TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE ÉS BAYES-TÉTEL

A TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

Egy király úgy szeretné izgalmasabbá tenni az elítéltjeinek kivégzését, hogy három ládikába elhelyez 25 arany és 25 ezüst érmét. Ha a kivégzésre szánt célszemély aranyat húz, akkor a várakozással ellentétben mégsem végzik ki, de ha ezüstöt, akkor igen. A király a nagyobb izgalom kedvéért mindig máshogy osztja szét az érméket a ládákban. Egyik alkalommal így:

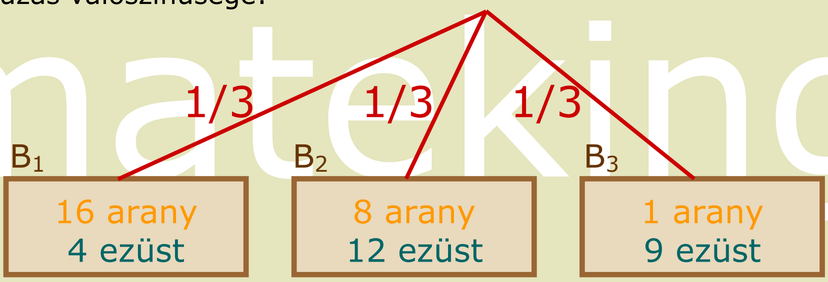
16 arany 4 ezüst	8 arany 12 ezüst	1 arany 9 ezüst

A kérdés, hogy mekkora esélye van az elítéltnek a megmenekülésre.

Az egyes ládikákból aranyat húzni

$$\frac{16}{20} \qquad\qquad \frac{8}{20} \qquad\qquad \frac{1}{10}$$

valószínűséggel lehet, de csak akkor, ha az orra elé rakják az adott ládát. Ahhoz, ugyanis hogy emberünk mondjuk az első ládából aranyat húzzon, két dolog kell. Először is kell 1/3 esély arra, hogy egyáltalán az első ládát válassza és további 16/20, hogy abból aranyat húzzon. Vagyis az arany húzás valószínűsége:



$$P(A)=\frac{16}{20}\cdot\frac{1}{3}+\frac{8}{20}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}$$

Nos éppen ezt mondja a teljes valószínűség tétele:

Legyen B_1 B_2 és B_3 teljes eseményrendszer, vagyis páronként kizáró események, melyek összege a biztos esemény. Esetünkben B_1 B_2 és B_3 azt jelenti, hogy 1-es 2-es és 3-as láda. Ekkor

$$P(A)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)$$

Vagyis

$$P(A)=\frac{16}{20}\cdot\frac{1}{3}+\frac{8}{20}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{26}{60}$$

A BAYES TÉTEL

Egy zöldséges három helyről szerez be almákat. Az első helyről a készlet 20%-át szerzi be, ezek mind jók. A második helyről a 30%-át és itt 5% romlott, de nem baj mert ezt is el tudja adni néhány vak öregasszonynak. A harmadik helyről a maradék 50%-ot szerzi be, és itt 15% romlott.

Kiválasztunk egy almát, amiről kiderül, hogy romlott. Mekkora valószínűséggel származik a hármas termelőtől?

ELSŐ TERMELŐ: B_1 20% — 0% rossz

MÁSODIK TERMELŐ: B_2 30% — 5% rossz

HARMADIK TERMELŐ: B_3 50% — 15% rossz

A hármas termelő a készlet 50%-át hozza, így minden alma 0,5 valószínűséggel van tőle. Csakhogy ha kiderül az almáról, hogy rossz, ez a valószínűség megváltozik.

Az első termelő például a készlet 20%-át hozza, tehát minden alma 0,2 valószínűséggel tőle van. Ha viszont kiderül az almáról, hogy rossz, ez a valószínűség 0-ra csökken, semmiképp sem hozhatta azt az első termelő, mert az csak jót hoz. Vagyis ez a plusz információ, hogy az alma rossz, a kezdeti 20%, 30%, 50% valószínűségeket megváltoztatja. Az első termelő esélyét 0%-ra változtatja, a harmadik termelő esélyét pedig növeli, hiszen ő az aki leginkább gyanús.

A kezdeti valószínűségeknek ezt a megváltozását írja le a Bayes tétel. Akkor használjuk, ha egy korábban bekövetkezett (B_k) esemény valószínűségét akarjuk kiszámolni egy később bekövetkezett (A) tükrében. Ha B_1 B_2 és B_3 teljes eseményrendszer, valamint A tetszőleges esemény, akkor bármely B_k eseményre

$$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)}$$

Most a hármas termelő esélyeit (B_3) szeretnénk tudni, feltéve, hogy az alma rossz. (A=rossz)

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)\cdot P(B_3)}{P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)+P(A|B_3)\cdot P(B_3)}=\frac{0{,}15\cdot 0{,}5}{0\cdot 0{,}2+0{,}05\cdot 0{,}3+0{,}15\cdot 0{,}5}$$

Nos ez a valószínűség

$$P(B_3|A)=0{,}83$$

Vagyis a hármas termelő kezdeti 50%-os valószínűsége 83%-ra nőtt amiatt, mert megtudtuk, hogy az alma rossz. Korábban tisztáztuk, hogy

$$P(B_1|A)=0$$

tehát az első termelő esélye nulla, ha az alma rossz.
Ha pedig az első termelő 0%, a harmadik pedig 83%, akkor a második termelő 17% eséllyel hozza a rossz almát.