NEVEZETES DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS ELOSZLÁSOK

HIPERGEO. BINOM. POISSON

VAN ITT EGY FELADAT

ISMERT,HOGY MENNYI AZ ÖSSZES ELEM ÉS AZ ÖSSZES SELEJT, VAGYIS N, K, ILLETVE n, k.

VISSZATEVÉS NÉLKÜLI

VISSZATEVÉSES

CSAK VALAMI %-OS IZÉ ISMERT, A VÁRHATÓ, AZ ÁTLAG, AZ ARÁNY, A VALÓSZÍNŰSÉG, STB.

ξ KORLÁTOS

ξ NEM KORLÁTOS

HIPERGEOMETRIAI ELOSZLÁS

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(\xi) = n\frac{K}{N} \qquad D(\xi) = \sqrt{n\frac{K(N-K)(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}}$$

BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

$$E(\xi) = np \qquad D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$$

POISSON ELOSZLÁS

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(\xi) = \lambda \qquad D(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

Egy úton 30 nap alatt 12 napon történt baleset. Ebből a 30 napból kiválasztunk egy hetet, mi a valószínűsége, hogy ezen a héten 2 balesetes nap van?

ξ =balesetes nap

Az összes elem N=30 nap, ebből selejtes a balesetes nap, K=12. A minta n=7 és itt k=2 balesetes napot szeretnénk.

$N = 30 \quad K = 12 \quad n = 7 \quad k = 2$

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{18}{5}}{\binom{30}{7}}$$

Egy úton hetente átlag 3 balesetes nap van. Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten 2 balesetes nap van?

ξ =balesetes nap

Egy különösen balszerencsés héten sem lehet 7-nél több balesetes nap, tehát itt ξ KORLÁTOS, MAX 7.

$n = 7$ mert 7 napot választunk

$p = 3/7 = 0{,}43$ balesetes nap

$$P(\xi = 2) = \binom{7}{2} 0{,}43^2 \cdot 0{,}57^5$$

Egy úton hetente átlag 3 baleset történik. Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten 2 baleset van?

ξ =baleset

Baleset viszont lehet akármennyi, átlagosan 3 szokott lenni, de miért is ne lehetne mondjuk 1000 baleset. Vagyis itt ξ NEM KORLÁTOS

$E(\xi) = \lambda = 3$ a várható

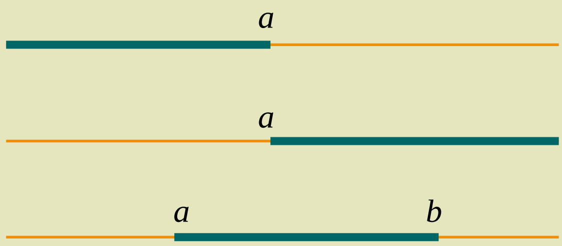
$$P(\xi = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3}$$

Folytonos valószínűségi változók többnyire időt, távolságot, meg olyanokat mérnek, hogy hány kiló, hány liter, stb. Természetükből adódóan itt nincs értelme olyat kérdezni, hogy $P(\xi = a) = ?$ mert minden ilyen valószínűség nulla. Csak intervallumokat van értelme kérdezni, hogy $P(\xi < a) = ?$ vagy $P(\xi > a) = ?$ vagy $P(a < \xi < b) = ?$

A valószínűségeket az eloszlásfüggvény vagy a sűrűségfüggvény segítségével tudjuk kiszámolni, és többnyire mi döntjük el, hogy melyiket használjuk. Azok, akik leküzdhetetlen vágyat éreznek az integrálás iránt, használják bátran a sűrűségfüggvényt, mindenki másnak az eloszlásfüggvény ajánlott, azzal ugyanis könnyebb.
1. lépés, hogy a valószínűséget átalakítjuk eloszlásfüggvényre, a **2.** lépés pedig az, hogy megkeressük a konkrét eloszlásfüggvényt.

1.

$$\begin{cases} P(\xi < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \\ P(\xi > a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx \\ P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx \end{cases}$$



2.

ELOSZLÁS NEVE	ELOSZLÁSFÜGGVÉNY	SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY	VÁRHHATÓ ÉRTÉK	SZÓRÁS
Egyenletes eloszlás PARAMÉTEREI:(a,b)	$F(x) = \begin{cases} 0 \;, & ha \; x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & ha \; a < x \le b \\ 1 \;, & ha \; b < x \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ha \; a < x \le b \\ 0 \;, & különben \end{cases}$	$E(\xi) = \frac{a+b}{2}$	$D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Exponenciális eloszlás PARAMÉTEREI: (λ) A dolgok időbeli vagy távolságbeli bekövetkezésé-nek eloszlása.	$F(x) = \begin{cases} 0 \;, & ha \; x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & ha \; 0 < x \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 0 \;, & ha \; x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & ha \; 0 < x \end{cases}$	$E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$	$D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$
Normális eloszlás PARAMÉTEREI: (m,σ) A dolgok mennyiségbeli eloszlása.	$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$E(\xi) = m$	$D(\xi) = \sigma$
Standard normális eloszlás	$\Phi(x)$ =Lásd standard normális eloszlás táblázatát!	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$E(\xi) = 0$	$D(\xi) = 1$

EGYENLETES ELOSZLÁS

Valaki egy telefonhívást vár, ami 10.00 és 15.00 között érkezik, minden időpontban ugyanakkora valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy délig hívják?

ξ =hány óra van

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , & ha\ \ x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & ha\ \ a < x \le b \\ 1 \quad , & ha\ \ b < x \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{most a=10 és b=15}} \quad F(x)=\begin{cases} 0 \quad , & ha\ \ x \le 10 \\ \dfrac{x-10}{5}, & ha\ \ 10 < x \le 15 \\ 1 \quad , & ha\ \ 15 < x \end{cases}$$

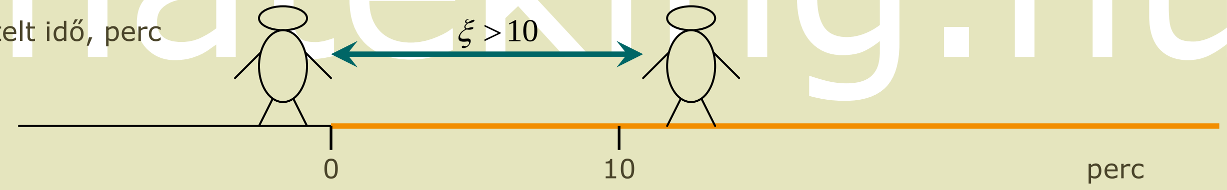
Az, hogy délig hívják:

$$P(\xi < 12) = F(12) = \frac{12-10}{5} = 0{,}4$$

EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS

Egy bankba általában 12 ügyfél érkezik óránként. Mekkora valószínűséggel telik el 10 perc úgy, hogy nem jön senki?

ξ =eltelt idő, perc



Ha 10 percig nem jön senki, akkor a két ügyfél között eltelt idő 10 percnél több, tehát a $P(\xi > 10)$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni.

Várhatóan 12 ügyfél érkezik óránként, ezért az ügyfelek közt eltelt idő 60/12=5 perc, vagyis a várható érték

$E(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = 5$ perc és így $\lambda = 1/5 = 0{,}2$

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , & ha\ \ x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda \cdot x}, & ha\ \ 0 < x \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{most } \lambda = 1/5 = 0{,}2} \quad F(x)=\begin{cases} 0 \quad , & ha\ \ x \le 0 \\ 1-e^{-0{,}2 \cdot x}, & ha\ \ 0 < x \end{cases}$$

Az, hogy 10 percig nem jön senki:

$$P(\xi > 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - e^{-0{,}2 \cdot 10}\right) = e^{-0{,}2 \cdot 10} = e^{-2} = 0{,}135$$

NORMÁLIS ELOSZLÁS

Egy bankban az ügyfelek napi száma normális eloszlású, 560 fő várható értékkel és 40 fő szórással.
Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott napon az ügyfelek száma 620-nál kevesebb?
Mekkora a valószínűsége, hogy az ügyfelek száma 480-nál kevesebb?

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

amit sajnálatos módon nem tudunk integrálni, mivel pedig az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja, ezért eloszlásfüggvény nincs. Ezt a kis kellemetlenséget úgy tudjuk kiiktatni, hogy bevezetünk egy speciális normális eloszlást, aminek a várható értéke nulla, a szórása pedig egy. Ezt standard normális eloszlásnak nevezzük, sűrűségfüggvénye

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eloszlásfüggvénye pedig egy táblázat formájában létező függvény, aminek jele $\Phi(x)$.

A normális eloszlásból úgy tudunk standard normális eloszlást csinálni, hogy a ξ-ből kivonjuk a várható értékét és elosztjuk a szórással. A normális eloszlás eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Most egy olyan normális eloszlásunk van, ahol a várható érték 560 a szórás pedig 40.

$$E(\xi) = m = 560$$
$$D(\xi) = \sigma = 40$$

Annak valószínűsége, hogy egy adott napon az ügyfelek száma 620-nál kevesebb:

$$P(\xi < 620) = F(620) = \Phi\left(\frac{620-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{60}{40}\right) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$$

x	$\Phi(x)$
0,159	0,5636
0,56	0,7123
0,67	0,7486
1	0,8413
1,5	0,9332
1,67	0,9525
2	0,9772
2,25	0,9878

Annak valószínűsége, hogy az ügyfelek száma 480-nál kevesebb:

$$P(\xi < 480) = F(480) = \Phi\left(\frac{480-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-80}{40}\right) = \underbrace{\Phi(-2) = 1-\Phi(2)}_{\Phi(-x) = 1-\Phi(x)} =$$
$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

A POISSON ELOSZLÁS ÉS AZ EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS KAPCSOLATA

Egy benzinkúthoz óránként átlag 12 autó érkezik.

1. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 perc alatt három autó érkezik?

2. Mekkora a valószínűsége, hogy két autó érkezése közt legalább 10 perc telik el?

Az első kérdés az autók számáról, míg a második az érkezésük közt eltelt időről szól. Az autók száma diszkrét eloszlás, és mivel érkezhet bármennyi, ezért Poisson, az eltelt idő folytonos eloszlás és történetesen exponenciális.

1. $\xi=$autók száma 10 perc alatt, darab, POISSON

A várható érték óránként 12 autó, tehát 1 perc alatt 12/60=0,2 és 10 perc alatt $E(\xi)=\lambda=2$ darab

$$P(\xi=3)=\frac{\lambda^3}{3!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2}=0{,}18$$

2. $\xi=$autók közt eltelt idő, perc, EXPONENCIÁLIS

A várható érték óránként 12 autó, tehát az átlagosan eltelt idő 60/12=5 perc $\underbrace{E(\xi)=\frac{1}{\lambda}=5}_{\lambda=0{,}2}$ perc

$$P(\xi\geq 10)=1-F(10)=1-\left(1-e^{-\lambda\cdot 10}\right)=e^{-\lambda\cdot 10}=e^{-0{,}2\cdot 10}=e^{-2}=0{,}135$$

Mindkét eloszlás ugyanazt a történetet írja le, csak az egyik a bekövetkezések számát vizsgálja, a másik pedig a köztük eltelt időt. Így hát ennek a bizonyos λ-nak mindkét helyen történő rejtélyes felbukkanása sem pusztán a véletlen műve. A két λ valójában ugyanaz.

Ehhez azt kell megértenünk, hogy Poisson-eloszlás várható értéke függ a vizsgált időtartamtól, hosszabb idő alatt többen jönnek, rövidebb idő alatt kevesebben, mondjuk 10 perc alatt $\lambda=2$, de 15 perc alatt már $\lambda=3$. Az exponenciális eloszlás várható értéke viszont a várhatóan eltelt idő, ami 5 perc, és ez nem függ a vizsgált időtartamtól. Fél óra alatt ugyanúgy átlagosan 5 percenként érkeznek az autók, mint 20 perc alatt. Itt tehát a λ mindig ugyanannyi.

Ha pedig a Poisson eloszlásnál éppen akkora időtartamot nézünk, ami az exponenciális eloszlásnál az idő múlásának a mértékegysége, akkor a két λ mindig megegyezik. Nézzük meg mi a helyzet ezzel a konkrét példánk esetében.

Ha az exponenciális eloszlásnál az eltelt időt percben mérjük, akkor a várható érték 5 perc és így $\lambda=1/5=0{,}2$. Most számoljuk ki a λ-t a Poisson-eloszlásnál egy perces időtartamra. Óránként 12-en jönnek, tehát egy perc alatt 12/60=0,2 vagyis $\lambda=0{,}2$, a két λ tehát megegyezik.

Ha az exponenciális eloszlásnál az eltelt időt mondjuk órában mérjük, akkor az 5 perces várható érték, lássuk csak 5 perc = 5/60 óra, tehát úgy durván 0,083 óra. Ekkor $\lambda=1/0{,}083=12$. Most számoljuk ki a λ-t a Poisson-eloszlásnál egy órás időtartamra. Mivel a feladat úgy szólt, hogy óránként 12-en jönnek, a jelek szerint $\lambda=12$. A két λ tehát ilyenkor is megegyezik.

01A. Egy úton hetente átlag 3 baleset történik. Mi a valószínűsége, hogy adott héten 2?

01B. Egy úton hetente átlag 3 balesetes nap van. Mi a valószínűsége, hogy adott héten 2?

02. Egy bankba óránként átlag 24 ügyfél érkezik.
a) Mi a valószínűsége, hogy 7 perc alatt éppen 2-en érkeznek?
b) Mi a valószínűsége, hogy 7 perc alatt legfeljebb 2-en érkeznek?
c) Mi a valószínűsége, hogy 5 perc alatt legalább 2-en érkeznek?
d) Az esetek hány százalékában nem jön 10 percig senki?

03. Egy napilap az esetek 0,3%-ában jelenik meg hibátlanul, a hibák száma Poisson-eloszlást követ. Mekkora a sajtóhibák várható napi száma?
$P\left(E(\xi)-D(\xi)<2\xi<E(\xi)+D(\xi)\right)=?$

04. Egy üvegtáblában a gyártás során várhatóan 0,1 hiba keletkezik. Mekkora a valószínűsége, hogy egy tábla hibátlan?
a) Mi a valószínűsége, hogy 10 táblából kettő hibás?
b) Ha egy megrendelőnek 100 darab hibátlan táblát kell leszállítani, várhatóan hány üvegtáblát kell legyártani?

05. Egy vizsgán a hallgatóknak általában 60%-a megbukik. Egy nap 10-en vizsgáznak, mi a valószínűsége, hogy éppen a 20%-uk megy át?

a) Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 2-en mennek át?
b) Mi a valószínűsége, hogy legalább 2-en mennek át?
c) Mi a valószínűsége, hogy legalább 4-en mennek át?

06A. Egy bizonyos évszakban minden nap 0,2 valószínűséggel esik eső. Mi a valószínűsége, hogy egy héten három nap esik?

06B. Egy újságárus óránként átlag 42 darab újságot ad el. Mi a valószínűsége, hogy 10 perc alatt legfeljebb 2 darabot?

08. Egy könyvben 100 oldalon átlag 80 nyomdahiba található. Mi a valószínűsége, hogy 10 egymást követő oldalon 7 hiba lesz?

09. Egy bankba az esetek 0,3%-ában nem érkezik ügyfél egy óra alatt. Az ügyfelek száma Poisson eloszlású.
a) Mekkora az ügyfelek várható száma óránként?
b) $P\left(E(X)-D(X)<2X<E(X)+D(X)\right)=?$

10. Egy újságárus óránként 48 darab újságot szokott eladni, amiből átlag 36 napilap.
Mi a valószínűsége, hogy
a) 10 perc alatt legfeljebb 2 napilapot ad el?
b) 5 perc alatt éppen 7 újságot ad el?
c) a 7 eladott újságból 4 napilap?

11. Annak valószínűsége, hogy egy hírlapárus negyedóra alatt egyetlen lapot sem tud eladni e^{-6}
a) Mennyit szokott eladni átlagosan óránként?
b) Mekkora valószínűséggel ad el félóra alatt 10 darabot?
c) Legfeljebb milyen hosszú ideig nem tud eladni egyetlen lapot sem legalább 0,6 valószínűséggel?

12. Egy bizonyos hónap 30 napjából átlag 12 nap szokott esni. Mi a valószínűsége, hogy egy héten három nap esik?

13. Egy könyvben 100 oldalon átlag 80 nyomdahiba található. Mi a valószínűsége, hogy 10 egymást követő oldalon 7 hiba lesz?

14. Egy vizsgán a hallgatóknak általában 60%-a megbukik. Egy nap 10-en vizsgáznak, mi a valószínűsége, hogy
a) legfeljebb 2-en mennek át?
b) legalább 2-en mennek át?

15. Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású, várható értéke 10, szórása $\sqrt{3}$.
Mekkora a $P(X<9)$, a $P(X>12)$ és a $P(10<X<15)$ valószínűség?

16. Egy tűzoltóságra átlagosan kétóránként érkezik riasztás. Mi a valószínűsége, hogy
a) 8 óra alatt legfeljebb 2 riasztás érkezik?
b) egy 8^{00}-kor érkező riasztás után a következő 9^{30} és 10^{00} között érkezik?

17. Egy ügyfélszolgálatra érkező segélyhívások száma Poisson-eloszlású, a köztük eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó, annak valószínűsége, hogy 5 perc alatt érkezik hívás $1-e^{-2}$
a) Hány hívás érkezik átlagosan óránként?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy fél óra alatt legalább három hívás érkezik?
c) Mekkora a valószínűsége, hogy két hívás közt legalább 10 perc telik el?

18. Egy üzlet a következő 20 napból 3 nap zárva tart. Kiválasztunk 5 napot, mi a valószínűsége, hogy 3 nap lesz nyitva?

19. Egy étteremben dolgozó 20 pincér közül 7 tud németül. Egyik este éppen 8 pincér dolgozik és közülük 5-en a teraszon. Mi a valószínűsége, hogy a teraszon dolgozók közül 2-en beszélnek németül?

20. Valaki két lövést ad le egy céltáblára, mindkét alkalommal ugyanakkora de legalább 0,6 valószínűséggel talál célba. Annak valószínűsége, hogy csak egy lövés talál célba 0,32. Mekkora valószínűséggel talál mindkettő?

21. Egy esemény karakterisztikus eloszlásának szórása 0,4. Mekkora az esemény bekövetkezésének valószínűsége, ha az legalább 2/3?

22. Egy este átlagosan óránként 10 hullócsillagot látni. Ha a hullócsillagok száma Poisson-eloszlást követ, mekkora a valószínűsége, hogy negyedóra alatt,

a) kettőt látni?
b) legfeljebb kettőt látni?
c) legalább kettőt látni?
c) Legfeljebb milyen hosszú ideig nem látni egyetlen hullócsillagot sem legalább 0,7 valószínűséggel?

23. Egy szövet anyagában átlag 10 méterenként van apró hiba.

a) Mi a valószínűsége, hogy egy 6 méteres darab hibátlan?
b) Mi a valószínűsége, hogy ha 30 méternyi szövetet 6 méteres darabokra vágnak, akkor pontosan két hibás darab lesz?
c) Mi a valószínűsége, hogy ha 30 méternyi szövetet 6 méteres darabokra vágnak, akkor mind hibátlan lesz?
d) Mi a valószínűsége, hogy ha 30 méternyi szövetet 5 méteres darabokra vágnak, akkor mind hibátlan lesz?
e) 120 méternyi szövetből melyik esetben keletkezik több hibátlan darab?

24. A ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású, várható értéke 10, szórása $\sqrt{3}$. Mekkora $P(\xi < 9)$ illetve $P(\xi > 12)$?

25. Valaki egy telefonhívást vár, ami reggel 8 órától esedékes, érkezése egyenletes eloszlást követ. Annak valószínűsége, hogy a hívás 10-ig befut 0,2.

a) Mi a valószínűsége, hogy 12-ig hívják?
b) Mi a valószínűsége, hogy 13.00 és 14.00 között hívják?
c) Mi a valószínűsége, hogy ha 13.00-ig nem hívják, 14.00-ig hívják?

26. Egy mobiltelefon élettartama exponenciális eloszlású, 4 év várható élettartammal.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 8 évig működik?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy 8 évnél tovább, de 10-nél kevesebb ideig működik?
c) Mi a valószínűsége, hogy ha már 8 éve működik, a következő 2 évben elromlik?

27. Egy termék élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 4 év szórással.

a) Mekkora valószínűséggel hibásodik meg a gyártástól számított 12 éven belül?

b) Legfeljebb mekkora lehet a garanciaidő, ha a termékeknek legfeljebb 10%-át szeretnék garanciálisan javítani, vagy cserélni?

28. Egy tűzoltóságra átlagosan kétóránként érkezik riasztás. Mi a valószínűsége, hogy
a) 8 óra alatt legfeljebb 2 riasztás érkezik?
b) egy 12.00-kor érkező riasztás után a következő 13.30 és 14.00 között érkezik?

29. Egy bankba óránként átlag 24 ügyfél érkezik. Mi a valószínűsége, hogy
a) 10 perc alatt legalább 2-en érkeznek, ha az ügyfelek száma Poisson-eloszlást követ?
b) két ügyfél érkezése között 5 perc is eltelik, ha az eltelt idő exponenciális eloszlású?

30. Egy bankban, az esetek negyedében fordul elő, hogy egy ügyfelet 10 percen belül nem követ másik. Egy óra alatt várhatóan hány ügyfél érkezik? Mi a valószínűsége, hogy két ügyfél érkezése közt 15 perc is eltelik?

31. Egy üzletben két óra alatt átlagosan 30 vevő fordul meg. A vevők érkezése között eltelt idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
a) 10.00-kor érkezik egy vevő. Mi a valószínűsége, hogy a következő vevő 10.12 és 10.15 között érkezik?
b) Ha a 10.00-kor érkező vevő után már 12 perce nem érkezett újabb vevő, mi a valószínűsége, hogy 10.15-ig érkezni fog?

32. Egy bankban, az esetek negyedében fordul elő, hogy egy ügyfelet 5 percen belül nem követ másik. Egy óra alatt várhatóan hány ügyfél érkezik?
a) Mi a valószínűsége, hogy egy 10.00-kor érkező ügyfél után 10.12 és 10.17 között érkezik a következő?
b) Mi a valószínűsége, hogy két ügyfél érkezése közt 15 perc is eltelik, akkor kevesebb, mint 20 perc telik el?

33. Egy vonatra való várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó, óránként átlagosan 12 járat érkezik. Ha már 5 perce nem jött, mekkora valószínűséggel kell még legalább további 4 percet várni?
5.30. Egy múzeum pénztáránál a sorban állással töltött időt méri a ξ valószínűségi változó órában megadva, aminek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad x \le 0 \\ 5e^{-5x} & ha \quad 0 < x \end{cases}$$

a) Mekkora valószínűséggel kerül sorra valaki negyed órán belül?
b) Mekkora valószínűséggel kerül sorra fél órán belül, ha már negyed órája vár?

34. Egy készülék élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, száz ilyen készülékből átlagosan 55 hibásodik 400 üzemórán belül.
a) Mekkora a készülék várható élettartama?
b) Mekkora valószínűséggel lesz 10 készülékből 6 olyan, ami a várható élettartamnál tovább működik?

35. Egy ügyfélszolgálatra óránként átlag 18 hívás fut be. Mi a valószínűsége, hogy

a) 10 perc alatt legalább 2 hívás érkezik, ha a hívások száma Poisson-eloszlású?
b) két hívás között 5 perc is eltelik, ha a hívások közt eltelt idő exponenciális eloszlású?

36. A ξ valószínűségi változó várható értéke 20, szórása 4. Lehet-e Poisson, illetve binomiális eloszlású? Ha igen, mekkora a $P(\xi = 18)$ valószínűség?

37. A ξ valószínűségi változó várható értéke 49, szórása 7. Lehet-e Poisson, illetve binomiális eloszlású? Ha igen, mekkora a $P(\xi = 20)$ valószínűség?

38. Egy kamionsofőr az esetek 36,8%-ában legalább két órát várakozik a határállomáson, a várakozási idő exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
a) Mekkora az átlagos várakozási idő?
b) Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott esetben egy óránál kevesebbet kell várakoznia?
c) $P(\left|\xi - E(\xi)\right| < \frac{D(\xi)}{2}) = ?$

39. Egy készülék élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó 5 év szórással.
a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen készülék legalább 8 évig működik?
b) Ha egy ilyen készülék már legalább 8 éve működik, milyen valószínűséggel működik további legalább 3 évig?

40. Egy úton 500 méterenként átlag 25 kátyú van. Mekkora a valószínűsége, hogy
a) Egy 100 méteres szakasz hibátlan?
b) Egy 100 méteres szakaszon legalább két kátyú van?
c) Két kátyú távolsága legalább 250 méter, de legfeljebb 300 méter?

41. Egy termék garanciaideje két év. Mekkora a termék várható élettartama, ha 12%-ukon kell garanciális javításokat végrehajtani és 3%-ukat a javíthatatlanság miatt cserélni?
a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen termék legalább 5 évig működik?
b) Öt terméket kiválasztva mekkora a valószínűsége, hogy legalább kettő működik legfeljebb 3 évig?

42. Egy készülék élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, ezer ilyen készülékből átlag 36 darab hibásodik meg a gyártástól számított fél éven belül.
a) Mekkora a készülék várható élettartama?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen készülék legalább 10 évig működik?
c) Ha egy ilyen készülék már legalább 8 éve működik, milyen valószínűséggel működik további legalább 3 évig?

43. Egy készülék élettartama exponenciális eloszlású valószínűségi változó, annak valószínűsége, hogy legalább 6 évig működik e^{-2}.
a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen készülék legfeljebb 4 évig működik?
b) Ha egy ilyen készülék már legalább 4 éve működik, milyen valószínűséggel működik további legalább 4 évig?

44. Egy üzlet napi forgalma közelítőleg normális eloszlású valószínűségi változó. A vásárlók átlagos száma 560 fő, a szórás 16 fő. Mekkora valószínűséggel lesz egy adott napon a vevők száma legfeljebb 600 fő?

x	0,5	0,67	1	1,5	2	2,25	2,5
$\Phi(x)$	0,6915	0,7486	0,8413	0,9332	0,9772	0,9878	0,9938

45. Egy határátkelőhelyen a várakozási idő jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó, 24 perc várható értékkel. Annak valószínűsége, hogy az átkelésig legfeljebb fél órát kell várni 0,8413.
a) Mekkora valószínűséggel tart legfeljebb 20 percig a várakozás?
b) Mekkora a valószínűsége, hogy negyedóránál több, de 36 percnél kevesebbet kell várni?

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,5	0,3520	0,6915	1,67	0,0989	0,9525
0,67	0,3187	0,7486	2	0,0539	0,9772
1	0,2419	0,8413	2,25	0,0317	0,9878
1,5	0,1295	0,9332	2,5	0,0175	0,9938

46. Egy iskolában a tanulók magasságának eloszlása közelítőleg normális, 12 cm szórással. Annak valószínűsége, hogy egy tanuló 144 cm-nél alacsonyabb, 0,159.
Mekkora a valószínűsége, hogy egy tanuló legalább 174 cm?

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,159	0,5636	1,5	0,9332
0,5	0,6915	1,67	0,9525
0,67	0,7486	2	0,9772
1	0,8413	2,25	0,9878

47. Egy teszt megírására 90 perc áll rendelkezésre, a megírási idő normális eloszlású valószínűségi változó 65 perc várható értékkel és 10 perc szórással. Mekkora valószínűséggel végez valaki kevesebb, mint háromnegyed óra alatt?

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,159	0,3939	0,5636	1,5	0,1295	0,9332
0,5	0,3520	0,6915	1,67	0,0989	0,9525
0,67	0,3187	0,7486	2	0,0539	0,9772
1	0,2419	0,8413	2,25	0,0317	0,9878

48. Egy palackozó üzemben 1,5 literes gyümölcsleveket töltenek, közelítőleg normális eloszlással. Annak valószínűsége, hogy az üvegbe töltött gyümölcslé a várhatótól legalább 25 milliliterrel eltér 0,0456.
Mekkora a szórás?

x	0,5	0,67	1	1,5	2	2,25	2,5
$\Phi(x)$	0,6915	0,7486	0,8413	0,9332	0,9772	0,9878	0,9938

49. Egy méteráru kiskereskedés által naponta eladott szövet hossza normális eloszlású valószínűségi változó 45 m várható értékkel és 9 m szórással. Mi a valószínűsége, hogy valamely nyitvatartási napon az eladott szövet hossza a 40 métertől 10 méternél nagyobb mértékben tér el?

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,159	0,5636	1,5	0,9332
0,56	0,7123	1,67	0,9525
0,67	0,7486	2	0,9772
1	0,8413	2,25	0,9878

50. Egy csomagoló üzemben 900 g-os üvegekbe töltenek mézeket.

a) Legfeljebb mekkora szórást engedhetünk meg, ha az üvegekbe töltött méz mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó és annak valószínűsége, hogy egy üvegben a méz mennyisége nem 890 g és 910 g közé esik legfeljebb 0,1096 valószínűségű lehet?

b) Adjunk becslést a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével, hogy legfeljebb mekkora lehet a szórás, ha az üvegekbe töltött méz mennyisége ismeretlen eloszlású és annak valószínűsége, hogy nem 890 g és 910 g közé esik legfeljebb 0,1096!

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,1	0,3700	0,5398	1,28	0,1858	0,8997
0,67	0,3187	0,7486	1,60	0,1109	0,9452
0,9	0,2661	0,8159	1,73	0,0893	0,9583
1,12	0,2131	0,8686	2,5	0,0175	0,9938

51. Egy üvegbe töltött folyadék mennyisége normális eloszlású valószínűségi változó 1 liter várható értékkel. Mekkora a szórás, ha annak valószínűsége, hogy a folyadék mennyisége 990ml-nél kevesebb $1-\Phi(2)$? Mi a valószínűsége, hogy egy 12 üveget tartalmazó csomagban legalább 2 üveg tartalma legfeljebb 990 milliliter?

52. Egy csomagolóüzemben 500g-os konzerveket töltenek 2 g szórással. Mekkora a valószínűsége, hogy egy 20 darabos csomagban legalább 18 konzerv 494 és 506 gramm közé esik?

53. Tapasztalatok szerint valamely szolgáltató vállalathoz naponta beérkező megrendelések ξ száma jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó $\sigma = 20$ szórással. Mekkora a napi megrendelések számának várható értéke, ha $p(\xi < 60) = 0{,}1$

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,1	0,3700	0,5398	1,28	0,1858	0,8997
0,9	0,2661	0,8159	1,60	0,1109	0,9452
1	0,2419	0,8413	1,73	0,0893	0,9583
1,12	0,2131	0,8686	2,5	0,0175	0,9938

54. Valamely üzletben a vásárlók száma jó közelítéssel normális eloszlású valószínűségi változó. Négy nyitvatartási napból átlagosan egyszer szokott előfordulni, hogy a vásárlók száma kevesebb, mint 40. Mekkora a vásárlók átlagos száma, ha a szórás 12?

x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\phi(x)$	$\Phi(x)$
0,1	0,3700	0,5398	1,28	0,1858	0,8997
0,67	0,3187	0,7486	1,60	0,1109	0,9452
0,9	0,2661	0,8159	1,73	0,0893	0,9583
1,12	0,2131	0,8686	2,5	0,0175	0,9938

55. Egy palackozó üzemben 1,5 literes ásványvizeket töltenek, közelítőleg normális eloszlással. Annak valószínűsége, hogy az üvegbe töltött ásványvíz a várhatótól legfeljebb 24 milliliterrel tér el $2\Phi(3)-1$. Mekkora a szórás?