NEVEZETES DISZKRÉT ÉS FOLYTONOS ELOSZLÁSOK

HIPERGEO. BINOM. POISSON

VAN ITT EGY FELADAT

ISMERT,HOGY MENNYI AZ ÖSSZES ELEM ÉS AZ ÖSSZES SELEJT, VAGYIS N, K, ILLETVE n, k.

- VISSZATEVÉS NÉLKÜLI → HIPERGEOMETRIAI ELOSZLÁS
- VISSZATEVÉSES → BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

CSAK VALAMI %-OS IZÉ ISMERT, A VÁRHATÓ, AZ ÁTLAG, AZ ARÁNY, A VALÓSZÍNŰSÉG, STB.

- ξ KORLÁTOS → BINOMIÁLIS ELOSZLÁS
- ξ NEM KORLÁTOS → POISSON ELOSZLÁS

HIPERGEOMETRIAI ELOSZLÁS

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(\xi) = n\frac{K}{N} \qquad D(\xi) = \sqrt{n\frac{K(N-K)(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}}$$

Egy úton 30 nap alatt 12 napon történt baleset. Ebből a 30 napból kiválasztunk egy hetet, mi a valószínűsége, hogy ezen a héten 2 balesetes nap van?

ξ =balesetes nap

Az összes elem N=30 nap, ebből selejtes a balesetes nap, K=12. A minta n=7 és itt k=2 balesetes napot szeretnénk.

$$N = 30 \quad K = 12 \quad n = 7 \quad k = 2$$

$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{18}{5}}{\binom{30}{7}}$$

BINOMIÁLIS ELOSZLÁS

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k}$$

$$E(\xi) = np \qquad D(\xi) = \sqrt{np(1-p)}$$

Egy úton hetente átlag 3 balesetes nap van. Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten 2 balesetes nap van?

ξ =balesetes nap

Egy különösen balszerencsés héten sem lehet 7-nél több balesetes nap, tehát itt ξ KORLÁTOS, MAX 7.

$n = 7$ mert 7 napot választunk

$p = 3/7 = 0{,}43$ balesetes nap

$$P(\xi = 2) = \binom{7}{2} 0{,}43^2 \cdot 0{,}57^5$$

POISSON ELOSZLÁS

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$E(\xi) = \lambda \qquad D(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

Egy úton hetente átlag 3 baleset történik. Mi a valószínűsége, hogy egy adott héten 2 baleset van?

ξ =baleset

Baleset viszont lehet akármennyi, átlagosan 3 szokott lenni, de miért is ne lehetne mondjuk 1000 baleset. Vagyis itt ξ NEM KORLÁTOS

$E(\xi) = \lambda = 3$ a várható

$$P(\xi = 2) = \frac{3^2}{2!} e^{-3}$$

Folytonos valószínűségi változók többnyire időt, távolságot, meg olyanokat mérnek, hogy hány kiló, hány liter, stb. Természetükből adódóan itt nincs értelme olyat kérdezni, hogy $P(\xi = a) = ?$ mert minden ilyen valószínűség nulla. Csak intervallumokat van értelme kérdezni, hogy $P(\xi < a) = ?$ vagy $P(\xi > a) = ?$ vagy $P(a < \xi < b) = ?$

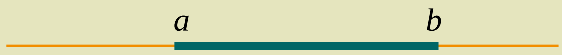
A valószínűségeket az eloszlásfüggvény vagy a sűrűségfüggvény segítségével tudjuk kiszámolni, és többnyire mi döntjük el, hogy melyiket használjuk. Azok, akik leküzdhetetlen vágyat éreznek az integrálás iránt, használják bátran a sűrűségfüggvényt, mindenki másnak az eloszlásfüggvény ajánlott, azzal ugyanis könnyebb.
1. lépés, hogy a valószínűséget átalakítjuk eloszlásfüggvényre, a **2.** lépés pedig az, hogy megkeressük a konkrét eloszlásfüggvényt.

1.

$$P(\xi < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$P(\xi > a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$



2.

ELOSZLÁS NEVE	ELOSZLÁSFÜGGVÉNY	SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY	VÁRHATÓ ÉRTÉK	SZÓRÁS
Egyenletes eloszlás PARAMÉTEREI:(a,b)	$F(x)=\begin{cases} 0, & ha\ x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & ha\ a < x \le b \\ 1, & ha\ b < x \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & ha\ a < x \le b \\ 0, & különben \end{cases}$	$E(\xi)=\frac{a+b}{2}$	$D(\xi)=\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Exponenciális eloszlás PARAMÉTEREI: (λ) A dolgok időbeli vagy távolságbeli bekövetkezésé-nek eloszlása.	$F(x)=\begin{cases} 0, & ha\ x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & ha\ 0 < x \end{cases}$	$f(x)=\begin{cases} 0, & ha\ x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & ha\ 0 < x \end{cases}$	$E(\xi)=\frac{1}{\lambda}$	$D(\xi)=\frac{1}{\lambda}$
Normális eloszlás PARAMÉTEREI: (m,σ) A dolgok mennyiségbeli eloszlása.	$F(x)=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$E(\xi)=m$	$D(\xi)=\sigma$
Standard normális eloszlás	$\Phi(x)$ =Lásd standard normális eloszlás táblázat!	$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$E(\xi)=0$	$D(\xi)=1$

EGYENLETES ELOSZLÁS

Valaki egy telefonhívást vár, ami 10.00 és 15.00 között érkezik, minden időpontban ugyanakkora valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy délig hívják?

ξ =hány óra van

Az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , \quad ha \;\; x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \quad ha \;\; a < x \le b \\ 1 \quad , \quad ha \;\; b < x \end{cases}$$

most a=10 és b=15

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , \quad ha \;\; x \le 10 \\ \dfrac{x-10}{5}, \quad ha \;\; 10 < x \le 15 \\ 1 \quad , \quad ha \;\; 15 < x \end{cases}$$

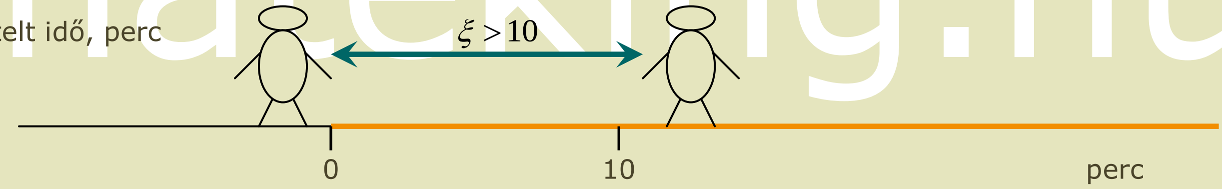
Az, hogy délig hívják:

$$P(\xi < 12) = F(12) = \frac{12-10}{5} = 0{,}4$$

EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS

Egy bankba általában 12 ügyfél érkezik óránként. Mekkora valószínűséggel telik el 10 perc úgy, hogy nem jön senki?

ξ =eltelt idő, perc



Ha 10 percig nem jön senki, akkor a két ügyfél között eltelt idő 10 percnél több, tehát a $P(\xi > 10)$ valószínűséget szeretnénk kiszámolni.

Várhatóan 12 ügyfél érkezik óránként, ezért az ügyfelek közt eltelt idő 60/12=5 perc, vagyis a várható érték

$E(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = 5$ perc és így $\lambda = 1/5 = 0{,}2$

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , \quad ha \;\; x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda \cdot x}, \quad ha \;\; 0 < x \end{cases}$$

most $\lambda = 1/5 = 0{,}2$

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad , \quad ha \;\; x \le 0 \\ 1-e^{-0{,}2 \cdot x}, \quad ha \;\; 0 < x \end{cases}$$

Az, hogy 10 percig nem jön senki:

$$P(\xi > 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - e^{-0{,}2 \cdot 10}\right) = e^{-0{,}2 \cdot 10} = e^{-2} = 0{,}135$$

NORMÁLIS ELOSZLÁS

Egy bankban az ügyfelek napi száma normális eloszlású, 560 fő várható értékkel és 40 fő szórással.
Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott napon az ügyfelek száma 620-nál kevesebb?
Mekkora a valószínűsége, hogy az ügyfelek száma 480-nál kevesebb?

A normális eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

amit sajnálatos módon nem tudunk integrálni, mivel pedig az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvény integrálja, ezért eloszlásfüggvény nincs. Ezt a kis kellemetlenséget úgy tudjuk kiiktatni, hogy bevezetünk egy speciális normális eloszlást, aminek a várható értéke nulla, a szórása pedig egy. Ezt standard normális eloszlásnak nevezzük, sűrűségfüggvénye

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

eloszlásfüggvénye pedig egy táblázat formájában létező függvény, aminek jele $\Phi(x)$.

A normális eloszlásból úgy tudunk standard normális eloszlást csinálni, hogy a ξ-ből kivonjuk a várható értékét és elosztjuk a szórással. A normális eloszlás eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Most egy olyan normális eloszlásunk van, ahol a várható érték 560 a szórás pedig 40.

$$E(\xi) = m = 560$$
$$D(\xi) = \sigma = 40$$

Annak valószínűsége, hogy egy adott napon az ügyfelek száma 620-nál kevesebb:

$$P(\xi < 620) = F(620) = \Phi\left(\frac{620-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{60}{40}\right) = \Phi(1{,}5) = 0{,}9332$$

x	$\Phi(x)$
0,159	0,5636
0,56	0,7123
0,67	0,7486
1	0,8413
1,5	0,9332
1,67	0,9525
2	0,9772
2,25	0,9878

Annak valószínűsége, hogy az ügyfelek száma 480-nál kevesebb:

$$P(\xi < 480) = F(480) = \Phi\left(\frac{480-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{-80}{40}\right) = \underbrace{\Phi(-2) = 1-\Phi(2)}_{\Phi(-x) = 1-\Phi(x)} =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

A POISSON ELOSZLÁS ÉS AZ EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS KAPCSOLATA

Egy benzinkúthoz óránként átlag 12 autó érkezik.

1. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 perc alatt három autó érkezik?

2. Mekkora a valószínűsége, hogy két autó érkezése közt legalább 10 perc telik el?

Az első kérdés az autók számáról, míg a második az érkezésük közt eltelt időről szól. Az autók száma diszkrét eloszlás, és mivel érkezhet bármennyi, ezért Poisson, az eltelt idő folytonos eloszlás és történetesen exponenciális.

1. $\xi=$autók száma 10 perc alatt, darab, POISSON

A várható érték óránként 12 autó, tehát 1 perc alatt 12/60=0,2 és 10 perc alatt $E(\xi)=\lambda=2$ darab

$$P(\xi=3)=\frac{\lambda^3}{3!}\cdot e^{-\lambda}=\frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2}=0{,}18$$

2. $\xi=$autók közt eltelt idő, perc, EXPONENCIÁLIS

A várható érték óránként 12 autó, tehát az átlagosan eltelt idő 60/12=5 perc $\underbrace{E(\xi)=\frac{1}{\lambda}=5}_{\lambda=0{,}2}$ perc

$$P(\xi\geq 10)=1-F(10)=1-\left(1-e^{-\lambda\cdot 10}\right)=e^{-\lambda\cdot 10}=e^{-0{,}2\cdot 10}=e^{-2}=0{,}135$$

Mindkét eloszlás ugyanazt a történetet írja le, csak az egyik a bekövetkezések számát vizsgálja, a másik pedig a köztük eltelt időt. Így hát ennek a bizonyos λ-nak mindkét helyen történő rejtélyes felbukkanása sem pusztán a véletlen műve. A két λ valójában ugyanaz.

Ehhez azt kell megértenünk, hogy Poisson-eloszlás várható értéke függ a vizsgált időtartamtól, hosszabb idő alatt többen jönnek, rövidebb idő alatt kevesebben, mondjuk 10 perc alatt $\lambda=2$, de 15 perc alatt már $\lambda=3$. Az exponenciális eloszlás várható értéke viszont a várhatóan eltelt idő, ami 5 perc, és ez nem függ a vizsgált időtartamtól. Fél óra alatt ugyanúgy átlagosan 5 percenként érkeznek az autók, mint 20 perc alatt. Itt tehát a λ mindig ugyanannyi.

Ha pedig a Poisson eloszlásnál éppen akkora időtartamot nézünk, ami az exponenciális eloszlásnál az idő múlásának a mértékegysége, akkor a két λ mindig megegyezik. Nézzük meg mi a helyzet ezzel a konkrét példánk esetében.

Ha az exponenciális eloszlásnál az eltelt időt percben mérjük, akkor a várható érték 5 perc és így $\lambda=1/5=0{,}2$. Most számoljuk ki a λ-t a Poisson-eloszlásnál egy perces időtartamra. Óránként 12-en jönnek, tehát egy perc alatt 12/60=0,2 vagyis $\lambda=0{,}2$, a két λ tehát megegyezik.

Ha az exponenciális eloszlásnál az eltelt időt mondjuk órában mérjük, akkor az 5 perces várható érték, lássuk csak 5 perc = 5/60 óra, tehát úgy durván 0,083 óra. Ekkor $\lambda=1/0{,}083=12$. Most számoljuk ki a λ-t a Poisson-eloszlásnál egy órás időtartamra. Mivel a feladat úgy szólt, hogy óránként 12-en jönnek, a jelek szerint $\lambda=12$. A két λ tehát ilyenkor is megegyezik.