VÁRHATÓ ÉRTÉK, SZÓRÁS, MARKOV ÉS CSEBISEV EGYENLŐTLENSÉGEK

A VÁRHATÓ ÉRTÉK

Egy magasugró versenyen a versenyzők 0,8 valószínűséggel ugorják át a lécet. Minden versenyző háromszor próbálkozhat. Mivel könnyen megeshet, hogy nem rajongunk a magasugró versenyekért, így nem teljesen alaptalan az a kérdés, hogy 12 versenyző esetén várhatóan hány ugrást kell megtekintenünk a következő műsorszámig. Nos erről fog szólni a várható érték. A várható érték jele régebben $M(\xi)$, az utóbbi időben azonban $E(\xi)$ az angol expected value alapján.

Diszkrét esetben úgy kell kiszámolni, hogy $E(\xi)=\sum x_i \cdot P(\xi=x_i)$

Visszatérve magasugróinkhoz, készítsük el egy ugró eloszlástáblázatát.

ugrások száma	valószínűség
1	$0{,}8$
2	$0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}16$
3	$0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$

NEM UGORJA ÁT
ÁTUGORJA

NEM UGORJA ÁT
NEM UGORJA ÁT
NEM UGORJA ÁT

ÁTUGORJA
NEM UGORJA ÁT
NEM UGORJA ÁT

A várható értéket úgy kapjuk, hogy a ξ értékeit megszorozzuk a hozzá tartozó valószínűségekkel és ezeket összeadjuk:

$$E(\xi)=\sum x_i \cdot P(\xi=x_i)=1\cdot 0{,}8+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}04=1{,}24$$

Ezek szerint várhatóan egy ugró 1,24-szer ugrik. Ha összesen 12 versenyző van, akkor az ugrások száma tehát $12\cdot 1{,}24=14{,}88$ vagyis olyan durván 15 ugrásra kell számítanunk.

A várható érték mellett azonban van egy másik fontos jellemző, a szórás. Ha ugyanis a szórás nagy, akkor a várható érték jelentősége csökken. A lottón például a várható nyeremény összege játékonként 100 forint körül mozog, de mégsem erre a pénzre számítunk, amikor lottózunk.
A legtöbben ugyanis nem nyernek semmit, néhányan pedig jóval többet nyernek, mint 100 forint.
A szórás jele $D(\xi)$.
Lássuk, hogyan kell kiszámolni.

A SZÓRÁS

A szórás a várható értéktől való eltérést méri, jele $D(\xi)$ kiszámolni pedig úgy lehet, hogy:

$$D(\xi)=\sqrt{E(\xi^2)-E^2(\xi)}$$

A magasugrós példánkhoz visszakanyarodva:

ugrások száma ξ	valószínűség p
1	0,8
2	0,16
3	0,04

várható érték:

$$E(\xi)=1\cdot 0{,}8+2\cdot 0{,}16+3\cdot 0{,}04=1{,}24$$

második momentum:

$$E(\xi^2)=1^2\cdot 0{,}8+2^2\cdot 0{,}16+3^2\cdot 0{,}04=1{,}8$$

szórás:

$$D(\xi)=\sqrt{E(\xi^2)-E^2(\xi)}=\sqrt{1{,}8-1{,}24^2}=0{,}512$$

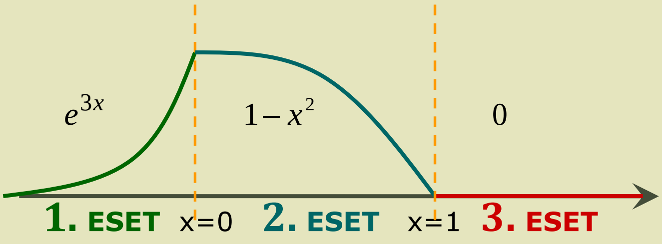
VÁRHATÓ ÉRTÉK ÉS SZÓRÁS KISZÁMOLÁSA FOLYTONOS ESETBEN

Folytonos valószínűségi változók esetén a várható érték

$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$$

Nézzünk meg egy ilyet:

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x} & ha \quad x\le 0 \\ 1-x^2 & ha \quad 0<x\le 1 \\ 0 & ha \quad 0<x \end{cases}$$



$$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\boxed{\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{3x}dx}+\boxed{\int_{0}^{1} x\cdot\left(1-x^2\right)dx}+\boxed{\int_{1}^{\infty} x\cdot 0dx}=\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{3x}dx+\int_{0}^{1} x-x^3dx+0=$$

$$=\left[x\cdot e^{3x}\cdot\frac{1}{3}-e^{3x}\cdot\frac{1}{9}\right]_{-\infty}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=\left(\frac{-1}{9}-0\right)+\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{5}{36}$$

A szórás itt is úgy lesz, hogy $D(\xi)=\sqrt{E(\xi^2)-E^2(\xi)}$
Szükség van tehát a második momentumra:

$$E(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot e^{3x}dx+\int_{0}^{1}x^2\cdot\left(1-x^2\right)dx+\int_{1}^{\infty}x^2\cdot 0dx=\int_{-\infty}^{0}x^2\cdot e^{3x}dx+\int_{0}^{1}x^2-x^4dx+0=\frac{28}{135}$$

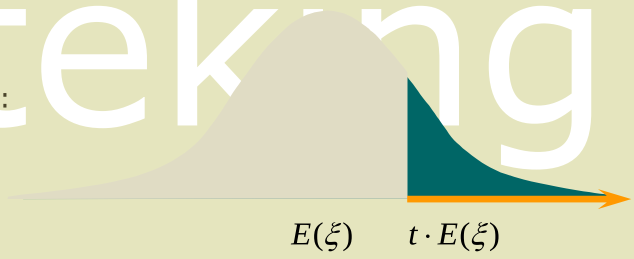
A szórás pedig $D(\xi)=\sqrt{E(\xi^2)-E^2(\xi)}=\sqrt{\frac{28}{135}-\left(\frac{5}{36}\right)^2}=0{,}434$

A MARKOV-EGYENLŐTLENSÉG

A Markov-egyenlőtlenség arról szól, hogy minél nagyobb a ξ a várható értékhez képest, annál kisebb a valószínűsége. Ha például egy újságárus óránként 64 darab újságot szokott eladni, akkor nem túl valószínű, hogy egyik órában 250 darabot ad el, mert az a várható eladási szám négyszerese. A Markov-egyenlőtlenség alapján ennek esélye 1/4-nél kisebb:

MARKOV-EGYENLŐTLENSÉG:

$$P\left(\xi\geq t\cdot E(\xi)\right)\leq\frac{1}{t}$$



Ha a várható eladás óránként 64 darab, akkor

$$P\left(\xi\geq 250\right)=P(\xi\geq t\cdot 64)\leq\frac{1}{t}$$

$$250=t\cdot 64\quad\Rightarrow\quad t=\frac{250}{64}$$

Így

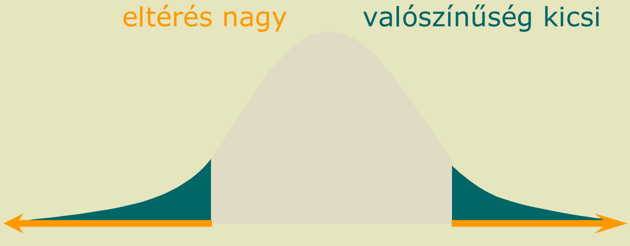
$$P\left(\xi\geq 250\right)\leq\frac{1}{t}=\frac{64}{250}=0{,}256$$

Annak valószínűsége tehát, hogy 250-nél több újságot ad el egy óra alatt, legfeljebb 0,256.
Még a Markov-egyenlőtlenségnél is érdekesebb a Csebisev-egyenlőtlenség, nézzük meg ezt is.

A CSEBISEV-EGYENLŐTLENSÉG

A Csebisev egyenlőtlenség arról szól, hogy a várható értéktől való eltérés nem lehet túl nagy.
Ha például egy újságárus óránként 64 darab újságot szokott eladni, akkor nem túl valószínű, hogy egyik órában 200 darabot ad el, mint ahogyan az sem, hogy mondjuk csak hármat.
A várható érték jele $E(\xi)$, a várható értéktől való eltérés a $|\xi - E(\xi)|$.

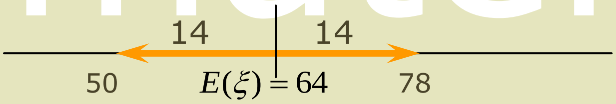
$$P\big(\underbrace{|\xi - E(\xi)| \geq t \cdot D(\xi)}_{\text{eltérés nagy}}\big) \leq \underbrace{\frac{1}{t^2}}_{\text{valószínűség kicsi}}$$



$$P\big(\underbrace{|\xi - E(\xi)| < t \cdot D(\xi)}_{\text{eltérés kicsi}}\big) > \underbrace{1 - \frac{1}{t^2}}_{\text{valószínűség nagy}}$$

Adjunk becslést annak valószínűségére, hogy az újságos által eladott lapok száma 50 darab és 78 darab közé esik, ha óránként 64 darab újságot szokott eladni 8 darab szórással.

Rajzoljuk föl, hogy mit is szeretnénk pontosan:



A jelek szerint a második típusú Csebisev egyenlőtlenségre lesz szükség. Az eltérés a várható értéktől mindkét irányban maximum 14, tehát:

$$P\big(\underbrace{|\xi - E(\xi)|}_{14 = t \cdot D(\xi) = t \cdot 8} < t \cdot D(\xi)\big) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$14 = t \cdot D(\xi) = t \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad 14 = t \cdot 8 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

A becslés:

$$P\big(|\xi - E(\xi)| < t \cdot D(\xi)\big) > 1 - \frac{1}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49} = 0{,}67$$

Vagyis legalább 0,67 annak a valószínűsége, hogy 50 és 78 között lesz az eladott lapok száma.

A VÁRHATÓ ÉRTÉK ÉS A SZÓRÁS TULAJDONSÁGAI

VÁRHATÓ ÉRTÉK	SZÓRÁS
$E(c)=c$	$D(c)=0$
$E(c\cdot\xi)=c\cdot E(\xi)$	$D(c\cdot\xi)=\lvert c\rvert\cdot D(\xi)$
$E(\xi+\eta)=E(\xi)+E(\eta)$	
$E(a\cdot\xi+b)=a\cdot E(\xi)+b$	$D(a\cdot\xi+b)=\lvert a\rvert\cdot D(\xi)$

Ha ξ és μ független, akkor $E(\xi\cdot\eta)=E(\xi)\cdot E(\eta)$ és $D^2(\xi+\eta)=D^2(\xi)+D^2(\eta)$