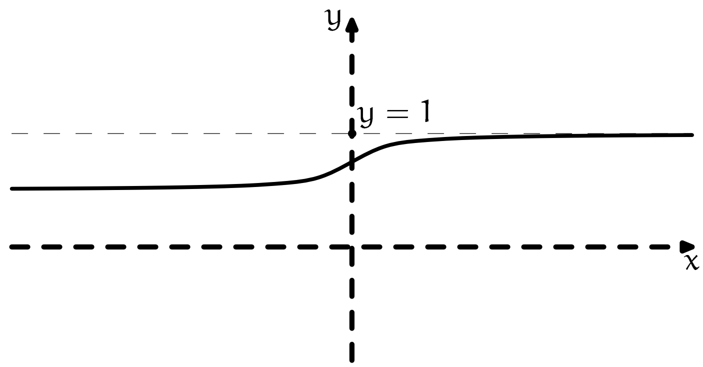
5 Valószínűségi változók

5.1 Sűrűség- és eloszlásfüggvények

46. Feladat: Egy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fügvény egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha teljesíti a következő feltételeket:

i. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$,

ii. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,



$$F(x) \doteq \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x$$

7. ábra: 46. (a) feladat

iii. monoton növekvő,

iv. balról folytonos.

Miután a fenti feltételek ellenőrzése meglehetősen egyszerű, csak azokban az esetekben adunk meg részletes számolásokat, amikor a feltételek valamelyike nem teljesül.

(a) Miután

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$F(x)$ **nem** egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (7. ábra).

(b) Az $F(x)$ függvény teljesíti az i.-iv. feltételeket, tehát egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (8. ábra).

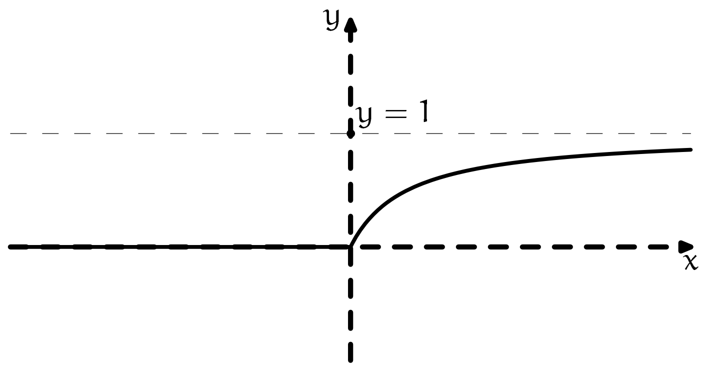
(c) Ismét, a feltételek teljesülnek, tehát $F(x)$ egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (9. ábra).

(d) $F(x)$ egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (10. ábra).

(e) Mivel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1,$$

a függvény egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye (11. ábra).



$$F(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ \frac{x}{1+x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

8. ábra: 46. (b) feladat

47. Feladat: A 14. feladatnál kapott eredményeket alkalmazzuk (lásd még a 2. ábrát is). Jelölje ξ a valószínűségi változót. Mivel $F(t) \doteq P(\xi < t)$, a már említett feladat alapján

$$F(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 2t - t^2, & \text{ha } 0 \le t \le 1, \\ 1, & \text{ha } t > 1. \end{cases}$$

Az $f(t)$ sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja, tehát

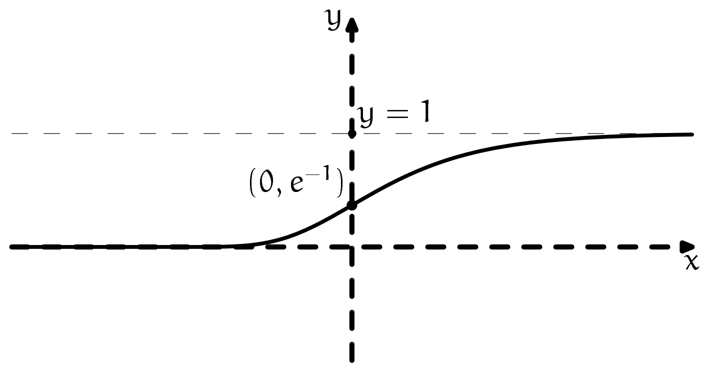
$$f(t) = \begin{cases} 2 - 2t, & \text{ha } 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Végül, definíció szerint, a keresett valószínűség

$$P\left(\xi \ge \frac{3}{4}\right) = 1 - P\left(\xi < \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(2 \cdot \frac{3}{4} - \frac{9}{16}\right) = \frac{1}{16}.$$

48. Feladat: Legyen η az a valószínűségi változó, amely értéke a kiválasztott pont távolsága az egységnyi hosszúságú szakasz baloldali végpontjától, és jelölje a rövidebb szakasz hosszának megfelelő valószínűségi változót

$$\xi \doteq \min(\eta, 1 - \eta).$$



$$F(x) \doteq e^{-e^{-x}}$$

9. ábra: 46. (c) feladat

Tudjuk, hogy η egyenletes eloszású; feladatunk meghatározni az

$$F(x) \doteq P(\xi < x)$$

függvényt. Két esetet különböztetünk meg:

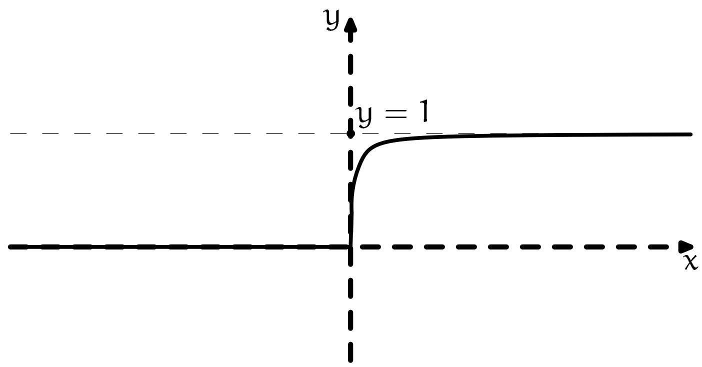
1. Ha $x \geq \frac{1}{2}$, akkor $F(x) = P(\xi < x) = 1$, mert a rövidebb szakasz ξ hossza az $\eta = \frac{1}{2}$ esettől (ami zéró valószínűségű) eltekintve mindig kisebb, mint $\frac{1}{2}$.

2. Ha $x < \frac{1}{2}$, akkor

$$\begin{aligned} F(x) = P(\xi < x) = \\ P(\min(\eta, 1-\eta) < x) = P(\{\eta < x\} \cup \{1-\eta < x\}) = \\ P(\{\eta < x\}) + P(\{1-\eta < x\}) - P(\{\eta < x\} \cap \{1-\eta < x\}) = \\ P(\{\eta < x\}) + P(\{\eta > 1-x\}) - P(\{1-x < \eta < x\}). \end{aligned}$$

   Vegyük észre, hogy ha $x < \frac{1}{2}$ akkor $1-x > \frac{1}{2}$, tehát az $\{1-x < \eta < x\}$ halmaz üres. Így, felhasználva az egyenletes eloszlású valószínűségi változókkal kapcsolatos ismereteinket:

$$\begin{aligned} F(x) = P(\{\eta < x\}) + P(\{\eta < 1-x\}) - P(\{1-x < \eta < x\}) = \\ P(\eta < x) + P(\eta > 1-x) - 0 = P(\eta < x) + [1 - P(\eta \leq 1-x)] = \\ x + [1-(1-x)] = 2x \end{aligned}$$



$$F(x) \doteq \begin{cases} 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

10. ábra: 46. (d) feladat

Tehát a keresett eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

49. Feladat: Az ismeretes kritérium alapján egy (integrálható) $f(x)$ függvény pontosan akkor valamely valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha nem negatív és

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

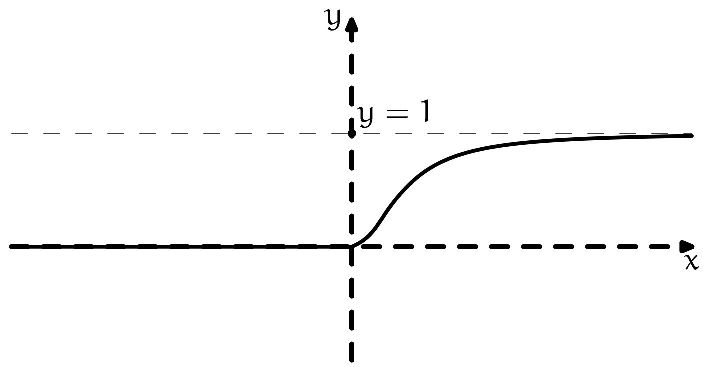
Az első feltétel teljesülése az alábbi feladatok esetén nyilvánvaló, így csak a második feltételt ellenőrizzük.

(a) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin x\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\left[-\cos x\right]_0^1 \simeq \frac{1}{2}(-0.54+1) = 0.23 \neq 1,$$

az $f(x)$ függvény **nem** sűrűségfüggvény (12. ábra).

(b) Mivel



$$F(x) \doteq \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

11. ábra: 46. (e) feladat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1,$$

tehát $f(x)$ sűrűségfüggvény (13. ábra).

(c) Mivel

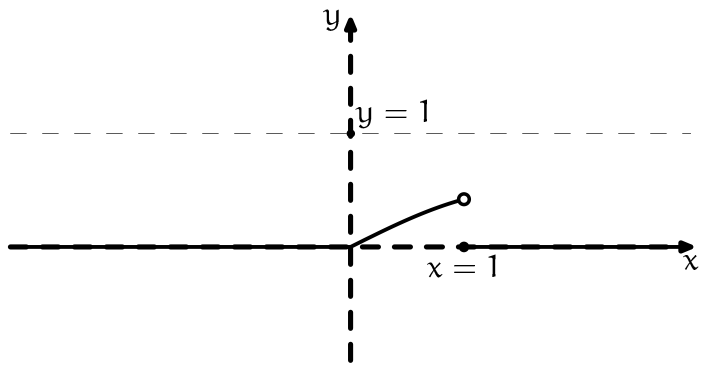
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$\frac{1}{\pi}\left[\arctan x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1,$$

tehát $f(x)$ sűrűségfüggvény (14. ábra).

(d) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x+1}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x+1}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$$
$$\int_0^{\infty} 1 - \frac{1}{x+1}\,dx = \left[x - \ln(x+1)\right]_0^{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left[x - \ln(x+1)\right]_0^{t} =$$
$$\lim_{t\to\infty}(t - \ln(t+1)) = \lim_{t\to\infty} \ln\frac{e^t}{t+1} = \infty,$$

tehát $f(x)$ **nem** sűrűségfüggvény (15. ábra).



$$F(x) \doteq \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

12. ábra: 49. (a) feladat

(e) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 4x^3 e^{-x^4}\,dx = \left[-e^{-x^4}\right]_0^{\infty} = (1-0) = 1,$$

$f(x)$ sűrűségfüggvény (16. ábra).

(f) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} 2e^{-x}(1-e^{-x})\,dx = \int_1^{\infty} 2e^{-x} - 2e^{-2x}\,dx =$$

$$\int_1^{\infty} 2e^{-x}\,dx - \int_1^{\infty} 2e^{-2x}\,dx = [-2e^{-x}]_0^{\infty} - \left[-e^{-2x}\right]_0^{\infty} = 2 - 1 = 1,$$

$f(x)$ sűrűségfüggvény (17. ábra).

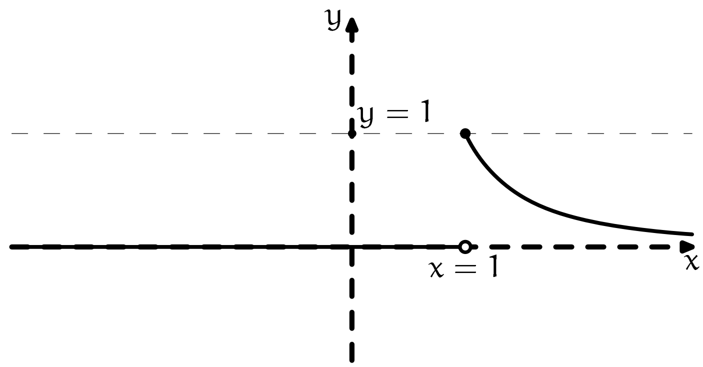
(g) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-|x|}\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^x\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} =$$

$$\frac{1}{2}(1-0) + \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$



$$F(x) \doteq \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \geq 1, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

13. ábra: 49. (b) feladat

$f(x)$ sűrűségfüggvény (18. ábra).

(h) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \ln\frac{1}{x}\,dx = -\int_0^1 \ln x\,dx =$$
$$[x - x\ln x]_0^1 = 1 + \lim_{x\to 0} x\ln x = 1,$$

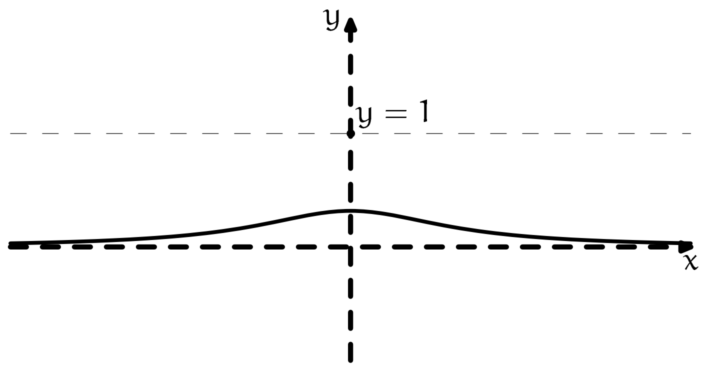
$f(x)$ sűrűségfüggvény (19. ábra).

(i) Mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$
$$\int_0^{\infty} -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,dx =$$
$$\int_0^{\infty} -\frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{-x}}{x}\right]_0^{\infty} + \left[-\frac{1}{x}\right]_0^{\infty} =$$
$$\left[\frac{e^{-x}-1}{x}\right]_0^{\infty} = 0 - \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x} = 0-(-1) = 1,$$

ahol felhasználtuk, hogy – definíció szerint –

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x} \equiv \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{-0}}{x}$$



$$F(x) \doteq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

14. ábra: 49. (c) feladat

az e^{-x} deriváltja a 0 helyen, így $f(x)$ sűrűségfüggvény (20. ábra).

(j) A második feltételt ellenőrizzük:

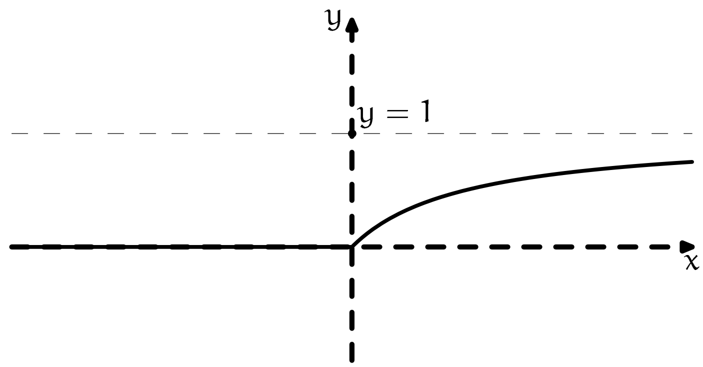
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2(n-1)!} |x|^{n-1} e^{-\lambda|x|}\,dx =$$
$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda^n}{2(n-1)!}(-x)^{n-1}e^{(-\lambda)(-x)}\,dx + \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{2(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx =$$
$$\frac{\lambda^n}{2(n-1)!}\left[\int_{-\infty}^{0}(-x)^{n-1}e^{\lambda x}\,dx + \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx\right].$$

Ha az első integrálban a $t = -x$ majd $t = x$ helyettesítéseket végrehajtjuk, akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2(n-1)!} |x|^{n-1} e^{-\lambda|x|}\,dx =$$
$$\frac{\lambda^n}{2(n-1)!}\left[\int_{\infty}^{0} -x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx + \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx\right] =$$
$$\frac{\lambda^n}{2(n-1)!}\left[\int_{0}^{\infty} -x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx + \int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx\right] =$$
$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx.$$

Legyen most

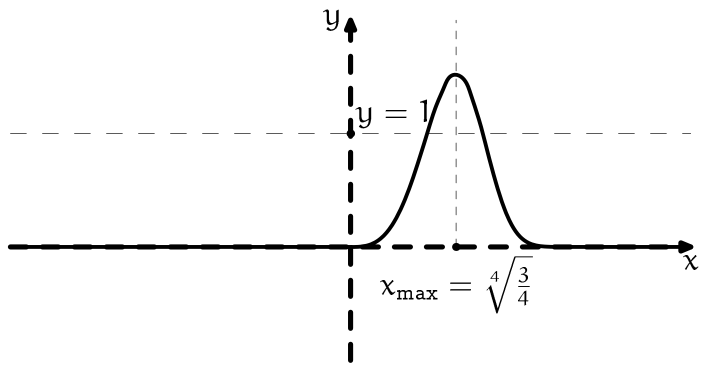
$$g_n(x) \doteq \int e^{-\lambda x}x^{n-1}\,dx;$$



$$F(x) \doteq \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

15. ábra: 49. (d) feladat

vegyük észre, hogy



$$F(x) \doteq \begin{cases} 4x^3 \cdot e^{-x^4}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

16. ábra: 49. (e) feladat

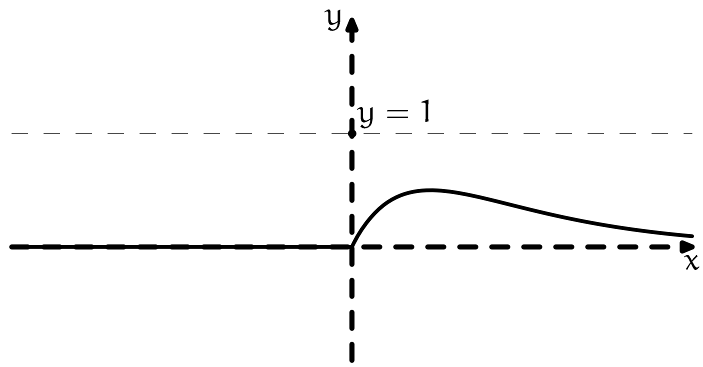
$$g_1(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x};$$

ha pedig $n > 1$, akkor parciálisan integrálva:

$$\begin{aligned} g_n(x) = \int e^{-\lambda x} x^{n-1}\, dx = \\ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-1} - \int -\frac{n-1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-2}\, dx = \\ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-1} + \frac{n-1}{\lambda} \int e^{-\lambda x} x^{n-2}\, dx = \\ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-1} + \frac{n-1}{\lambda} g_{n-1}(x), \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} g_n(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-1} + \frac{n-1}{\lambda} g_{n-1}(x) = \\ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-1} + \frac{n-1}{\lambda} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} x^{n-2} + \frac{n-2}{\lambda} g_{n-2}(x) \right] = \\ -\left[\frac{x^{n-1}}{\lambda} + \frac{n-1}{\lambda^2} x^{n-2} \right] e^{-\lambda x} + \frac{(n-1)(n-2)}{\lambda^2} g_{n-2}(x) = \cdots = \\ -\left[\frac{x^{n-1}}{\lambda} + \frac{n-1}{\lambda^2} x^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)\ldots 2}{\lambda^{n-1}} x^1 \right] e^{-\lambda x} + \end{aligned}$$



$$F(x) \doteq \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}), & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

17. ábra: 49. (f) feladat

$$\frac{(n-1)(n-2)\dots 1}{\lambda^{n-1}} g_1(x) =$$
$$-\left[\frac{x^{n-1}}{\lambda} + \frac{(n-1)!}{(n-2)!\lambda^2} x^{n-2} + \dots + \frac{(n-1)!}{0!\lambda^n}\right] e^{-\lambda x} =$$
$$-\frac{(n-1)!e^{-\lambda x}}{\lambda^n}\left[\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{(\lambda x)^0}{0!}\right]. \quad (9)$$

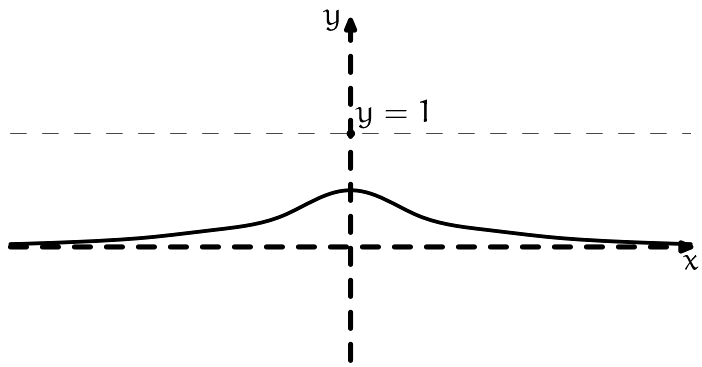
és így, figyelembe véve, hogy $e^{\lambda x}$ minden polinomnál gyorsabban tart a végtelenhez, ha $x \to \infty$, kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2(n-1)!} |x|^{n-1} e^{-\lambda |x|}\,dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^{\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}\,dx =$$
$$\left[-\frac{1}{e^{\lambda x}}\left(\frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{1}{0!}\right)\right]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1,$$

tehát $f(x)$ sűrűségfüggvény (21. ábra).

MEGJEGYZÉSEK:

1. A fenti számolások nagymértékben egyszerűsödnek, ha a $g_n(x)$



$$F(x) \doteq \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

18. ábra: 49. (g) feladat

függvények helyett a

$$G_\lambda(n) \doteq \int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{n-1}\,dx$$

számokat vizsgáljuk. Ekkor $G_\lambda(1) = \frac{1}{\lambda}$, ha pedig $n > 1$, akkor (parciálisan integrálva) kapjuk, hogy

$$G_\lambda(n) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{n-1}\,dx = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}x^{n-1}\right]_0^\infty + \frac{n-1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{n-2}\,dx = \frac{n-1}{\lambda}G_\lambda(n-1),$$

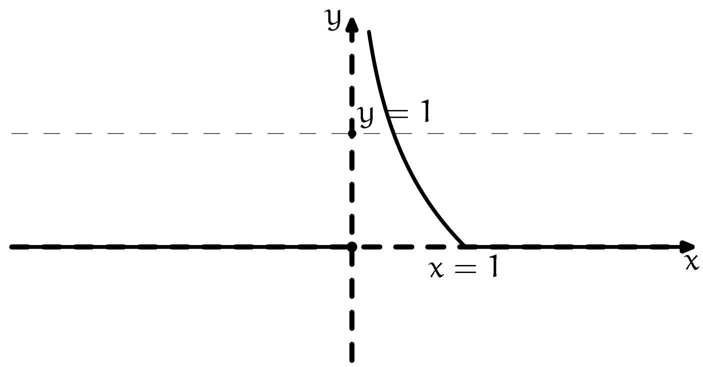
azaz

$$G_\lambda(n) = \frac{n-1}{\lambda}G_\lambda(n-1) = \cdots = \frac{(n-1)\cdot\dots\cdot 1}{\lambda^{n-1}}G_\lambda(1) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n},$$

és így

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}G_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{\lambda^n} = 1.$$

A bonyolultabb megoldást a (9) formula szépségéért választottuk.



$$F(x) \doteq \begin{cases} \ln\frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

19. ábra: 49. (h) feladat

2. A tájékozottabb olvasó számára világos a feladat kapcsolata a $\Gamma(t)$ **gamma függvénnyel**. Mint ismeretes, a gamma függvény, amelyet a

$$\Gamma(t) \equiv G_1(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \qquad t > 0$$

formula definiál, az egész számok faktoriálisának a következő értelemben vett általánosítása: ha $t \in \mathbb{N}$, akkor $\Gamma(t) = (t-1)!$. Most az $u = \lambda x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

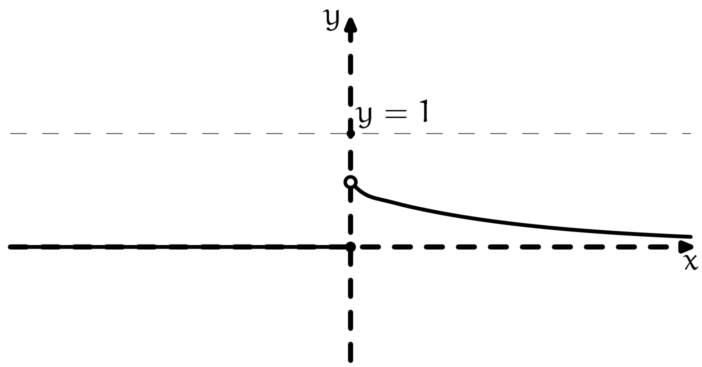
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{n-1}\, dx =$$
$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n-1} du = \frac{\Gamma(n)}{(n-1)!} = 1.$$

50. Feladat: Miután egy sűrűségfüggvény nem negatív értékű,

$$f(b) = \frac{A}{1 + a(b-b)^2} = A \geq 0$$

alapján $A \geq 0$. Azonban $A = 0$ esetén $f(x) = 0$ és így

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0 \neq 1$$



$$F(x) \doteq \begin{cases} -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x^2}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

20. ábra: 49. (i) feladat

lenne; tehát $A > 0$ kell hogy legyen.

Tegyük fel, hogy $a < 0$. Ekkor

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{-a}} + b\right) = \frac{A}{1 + a(\frac{2}{\sqrt{-a}} + b - b)^2} =$$
$$\frac{A}{1 + a(\frac{2}{\sqrt{-a}})^2} = \frac{A}{1 + a(\frac{4}{-a})} = -\frac{A}{3} < 0.$$

Így $a \geq 0$; de ha $a = 0$ akkor $f(x) \equiv A > 0$ miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} A\,dx = \infty$$

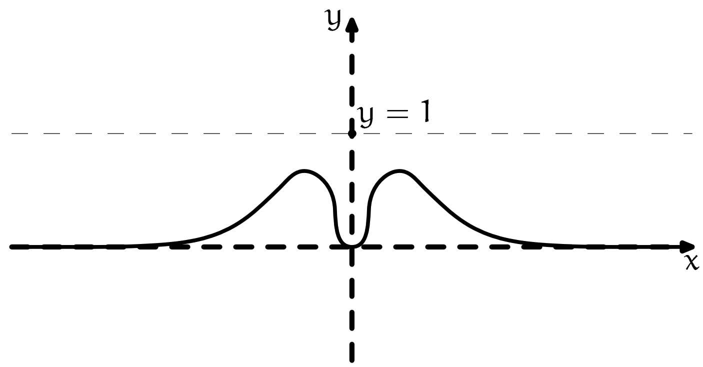
lenne. Tehát $a > 0$.

Most kiszámítjuk a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ integrált:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1 + a(x-b)^2}\,dx \;=\; A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + [\sqrt{a}(x-b)]^2}\,dx$$

Elvégezve az $u = \sqrt{a}(x-b)$ helyettesítést, kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = A\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + [\sqrt{a}(x-b)]^2}\,dx = \frac{A}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du =$$
$$\frac{A}{\sqrt{a}}\,[\arctan u]_{-\infty}^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{a}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{A\pi}{\sqrt{a}}.$$



$$F(x) \doteq \frac{\lambda^n}{2(n-1)!} |x|^{n-1} e^{-\lambda|x|}$$

21. ábra: 49. (j) feladat

Feltevés szerint az előző integrál értéke 1, tehát

$$\frac{A}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\pi}.$$

Miután sem $f(x)$ pozitivitása, sem pedig a fenti integrál értéke nem függ a b paramétertől, az tetszőleges lehet.

51. Feladat: Mivel

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{a}{x^3}\,dx = a\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx =$$
$$a\left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_2^{\infty} = a\left(0 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{a}{8},$$

a értéke csak 8 lehet. Azonban ekkor $f(x) \geq 0$, tehát $f(x)$ pont akkor sűrűségfüggvény, ha $a = 8$.

Feltevés szerint

$$\frac{1}{2} = P(\xi \geq x) = 1 - P(\xi < x) = 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$$
$$1 - \int_2^x \frac{8}{t^3}\,dt = 1 - \left[-\frac{4}{t^2}\right]_2^x = 1 - \left(-\frac{4}{x^2} + \frac{4}{4}\right) = \frac{4}{x^2}.$$

A fentiekből adódó $x^2 = 8$ egyenlet szerint $x = \sqrt{8}$ vagy $x = -\sqrt{8}$. Azonban az utóbbi esetben

$$P(\xi \geq -\sqrt{8}) = 1 - P(\xi < -\sqrt{8}) = \\ 1 - \int_{-\infty}^{-\sqrt{8}} f(t)\,dt = 1 - \int_{-\infty}^{-\sqrt{8}} 0\,dt = 1 \neq \frac{1}{2},$$

tehát a keresett x érték $\sqrt{8}$.

52. Feladat: Feltevés szerint

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{2}^{\infty} \frac{A}{(1-x)^2}\,dx = A\int_{2}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \\ A\left[\frac{1}{1-x}\right]_2^{\infty} = A\,(0 - (-1)) = A;$$

tehát $A = 1$. Mivel ezzel az értékkel $f(x)$ pozitivitása is teljesül, ez az egyetlen paraméterérték, amelyre sűrűségfüggvényt kapunk.

A feladat második felének megoldásához ismét integrálnunk kell:

$$P(2 < \xi < 3) = \int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \left[\frac{1}{1-x}\right]_2^3 = \frac{1}{2}.$$

53. Feladat: Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy

$$\int A\cos\frac{x}{2}\,dx = A\int \cos\frac{x}{2}\,dx = 2A\sin\frac{x}{2}.$$

(a) Ahhoz, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen, teljesülnie kell, hogy

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\pi} A\cos\frac{x}{2}\,dx = \left[2A\sin\frac{x}{2}\right]_0^{\pi} = 2A,$$

tehát szükséges, hogy $A = \frac{1}{2}$ legyen. Mivel ekkor $f(x) \geq 0$, ez a feltétel elégséges is. Tehát

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

(b) $F(x)$ meghatározásánál három esetet különböztetünk meg.

1. Ha $x \leq 0$ akkor

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0.$$

2. Ha $x \in (0, \pi)$, akkor

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} A\cos\frac{t}{2}\,dt = \left[\sin\frac{t}{2}\right]_0^x = \sin\frac{x}{2}.$$

3. Végül, ha $x \geq \pi$, akkor

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{\pi} A\cos\frac{t}{2}\,dt = 1.$$

Tehát

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \sin\frac{x}{2}, & \text{ha } x \in (0, \pi), \\ 1, & \text{ha } x \geq \pi. \end{cases}$$

(c) Számolunk.

$$P\left(\xi > \frac{\pi}{2}\right) = 1 - P\left(\xi \leq \frac{\pi}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

54. FELADAT: Definíció szerint

$$F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt.$$

Ha az integrálban az $u = -t$ helyettesítést és $f(x)$ szimmetriáját alkalmazzuk, akkor

$$F(-x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = -\int_{\infty}^{x} f(-u)\,du = \int_{x}^{\infty} f(u)\,du.$$

Így aztán

$$F(-x) + F(x) = \int_{x}^{\infty} f(u)\,du + \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du \equiv 1.$$

55. FELADAT: Legyen ξ eloszlásfüggvénye $F_\xi \doteq F$, $\eta \doteq F_\xi(\xi)$ eloszlásfüggvényét pedig jelölje F_η. Mivel F_ξ szigorúan monoton nő és folytonos, létezik folytonos inverze; továbbá értékkészlete a $[0, 1]$ intervallum. Három esetet vizsgálunk.

1. Ha $x < 0$, akkor $F_\eta(x) \doteq P(\eta < x) = P(F_\xi(\xi) < x) = 0$.

2. Ha $x \in [0,1]$, akkor

$$F_\eta(x) \doteq P(\eta < x) = P(F_\xi(\xi) < x) =$$
$$P(\xi < F_\xi^{-1}(x)) = F_\xi(F_\xi^{-1}(x)) = x.$$

3. Végül, ha $x \geq 1$, akkor $F_\eta(x) \doteq P(\eta < x) = P(F_\xi(\xi) < x) = P(F_\xi(\xi) < 1) = F_\eta(1) = 1$.

Tehát

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x, & \text{ha } x \in [0,1], \\ 1, & \text{ha } x \geq 1, \end{cases}$$

azaz η egy a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó.

56. FELADAT: Jelölje ξ eloszlásfüggvényét $F(x)$, és legyen $G(x) = 1 - F(x)$. Ekkor tetszőleges $s, t > 0$ esetén

$$\begin{aligned} P(\xi > t) &= 1 - F(t) = G(t) \\ P(\xi > s) &= 1 - F(s) = G(s). \end{aligned}$$

Figyelembevéve a $P(\xi > t + s | \xi > t)$ feltételes valószínűség definícióját és hogy $s > 0$, a feladat szerint

$$G(s) \equiv P(\xi > s) = P(\xi > t + s | \xi > t) \doteq$$
$$\frac{P(\xi > t + s \wedge \xi > t)}{P(\xi > t)} = \frac{P(\xi > t + s)}{P(\xi > t)} = \frac{G(t+s)}{G(t)},$$

azaz $G(t + s) = G(t)G(s)$. Ez a **Cauchy-féle függvényegyenlet**; mint ismeretes, folytonos megoldásai

$$G(t) = e^{\rho t}$$

alakúak, ahol ρ egy teteszőleges valós szám. Hátra van még annak eldöntése, hogy milyen $\rho \in \mathbb{R}$ esetén eloszlásfüggvény $F(x) = 1 - G(x) = 1 - e^{\rho x}$; a szokásos kritériumokat alkalmazva kapjuk, hogy pontosan akkor, ha $\rho = -\lambda$, ahol $\lambda \geq 0$.

Itt jegyezzük meg, hogy az

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

alakú eloszlásfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változókat **exponenciális** eloszlásúnak szokás nevezni.

57. FELADAT: Ha F_ξ a ξ valószínűségi változó eloszlása, akkor, mint ismeretes,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ x, & \text{ha } x \in (0,1], \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Ha $\eta \doteq \xi^2$ eloszlásfüggvénye F_η, akkor – definíció szerint – $F_\eta(x) \doteq P(\eta < x) = P(\xi^2 < x) = P(\,|\xi| < \sqrt{x}) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x}) - F_\xi(-\sqrt{x}) = F_\xi(\sqrt{x})$. Most három eset lehetséges.

1. Ha $x < 0$, akkor $F_\eta(x) = F_\xi(\sqrt{x}) = 0$.
2. Ha $x \in [0,1]$, akkor $F_\eta(x) = F_\xi(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$.
3. Végül ha $x > 1$, akkor $F_\eta(x) = F_\xi(\sqrt{x}) = 1$.

Következésképp

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{ha } x \in [0,1], \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

58. FELADAT: Egy ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}};$$

ekkor a megfelelő eloszlásfüggvény

$$F_\xi(x) \equiv \Phi_{m,\sigma}(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Jelölje F_η az $\eta = a\xi + b$ valószínűségi változó eloszlását. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $a > 0$ vagy $a < 0$.

1. Ha $a > 0$ akkor

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) =$$
$$P(\xi < \frac{x-b}{a}) = F_\xi(\frac{x-b}{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt \overset{(1)}{=}$$

az $u = at + b$ helyettesítést alkalmazva

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{a} e^{-\frac{(\frac{u-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}}\, du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-(am+b))^2}{2(a\sigma)^2}}\, dt = \Phi_{am+b,a\sigma}(x)\,,$$

tehát η egy $am + b$ és $a\sigma$ paraméterű normális eloszlás.

2. Legyen most $a < 0$. Ekkor

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(a\xi + b < x) =$$

$$P(\xi > \frac{x-b}{a}) = 1 - F_\xi(\frac{x-b}{a}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt \overset{(1)}{=}$$

ismét az $u = at + b$ helyettesítést alkalmazva

$$\overset{(1)}{=} 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\infty}^{x} \frac{1}{a} e^{-\frac{(\frac{u-b}{a}-m)^2}{2\sigma^2}}\, du =$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}\int_{\infty}^{x} e^{-\frac{(u-(am+b))^2}{2a^2\sigma^2}}\, du =$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a)\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{(u-(am+b))^2}{2(-a\sigma)^2}}\, du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a)\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-(am+b))^2}{2(-a\sigma)^2}}\, du -$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a)\sigma}\int_{x}^{\infty} e^{-\frac{(u-(am+b))^2}{2(-a\sigma)^2}}\, du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(-a)\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-(am+b))^2}{2(-a\sigma)^2}}\, du = \Phi_{am+b,-a\sigma}(x)\,,$$

tehát η egy $am + b$ és $-a\sigma$ paraméterű normális eloszlás.

59. Feladat: Legyen ξ a csapágygolyók átmérőjének megfelelő valószínűségi változó; a feladat szerint ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$

Az $\eta \doteq \pi\xi^2$ valószínűségi változó f_η sűrűségfüggvényét kell meghatároznunk. Az F_η eloszlásfüggvény kiszámításával kezdünk:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\pi\xi^2 < x) = P\left(|\xi| < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) =$$
$$P\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}} < \xi < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) = F_\xi\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) - F_\xi\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{x}{\pi}}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt - \int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{x}{\pi}}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt =$$
$$\Phi_{m,\sigma}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) - \Phi_{m,\sigma}\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right).$$

Az f_η sűrűségfüggvény az F_η eloszlásfüggvény deriváltja; a kiszámításához szükségünk lesz a

$$\frac{d}{dx}\Phi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

azonosságra. Tehát:

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left[\Phi_{m,\sigma}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) - \Phi_{m,\sigma}\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)\right] =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(-\sqrt{\frac{x}{\pi}}-m\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} =$$
$$\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{2x}}\left(e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}-m\right)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}}+m\right)^2}{2\sigma^2}}\right).$$

60. FELADAT: Feltevés szerint ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Mivel $\eta = 2\xi + 3$, η eloszlásfüggvénye

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(2\xi + 3 < x) =$$
$$P\left(\xi < \frac{x-3}{2}\right) = F_\xi\left(\frac{x-3}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 3, \\ 1 - e^{-\lambda\frac{x-3}{2}}, & \text{ha } x \geq 3. \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja, tehát

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 3, \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\frac{x-3}{2}}, & \text{ha } x \geq 3. \end{cases}$$

61. Feladat: A ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{x}{\pi} + \frac{1}{2}, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1, & \text{ha } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

tehát az $\eta = \tan\xi$ valószínűségi változó F_η eloszlásfüggvénye:

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(\tan\xi < x) = \\ P(\xi < \arctan x) = F_\xi(\arctan x) = \frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2},$$

ahol figyelembe vettük, hogy a $\tan x$ függvény bijektíven képezi le a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumot a számegyenesre. A sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltja, tehát

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\arctan x}{\pi} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

62. Feladat: A szokásos eljárást követjük: először az F_η eloszlásfüggvényt határozzuk meg. Mivel az exponenciális függvény pozitív értékű, $F_\eta(x) = 0$, ha $x \leq 0$. Ha $x > 0$, akkor

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P(e^\xi < x) = \\ P(\xi < \ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\ln x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \, dt = \Phi_{m,\sigma}(\ln x).$$

Az f_η sűrűségfüggvény az F_η eloszlásfüggvény deriváltja, tehát $f_\eta(x) = 0$, ha $x \leq 0$ és

$$f_\eta(x) = \frac{d}{dx}\Phi_{m,\sigma}(\ln x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}},$$

ha $x > 0$.

5.2 Várható érték és szórás

63. FELADAT: A várható érték, a definíció szerint számolva:

$$M(\xi) \doteq \sum_k x_k p_k = (-1)\frac{1}{12} + 0\frac{5}{12} + 1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

A szórásnégyzet, szintén a definíció szerint

$$D^2(\xi) \doteq M[(\xi - M(\xi))^2],$$

így tehát

$$D^2(\xi) = \left(-1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{12} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}.$$

és a szórás:

$$D(\xi) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

64. FELADAT: Jelölje ξ a dobások számát. Annak valószínűsége, hogy elsőre hatot dobunk, $\frac{1}{6}$, $P(\xi = 1) = \frac{1}{6}$. Miután $\frac{5}{6}$ annak a valószínűsége, hogy az első dobásunk nem hatos, $P(\xi = 2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$; általában $p_k \doteq P(\xi = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Így ξ várható értéke:

$$M(\xi) \doteq \sum_k x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

A fenti összeg kiszámolásához a generátorfüggvény módszert használjuk. Legyen

$$\phi(t) \doteq \sum_{k=1}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} t^k - 1 = \frac{1}{1-t} - 1,$$

ahol $|t| < 1$. Deriválás után:

$$\phi'(t) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k t^{k-1}.$$

Másrészt viszont,

$$\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)' = \left(\frac{1}{1-t}\right)' - 1' = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2},$$

amiből

$$\sum_{k=1}^{\infty} kt^{k-1} = \frac{1}{(1-t)^2}.$$

A fentiek alapján:

$$M(\xi) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6}\phi'\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{6}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6.$$

65. FELADAT: Egyrészről

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1,$$

tehát a $p_k = 2^{-k}$ sorozat valószínűségi eloszlás.

Másrészt

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k}{k}\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

a hírhedett alternáló sorozat, amely közismerten divergens.

66. FELADAT: Mivel

$$\{\xi \geq k\} = \bigcup_{j=k}^{\infty}\{\xi = j\}$$

és $\{\xi = i\}$ és $\{\xi = j\}$ események kizáróak, ha $i \neq j$:

$$P(\xi \geq k) = P\left(\bigcup_{j=k}^{\infty}\{\xi = j\}\right) = \sum_{j=k}^{\infty} P(\xi = j),$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} P(\xi = j) = \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\\ k\leq j}} P(\xi = j) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} P(\xi = j) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot P(\xi = j) = M(\xi).$$

67. FELADAT: A feladat első része a 41. feladat megoldásánál látott módon oldható meg, ezért csak röviden ismertetjük a megoldást. Annak a valószínűsége, hogy a második lövő a k. lövésnél találatot érjen el, de sem ő, sem pedig társa ne érjen találatot előbb, $(q_1q_2)^{k-1}q_1p_2$, ahol $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$; miután ezek az események kizáróak, a jobb lövő győzelmének valószínűsége

$$\sum_{k=1}^{\infty}(q_1q_2)^{k-1}q_1p_2 = \frac{q_1p_2}{1-q_1q_2}.$$

A 41. feladatban leírtak alapján annak a valószínűsége, hogy a gyengébb a k. körben győzzön $(q_1q_2)^{k-1}p_1$; ez annak valószínűsége, hogy a verseny végéig $2k-1$ perc teljen el; mint láttuk, annak a valószínűsége, hogy a jobb versenyző a k. körben (azaz $2k$ perc múlva) győzzön $(q_1q_2)^{k-1}q_1p_2$. Így az eltelt ξ idő várható értéke, felhasználva a 64. feladat megoldásánál alkalmazott generátorfüggvény módszert:

$$\begin{aligned}
M(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left((2k-1)(q_1q_2)^{k-1}p_1 + 2k(q_1q_2)^{k-1}q_1p_2\right) = \\
&\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)(q_1q_2)^{k-1}p_1 + \sum_{k=1}^{\infty}2k(q_1q_2)^{k-1}q_1p_2 = \\
&2q_1p_2\sum_{k=1}^{\infty}k(q_1q_2)^{k-1} + 2p_1\sum_{k=1}^{\infty}k(q_1q_2)^{k-1} - p_1\sum_{k=1}^{\infty}(q_1q_2)^{k-1} = \\
&(2q_1p_2+2p_1)\sum_{k=0}^{\infty}k(q_1q_2)^{k-1} - \frac{p_1}{1-(q_1q_2)} = \\
&(2q_1p_2+2p_1)\phi'(q_1q_2) - \frac{p_1}{1-q_1q_2} = \frac{2q_1p_2+2p_1}{(1-q_1q_2)^2} - \frac{p_1}{1-q_1q_2} = \\
&\frac{2q_1p_2+2p_1-p_1(1-q_1q_2)}{(1-q_1q_2)^2} = \frac{p_1+2q_1p_2+p_1q_1q_2}{(1-q_1q_2)^2}.
\end{aligned}$$

68. FELADAT: Legyen $\eta = \frac{1}{1+\xi}$ és $\xi = k$. Ekkor η várható értéke:

$$\begin{aligned}
M(\eta) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}P\left(\eta = \frac{1}{1+k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}P(\xi = k) = \\
&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!} =
\end{aligned}$$

$$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{1}{\lambda}=$$

$$\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}-1\right)=\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda}-1).$$

69. FELADAT: A 61. feladatban láttuk, hogy

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=1.$$

Így

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{1+x^2}\,dx=A\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx=A\pi;$$

tehát $f(x)$ pontosan akkor egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, ha $A\pi=1$, ill., ha $A=\frac{1}{\pi}$.

A várható érték definíciója szerint:

$$M(\xi)\doteq\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_{-\infty}^{\infty}=\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_{a}^{b};$$

azonban az utóbbi határérték nem létezik.

70. FELADAT: Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy ha $a\in\mathbb{R}$ és $n>1$, akkor

$$\int_{1}^{\infty}\frac{a}{x^n}\,dx=\left[-\frac{a}{(n-1)x^{n-1}}\right]_{1}^{\infty}=\frac{a}{n-1}.$$

A várható érték, a definíció szerint számolva:

$$M(\xi)\doteq\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\int_{1}^{\infty}\frac{3}{x^3}\,dx=\frac{3}{2}.$$

Hasonlóan, a szórásnégyzet:

$$D^2(\xi)=M(\xi^2)-(M(\xi))^2=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\,dx-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\int_{1}^{\infty}\frac{3}{x^2}\,dx-\frac{9}{4}=\frac{3}{1}-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}.$$

71. FELADAT: A várható érték:

$$M(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} x\frac{2}{x^3}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^{\infty} = 2.$$

Véges szórásnégyzet azonban nem létezik:

$$D^2(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - (M(\xi))^2 = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{x}\,dx - 4 = [2\ln x]_1^{\infty} - 4 = \infty.$$

72. FELADAT: A sűrűségfüggvényt a 47. feladat megoldásánál már meghatároztuk:

$$f(t) = \begin{cases} 2-2t, & \text{ha } 0 \le t \le 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A várható érték:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{1} x(2-2x)\,dx =$$
$$\int_0^1 2x - 2x^2\,dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

A szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = \int_0^1 x^2(2-2x)\,dx - \frac{1}{9} =$$
$$\int_0^1 2x^2 - 2x^3\,dx - \frac{1}{9} = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{4}x^4\right]_0^1 - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18}.$$

73. FELADAT: A várható érték parciális integrálással kapható meg:

$$M(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^3 e^{-h^2x^2}\,dx =$$
$$-\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \left(-2h^2 x e^{-h^2x^2}\right)\,dx = -\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 \left(e^{-h^2x^2}\right)'\,dx =$$
$$-\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(\left[x^2 e^{-h^2x^2}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2xe^{-h^2x^2}\,dx\right) = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} 2xe^{-h^2x^2}\,dx =$$
$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} -\frac{1}{h^2}\left(-2h^2xe^{-h^2x^2}\right)\,dx = -\frac{2}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left(e^{-h^2x^2}\right)'\,dx =$$
$$-\frac{2}{h\sqrt{\pi}} \left[e^{-h^2x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}.$$

74. FELADAT: A várható érték definíciója szerint:

$$M(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}e^{-|x|}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} xe^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-|x|}\,dx\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx\right) \overset{(1)}{=}$$

Az első integrálban az $u = -x$, a második integrálban pedig az $u = x$ helyettesítést elvégezve:

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\int_{\infty}^{0} ue^{-u}\,du + \int_{0}^{\infty} ue^{-u}\,du\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(-\int_{0}^{\infty} ue^{-u}\,du + \int_{0}^{\infty} ue^{-u}\,du\right) = 0.$$

A szórásnégyzet, hasonlóan számolva

$$D^2(\xi) \equiv M((\xi - M(\xi))^2) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} (x-0)^2 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2}e^{-|x|}\,dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} x^2e^{-|x|}\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2e^{-|x|}\,dx\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} x^2e^{x}\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}\,dx\right) \overset{(1)}{=}$$

Az első integrálban az $u = -x$, a második integrálban pedig az $u = x$ helyettesítést elvégezve:

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2}\left(\int_{\infty}^{0} -u^2e^{-u}\,du + \int_{0}^{\infty} u^2e^{-u}\,du\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\infty} u^2e^{-u}\,du + \int_{0}^{\infty} u^2e^{-u}\,du\right) = \int_{0}^{\infty} u^2e^{-u}\,du \overset{(2)}{=}$$

Parciálisan integrálva:

$$\overset{(2)}{=} \left[-u^2e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du = 2\int_0^\infty ue^{-u}\,du =$$
$$2\left([-ue^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = 2\int_0^\infty e^{-u}\,du = 2\left[-e^{-u}\right]_0^\infty = 2.$$

75. FELADAT: (a) Először a várható értéket számoljuk:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,|x|\;dx =$$
$$\int_{-1}^{0} x\,|x|\;dx + \int_{0}^{1} x\,|x|\;dx = \int_{-1}^{0} -x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx =$$
$$-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

A szórásnégyzet számítására a definíciót alkalmazzuk:

$$D^2(\xi) = M((\xi - M(\xi))^2) = M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx =$$
$$\int_{-1}^{1} x^2\,|x|\;dx = \int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} =$$
$$\left(-\left(\frac{0}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

A szórás tehát $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Felhasználva, hogy

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

a várható érték:

$$M(\xi) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\,dx =$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{0}^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

A szórásnégyzetet a $D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$ formula alapján számoljuk; csak az első tagot kell kiszámolnunk. Parciális integrálással kezdünk.

$$M(\xi^2) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} -x \cdot \left(-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} -x \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'\,dx =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\left[-x e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \stackrel{(1)}{=}$$

A kapott integrál nem határozható meg közvetlenül, tehát alternatív utat keresünk. Tudjuk, hogy a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

tehát

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1,$$

és így, felhasználva, hogy $e^{-\frac{x^2}{2}}$ páros függvény,

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Innen

$$\stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

Végül a szórásnégyzet:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = 1 - \frac{2}{\pi},$$

ill. a szórás:

$$D(\xi) = \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}}.$$

Megjegyezzük, hogy az

$$\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

integrál meghatározásának van egy elegánsabb módja is: mivel a standard normális eloszlás várható értéke 0, a szórása pedig 1, felhasználva, hogy

$$x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

páros függvény, kapjuk, hogy

$$1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx - 0^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \right) =$$
$$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,$$

tehát

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ahonnan a szórás értéke már egyszerűen megkapható.

76. Feladat: A 49. feladat utolsó részfeladatánál tett megjegyzések alapján tudjuk, hogy

$$G_\lambda(n) \doteq \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{(n-1)!}{\lambda^n},$$

ahol definíció szerint $0! \doteq 1$.

Most kiszámítjuk a k-adik momentumot:

$$M(\xi^k) = \int_0^{\infty} x^k \cdot \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n+k-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\,dx =$$
$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} x^{n+k-1} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \cdot \frac{(n+k-1)!}{\lambda^{n+k}} = \frac{(n+k-1)!}{\lambda^k (n-1)!}.$$

A várható érték az első momentum, tehát

$$M(\xi) = \frac{(n+1-1)!}{\lambda(n-1)!} = \frac{n}{\lambda}.$$

A szórásnégyzetet a $D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2$ formulával számoljuk:

$$D^2(\xi) = \frac{(n+1)!}{\lambda^2 (n-1)!} - \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \frac{n(n+1) - n^2}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}.$$

77. FELADAT: A közismert formula alapján

$$D^2(\xi\eta) = M((\xi\eta)^2) - (M(\xi\eta)^2),$$

és ξ és η függetlensége miatt $M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta)$, tehát

$$D^2(\xi\eta) = M(\xi^2\eta^2) - (M(\xi))^2(M(\eta))^2.$$

Most kiszámítjuk a $M(\xi^2\eta^2)$ várható értéket. Legyen $f(x,y)$ a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye; a valószínűségi változók függetlensége miatt $f(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$, ahol $f_\xi(x)$, ill. $f_\eta(y)$ rendre a ξ és η valószínűségi változók sűrűségfüggvénye.

$$\begin{aligned} M(\xi^2\eta^2) = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2y^2f(x,y)\,dx\,dy = \\ &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2y^2f_\xi(x)f_\eta(y)\,dx\,dy = \\ &\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2f_\xi(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2f_\eta(y)\,dy\right) = M(\xi^2)M(\eta^2), \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} D^2(\xi\eta) = &M(\xi^2)M(\eta^2) - (M(\xi))^2(M(\eta))^2 = \\ &[D^2(\xi) + (M(\xi))^2][D^2(\eta) + (M(\eta))^2] - (M(\xi))^2(M(\eta))^2 = \\ &D^2(\xi)D^2(\eta) + D^2(\xi)(M(\eta))^2 + (M(\xi))^2D^2(\eta) + (M(\xi))^2(M(\eta))^2 - \\ &(M(\xi))^2(M(\eta))^2 = \\ &D^2(\xi)D^2(\eta) + D^2(\xi)(M(\eta))^2 + (M(\xi))^2D^2(\eta). \end{aligned}$$

78. FELADAT: A definíció szerint számolunk:

$$\begin{aligned} M(\xi^n) \doteq &\int_{-\infty}^{\infty} x^nf(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^n}{b-a}\,dx = \\ &\frac{1}{b-a}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}. \end{aligned}$$

5.3 A Csebisev-egyenlőtlenség és környéke

A jelen szakaszban többször fogjuk alkamazni a következő egyenlőtlenségeket:

1. Legyen ξ egy valószínűségi változó, amelynek létezik mind várható értéke, mind pedig szórása. Ekkor tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén teljesül a **Csebisev-egyenlőtlenség:**

$$P(\,|\xi - M(\xi)|\; \geq \epsilon) \leq \frac{D^2(\xi)}{\epsilon^2}. \tag{10}$$

2. Jelölje k azt a valószínűségi változót, amely megadja, hogy egy $p > 0$ valószínűségű esemény hányszor következik be, ha az eseményhez vezető kísérletet n-szer végezzük el. Ekkor a $\frac{k}{n}$ relatív gyakoriságra teljesül a **Bernoulli-egyenlőtlenség:**

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{pq}{\epsilon^2 n}, \tag{11}$$

ahol $q \doteq 1 - p$.

79. Feladat: Egyrészt:

$$1 = M(\xi) \doteq \int_0^6 xf(x)\,dx = \int_0^5 xf(x)\,dx + \int_5^6 xf(x)\,dx \geq$$
$$\int_5^6 xf(x)\,dx \geq \int_5^6 5f(x)\,dx = 5\int_5^6 f(x)\,dx.$$

Most mindkét oldalt osztva 5-tel kapjuk, hogy

$$\int_5^6 f(x)\,dx \leq \frac{1}{5}.$$

Másrészt,

$$P(\xi < 5) \doteq \int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^6 f(x)\,dx - \int_5^6 f(x)\,dx = 1 - \int_5^6 f(x)\,dx \geq$$
$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

80. Feladat: Miután a 48 és 80 szimmetrikusan helyezkednek el a $\lambda = 64$ várhatóérték körül, a Csebisev-egyenlőtlenséget fogjuk használni az $\epsilon = 80 - 64 = 64 - 48 = 16$ speciális esetben. Az alkalmazáshoz meg kell határoznunk a szórásnégyzetet. Bár a λ paraméterű Poisson eloszlás szórásnégyzete közismert, a teljesség kedvéért levezetjük. Mindenekelőtt a

második momentumot határozzuk meg:

$$M(\xi^2) \doteq \sum x_i^2 p_i = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} =$$

$$e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!} =$$

$$e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) =$$

$$e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) = \lambda^2 + \lambda,$$

tehát a szórásnégyzet $D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$. Tehát a Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P(48 < \xi < 80) = P(\,|\xi - 64|\, < 16) = 1 - P(\,|\xi - 64|\, \geq 16) \geq$$

$$1 - \frac{D^2(\xi)}{16^2} = 1 - \frac{64}{16^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

81. Feladat: Tudjuk, hogy $M(\xi) = 50$, továbbá hogy $D(\xi) = 20$ és $\epsilon = 60$. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint:

$$P(|\xi - 50| \geq 60) \leq \frac{400}{3600} = \frac{1}{9} \approx 0,1111.$$

Normális eloszlás esetében $P(|\xi - 50| \geq 60)$ jelentése az, hogy ξ vagy -10-nél kisebb, vagy 110-nél nagyobb, azaz

$$\{|\xi - 50| \geq 60\} = \{\xi \leq -10\} \cup \{\xi \geq 110\}.$$

Miután $\{\xi \leq -10\}$ és $\{\xi \geq 110\}$ kizáróak, kapjuk:

$$P(|\xi - 50| \geq 60) = P(\xi \leq -10) + P(\xi \geq 110) = F(-10) + 1 - F(110) \overset{(1)}{=}$$

Legyen Φ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. Ekkor

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right),$$

továbbá (lásd 54. feladat) $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$, azaz $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Így a táblázat alapján kapjuk, hogy

$$\overset{(1)}{=} \Phi\left(\frac{-10 - 50}{20}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{110 - 50}{20}\right) = \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) =$$

$$2[1 - \Phi(3)] \approx 2 \cdot 0,0014 = 0,0028.$$

82. FELADAT: Mivel ξ pozitív valószínűségi változó,

$$P(\xi \geq 55) = P(\,|\xi - 10|\, \geq 45).$$

Így a Csebisev-egyenlőtlenség[5] alapján:

$$P(\xi \geq 55) = P(|\xi - 10| \geq 45) \leq \frac{D^2(\xi)}{45^2} = \frac{100}{2025} \approx 0,049.$$

Mivel a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke (és szórása is) λ^{-1}, a felhasználandó eloszlás paramétere $\lambda = 0.1$. Így a valószínűség pontos értéke:

$$P(\xi \geq 55) = 1 - P(\xi < 55) = 1 - F(55) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot 55}) = e^{-\lambda \cdot 55} =$$
$$e^{-\frac{1}{10} \cdot 55} = e^{-5,5} = \frac{1}{e^{5,5}} \approx 0,004.$$

83. FELADAT: A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$P(|\xi - 35| \geq 1) \leq \frac{0,3^2}{1^2} = 0,09.$$

84. FELADAT: A Csebisev-egyenlőtlenség alapján a keresett becslés:

$$P(400 < \xi < 600) = P(\,|\xi - 500|\, < 100) =$$
$$1 - P(\,|\xi - 500|\, \geq 100) \geq 1 - \frac{25^2}{100^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

85. FELADAT: Az alsó becslés értéke:

$$P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) \leq \frac{D^2(\xi)}{(3D(\xi))^2} = \frac{D^2(\xi)}{9D^2(\xi)} = \frac{1}{9}.$$

A felső becslés eredménye:

$$P(|\xi - M(\xi)| < 3D(\xi)) = 1 - P(|\xi - M(\xi)| \geq 3D(\xi)) \geq$$
$$1 - \frac{D^2(\xi)}{(3D(\xi))^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

[5] Hasonló becslés kapható a Markov-egyenlőtlenség alapján is:

$$P(\xi \geq 55) \leq \frac{M(\xi)}{55} \approx 0.18;$$

az azonban lényegesen gyengébb eredményt ad.

(a) Ha ξ normális eloszlású, akkor az eloszlásfüggvény

$$F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma}),$$

a keresett valószínűség pedig

$$\begin{aligned}
&P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) = \\
&\quad P(\xi \le M(\xi) - 3D(\xi)) + P(\xi \ge M(\xi) + 3D(\xi)) = \\
&\quad F(M(\xi) - 3D(\xi)) + 1 - F(M(\xi) + 3D(\xi)) = \\
&\Phi\left(\frac{M(\xi) - 3D(\xi) - M(\xi)}{D(\xi)}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{M(\xi) + 3D(\xi) - M(\xi)}{D(\xi)}\right) = \\
&\Phi\left(\frac{-3D(\xi)}{D(\xi)}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{3D(\xi)}{D(\xi)}\right) = \Phi(-3) + 1 - \Phi(3) = 2\Phi(-3) = \\
&\quad 2(1 - \Phi(3)) = 2 \cdot 0,0014 = 0,0028.
\end{aligned}$$

(b) Ha ξ exponenciális eloszlású, akkor az eloszlásfüggvény

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Figyelembe véve, hogy egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó zéró valószínűséggel vesz fel negatív értéket, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
&P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) = 1 - F(M(\xi) + 3D(\xi)) = \\
&\quad 1 - (1 - e^{-\lambda(M(\xi)+3D(\xi))}) = e^{-\lambda(M(\xi)+3D(\xi))} = e^{-\lambda M(\xi) - \lambda 3D(\xi)} = \\
&\quad e^{-\lambda\frac{1}{\lambda} - \lambda 3\frac{1}{\lambda}} = e^{-4} = 0,018315638.
\end{aligned}$$

(c) Ha ξ egyenletes eloszlású a $[-1,1]$ intervallumon, akkor az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, & \text{ha } -1 \le x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

a várható érték $M(\xi) = \frac{-1+1}{2} = 0$, a szórásnégyzet pedig $D^2(\xi) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Tehát:

$$\begin{aligned}
&P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) = \\
&\quad F(M(\xi) - 3D(\xi)) + 1 - F(M(\xi) + 3D(\xi)) = \\
&F(0 - 3\frac{1}{\sqrt{3}}) + 1 - F(0 + 3\frac{1}{\sqrt{3}}) = F(-\sqrt{3}) + 1 - F(\sqrt{3}) = 0 + 1 - 1 = 0.
\end{aligned}$$

(d) Mivel a Poisson eloszlás várható értéke (és szórásnégyzete is) a paramétere, $\lambda = 0.9$. Mivel

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

és $\lambda - 3\sqrt{\lambda} = 0.9 - 3\sqrt{0.9} < 0$, kapjuk

$$P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) = \sum_{k=0}^{\lambda-3\sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=\lambda+3\sqrt{\lambda}}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} =$$

$$\sum_{k=0.9+3\sqrt{0.9}}^{\infty} \frac{0.9^k}{k!}e^{-0.9} = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{0.9^k}{k!}e^{-0.9} = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{0.9^k}{k!}e^{-0.9} =$$

$$1 - (\frac{0.9}{1}e^{-0.9} + \frac{0.9^2}{2}e^{-0.9} + \frac{0.9^3}{3}e^{-0.9}) = 0.42,$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0.9^k}{k!}e^{-0.9} = 1.$$

86. FELADAT: A fej dobás valószínűsége $p = \frac{1}{2}$. A (11) Bernoulli-egyenlőtlenségnél használt jelölésrendszert használva, azt a legkisebb n számot keressük, amelyre az

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 0.1\right) \geq 0.9,$$

ill. a vele ekvivalens

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq 0.1\right) = 1 - P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 0.1\right) \leq 0.1.$$

egyenlőtlenség teljesülése garantált.

A Bernoulli-egyenlőtlenség alapján:

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{\frac{1}{4}}{0,1^2 n} = \frac{25}{n},$$

így aztán elegendő olyan n-et találni, amelyre

$$\frac{25}{n} \leq 0.1.$$

Ez $n \geq 250$ esetén teljesül, tehát az érmével legalább 250 dobást kell végeznünk.

87. FELADAT: A feladat megoldása hasonló az előzőéhez, a különbség csak az, hogy $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$ és a küszöbvalószínűség 0.8. Így a

$$\frac{pq}{0.1^2 n} = \frac{\frac{5}{36}}{0.1^2 n} = \frac{500}{36n} \leq 0.2$$

egyenlőtlenség alapján a szükséges dobások n számára az

$$n \geq \frac{2500}{36} \approx 69.4444$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Tehát 70 vagy több dobást kell végeznünk a kockával.

88. FELADAT: Jelölje n a tételben a darabszámot, k pedig a hibás gyártmányok számát. Olyan darabszámot keresünk, hogy a

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| \leq 0.02\right) \geq 0.95,$$

ill. a vele ekvivalens

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| > 0.02\right) = 1 - P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| \leq 0.02\right) \leq 0.05$$

egyenlőtlenség teljesüljön.

A Bernoulli-egyenlőtlenség közvetlenül nem alkalmazható a

$$p_{k,n} \doteq P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| > 0.02\right)$$

valószínűség megbecslésére; helyette egy kezdő becslés keresésére alkalmazzuk: A (11) formula szerint

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| \geq 0.02\right) \leq \frac{0.1 \cdot 0.9}{n \cdot 0.02^2} = \frac{225}{n};$$

így

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.1\right| \geq 0.02\right) \leq 0.05$$

biztos, hogy teljesül, ha

$$n \geq \frac{225}{0.05} = 4500.$$

Nyilvánvaló, hogy $n = 4500$ megfelel a feladat céljainak. Kérdés, hogy kisebb n elfogadható-e?

A kérdés megválaszolásához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
p_{n,k} \equiv P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|>0.02\right) = P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|\geq 0.02\right) - \\
P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|=0.02\right) = P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|\geq 0.02\right) - \\
P\left(\frac{k}{n}-0.1=0.02\right) - P\left(-\frac{k}{n}+0.1=0.02\right) = \\
P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|\geq 0.02\right) - P\left(\frac{k}{n}=0.12\right) - P\left(\frac{k}{n}=0.08\right) = \\
P\left(\left|\frac{k}{n}-0.1\right|\geq 0.02\right) - P\left(k=0.12\cdot n\right) - P\left(k=0.08\cdot n\right) \leq \\
\frac{225}{n} - P(k=0.12\cdot n) - P(k=0.08\cdot n),
\end{aligned}$$

valamint, hogy – mivel a k valószínűségi változó binomiális eloszlású – érvényes, hogy

$$P(k=m) = \binom{n}{m}\cdot 0.1^m \cdot 0.9^{n-m}.$$

Ezek után a mellékelt táblázatból[6], amelyben $a_n \doteq \frac{225}{n}$, $b_n \doteq P(k=0.12\cdot n)$, $c_n \doteq P(k=0.08\cdot n)$ és

$$\Delta_n \doteq \frac{225}{n} - P(k=0.12\cdot n) - P(k=0.08\cdot n),$$

[6]Ezek azok a pillanatok, amikor nem árt, ha kéznél van egy számítógép. Egy másik lehetőség, hogy a szükséges faktoriálisok becsléséhez a *Stirling formulát* alkalmazzuk, bár ez esetben gondosan ellenőriznünk kellene a becslések pontosságát is. Végül, az egész bonyodalom elkerülhető lenne, ha a feladatban a "ne térjen el 0.02-nél nagyobb mértékben" kifejezés helyett a "0.02-nél kisebb mértékben térjen el" kifejezés szerepelne...

n	a_n	b_n	c_n	Δ_n
4500	1/20	$0.1423923087 \cdot 10^{-5}$	$0.5137504584 \cdot 10^{-6}$	0.04999806232
4499	225/4499	nem egész	nem egész	0.05001111358
4498	225/4498	nem egész	nem egész	0.0500222321
4497	75/1499	nem egész	nem egész	0.05003335557
4496	225/4496	nem egész	nem egész	0.05004448398
4495	45/899	nem egész	nem egész	0.05005561735
4494	75/1498	nem egész	nem egész	0.05006675567
4493	225/4493	nem egész	nem egész	0.05007789895
4492	225/4492	nem egész	nem egész	0.05008904719
4491	25/499	nem egész	nem egész	0.0501002004
4490	45/898	nem egész	nem egész	0.05011135857
4489	225/4489	nem egész	nem egész	0.05012252172
4488	75/1496	nem egész	nem egész	0.05013368984
4487	225/4487	nem egész	nem egész	0.05014486293
4486	225/4486	nem egész	nem egész	0.05015604101
4485	15/299	nem egész	nem egész	0.05016722408
4484	225/4484	nem egész	nem egész	0.05017841213
4483	225/4483	nem egész	nem egész	0.05018960517
4482	25/498	nem egész	nem egész	0.05020080321
4481	225/4481	nem egész	nem egész	0.05021200624
4480	45/896	nem egész	nem egész	0.05022321428
4479	75/1493	nem egész	nem egész	0.05023442732
4478	225/4478	nem egész	nem egész	0.05024564537
4477	225/4477	nem egész	nem egész	0.05025686843
4476	75/1492	nem egész	nem egész	0.05026809651
4475	9/179	$0.1504953932 \cdot 10^{-5}$	$0.5466176865 \cdot 10^{-6}$	0.05027727803
4474	225/4474	nem egész	nem egész	0.05029056772
4473	25/497	nem egész	nem egész	0.05030181086
4472	225/4472	nem egész	nem egész	0.05031305903
4471	225/4471	nem egész	nem egész	0.05032431223
4470	15/298	nem egész	nem egész	0.05033557047

láthatjuk, hogy kisebb n értéket a Bernoulli-egyenlőtlenség alkalmazásával nem tudunk megadni.

89. FELADAT: Egyrészt, a (11) Bernoulli-egyenlőtlenség szerint

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{pq}{\epsilon^2 n},$$

másrészt, a számtani és mértani közepek közötti ismert egyenlőtlenség[7] miatt:

$$\sqrt{pq} \le \frac{p+q}{2} = \frac{1}{2}.$$

Így

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| \ge \epsilon\right) \le \frac{pq}{\epsilon^2 n} \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\epsilon^2 n} = \frac{1}{4\epsilon^2 n}.$$

90. FELADAT: Olyan n megfigyelésszámot keresünk, amelyre

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le 0,01\right) \ge 0.95$$

vagy a vele ekvivalens

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > 0,01\right) \le 0.05$$

egyenlőtlenség teljesül, ahol p egy általunk ismeretlen valószínűség. Felhasználva, hogy

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| > 0,01\right) \le P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \ge 0,01\right), \tag{12}$$

az előző feladat egyenlőtlenségét alkalmazzuk; ez olyan n keresésére redukálja a problémát, amelyre

$$\frac{1}{4 \cdot n \cdot 0.01^2} \le 0.05.$$

Innen

$$n \ge \frac{1}{4 \cdot 0.05 \cdot 0.01^2} = 50000.$$

91. FELADAT: A feladatot általánosabban oldjuk meg: tegyük fel, hogy η egy kizárólag nemnegatív értékeket felvevő valószínűségi változó, amelyre $M(g(\eta))$ véges. Ekkor

$$M(g(\eta)) = \int_0^\infty g(x) f_\eta(x)\, dx,$$

[7] Lásd a 45. feladat megoldását, ill. a 4. lábjegyzetet.

és – akárcsak a Markov-féle egyenlőtlenség bizonyításánál – kapjuk, hogy

$$M(g(\eta)) = \int_0^\infty g(x) f_\eta(x)\,dx \geq \int_\epsilon^\infty g(x) f_\eta(x)\,dx \geq$$
$$\int_\epsilon^\infty g(\epsilon) f_\eta(x)\,dx = g(\epsilon)\int_\epsilon^\infty f_\eta(x)\,dx = g(\epsilon)\cdot P(\eta \geq \epsilon),$$

tehát

$$g(\epsilon)\cdot P(\eta \geq \epsilon) \leq M(g(\eta)),$$

és így:

$$P(\eta \geq \epsilon) \leq \frac{M(g(\eta))}{g(\epsilon)}.$$

A feladat egyenlőtlensége az $\eta = |\xi|$ speciális esetnek felel meg.

5.4 Többdimenziós eloszlások

92. Feladat: Mivel ξ és η függetlenek, a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása:

$$P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i)\cdot P(\eta = j) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

ahol $i, j = 1, \ldots, 6$.

93. Feladat: Az ismert formula szerint ξ peremeloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \lim_{y\to\infty} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y} = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{ha } x \geq 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Hasonlóan, η peremeloszlásfüggvénye:

$$F(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y} = \begin{cases} 1 - e^{-y}, & \text{ha } y \geq 0, \\ 0, & \text{ha } y < 0. \end{cases}$$

Tehát ξ és η mindegyike $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

Végül, a meghatározandó valószínűség:

$$P(\xi < 1, \eta < 1) = F(x,y) = F(1,1) = 1 + e^{-2} - e^{-1} - e^{-1} \approx 0{,}3996.$$

94. FELADAT: Az $f(x, y)$ függvénynek a következő két kritériumot kell kielégítenie:

1. Nemnegativitás: $f(x, y) \geq 0$.
2. Normáltság:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Az első kritérium teljesülése nyilvánvaló. A második kritériumot integrálással ellenőrizzük:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}}\, dx\, dy =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2 + y^2}{2}}\, dx\, dy =$$
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 1,$$

ahol kihasználtuk, hogy mind
$$g(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}},$$
mind pedig
$$h(y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$
normális eloszlás sűrűségfüggvényei, tehát az integráljuk a számegyenes mentén 1.

Tehát $f(x, y)$ sűrűségfüggvény.

95. FELADAT: Ha $\zeta \doteq g(\xi, \eta)$, akkor $M(\zeta)$ várható értéket – amennyiben létezik – a
$$M(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x, y) f(x, y)\, dx\, dy \tag{13}$$
formulával számolhatjuk, ahol $f(x, y)$ a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye.

A fenti formulát a feladatban megadott függvényekre alkalmazva kapjuk, hogy:

$$M(\xi + \eta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x + y) f(x, y)\, dx\, dy =$$
$$\int_0^1 \int_0^1 (x + y)(x + y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2 + 2xy + y^2\, dx\, dy =$$

$$\int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^1 2xy\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^1 y^2\,dx\,dy=$$
$$\int_0^1\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\,dy+\int_0^1\int_0^1 2xy\,dx\,dy+\int_0^1\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)\,dx=$$
$$\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy+2\left(\int_0^1 x\,dx\right)\cdot\left(\int_0^1 y\,dy\right)+\int_0^1\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx=$$
$$\int_0^1\frac{1}{3}\,dy+2\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right)\cdot\left(\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1\right)+\int_0^1\frac{1}{3}\,dx=$$
$$\left[\frac{y}{3}\right]_0^1+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left[\frac{x}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{6}.$$

Hasonlóan:

$$M(\xi-\eta)=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}(x-y)f(x,y)\,dx\,dy=$$
$$\int_0^1\int_0^1(x-y)(x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 x^2-y^2\,dx\,dy=$$
$$\int_0^1\int_0^1 x^2\,dx\,dy-\int_0^1\int_0^1 y^2\,dx\,dy=$$
$$\int_0^1\left(\int_0^1 x^2\,dx\right)\,dy-\int_0^1\left(\int_0^1 y^2\,dy\right)\,dx=\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy-\int_0^1\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx=$$
$$\int_0^1\frac{1}{3}\,dy-\int_0^1\frac{1}{3}\,dx=\left[\frac{y}{3}\right]_0^1-\left[\frac{x}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0.$$

96. FELADAT: Néhány általános jellegű megjegyzéssel kezdünk. Mivel

$$g(x)\doteq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}$$

egy $(y,1)$ paraméterű normális eloszlású ζ_1 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye,

$$\int_{\mathbb{R}}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\,dx=M(\zeta_1)=y.$$

Hasonlóan,

$$h(y)\doteq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

egy standard normális eloszlású ζ_2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, amelynek a második momentuma

$$\int_{\mathbb{R}}y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=M(\zeta_2^2)=D^2(\zeta_2)+(M(\zeta_2))^2=1.$$

Így, a (13) formula szerint számolva:

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}\,dx\,dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xy\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-y)^2+y^2}{2}}\,dx\,dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}} y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}\,dx\right)\,dy = \int_{\mathbb{R}} y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 1.$$

97. Feladat: A várható érték linearitása miatt

$$M(\eta_1) = M(1-\xi_1) = M(1) - M(\xi_1) = 1 - M(\xi_1)$$

és

$$M(\eta_2) = M(1-\xi_2) = M(1) - M(\xi_2) = 1 - M(\xi_2).$$

Ekkor egyrészt

$$M((\eta_1 - M(\eta_1))(\eta_2 - M(\eta_2))) =$$
$$M((1-\xi_1-(1-M(\xi_1)))(1-\xi_2-(1-M(\xi_2)))) =$$
$$M((\xi_1 - M(\xi_1))(\xi_2 - M(\xi_2))),$$

másrészt pedig

$$D^2(\eta_i) = D^2(1-\xi_i) =$$
$$M(1-\xi_i)^2 - (M(1-\xi_i))^2 = M(1-2\xi_i+\xi_i^2) - (1-M(\xi_i))^2 =$$
$$(1-2M(\xi_i)+M(\xi_i)^2) - (1-2M(\xi_i)+(M(\xi_i))^2) =$$
$$M(\xi_i)^2 - (M(\xi_i))^2 = D^2(\xi_i),$$

ahol $i = 1, 2$. Így aztán:

$$R(\eta_1,\eta_2) \doteq \frac{M(\eta_1 - M(\eta_1)) \cdot M(\eta_2 - M(\eta_2))}{D(\eta_1)D(\eta_2)} =$$
$$\frac{M(\xi_1 - M(\xi_1)) \cdot M(\xi_2 - M(\xi_2))}{D(\xi_1)D(\xi_2)} = R(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{2}.$$

98. FELADAT: A megoldást néhány valószínűség kiszámításával kezdjük:

$$P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$
$$P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8},$$
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{3}{4},$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{7}{8}.$$

Most kiszámítjuk az (ξ, η) együttes eloszlását:

	$\eta = 0$	$\eta = 1$	
$\xi = 0$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$
$\xi = 1$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

22. ábra: (ξ, η) együttes eloszlásfüggvénye és a peremeloszlások

$$P(\xi = 0, \eta = 0) = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A + B}) =$$
$$1 - P(A + B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(AB)) = \frac{11}{16}$$
$$P(\xi = 0, \eta = 1) = P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{16}$$
$$P(\xi = 1, \eta = 0) = P(A\overline{B}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = \frac{3}{16}$$
$$P(\xi = 1, \eta = 1) = P(AB) = \frac{1}{16},$$

valamint a ξ és η eloszlásait (amelyek pont (ξ, η) peremeloszlásai, lásd 22. ábra):

$$P(\xi = 0) = P(\overline{A}) = \frac{3}{4}, \qquad P(\xi = 1) = P(A) = \frac{1}{4},$$
$$P(\eta = 0) = P(\overline{B}) = \frac{7}{8}, \qquad P(\eta = 1) = P(B) = \frac{1}{8}.$$

Ezek után a várható értékek ill. szórások meghatározása következik:

$$\begin{aligned}
M(\xi) &= 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, & M(\xi^2) &= 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\\
M(\eta) &= 0 \cdot \frac{7}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, & M(\eta^2) &= 0 \cdot \frac{7}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8},\\
D^2(\xi) &= M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \frac{3}{16}, & D^2(\eta) &= M(\eta^2) - (M(\eta))^2 = \frac{7}{64}.
\end{aligned}$$

Így

$$\begin{aligned}
&M((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta))) = \\
&\quad \sum_{i,j=0,1} (i - M(\xi))(j - M(\eta))P(\xi = i, \eta = j) = \\
&\left(0 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(0 - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{11}{16} + \left(0 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{16} + \\
&\quad \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(0 - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{3}{16} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32},
\end{aligned}$$

tehát

$$R(\xi, \eta) \doteq \frac{M((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta)))}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \approx 0,2182.$$

A ξ és η valószínűségi változók nem függetlenek; ennek belátására az alábbi észrevételek bármelyike elegendő.

1. $R(\xi, \eta) \neq 0$.

2. $P(A) \neq P(A|B)$.

3. ξ és η együttes eloszlása nem egyezik meg a peremeloszlások szorzatával (lásd 22. ábra).

99. FELADAT: Elemi megfontolások alapján a ξ és η együttes eloszlása:

$$
\begin{aligned}
p_{00} =& p(\xi=0,\eta=0)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15},\\
p_{10} =& p(\xi=1,\eta=0)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{10},\\
p_{20} =& p(\xi=2,\eta=0)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15},\\
p_{01} =& p(\xi=0,\eta=1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{1}{10},\\
p_{02} =& p(\xi=0,\eta=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{15},\\
p_{11} =& p(\xi=1,\eta=1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15},\\
p_{21} =& p(\xi=2,\eta=1)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15},\\
p_{12} =& p(\xi=1,\eta=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{2}{15},\\
p_{22} =& p(\xi=2,\eta=2)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}.
\end{aligned}
$$

Innen a peremeloszlások:

	$\eta=0$	$\eta=1$	$\eta=2$	
$\xi=0$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$
$\xi=1$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$
$\xi=2$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

A fenti táblázat alapján a feladat kérdései megválaszolhatóak:

(a) A valószínűségi változók nem függetlenek, mert együttes eloszlásuk nem egyenlő a peremeloszlásaik szorzatával, pl.

$$P(\xi=0,\eta=1)=\frac{1}{10}\neq\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=P(\xi=0)\cdot P(\eta=1).$$

(b) Miután

$$M(\xi)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{4}{10}=\frac{11}{10}$$

és

$$M(\xi^2) = 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 1^2 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{19}{10},$$

tehát

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 = \frac{19}{10} - \left(\frac{11}{10}\right)^2 = 0,69,$$

így $D(\xi) = \sqrt{0,69} \approx 0,8306$.

100. Feladat: Legyen $p \doteq P(\xi = i, \eta = j)$, ahol $i \neq 2$, $j \neq 2$; ekkor a feladat szerint $P(\xi = 2, \eta = 2) = 4p$. A ξ és η együttes- és peremeloszlásairól a következő táblázat készíthető:

	$\eta = 1$	$\eta = 2$	$\eta = 3$	
$\xi = 1$	p	p	p	$3p$
$\xi = 2$	p	$4p$	p	$6p$
$\xi = 3$	p	p	p	$3p$
	$3p$	$6p$	$3p$	$12p = 1$

Mivel $1 = P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) = P(\eta = 1) + P(\eta = 2) + P(\eta = 3) = 12p$, kapjuk, hogy $p = \frac{1}{12}$, és a fenti táblázat a következő alakot veszi fel:

	$\eta = 1$	$\eta = 2$	$\eta = 3$	
$\xi = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\xi = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\xi = 3$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

Ezek után kiszámítjuk a ξ és η valószínűségi változók azon jellemzőit, amelyek szükségesek $R(\xi, \eta)$ meghatározásához:

$$M(\xi) = \sum_{x=1}^{3} xp_x = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

$$M(\eta) = \sum_{y=1}^{3} yp_y = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} +$$
$$2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{12} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} +$$
$$3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 4.$$

Nem szükséges tovább számolnunk, mert

$$R(\xi, \eta) \doteq \frac{M((\xi - M(\xi))(\eta - M(\eta)))}{D(\xi)D(\eta)} =$$
$$\frac{M(\xi\eta - M(\eta)\xi - M(\xi)\eta + M(\xi)M(\eta))}{D(\xi)D(\eta)} =$$
$$\frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta) - M(\xi)M(\eta) + M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} =$$
$$\frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{4 - 2 \cdot 2}{D(\xi)D(\eta)} = 0.$$

Másrészről, ξ és η nem függetlenek, mert együttes eloszlásuk nem egyezik meg a peremeloszlások szorzatával.

101. Feladat: A feladat alapján rekonstruáljuk ξ és η együttes és peremeloszlásait:

	$\eta = 1$	$\eta = 0$	$\eta = -1$	
$\xi = 1$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$\xi = 0$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\xi = -1$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

A táblázat alapján világos, hogy ξ és η nem függetlenek; például

$$P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(\xi = 1) \cdot P(\eta = 0).$$

Ezek után kiszámítjuk azon jellemzőiket, amelyek $R(\xi, \eta)$ meghatározásához szükségesek:

$$\begin{aligned}
M(\xi) =& 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1 \cdot \frac{1}{4}) = 0. \\
M(\eta) =& 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1 \cdot \frac{1}{4}) = 0. \\
M(\xi\eta) =& 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot (-1) \cdot 0 + \\
& 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + \\
& (-1) \cdot (-1) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Nem szükséges tovább számolnunk, ugyanis

$$R(\xi, \eta) = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{0 - 0 \cdot 0}{D(\xi)D(\eta)} = 0.$$

102. FELADAT: Meghatározzuk az f_ξ és f_η peremsűrűségfüggvényeket:

$$\begin{aligned}
f_\xi(x) &\doteq \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dy = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)\, dy = \left[\frac{6}{5}xy + \frac{2}{5}y^3\right]_0^1 = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}, \\
f_\eta(y) &\doteq \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, dx = \int_0^1 \frac{6}{5}(x + y^2)\, dx = \left[\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}y^2 x\right]_0^1 = \frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5},
\end{aligned}$$

majd a várható értékeket:

$$\begin{aligned}
M(\xi) &\doteq \int_{\mathbb{R}} x f_\xi(x)\, dx = \int_0^1 x \left(\frac{6}{5}x + \frac{2}{5}\right)\, dx = \left[\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{5}, \\
M(\eta) &\doteq \int_{\mathbb{R}} y f_\eta(y)\, dy = \int_0^1 y \left(\frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}\right)\, dy = \left[\frac{3}{10}y^4 + \frac{3}{10}y^2\right]_0^1 = \frac{3}{5},
\end{aligned}$$

második momentumokat:

$$\begin{aligned}
M(\xi^2) &\doteq \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\xi(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \left(\frac{6}{5}x + \frac{2}{5}\right)\, dx = \left[\frac{3}{10}x^4 + \frac{2}{15}x^3\right]_0^1 = \frac{13}{30}, \\
M(\eta^2) &\doteq \int_{\mathbb{R}} y^2 f_\eta(y)\, dy = \int_0^1 y^2 \left(\frac{6}{5}y^2 + \frac{3}{5}\right)\, dy = \left[\frac{6}{25}y^5 + \frac{1}{5}y^3\right]_0^1 = \frac{11}{25}
\end{aligned}$$

és szórásokat:

$$D(\xi) \doteq \sqrt{M(\xi^2) - (M(\xi))^2} = \sqrt{\frac{11}{150}},$$
$$D(\eta) \doteq \sqrt{M(\eta^2) - (M(\eta))^2} = \sqrt{\frac{2}{25}}.$$

Szükséges még $M(\xi\eta)$ meghatározása:

$$M(\xi\eta) \doteq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy\frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy =$$
$$\int_0^1\int_0^1 \frac{6}{5}(x^2y + xy^3)\,dx\,dy = \frac{6}{5}\left(\int_0^1\int_0^1 x^2y\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 xy^3\,dx\,dy\right) =$$
$$\frac{6}{5}\left(\int_0^1 y\int_0^1 x^2\,dx\,dy + \int_0^1 y^3\int_0^1 x\,dx\,dy\right) =$$
$$\frac{6}{5}\left(\int_0^1 y\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 dy + \int_0^1 y^3\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy\right) = \frac{6}{5}\left(\int_0^1 \frac{y}{3}\,dy + \int_0^1 \frac{y^3}{2}\,dy\right) =$$
$$\frac{6}{5}\left(\left[\frac{y^2}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{y^4}{8}\right]_0^1\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{20}.$$

Így tehát

$$R(\xi,\eta) = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{\frac{7}{20} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{11}{150}}\sqrt{\frac{2}{25}}} = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{11}} \approx -0.13055.$$

103. FELADAT: A sűrűségfüggvény alakja azt sugallja, hogy a megoldáshoz ismételt parciális integrálásra lesz szükség. Sajnos ez – különösen a többdimenziós esetekben – meglehetősen hosszadalmas (és iszonyatosan unalmas) számításokhoz vezet; így inkább egy egyszerűbb, a valószínűségszámítás sajátos eszközeit jobban kihasználó módszert választunk. A megoldásunk alapötlete, hogy a normális eloszlás – közismert – momentumai tartalmazzák azokat az információkat, amelyek segítségével a számunkra szükséges integrálok értékei közvetlenül meghatározhatóak.

Egy általános észrevétellel kezdünk: Ha $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, akkor

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-a(t-b)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2a}}}e^{-a(t-b)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2a}}}e^{-\frac{(t-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)^2}}$$

egy $\left(b, \sqrt{\frac{1}{a}}\right)$ paraméterű normális eloszlású ζ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, tehát

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a(t-b)^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-a(t-b)^2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \tag{14}$$

Ezek után a peremsűrűségfüggvényeket határozzuk meg:

$$\begin{aligned} f_\xi(x) &\doteq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dy = \\ &\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{3}\left[\left(y-\frac{x}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2\right]}\, dy = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{3}\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}\, dy = \\ &\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{2}{3}}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Az x és y változók közötti szimmetria alapján

$$f_\eta(y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Miután mind f_ξ, mind pedig f_η egy normális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye,

$$\begin{aligned} M(\xi) &= 0, & M(\xi^2) &= D^2(\xi) = 1, \\ M(\eta) &= 0, & M(\eta^2) &= D^2(\eta) = 1, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} 1 \equiv M(\xi^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dy\, dx = \\ &\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dx\, dy \end{aligned} \tag{15}$$

és

$$\begin{aligned} 1 \equiv M(\eta^2) &= \int_{\mathbb{R}} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} y^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dy\, dx = \\ &\frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dx\, dy, \end{aligned} \tag{16}$$

azaz

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\, dx\, dy = \pi\sqrt{3}.$$

Hasonlóan, mivel $f(x, y)$ sűrűségfüggvény,

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy = 1,$$

tehát

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy = \pi\sqrt{3}. \tag{17}$$

Most kiszámítjuk az $M(\xi\eta)$ várható értéket. Legyen $F(x, y)$ a ξ és η együttes eloszlásfüggvénye; ekkor a (14–17) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F(x,y) - \lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy = \\
\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy = \\
\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{8}{9}x^2 - \frac{8}{9}y^2 + \frac{20}{9}xy + \frac{2}{3}\right) e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy = \\
\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[-\frac{8}{9}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy - \frac{8}{9}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy + \right. \\
\left. \frac{20}{9}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy + \frac{2}{3}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy\right] = \\
\frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left[-\frac{8}{9}\cdot\pi\sqrt{3} - -\frac{8}{9}\cdot\pi\sqrt{3} + \frac{20}{9}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy + \frac{2}{3}\pi\sqrt{3}\right] = \\
-\frac{10}{9} + \frac{20}{9\pi\sqrt{3}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Tehát

$$M(\xi\eta) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{20}{9}} = \frac{1}{2}.$$

Végül tehát

$$R(\xi,\eta) \doteq \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{\frac{1}{2} - 0\cdot 0}{1\cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

104. Feladat: A peremsűrűségfüggvények meghatározásához felhasznál-

juk a (14) összefüggést:

$$
\begin{aligned}
f_\xi(x) &\doteq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)e^{-y^2} + \left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)e^{-x^2}\,dy = \\
&\frac{1}{2\pi}\left[\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy + e^{-x^2}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\,dy\right] = \\
&\frac{1}{2\pi}\left[\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)\sqrt{\pi} + e^{-x^2}\left(\sqrt{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy - \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right)\right] = \\
&\frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{\pi}\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right) + e^{-x^2}\left(\sqrt{2}\sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi}\right)\right] = \\
&\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};
\end{aligned}
$$

mivel pedig $f(x,y) = f(y,x)$, kapjuk, hogy

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Most belekezdünk a $M(\xi\eta)$ várható érték kiszámításába:

$$
\begin{aligned}
M(\xi\eta) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xyf(x,y)\,dx\,dy = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy\left[\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)e^{-y^2} + \left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)e^{-x^2}\right]dx\,dy = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)e^{-y^2}\,dx\,dy + \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy\left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)e^{-x^2}\,dx\,dy \overset{(1)}{=}
\end{aligned}
$$

kihasználva, hogy a Fubini-tétel szerint az integrálok szeparálhatóak, valamint, hogy

$$g(t) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}$$

egy $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ paraméterű ζ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye, azaz

$$\int_{\mathbb{R}} te^{-t^2}\,dt = M(\zeta)\sqrt{\pi} = 0,$$

kapjuk, hogy

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} x\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} ye^{-y^2}\,dy\right) +$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} y\left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2}\,dx\right) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} x\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)\,dx\right)\cdot 0+$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} y\left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)\,dy\right)\cdot 0 = 0.$$

Ezek alapján

$$R(\xi,\eta) = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{0 - 0\cdot 0}{1\cdot 1} = 0.$$

Másrészről $f(x,y) \neq f_\xi(x)\cdot f_\eta(y)$, tehát ξ és η nem függetlenek.

105. FELADAT: A Poisson eloszlás alaptulajdonságai alapján tudjuk, hogy

$$M(\xi) = \lambda, \qquad D^2(\xi) = \lambda,$$
$$M(\eta) = \mu, \qquad D^2(\eta) = \mu.$$

A valószínűségi változók függetlensége miatt

$$P(\xi = i, \eta = j) = P(\xi = i)P(\eta = j),$$

tehát

$$M(\xi\zeta) = M(\xi(\xi+\eta)) = \sum_{i,j=0}^{\infty} i(i+j)P(\xi = i, \eta = j) =$$
$$\sum_{i,j=0}^{\infty}(i^2 + ij)P(\xi = i)P(\eta = j) = \sum_{i,j=0}^{\infty} i^2P(\xi = i)P(\eta = j)+$$
$$\sum_{i,j=0}^{\infty} ijP(\xi = i)P(\eta = j) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} P(\eta = j)\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} i^2P(\xi = i)\right) +$$
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} iP(\xi = i)\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jP(\eta = j)\right) = 1\cdot M(\xi^2) + M(\xi)M(\eta) =$$
$$(D^2(\xi) + (M(\xi))^2) + M(\xi)M(\eta) = \lambda^2 + \lambda + \lambda\mu.$$

Másrészt, szintén a függetlenség miatt,

$$M(\zeta) = M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta) = \lambda + \mu$$

és

$$D^2(\zeta) = D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) = \lambda + \mu,$$

így

$$R(\xi, \zeta) = \frac{M(\xi\zeta) - M(\xi)M(\zeta)}{D(\xi)D(\zeta)} = \frac{\lambda^2 + \lambda + \lambda\mu - \lambda(\lambda + \mu)}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\lambda + \mu}} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}}.$$

106. Feladat: Vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2xy}{\sigma_1\sigma_2}\rho + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right) =$$
$$\frac{\left(x - \frac{y\rho\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} + \frac{y^2}{2\sigma_2^2} \equiv$$
$$\frac{\left(y - \frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)} + \frac{x^2}{2\sigma_1^2}$$

továbbá, hogy mivel

$$f_1(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1} e^{-\frac{\left(x - \frac{y\rho\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}$$
$$g_1(y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}$$
$$f_2(y) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2} e^{-\frac{\left(y - \frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}$$
$$g_2(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

rendre $\left(\frac{y\rho\sigma_1}{\sigma_2}, \sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\right)$, $(0, \sigma_2)$, $\left(\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}, \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)$ és $(0, \sigma_1)$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változók sűrűségfüggvényei,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(x-\frac{y\rho\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}\,dx = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_1, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\,dy = \sqrt{2\pi}\sigma_2,$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(y-\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\,dy = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\sigma_2, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\sigma_1,$$

és

$$\int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{\left(x-\frac{y\rho\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}\,dx = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\frac{y\rho\sigma_1^2}{\sigma_2}, \qquad \int_{\mathbb{R}} y e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\,dy = 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}} y e^{-\frac{\left(y-\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\,dy = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\frac{x\rho\sigma_2^2}{\sigma_1}, \qquad \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\,dx = 0,$$

valamint[8]

$$\int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}\,dy = \sqrt{2\pi}\sigma_2^3$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\,dx = \sqrt{2\pi}\sigma_1^3.$$

Első lépésként kiszámítjuk a peremsűrűségfüggvényeket:

$$f_\xi(x) \doteq \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left[\frac{\left(y-\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}+\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right]}\,dy =$$

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\left(y-\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\,dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\sigma_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}.$$

Hasonlóan számolva[9] kapjuk, hogy

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}.$$

[8] Itt felhasználjuk, hogy ha ζ egy $(0,\sigma)$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $M(\zeta^2) = D^2(\zeta) + (M(\zeta))^2 = \sigma^2 + m^2 = \sigma^2$.

[9] Vagy $f(x,y)$ nyilvánvaló szimmetriájára hivatkozva.

$R(\xi, \eta)$ kiszámításához meghatározzuk $M(\xi\eta)$-t:

$$M(\xi\eta) \doteq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xyf(x,y)\, dx\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} xye^{-\left[\frac{\left(y-\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}+\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right]}\, dx\, dy =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \int_{\mathbb{R}} ye^{-\frac{\left(y-\frac{x\rho\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}}\, dy\, dx =$$

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{\mathbb{R}} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\frac{x\rho\sigma_2^2}{\sigma_1}\, dx = \frac{\rho\sigma_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^2} \int_{\mathbb{R}} x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}\, dx =$$

$$\frac{\rho\sigma_2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^2}\sqrt{2\pi}\sigma_1^3 = \rho\sigma_1\sigma_2.$$

Így

$$R(\xi, \eta) \doteq \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2 - 0 \cdot 0}{\sigma_1\sigma_2} = \rho.$$

A fentiek megválaszolják a feladat első kérdését.

Ami a második kérdést illeti, ha $\rho = 0$, akkor nem csak $R(\xi, \eta) = 0$, de

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}} = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y),$$

tehát η és η is függetlenek.

6 Nevezetes eloszlások

6.1 Binomiális eloszlás

A ξ valószínűségi változót n-edrendű p paraméterű **binomiális** eloszlásúnak nevezzük, ha lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$ és a megfelelő valószínűségek:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ekkor $M(\xi) = np$ és $D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$.

Binomiális eloszlású valószínűségi változóra egy tipikus példa a következő: legyen p egy kísérlet számunkra kedvező kimenetelének a valószínűsége. Jelölje ξ azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a kísérletet n-szer egymástól függetlenül elvégezve hányszor következik be a számunkra kedvező eredmény. Ekkor ξ egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó.

107. FELADAT: Jelentse ξ a zavartalan nyersanyagellátású napok számát. Ekkor ξ egy hatodrendű $p = 0.75$ paraméterű valószínűségi változó, tehát:

(a)
$$P(\xi = 3) = \binom{6}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^3 \approx 0.13.$$

(b) A zavartalan ellátású napok számának várható értéke:
$$M(\xi) = 6 \cdot 0.75 = 4.5.$$

108. FELADAT: Annak a valószínűsége, hogy egy ötelemű minta csupa jó alkatrészt tartalmazzon:
$$p = \frac{98}{100} \cdot \frac{97}{99} \cdot \frac{96}{98} \cdot \frac{95}{97} \cdot \frac{94}{96}.$$

Legyen most ξ az a valószínűségi változó, amely azt adja meg, hogy az öt mintacsoport közül hány áll csupa jó alkatrészekből. Nyilvánvaló módon ξ egy ötödrendű p paraméterű valószínűségi változó[10], így
$$P(\xi = 5) = \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0 = p^5 \approx 0.597.$$

109. FELADAT: Jelölje a selejtarányt p és legyen ξ az a valószínűségi változó, amely azt adja meg, hogy egy hat elemű mintában hány selejt van. Ekkor ξ egy hatodrendű p paraméterű valószínűségi változó; tudjuk még, hogy
$$P(\xi = 3) \doteq \binom{6}{3} p^3 (1-p)^3 = 20p^3(1-p)^3 = \frac{4}{25},$$
vagyis
$$[p(1-p)]^3 = \frac{1}{125}.$$

[10]Nem mintha ennek tudására – vagy ξ-re egyáltalán – szükség lenne a feladat megoldásához.

Innen

$$p - p^2 = \frac{1}{5},$$

és a megfelelő másodfokú egyenletet megoldva:

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{5}}}{2} = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{5}}{10} \approx 0.7236 \\ \frac{5-\sqrt{5}}{10} \approx 0.2763. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy mindkét gyök teljesíti a feladat feltételeit.

110. Feladat: Jelölje ξ az egy nap készült selejtes termékek számát, n a napi termékszámot, p pedig a selejtarányt; ekkor ξ egy n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. A feladat szerint ξ várható éréke 12, szórása pedig 3.41; azaz:

$$np = 12 \tag{18}$$

$$np(1-p) = 3.41^2. \tag{19}$$

Az első egyenletet a másodikba helyettesítve, majd rendezve kapjuk, hogy

$$p = 1 - \frac{3.41^2}{12} \approx 0.03099.$$

(a) A (18) egyenlet alapján

$$n = \frac{12}{p} = \frac{12}{1 - \frac{3.41^2}{12}} = \frac{144}{12 - 3.41^2} \approx 387.200,$$

tehát átlagosan 387.2 terméket készít a gép naponta.

(b) A fenti n értékre modellünk nem alkalmazható, tehát feltesszük, hogy $n = 387$. Ekkor a kérdéses valószínűség:

$$P(\xi < 10) = \sum_{k=0}^{9} \binom{400}{k} 0.03^k \cdot 0.97^{400-k},$$

ami közvetlenül kiszámolva[11] ≈ 0.2388130572.

[11] Ehhez persze számítógépre van szükség.

Az eredményre viszonylag pontos közelítést adhatunk a következő módon: Mivel p elég kicsi, n pedig elég nagy, ξ közelítőleg np paraméterű Poisson eloszlású, azaz

$$P(\xi = k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np},$$

tehát

$$P(\xi < 10) = \sum_{k=0}^{9} P(\xi = k) \approx \sum_{k=0}^{k} \frac{12^k}{k!} e^{-12} \approx 0.2423921616.$$

111. FELADAT: Legyen n a dobások száma és ξ az a valószínűségi változó, amely megadja a hatos dobások számát; ekkor ξ egy n-edrendű $p = \frac{1}{6}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Így annak a valószínűsége, hogy a hatos dobások száma legalább kettő legyen:

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 2) =$$

$$1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n - \binom{n}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{(n-1)} = 1 - \frac{5^n + n \cdot 5^{(n-1)}}{6^n}.$$

Feltevés szerint

$$P(\xi \geq 2) \equiv 1 - \frac{5^n + n \cdot 5^{(n-1)}}{6^n} \geq \frac{1}{2},$$

tehát

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{n}{5}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget legegyszerűbben a bal oldal értékeinek táblázatba foglalásával oldhatjuk meg:

n	$\left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{n}{5}\right)$
2	0.9722222222
3	0.9259259259
4	0.8680555555
5	0.803755144
6	0.7367755487
7	0.6697959533
8	0.6046769023
9	0.5426587585
10	0.4845167486

Látható, hogy legalább 10 dobásra van szükség.

112. Feladat: Tegyük fel, hogy a naponta feladott levelek száma N és annak a valószínűsége, hogy egy levelet címzés nélkül adtak fel, p. Legyen továbbá ξ az a valószínűségi változó, amely megadja, hogy naponta hány levelet adnak fel címzés nélkül, ekkor ξ egy N-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó; sajnos azonban sem N, sem pedig p nem ismert. Ki tudjuk viszont számítani a szorzatukat; ugyanis a címzetlen levelek napi átlaga $\frac{1017}{365}$, és így

$$Np = M(\xi) = \frac{1017}{365} \approx 2.78630137.$$

Feltehetőleg N nagy és p kicsi, tehát – jobb híján – felhasználjuk, hogy ekkor a binomiális eloszlás közelíthető egy Poisson eloszlással, azaz

$$P(\xi = k) = \frac{(Np)^k}{k!} e^{-Np},$$

A keresett valószínűség tehát

$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) =$$
$$1 - \left(\frac{\left(\frac{1017}{365}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{1017}{365}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1017}{365}\right)^2}{2!} \right) e^{-\frac{1017}{365}} \approx 0.527274527.$$

6.2 Poisson eloszlás

Egy ξ valószínűségi változót $\lambda > 0$ paraméterű **Poisson eloszlású** valószínűségi változónak nevezünk, ha lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$ és a megfelelő valószínűségek

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Ekkor $M(\xi) = D^2(\xi) = \lambda$.

Eltekintve a binomiális eloszlás aszimptotikus közelítésétől, általában nincs a posteriori módszer annak eldöntésére, hogy egy adott valószínűségi változó Poisson eloszlású-e; a kérdés megválaszolása a matematikai statisztika tárgykörébe tartozik. A következő feladatoknál – a fejezet címe alapján – feltesszük, hogy a releváns valószínűségi változók Poisson eloszlásúak.

113. Feladat: Jelölje ξ a csillaghullások számát egy adott 15 perces időintervallumban; feltevés – és tapasztalat – szerint ξ Poisson eloszlású.

Ha 10 percenként átlagosan 1 csillaghullás van, akkor 15 percenként várhatóan 1.5 van, azaz $M_\xi = \lambda = 1.5$. Így annak valószínűsége, hogy ez alatt az idő alatt 2 csillaghullást látunk:

$$p = \frac{1.5^2}{2!} e^{-1.5} = 1.125 \cdot e^{-1.5} \approx 0.2510.$$

114. Feladat: Jelölje ξ az 1000 elemes tételben levő selejtes üvegek számát. Mondanunk sem kell, ξ Poisson eloszlású. Ha 200 üveg közül átlagosan 3 selejtes, akkor 1000-ből várhatóan $5 \cdot 3 = 15$, tehát $\lambda = M_\xi = 15$; így annak a valószínűsége, hogy pontosan 10 selejtes üveget találunk:

$$P = \frac{15^{10}}{10!} e^{-15} \approx 0.0486.$$

115. Feladat: Jelölje ξ a mazsolák számát az 5 dkg-os szeletben; ekkor – közismerten – ξ egy Poisson eloszlású valószínűségi változó. A feladat adatai alapján

$$\lambda = M(\xi) = \frac{5}{100} \cdot 30 = 1.5;$$

tehát

$$P(\xi > 2) = 1 - P(\xi \leq 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) - P(\xi = 2) =$$
$$1 - \left(\frac{1.5^0}{0!} + \frac{1.5^1}{1!} + \frac{1.5^2}{2!} \right) e^{-1.5} \approx 0.1911531694.$$

116. Feladat: Jelölje ξ a hibák számát a 10 kiválasztott oldalon. Ha 500 oldalon 200 hiba van, akkor 10 oldalon várhatóan $M_\xi = \lambda = \frac{200}{50} = 4$. Így annak valószínűsége, hogy 10 oldalon 0 hiba van:

$$P(\xi = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = e^{-4} \approx 0.018315.$$

117. Feladat: Jelölje ξ a hibák számát egy $3m$-es darabban. Ha 100 méteren 5 hiba van, akkor egy 300 méteres szövetben várhatóan $3 \cdot 5 = 15$ hiba fordul elő; ha ezt $3m$-es darabokra vágjuk, akkor minden $3m$-es darabban várhatóan $\frac{15}{100} = 0.15$ hiba lesz. Így annak valószínűsége, hogy egy $3m$-es darabban nem lesz hiba:

$$P(\xi = 0) = \frac{0.15^0}{0!} e^{-0.15} = e^{-0.15} \approx 0.86.$$

tehát 100 darab 3m-es anyagban előreláthatóan 86 hibátlan darab lesz.

118. FELADAT: Jelölje η az áruházban levő látogatók számát és legyen ξ a vásárlók száma; keressük a $P(\xi = k)$ valószínűséget. A teljes valószínűség tétele alapján:

$$P(\xi = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\xi = k | \eta = n) P(\eta = n).$$

A feladat szövegéből következik, hogy

$$P(\eta = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda},$$

ahol $(n = 0, 1, 2, \dots)$. A feltételes valószínűséget a binomiális eloszlással fejezhetjük ki: annak valószínűsége, hogy n személy közül éppen k számú vásárol valamit, $n - k$ pedig nem, a következő:

$$P(\xi = k | \eta = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

így tehát – figyelembe véve azt is, hogy $P(\xi = k|\eta = n) = 0$, ha $n < k$ – kapjuk, hogy

$$P(\xi = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} =$$
$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!} =$$
$$\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^m}{m!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{(1-p)\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}.$$

Tehát az adott időintervallumban vásárló vevők száma egy $p\lambda$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

119. FELADAT: Feltevés szerint

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$
$$P(\eta = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}.$$

1. Az $n = 2$ esetben a bizonyítás fő eszköze a binomiális tétel:

$$P(\xi + \eta = n) = \sum_{k=0}^{n} P(\xi = k \text{ és } \eta = n - k) =$$
$$\sum_{k=0}^{n} P(\xi = k)P(\eta = n - k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{(n-k)}}{(n-k)!} e^{-\mu} =$$
$$e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mu^{(n-k)}}{(n-k)!k!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \mu^{(n-k)} \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$
$$\frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{(n-k)} = \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}.$$

2. Belátjuk az előző állítás következő általánosítását:

> Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ rendre $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paraméterű **teljesen független** valószínűségi változók; ekkor $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ egy $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ paraméterű valószínűségi változó.

Valóban,

$$P(\xi_1 + \cdots + \xi_n = m) =$$
$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_n=m}} P(\xi_1 = m_1, \ldots, \xi_n = m_n) =$$
$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_n=m}} P(\xi_1 = m_1) \cdot \cdots \cdot P(\xi_n = m_n) =$$
$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_n=m}} \frac{\lambda_1^{m_1}}{m_1!} e^{-\lambda_1} \cdot \cdots \cdot \frac{\lambda_n^{m_n}}{m_n!} e^{-\lambda_n} =$$
$$e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_n=m}} \frac{\lambda_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_n^{m_n}}{m_1! \cdot \cdots \cdot m_n!} \stackrel{(1)}{=}$$

és a polinomiális tétel szerint

$$\stackrel{(1)}{=} e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_n=m}} \lambda_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_n^{m_n} \frac{m!}{m_1! \cdot \cdots \cdot m_n!} =$$
$$e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_n=m}} \binom{m}{m_1, \ldots, m_n} \lambda_1^{m_1} \cdot \cdots \cdot \lambda_n^{m_n} =$$

$$\frac{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}.$$

120. Feladat: A definíciók szerint a várható érték közvetlen számolással kapható:

$$M\left(\frac{1}{1+\xi}\right) \doteq e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{1+k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} =$$
$$\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)-1\right] = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

6.3 Egyenletes eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b), \\ 1, & \text{ha } x \ge b. \end{cases}$$

Ekkor a sűrűségfüggvény:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b), \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

valamint $M(\xi) = \frac{a+b}{2}$ és $D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

121. Feladat: A keresett valószínűség:

$$P(\,|\xi - M_\xi|\, > D(\xi)) =$$
$$P\left(\left|\xi - \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}\right| > \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}{12}}\right) = P(\,|\xi|\, > 1) = 1 - P(\,|\xi|\, \le 1) =$$
$$1 - (F_\xi(1) - F_\xi(-1)) = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

122. Feladat: Tegyük fel, hogy a valószínűségi változó paraméterei $a < b$. A feladat szerint

$$\frac{a+b}{2} = M(\xi) = 4,$$
$$\frac{(b-a)^2}{12} = D^2(\xi) = 4,$$

azaz

$$(a+b) = 8,$$
$$(b-a) = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Innen

$$a = 4 - 2\sqrt{3},$$
$$b = 4 + 2\sqrt{3}.$$

Tehát ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 4-2\sqrt{3}, \\ \frac{x-4+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, & \text{ha } x \in (4-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}), \\ 1, & \text{ha } x \geq 4+2\sqrt{3}. \end{cases}$$

123. Feladat: A feladat szerint ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq a, \\ \frac{x-a}{5-a}, & \text{ha } x \in (a, 5), \\ 1, & \text{ha } x \geq 5, \end{cases}$$

valamint

$$M(\xi) = \frac{a+5}{2},$$

és

$$D^2(\xi) = \frac{(5-a)^2}{12},$$

így

$$M(\xi^2 - 2\xi + 1) = M(\xi^2) - 2M(\xi) + 1 = D^2(\xi) + (M(\xi))^2 - 2M(\xi) + 1 =$$
$$\frac{(5-a)^2}{12} + \left(\frac{a+5}{2}\right)^2 - 2\frac{a+5}{2} + 1 = \frac{a^2+2a+13}{3}$$

és

$$M(\xi - 1) = M(\xi) - 1 = \frac{a+5}{2} - 1 = \frac{a+3}{2}.$$

A feladat szerint

$$P\left(\xi < \frac{a^2+2a+13}{3}\right) =$$
$$P(\xi < M(\xi^2 - 2\xi + 1)) = 1 - P(\xi \geq M(\xi^2 - 2\xi + 1)) = \frac{5}{6}.$$

Rögtön megjegyezzük, hogy

$$\frac{a^2+2a+13}{3} \in (a, 5). \tag{20}$$

A fentiek miatt

$$\frac{5}{6} = F_\xi\left(\frac{a^2+2a+13}{3}\right) = \frac{\frac{a^2+2a+13}{3} - a}{5-a} = \frac{a^2 - a + 13}{3(5-a)},$$

amiből $2a^2 + 3a + 1 = 0$ és

$$a = \begin{cases} \frac{-1}{2} \\ -1. \end{cases}$$

Mindkét esetet megvizsgáljuk:

1. Ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor

$$\frac{a^2+2a+13}{3} = 4.0833 \in \left(-\frac{1}{2}, 5\right),$$

tehát $-\frac{1}{2}$ egy lehetséges paraméterérték; most

$$\boxed{P(\xi \geq M(\xi - 1))} = 1 - P(\xi < M(\xi - 1)) = 1 - F_\xi\left(\frac{-\frac{1}{2}+3}{2}\right) =$$
$$1 - F_\xi\left(\frac{5}{4}\right) = 1 - \frac{\frac{5}{4}+\frac{1}{2}}{5+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{7}{22} = \boxed{\frac{15}{22}.}$$

2. Ha $a = -1$, akkor

$$\frac{a^2+2a+13}{3} = 4 \in (-1, 5),$$

tehát -1 szintén lehetséges paraméterérték; így

$$\boxed{P(\xi \geq M(\xi - 1))} = 1 - P(\xi < M(\xi - 1)) = 1 - F_\xi\left(\frac{-1+3}{2}\right) =$$
$$1 - F_\xi(1) = 1 - \frac{1+1}{5+1} = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}.}$$

6.4 Exponenciális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű **exponenciális** eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ekkor a sűrűségfüggvény

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

valamint $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, $D^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$.

124. Feladat: Legyen az eloszlás paramétere λ. A keresett valószínűség:

$$P(\xi < M(\xi)) = P\left(\xi < \frac{1}{\lambda}\right) = F_\xi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1 - e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632.$$

Vegyük észre, hogy a feladat adatait nem kellett felhasználnunk a megoldáshoz!

125. Feladat: Tegyük fel, hogy ξ egy $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó! Most

$$P(\xi < x + t | \xi \geq t) = \frac{P(\xi < x + t, \xi \geq t)}{P(\xi \geq t)} = \frac{P(t \leq \xi < x + t)}{P(\xi \geq t)} =$$
$$\frac{F_\xi(x+t) - F_\xi(t)}{1 - P(\xi < t)} = \frac{\left(1 - e^{-\lambda(x+t)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}} =$$
$$1 - e^{-\lambda x} = P(\xi < x).$$

A második állítás hasonlóan bizonyítható:

$$P(\xi \geq x+t | \xi \geq t) = \frac{P(\xi \geq x+t, \xi \geq t)}{P(\xi \geq t)} = \frac{P(\xi \geq x+t)}{P(\xi \geq t)} =$$
$$\frac{1-P(\xi < x+t)}{1-P(\xi < t)} = \frac{1-\left(1-e^{-\lambda(x+t)}\right)}{1-(1-e^{-\lambda t})} = e^{-\lambda x} = 1-\left(1-e^{-\lambda x}\right) =$$
$$1-P(\xi < x) = P(\xi \geq x).$$

Megjegyzés: Az 56. feladatnál láttuk, hogy az "örökifjúság" nem csak szükséges, de elégséges feltétel is arra, hogy egy folytonos eloszlásfüggvényű valószínűségi változó exponenciális legyen.

126. FELADAT: Az állítás egyszerű számolással igazolható:

$$P(\min(\xi_1,\dots,\xi_n) < x) = 1-P(\min(\xi_1,\dots,\xi_n) \geq x) =$$
$$1-P(\xi_1 \geq x,\dots,\xi_n \geq x) = 1-P(\xi_1 \geq x)\cdot\dots\cdot P(\xi_n \geq x) =$$
$$1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-(1-e^{-\lambda_i x})\right) = 1-(e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)x}).$$

127. FELADAT: Jelöljük az i-edik szál élettartamát ξ_i-vel. Tudjuk, hogy ξ várható értéke $M_\xi = \frac{1}{\lambda} = 150$, ezért $\lambda = \frac{1}{150}$.

A szövőgép akkor áll le, ha van olyan szál, ami 3 órán belül elszakad, azaz ha a $\xi_1,\dots,\xi_{400}$ valószínűségi változók legkisebbike kisebb 3-nál. Felhasználva az előző feladat eredményét, a keresett valószínűség:

$$P(\min(\xi_1,\dots,\xi_{400}) < 3) = 1-e^{-400\cdot\lambda\cdot 3} = 1-e^{-400\cdot\frac{1}{150}\cdot 3} = 1-e^{-8} \approx 0.9996.$$

128. FELADAT: A feladat szerint

$$0.1 = P(\xi > 6) = 1-P(\xi \leq 6) = 1-F(6) = 1-(1-e^{-6\lambda}) = e^{-6\lambda}.$$

Így a keresett valószínűség:

$$P(\xi < 3) = F(3) = 1-e^{-3\lambda} = 1-\sqrt{e^{-6\lambda}} = 1-\sqrt{0.1} \approx 0.6837.$$

129. FELADAT: Jelölje ξ eloszlásfüggvényét F_ξ, sűrűségfüggvényét pedig f_ξ. Általánosabban, legyen h egy a pozitív valós számok halmazán értelmezett monoton növekvő (tehát invertálható) és differenciálható függvény, amely a pozitív valós számokat az (a,b) (ahol az $a=-\infty$, $b=\infty$ eseteket

sem zárjuk ki) intervallumra képezi le, és legyen $\eta \doteq h(\xi)$, valamint F_η, ill. f_η rendre η eloszlásfüggvénye ill. sűrűségfüggvénye. Világos, hogy ha $t \leq a$, akkor $F_\eta(t) = 0$, ha $t \geq b$, akkor $F_\eta(t) = 1$, ha pedig $t \in (a, b)$, akkor

$$F_\eta(t) \doteq P(\eta < t) = P(h(\xi) < t) = P(\xi < h^{-1}(t)) = F_\xi(h^{-1}(t)),$$

azaz

$$F_\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq a, \\ F_\xi(h^{-1}(t)), & \text{ha } t \in (a, b), \\ 1, & \text{ha } t \geq b. \end{cases}$$

A fentiekből világos, hogy $f_\eta(t) = 0$, ha $t \notin (a, b)$; egyébként pedig

$$f_\eta(t) = \frac{dF_\eta(t)}{dt} = \dot{F}_\xi(h^{-1}(t)) \cdot \frac{dh^{-1}(t)}{dt} = \frac{\dot{F}_\xi(h^{-1}(t))}{\dot{h}(h^{-1}(t))} =$$
$$\frac{f_\xi(h^{-1}(t))}{\dot{h}(h^{-1}(t))} = \frac{\lambda e^{-\lambda \cdot h^{-1}(t)}}{\dot{h}(h^{-1}(t))},$$

ahol $\dot{F}_\xi$, ill. $\dot{h}$ rendre az F_ξ és h függvények deriváltjait jelölik, és felhasználtuk, hogy

$$\frac{dh^{-1}(t)}{dt} = \frac{1}{\dot{h}(h^{-1}(t))}.$$

A fentiek alapján a feladat részfeladatai már egyszerűen megoldhatóak:

(a) Ha $h(t) \doteq \sqrt{t}$ akkor $(a, b) = (0, \infty)$, $h^{-1}(t) = t^2$, $\dot{h}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Így $t \in (0, \infty)$ esetén:

$$f_\eta(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t^2}}{\frac{1}{2t}} = 2t\lambda e^{-\lambda t^2},$$

tehát

$$f_\eta(t) = \begin{cases} 2t\lambda e^{-\lambda t^2}, & \text{ha } t \in (0, \infty), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) Ha $h(t) \doteq t^2$, akkor $(a, b) = (0, \infty)$, $h^{-1}(t) = \sqrt{t}$, $\dot{h}(t) = 2t$. Így:

$$f_\eta(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}, & \text{ha } t \in (0, \infty), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(c) Ha $h(t) \doteq \frac{1}{\lambda}\ln t$, akkor $(a,b)=(-\infty,\infty)$, $h^{-1}(t)=e^{\lambda t}$, $\dot{h}(t)=\frac{1}{\lambda t}$. Így:

$$f_\eta(t)=\frac{\lambda e^{-\lambda e^{\lambda t}}}{\frac{1}{\lambda e^{\lambda t}}}=\lambda^2 e^{\lambda t}e^{-\lambda e^{\lambda t}}=\lambda^2 e^{\lambda\left(t-e^{\lambda t}\right)}.$$

6.5 Normális eloszlás

Egy ξ valószínűségi változó (m,σ) paraméterű **normális** eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_{(m,\sigma)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\,dt. \tag{21}$$

Ekkor ξ sűrűségfüggvénye

$$f_{(m,\sigma)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

várható értéke és szórása pedig m, ill. σ. Ha $m=0$ és $\sigma=1$, akkor azt mondjuk, hogy ξ **standard** normális eloszlású valószínűségi változó; ilyenkor $F_{(0,1)}(x)$ helyett a $\Phi(x)$ jelölést szokás használni. A fenti integrálban egy egyszerű helyettesítést végrehajtva kapjuk, hogy

$$F_{(m,\sigma)}(x)=F_{(0,1)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \tag{22}$$

A (21) jobb oldalán szereplő integrál nem adható meg zárt alakban; meghatározása csak numerikusan lehetséges; erre nagyon gyakran még napjainkban is táblázatokat használnak. Miután az összes lehetséges (m,σ) párhoz nem lehet táblázatot nyomtatni, a (22) formula és a standard normális eloszlás táblázata segítségével szokásos az eloszlás numerikus értékeit meghatározni. A táblázatok általában csak a pozitív x-ekre tartalmazzák az eloszlásfüggvény értékeit, ugyanis könnyen látható (lásd az 54. feladatot), hogy

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x). \tag{23}$$

Bár az alábbi feladatok számítógép segítségével nagyon könnyen megoldhatóak, számolásainkban főleg táblázat használatára hagyatkozunk; így munkánk nem kis részben a fenti redukcós formulák alkalmazásából fog állni.

130. Feladat: Legyen $F \doteq F_{(3,2)}$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor a feladat szerint

$$P(0 < \xi < A) = F(A) - F(0) = \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-3}{2}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{3}{2}\right)\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{3}{2}\right) \geq \frac{1}{2},$$

tehát a táblázat alapján

$$\Phi\left(\frac{A-3}{2}\right) \geq \frac{3}{2} - \Phi\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{3}{2} - 0.6915 \approx \Phi(0.87).$$

Innen

$$\frac{A-3}{2} \geq 0.87,$$

és így a keresett feltétel: $A \geq 4.74$.

131. Feladat: Legyen ξ egy a feladat feltételeinek eleget tevő (m, σ) paraméterű valószínűségi változó, és jelölje F az eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$0.95 = P(|\xi - m| < 1) = P(-1 < \xi - m < 1) =$$
$$P(m-1 < \xi < m+1) = F(m+1) - F(m-1) =$$
$$\Phi\left(\frac{m+1-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-1-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - 1.$$

Innen:

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 0.975 \approx \Phi(1.96),$$

tehát

$$\sigma \approx \frac{1}{1.96} \approx 0.5102.$$

A fentiekből az is világos, hogy $m = M(\xi)$ tetszőleges lehet.

132. Feladat: Mindkét részfeladat elemi számolásokkal és a standard normális eloszlás táblázatával oldható meg:

(a) A deszkák hosszának megfelelő valószínűségi változót jelöljük ξ-vel és legyen F az eloszlásfüggvénye. Ekkor annak valószínűsége, hogy egy deszka hossza $398cm$ és $401cm$ közé esik:

$$P(398 < \xi < 401) = F(401) - F(398) =$$
$$\Phi\left(\frac{401-400}{3}\right) - \Phi\left(\frac{398-400}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{3}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx$$
$$0.6296 - 1 + 0.7454 = 0.375.$$

(b) A fentiekhez hasonlóan:

$$P(\,|\xi - 400|\, \leq 2.5) = P(397.5 \leq \xi \leq 402.5) =$$
$$F(402.5) - F(397.5) = \Phi\left(\frac{402.5-400}{3}\right) - \Phi\left(\frac{397.5-400}{3}\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{2.5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-2.5}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2.5}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{2.5}{3}\right)\right) =$$
$$\Phi\left(\frac{2.5}{3}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{2.5}{3}\right) = \Phi(0.833) - 1 + \Phi(0.833) =$$
$$2(0.7967) - 1 \approx 0.5934.$$

133. Feladat: Annak valószínűsége, hogy egy lövés hatástalan:

$$1 - P(1150 < \xi < 1250) = 1 - (F(1250) - F(1150)) =$$
$$1 - F(1250) + F(1150) = 1 - \Phi\left(\frac{1250-1200}{40}\right) + \Phi\left(\frac{1150-1200}{40}\right) =$$
$$1 - \Phi\left(\frac{50}{40}\right) + \Phi\left(-\frac{50}{40}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right)\right) =$$
$$2\left(1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right)\right) = 2(1 - 0.8944) = 0.2112.$$

Tehát a lövéseknek körülbelül 21 százaléka lesz hatástalan.

134. Feladat: Legyen ξ az alkatrészek átmérőjét jellemző valószínűségi változó, F pedig az eloszlásfüggvénye.

Mivel a névleges érték 5 százaléka: $5 \cdot 0.15 = 0.75$, annak valószínűsége, hogy a gép a névleges értéknél 0.75mm-nél nagyobb eltérésű alkatrészt gyárt:

$$
\begin{aligned}
1 - P\left(14.25 \leq \xi \leq 15.75\right) &= 1 - \left(F\left(15.75\right) - F\left(14.25\right)\right) = \\
& 1 - \left(\Phi\left(\frac{15.75 - 15}{0.5}\right) - \Phi\left(\frac{14.25 - 15}{0.5}\right)\right) = \\
& 1 - \left(\Phi\left(\frac{0.75}{0.5}\right) - \Phi\left(-\frac{0.75}{0.5}\right)\right) = \\
& 1 - \left(\Phi\left(1.5\right) - \Phi\left(-1.5\right)\right) = 1 - \Phi\left(1.5\right) + \left(1 - \Phi\left(1.5\right)\right) = \\
& 2 - 2 \cdot \Phi\left(1.5\right) \approx 2 - 2 \cdot 0.9332 = 0.1336.
\end{aligned}
$$

Segédtáblázatok

1. Táblázat: A normális eloszlásfüggvény

$$\Phi(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

	$\Phi(x)$									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.00	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.00	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.10	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.20	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.30	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997

	$\Phi(x)$									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.40	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.50	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.60	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.70	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.80	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

2. Táblázat: A normális sűrűségfüggvény

$$\phi(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	$\phi(x)$									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.10	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.20	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.30	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.40	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.50	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.60	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.70	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.80	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.90	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.00	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.10	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.20	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.30	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.40	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.50	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.60	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.70	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.80	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.90	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.00	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.10	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.20	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.30	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.40	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.50	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.60	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.70	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.80	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.90	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.00	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.10	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.20	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.30	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.40	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.50	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.60	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004

	$\phi(x)$									
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.70	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.80	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.90	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
4.00	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
4.10	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001
4.20	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

Irodalomjegyzék

[1] **Varga Tamás**: *Matematikai logika kezdőknek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

[2] **Nagy Márta - Sztrik János**: *Valószínűségszámítás és Matematikai Statisztika feladatgyűjtemény*, KLTE, Debrecen, 1988.

[3] **Rényi Alfréd**: *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.