Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal

Arató Miklós, Prokaj Vilmos és Zempléni András

2013.05.07

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés, véletlen kísérletek **4**
- 1.1. Bevezetés . . . 4
- 1.2. A véletlen fogalma . . . 6
- 1.3. Véletlen jelenségek a mindennapokban . . . 6

2. Leszámlálások, modelljeik: véges alaphalmazok **7**
- 2.1. Szorzási elv . . . 7
- 2.2. Kombinatorikai alapfogalmak . . . 8
  - 2.2.1. Permutációk . . . 8
  - 2.2.2. Kombinációk . . . 8
- 2.3. Klasszikus valószínűség . . . 9
- 2.4. Szita formula . . . 15
- 2.5. Gyakorló feladatok . . . 20

3. A kísérletek függetlensége, feltételes eloszlások **22**
- 3.1. Teljes valószínűség tétele . . . 23
- 3.2. A függetlenség szemléletes bevezetése . . . 27
- 3.3. Bayes tétel . . . 30
- 3.4. Valószínűségi változók . . . 35
- 3.5. Végtelen kísérletsorozatok . . . 40
- 3.6. Gyakorló feladatok . . . 49

4. A kísérletek jellemzői: középértékek, ingadozás, várható érték, szórás **52**
- 4.1. Középértékek . . . 52
- 4.2. Az ingadozás mértéke és lehetséges mérőszámai . . . 58
- 4.3. Gyakorló feladatok . . . 60

5. Folytonos modellek és tulajdonságaik **63**
- 5.1. Valószínűségi változók . . . 65
- 5.2. Valószínűségi változók várható értéke . . . 79
- 5.3. Szórásnégyzet, momentumok . . . 84

5.4. Egyenlőtlenségek 87
5.5. Gyakorló feladatok 89

6. Együttes viselkedés **91**
6.1. Valószínűségi változók függetlensége 91
6.2. Konvolúció 92
6.3. Független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete 101
6.4. Kovariancia és korreláció 104
6.5. Feltételes várható érték 109
6.6. Gyakorló feladatok 115

7. A kísérletek számának növelése: aszimptotikus tulajdonságok **116**
7.1. Gyenge törvények 116
7.2. Valószínűségi változók konvergenciái 117
7.3. Erős törvény 118
7.4. Centrális határeloszlástétel 122
7.5. Gyakorló feladatok 128

8. Nem független kísérletek: Markov láncok elemei **130**
8.1. Markov láncok, alapfogalmak 130
8.1.1. Gyakorló feladatok 131
8.2. Többlépéses átmenetvalószínűségek, invariáns eloszlás 133
8.2.1. Gyakorló feladatok 140
8.3. Elnyelődési valószínűségek 141
8.3.1. Gyakorló feladatok 144

9. Véletlen bolyongás: a klasszikus eset és a gráfok **145**
9.1. Bolyongás átlagos hossza, a lépésszám szórásnégyzete 145
9.1.1. Gyakorló feladatok 151
9.2. Elágazó folyamatok 152
9.2.1. Gyakorló feladatok 158
9.3. Martingálok 159
9.3.1. Feltételes várható érték: általános eset 159
9.3.2. Martingálok, összefoglaló 163
9.3.3. Gyakorló feladatok 169

10. Ízelítő a folytonos idejű esetből: a Poisson folyamat **171**
10.1. Gyakorló feladatok 177

11. Függelék **178**
11.1. Válogatás az ábrák előállításához használt R programokból 178
11.1.1. Egyszerű, nem animált ábrák 178
11.1.2. Interaktív animációk 195
11.1.3. Nem interaktív animációk 210
11.2. További ábrák 218

1. fejezet

Bevezetés, véletlen kísérletek

1.1. Bevezetés

Ez a jegyzet címe alapján akár egy egyszerű bevezető is lehetne a valószínűségszámítás sokak számára csodálatos, mások – elsősorban a témával még csak ismerkedő diákok – számára ijesztő világába. Reményeink szerint azonban mégis kicsit mást ad, mint a sok hasonló témájú jegyzet. Ami miatt rászántuk magunkat a megírására az egyrészt a sok éves oktatási tapasztalatunk, másrészt a mára mindenki számára könnyen hozzáférhető számítógépes háttér. Nem titkolt célunk a sok ábrával, szimulációval és különösképpen a függelékben mellékelt számítógépes kódokkal az, hogy kedvet csináljunk az olvasónak az önálló programíráshoz is. Az ábrák nemcsak az olvashatóságot javítják, hanem a sok esetben bonyolult képletben végződő eredményt szempillantás alatt érthetővé, a nem matematikus olvasó számára is felfoghatóvá teszik. Egy-egy ábra tipikusan nemcsak az adott példa megoldását mutatja be, hanem egyszerre rengeteg hasonló feladatét is. Így láthatóvá válik az eredmények függése a különböző paraméterektől - és így reményeink szerint minden sokkal érthetőbb lesz.

Arra is bátorítjuk a számítástechnikában legalább alapfokú jártassággal bíró olvasót, hogy maga is próbálja ki a mellékelt kódokat, futtassa le tetszése szerinti paraméterezésre a megadott webcímeken található programokat. Ezzel két legyet is üthet egy csapásra: a valószínűségszámításhoz is közelebb kerülhet, hiszen a módosításhoz nyilvánvalóan szükséges a képletek értelmezése, másrészt begyakorolja a gyakorlatban kiválóan használható R programnyelvet.

Sok esetben az ábrák nem képleteken, hanem szimulációkon alapulnak. Ez ugyancsak nagyon lényeges technika: ha nem tudunk egy feladatot explicit módon képletekkel megoldani, algoritmust akkor is gyakran fel tudunk rá írni. Ekkor már csak egy kis türelemre van szükség, amíg a kellő számú ismétlés lefut és máris kezünkben van a kérdésre egy jó közelítés. Ez ismét nagyon sok, nehéznek tűnő gyakorlati problémánál járható út.

Reméljük, hogy az elektronikus jegyzet előnyeit ilymódon kihasználva mindenkinek hasznos jegyzetet sikerült készítenünk, amelynél ügyeltünk arra, hogy az első fejezetek akár középiskolások számára is érthetőek, kedvcsinálók legyenek a valószínűségszámítás mélyebb eredményeit már az egyetemen megszokott módon tárgyaló további fejezetekhez.

A bevezetés után először a véletlen fogalmát ismertetjük, majd sok példán keresztül megismerkedünk a leszámláláson alapuló (kombinatorikus) valószínűségszámítás fogalmaival, módszereivel.

A függetlenség a valószínűségszámítás és a ráépülő tudományágak, így például a matematikai statisztika központi fogalma, ezért önálló fejezetet szenteltünk neki és a hozzá kapcsolódó témaköröknek. Mivel a kísérletek jellemző értékei – a válaszott természetes, a lehető legkevesebb formalizmussal terhelt megközelítés esetén – másképpen számolhatók a diszkrét (legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok értéket felvevő) és a folytonos modellek esetén, ezért a diszkrét esetre külön is bevezetjük ezeket a fogalmakat. Itt a gyakorlati (statisztikai) alkalmazásokba is bepillantunk, amikor a mintára számolunk jellemző értékeket.

A következő nagy részt a folytonos modelleknek szenteljük. Itt már a célközönséget is kicsit szűkítjük, az egyetemi hallgatók számára már lényeges lehet a tételek formális bizonyítása is, ezért ezekből is adunk ízelítőt. Természetesen nem lehetett célunk egy terjedelmes tankönyv részletességével bemutatni minden bizonyítást, sokkal inkább az alkalmazásokra, a példákra helyeztük itt is a hangsúlyt.

A függetlenség általános definícióját és az összefüggőséggel kapcsolatos fogalmakat mutatja be a következő fejezet. Ezután már csak egy lépés a modern valószínűségszámítás központi kérdésének, az aszimptotikus tulajdonságoknak a bemutatása. Általában ez az a pont, ameddig egy egy féléves BSc szintű valószínűségszámítás óra során el lehet jutni. Mivel azonban az ELTE-n számos magasabb szintű kurzus is szerepel a tanszékünk kínálatában, ezért célunk volt, hogy egy kicsi ízelítőt adjunk ezekből is. Először is a Markov láncok elemei kerülnek sorra, ami fontos továbblépés a bonyolultabb sztochasztikus folyamatok irányába, és számos érdekes feladat révén reményeink szerint az olvasó jártasságra tehet szert az alkalmazásaikban. A témát speciális Markov láncokkal, a bolyongásokkal folytatjuk.

A martingálok pedig ezek általánosításai, számtalan izgalmas modern területen alkalmazhatóak – például a pénzügyi matematikában – ez a fejezet már mértékelméleti alapokra is épít. Az eddig tárgyalt sztochasztikus folyamatok mind diszkrét idejűek voltak, a téma lezárásaként rövid ízelítőt adunk egy olyan egyszerű esetből, ahol nemcsak diszkrét időpontokban vannak megfigyeléseink, ez pedig a Poisson folyamat.

Minden fejezet végén számos gyakorló feladatot ismertetünk, amelyek megoldása a tanultak elmélyítését nagyban elősegíti. A függelék nagyobb része az ábrákat, szimulációkat előállító programok közül ad válogatást. Ezeknél a programoknál nem törekedtünk a programozási szempontból optimális megoldásra, inkább az egyszerű, közismertnek tekinthető utasításokat használtuk, bízva abban, hogy így többen fogják tudni ezeket értelmezni és akár saját ötleteikkel tovább alakítani.

Végül az interaktív szimulációkra hívjuk fel az olvasók figyelmét. Ezek a szövegben megadott honlapokról érhetők el, és mindenkinek nagyon ajánljuk a tanulmányozásukat! Segítségükkel az éppen ismertetett fogalmak gyakorlati tulajdonságai, a bemutatott példák különböző paraméterezés melletti eredményei figyelhetők meg. Néhány esetben a további paraméterbeállítások melletti eredményeket a Függelék 2. részében is bemutatjuk.

A feladatok nagy részét folyamatosan használjuk az oktatásban, eredetük így legtöbbször homályba vész. Néhány speciális feladatnál megjelöltük a forrást is. Az irodalomjegyzék néhány angol nyelvű szakkönyvet, példatárat tartalmaz, amelyek a jegyzetünk kiegészítéseként haszonnal lehet forgatni. Magyar nyelvű szakirodalmat szándékosan nem válogattunk ki, mert rengeteg különböző szintű és megközelítésmódú anyag található akár elektronikusan akár hagyományos könyv formában és nem szerettünk volna senkit sem megbántani azzal, hogy véletlenül pont az ő munkáját kihagyjuk a listából.

A tananyagunk elkészítésében segítségünkre voltak tanszékünk PhD diákjai, így különösen Martinek László és Varga László jegyzetei, munkájukat köszönjük!

1.2. A véletlen fogalma

Matematikai definícióval nem érdemes kísérletezni, hiszen a véletlen nem az absztrakt matematikai fogalmak közé tartozik, hanem mindannyiunk által tapasztalt jelenség. Mennyi idő alatt érünk be a munkába? Fog-e esni a kirándulás alatt? Ezek mind tekinthetőek a véletlen megvalósulásának, nemcsak a klasszikus kockadobással, illetve lottóhúzással kapcsolatos kérdések.

Kicsit formálisabban, tekinthetjük véletlennek azokat a kísérleteket, jelenségeket, amelyek kimenetelét a rendelkezésünkre álló ismeretek alapján nem tudjuk előre meghatározni. Ebbe a körbe illeszkednek a klasszikus véletlen kísérletek: a lottóhúzás, a kockadobás.

Ehhez a véletlenhez könnyen társíthatunk valószínűséget is, de ez a szubjektív, "érzés" alapján hozzárendelt szám már nem biztos, hogy meg fog felelni azoknak a kritériumoknak, amiket a következő pontban a valószínűség matematikai definíciójaként fogunk bevezetni. Ennek ellenére hasznos ez a megközelítés, mert így a legtöbb olvasó számára már ismerős fogalmakról kell beszélnünk és ez minden bizonnyal megkönnyíti a megértést.

1.3. Véletlen jelenségek a mindennapokban

A fenti példák mellett számtalan esetben találkozhatunk a véletlennel, mégha ez nem is tudatosul bennünk. Mikor szólal meg a telefonunk? Hány emailt kapunk egy napon? Meddig tart a fényképezőgépünk akkumulátora? Mind mind olyan kérdések, amik a véletlennel kapcsolatosak, és a későbbiekben vizsgálandó modellek segítségével akár választ is kaphatunk rájuk - no nem feltétlenül előrejelzést, de legalábbis becslést a kapcsolódó események valószínűségére.

2. fejezet

Leszámlálások, modelljeik: véges alaphalmazok

Az első részben az előzőekben említett példákhoz (kockadobás) hasonló egyszerű, véges sok kimenetellel leírható kísérleteket vizsgáljuk. Ez a témakör is nagyon sok érdekes problémát vet fel és a kevesebb technikai nehézség miatt célszerű a valószínűségszámítás tanulmányozását itt kezdeni.

2.1. Szorzási elv

A legtöbb feladatban a lehetőségek számát lépésről lépésre haladva tudjuk meghatározni. Ennek a lényege, hogy sorra vesszük a kísérleteket és megnézzük, hogy az egyes lépésekben hány lehetőségünk van. Ha az egyes lépések után mindig ugyanannyi a lehetőségek száma, akkor a teljes kísérletnél ezt az egyes lépések esetszámainak szorzataként kaphatjuk meg.

A legegyszerűbb esetet egy példán keresztül is bevezethetjük:

2.1 Feladat Tegyük fel, hogy egy csoportban 6 fiú és 8 lány van és hogy a keresztneveik mind különbözőek. A szalagavató nyitótáncára egy párt kell kiválasztani. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni?

Megoldás. Az összes esetek száma $6 \cdot 8$, mert 6 fiúból és 8 lányból választhatunk.

Hasonlóképpen több csoport esetére is:

2.2 Feladat Tegyük fel, hogy egy négy osztályos középiskolában a 4 évfolyam a következő megoszlásban delegált tagokat a diákönkormányzat vezetésébe: 2 elsős, 3 másodikos, 5 harmadikos és 3 negyedikes van a vezetőségben. Tegyük fel, hogy egy bizottságot kell közülük kiválasztani, amely minden évfolyamról pontosan egy tagot tartalmaz. Hányféleképpen tehető ez meg?

Megoldás. Az összes esetek száma $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$, mert az egyes osztályokból a megadott számú diákból választhatunk és bárki bárkivel együtt bekerülhet a bizottságba.

2.3 Feladat Hányféle rendszámtábla képzelhető el a mai rendszerben, ahol az első három helyen betűk, a második három helyen pedig számok állnak? (A felhasználható abc 26 betűt tartalmaz és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy 000 is megengedett számsorozat.)

Megoldás. Az összes esetek száma $26^3 \cdot 10^3$ azaz több, mint $17,5$ millió, mert az egyes helyekre a megadott lehetőségek közül bármelyiket választhatjuk.

2.2. Kombinatorikai alapfogalmak

Ahhoz, hogy az egyes feladattípusokra minél hatékonyabban találjuk meg a megoldást, érdemes a leszámlálási (kombinatorikai) fogalmakat áttekinteni. Ha ezeket értjük, akkor könnyen fogjuk tudni a módszereket alkalmazni a konkrét feladatokra is.

2.2.1. Permutációk

Hányféle sorrendben érhet célba három versenyző? Az eredmény természetesen 6, ahogy arról bárki akár egyszerű felsorolással meggyőződhet. De természetesen alkalmazható a szorzási szabály is, hiszen a győztes 3 féle, a második 2 féle és végül a harmadik már csak 1 féle lehet. Az eredmény tehát valóban $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Ugyanígy megkapható az általános eredmény is, miszerint n dolog sorbarendezéseinek a száma $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$.

2.2.2. Kombinációk

Gyakori az olyan kérdés, amire a választ bizonyos csoportok elemszámának összeszámolásával kaphatjuk meg. Erre a következő egy tipikus kérdés: hányféleképpen tudok egy párt kiválasztani 5 emberből? A válasz az előzőek alapján már nagyon egyszerű: a pár első tagját 5-féleképpen, a másodikat pedig a megmaradók közül 4 féleképpen választhatjuk ki. Viszont ez a 20 lehetőség különbözőnek számítja az AB párt a BA-tól, ami nem felel meg a feladat szövegének. Mivel minden egyes párra ugyanez a kétszeres szorzó vonatkozik, ezért a végeredmény a $20/2 = 10$. Ugyanez a gondolatmenet általánosan is végigvihető: n dologból k elemet

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \binom{n}{k} \tag{2.1}$$

féleképpen választhatunk ki.

2.3. Klasszikus valószínűség

A fenti leszámlálások alapján már valószínűséget is definiálhatunk: ehhez csupán arra van szükség, hogy minden egyes kimenetelhez ugyanakkora esély tartozzon. Ekkor tetszőleges A esemény valószínűsége megadható úgy, mint $P(A) = |A|/|\Omega|$ ahol Ω az összes lehetséges kimenetel összessége, egy A halmazra pedig $|A|$ a halmaz elemszámát jelöli.

Természetesen a későbbiekben ennél bonyolultabb esetekkel is fogunk találkozni, de az alapfogalmak megértéséhez ez a véges sok lehetőséget tartalmazó egyszerű modell is elegendő.

2.4 Feladat Tegyük fel, hogy egy szabályos kockával dobunk háromszor. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy három különböző eredményt kaptunk!

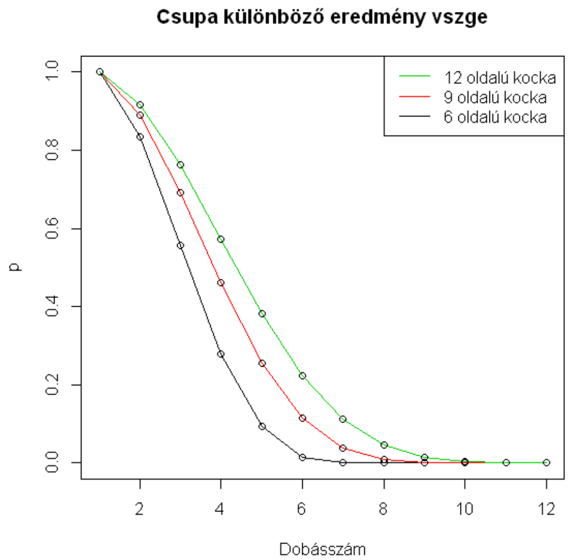
Megoldás. Az összes esetek száma 6^3, mert mindhárom esetben 6 lehetőségünk van, és ezek bármelyike kombinálható a többi dobás bermelyikével. (Megjegyzendő, hogy ezzel megkülönböztetjük például az 123 eredményt a 321-től, mert így lesznek egyenlő valószínűségűek az esetek.) A kedvező esetek leszámlálásához azt kell észrevennünk, hogy az első dobásnál még bármelyik eredmény előfordulhat, azaz 6 lehetőségünk van, a másodiknál viszont már csak 5 - hiszen nem dobhattuk ugyanazt, mint amit elsőre kaptunk - a harmadiknál pedig már csak 4, hiszen sem aző sem a második dobás eredménye sem jöhet ki újra. A keresett esetszám tehát $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Ebből a valószínűség $120/216 = 5/9$. A megoldás módszerét könnyen általánosíthatjuk tetszőleges oldalú "kockára" és dobásszámra. Az eredményeket mutatja néhány esetre a 2.1 ábra.

2.5 Feladat Tegyük fel, hogy 10 emberből választunk ki véletlenszerűen kettőt. Ha a 10 közül 5 nő, akkor mi a valószínűsége, hogy 1 nő és 1 férfi kerül a kiválasztottak közé?

Megoldás. Az összes lehetőségek száma az előzőek értelmében $\binom{10}{2} = 45$ ezek közül férfit és nőt is tartalmaz $5 * 5 = 25$ pár. A keresett valószínűség tehát $25/45 = 5/9$. Másik megoldási lehetőség, ha a rossz eseteket számoljuk össze. Egynemű párból $2\binom{5}{2} = 20$ van (a valószínűségszámításban ezt a komplementer eseménynek nevezzük). A jó esetek száma tehát 45-25, vagy a valószínűségszámításban gyakran használt módon a komplementer esemény valószínűsége $1-$ az eredeti esemény valószínűsége.

2.6 Feladat Mi a valószínűsége, hogy 25 emberből van kettő, akinek az év azonos napjára esik a születésnapja?

Megoldás. Az összes lehetőségek száma: 365^{25}, ebből a kedvezőtlenek száma (azaz, amikor nincs egyezés) $365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-24)$. A keresett valószínűség ez alapján -feltéve, hogy bármely napon ugyanakkora a születés valószínűsége és hogy a csoport tagjai között nincs kapcsolat - $1 - 365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365-24)/365^{25} = 0,569$.



2.1. ábra. Csupa különböző dobás valószínűsége (2.4 feladat, 11.1 kód)

Az eredmény első ránézésre igencsak meglepő, hiszen akár még 50 fős csoportban is ritkának gondolhatnánk az egybeesést, pedig ahogy ezt a 2.2 ábráról leolvashatjuk, az eredmény ebben az esetben már meglehetősen közel van az egyhez. A látszólagos paradoxon magyarázata az, hogy valójában nem a csoport létszámát kell a 365 naphoz viszonyítani, hanem a párok számát.

A 2.2 ábrából látható, hogy a valódi születési gyakoriságok (melyek kissé nagyobbak a nyári hónapokban, mint az év többi napján, és a szökőnap is megjelenik) alapján szimulált relatív gyakoriságok szinte teljesen pontosan visszadják az elméleti értékeket (a szimuláció-szám minden n-re 10000 volt). Animált szimulációs ábra a `www.cs.elte.hu/~zempleni/anim/szulnap` címen található

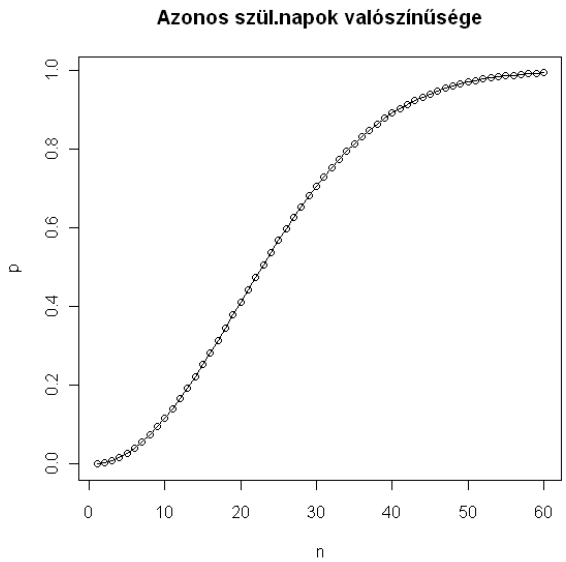
Ebből egy screenshot a 2.3 ábra. Ez a 2.2 ábrához hasonló, de szimulációval adódik.

2.7 Feladat Egy zsákban 10 pár cipő van. 4 db-ot kiválasztva mi a valószínűsége, hogy van közöttük pár, ha

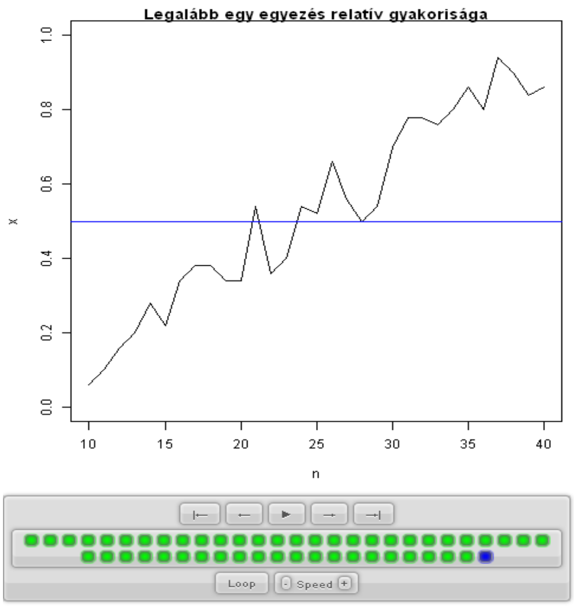
1. egyformák
2. különbözőek a párok?

Megoldás.

1. P(van pár)=1-P(nincs pár)=$1-\frac{\binom{10}{0}\binom{10}{4}+\binom{10}{4}\binom{10}{0}}{\binom{20}{4}}=\frac{28}{323}$, hiszen csak akkor nem kapunk párt, ha vagy 4 ballábas vagy 4 jobblábas cipőt húzunk.



2.2. ábra. Egyező születésnap valószínűsége a csoport létszámának (n) függvényében (2.6 feladat, 11.2 kód)



2.3. ábra. Egyező születésnap relatív gyakorisága a csoport létszámának (n) függvényében (2.6 feladat), szimulált adatokra

2. $1-\frac{20\cdot18\cdot16\cdot14}{20\cdot19\cdot18\cdot17}=\frac{99}{323}$ a szorzási szabály értelmében: az első cipő még akármi lehet, de innen kezdve mindig ki kell hagyjuk a már kihúzott cipő párját a "rossz" eseteknél.

Látszólag máshogy okoskodtunk a két résznél, mert az első esetben a sorrendre nem voltunk tekintettel, míg a második esetben igen, de mivel mind az összes esetszám, mind a kedvező esetszám számolásánál következetesen ugyanúgy számoltunk, ezért mindkét eredmény helyes.

2.8 Feladat Úgy helyezünk el n urnába n golyót. hogy bármelyik a többitől függetlenül bármelyik urnába ugyanakkora eséllyel kerülhet. Mi a valószínűsége, hogy

1. nem lesz üres urna
2. pontosan egy üres urna lesz?

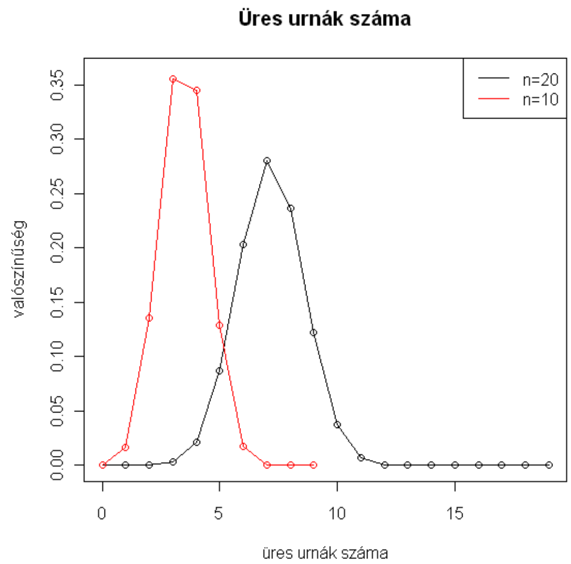
Megoldás. Az összes esetszám a feladat szövegének értelmében n^n.

1. Akkor nem lesz üres urna, ha minden urnába pontosan egy golyó kerül. Ennek valószínűsége $\frac{n!}{n^n}$.
2. A kívánt helyzet nyilván csak úgy állhat elő, hogy egy urna üres, egy urnában 2 golyó van és a többi urnában pedig 1-1 golyó. A kedvező esetszámoknál figyelembe kell vennünk, hogy n urna maradhat üresen, $n-1$ urnába kerülhet 2 golyó és ezeket $\binom{n}{2}$ féleképpen választhatjuk ki. A maradék $n-2$ golyó az $n-2$ urnába az előző rész értelmében $(n-2)!$ féleképpen kerülhet. A végeredmény tehát
$$\frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}=\frac{n(n-1)n!}{2n^n}.$$

A 2.4 ábra mutatja az üres urnák számának eloszlását a 2.8 példában, 10^6 szimuláció alapján. Jól látszik, hogy a feladat viszonylag könnyen számolható esetei igen ritkán fordulnak elő.

2.9 Feladat Mennyi a valószínűsége, hogy 2 (általánosan n) kockadobás maximuma 5?

Megoldás. A maximumra vonatkozó kérdéseknél tipikusan azt könnyű megválaszolni, hogy mennyi annak a valószínűsége, hogy a maximum kisebb egy adott számnál. Bár a 2 kocka esetére még enélkül is könnyen célt érhetünk, mi már itt is ezt a könnyen általánosítható módszert alkalmazzuk. Legyen X és Y a két kockadobás eredménye. $P(\max(X,Y)<6)=25/36$, hiszen mindkét dobás legfeljebb 5 lehet. Ugyanígy $P(\max(X,Y)<5)=16/36$, és mivel $\{\max(X,Y)<6\}\supset\{\max(X,Y)<5\}$, ezért a két esemény különbsége éppen a $\{\max(X,Y)=5\}$ esemény, aminek tehát a valószínűsége $9/36$.



2.4. ábra. Az üres urnák számának eloszlása az urnák számának (n) függvényében (2.8 feladat, 11.3 kód)

Az általánosításhoz (az n kockadobás eredménye most legyen $X_1, ..., X_n$): $P(\max(X_1, ..., X_n) < 6) = 5^n/6^n$, és $P(\max(X_1, ..., X_n) < 5) = 4^n/6^n$, a keresett valószínűség tehát $(5^n - 4^n)/6^n$.

A 2.9 példa feladatának általános megoldását mutatja a 2.5 ábra. Ezen $2, 5, 8$ és 12 kocka esetére látható a maximum eloszlása (azaz az egyes értékek bekövetkezésének valószínűsége). Jól látható, hogy a 6-os maximum valószínűsége folyamatosan nő, míg a többi eredmény egy idő után már egyre kevésbé valószínű.

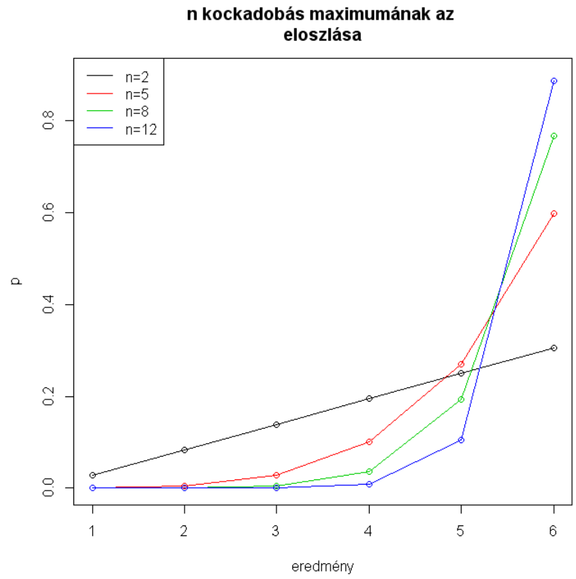
2.10 Feladat Hány kockadobásnál a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy pontosan egy hatost dobunk?

Megoldás. Ez is tipikus példa: megszámlálható sorozat maximumát keressük. A sorozatoknál a lokális szélsőértéket egyszerűen az egymás utáni értékek vizsgálatával meg tudjuk találni. Ha a szomszédos tagok különbségét tekintjük:

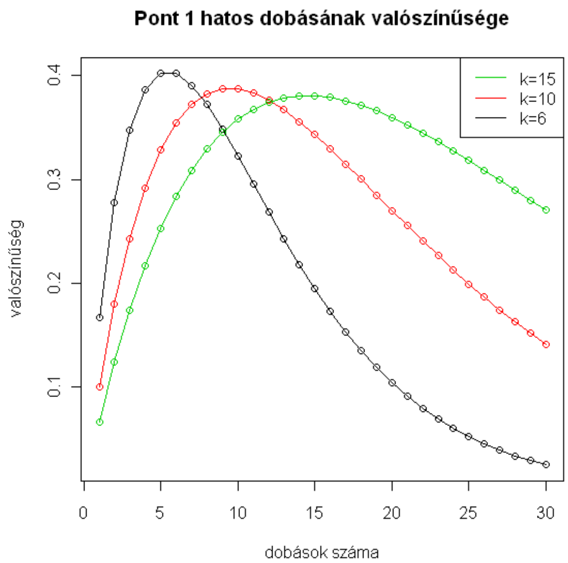
$$p_n = n\frac{1}{6} \cdot \frac{5^{n-1}}{6^{n-1}},$$

tehát

$$p_{n+1} - p_n = \frac{(n+1)5^n - 6n5^{n-1}}{6^{n+1}} = \frac{5^n - n5^{n-1}}{6^{n+1}},$$



2.5. ábra. A legnagyobb dobott szám eloszlása különböző kocka-számokra (2.9 feladat)



2.6. ábra. A pontosan 1 hatos dobásának valószínűsége a dobások és a "kocka" oldal-számának (k) függvényében (2.10 feladat) ami pontosan akkor pozitív, ha $n < 5$. $n = 5$-re 0 a különbség, ezután pedig negatív. Tehát $n = 5$ és $n = 6$ adja a maximumot, ennek értéke $5^5/6^5 = 0,4$.

A 2.6 ábra mutatja a pontosan 1 hatos dobás valószínűségét néhány különböző k oldalszámú "kocka" esetére (ekkor az 1-től k-ig bármely szám egyformán valószínű, $k \geq 6$). Jól látszik, hogy a maximum mindig az oldalszám és az oldalszám-1 kocka esetén maximális. Érdekes, hogy a maximum csak lassan csökken az oldalszám növekedtével.

2.4. Szita formula

Bevezetés

2.11 Feladat Mi a valószínűsége, hogy egy magyar kártyacsomagból visszatevéssel két lapot húzva lesz közöttük piros?

Megoldás. Több lehetőség is adódik a megoldásra. Az egyik módszer szerint a komplementer eseményt vizsgálhatjuk: annak valószínűsége, hogy nem húztunk pirosat $\frac{24 \cdot 24}{32 \cdot 32} = 9/16$, azaz a keresett valószínűség $1 - 9/16 = 7/16$.

De más megközelítést is választhatunk. Ha úgy látunk neki a megoldásnak, hogy bármely húzásnál 1/4 a piros húzás valószínűsége, akkor ebből első közelítésben 1/2 adódna. De persze ez nem jó, mert kétszer számoltuk azokat az eseteket, ahol mindkét húzásra pirosat kaptunk. Ha tehát ezt az 1/16 valószínűséget levonjuk, akkor éppen 7/16 adódik.

Más esetekben is gyakran szembesülünk hasonló problémával, amikor korrigálnunk kell az első közelítésben adódó eredményt a metszetek többszöri beszámítása miatt. Formálisan az előző feladatban arról volt szó, hogy a $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ képletet alkalmaztuk. Itt A_1 az az esemény, hogy az első húzás piros, A_2 pedig az, hogy a második húzás piros. Ez a képlet még könnyen átlátható és ellenőrizhető. De mi történik, ha nem 2, hanem 3 eseményünk van és a kérdés az előzőekhez hasonlóan az uniójuk valószínűsége?

Erre ad választ az úgynevezett szita-formula, melyet más területeken is gyakran alkalmaznak leszámlálási feladatok megoldására. A valószínűségszámításban Poincaré formula néven is ismert állítás a következő:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i^{(n)}, \tag{2.2}$$

ahol $S_i^{(n)}$ az összes i-tényezős metszet valószínűsége, formálisan

$$S_i^{(n)} = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_i \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_i}).$$

Ezzel a képlettel már könnyen megoldhatunk olyan feladatokat, amiknél a közvetlen, "nyers erőn" alapuló számolás szinte reménytelen. Sok esetben pedig az az egyszerű átfogalmazás még praktikusabb, ahol unió helyett metszet szerepel:

$$P(\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_i^{(n)},$$

ahol legyen $S_0^{(n)} := 1$. A két állítás ekvivalenciája abból adódik, hogy a komplementerek metszete éppen azt jelenti, hogy egyik esemény sem következik be – ez pedig éppen az unió komplementere. A jobb oldal pedig éppen 1- a (2.2) képlet jobb oldala, tehát a komplementer esemény valószínűsége.

Nézzünk is néhány példát!

2.12 Feladat Mi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával 12-szer dobva, minden szám legalább egyszer kijött?

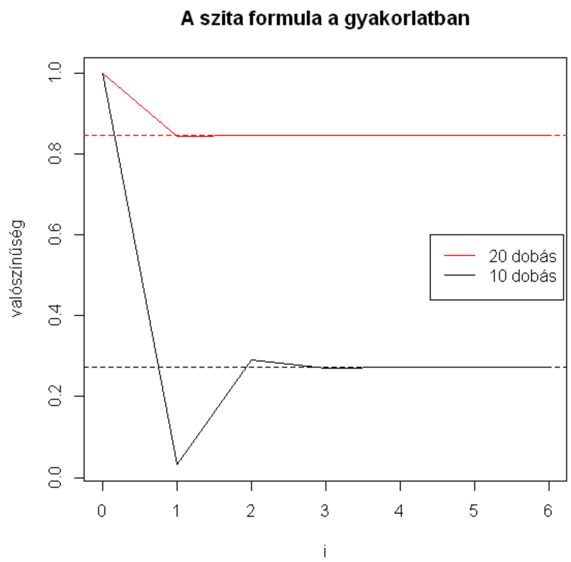
Megoldás. A szita formula alkalmazásának szükségességére abból lehet rájönni, hogy a lehetőségeket számba véve rengeteg szóba jövő megoszlást kellene figyelembe venni (pl. az $1-6$ értékek gyakoriságaira a $7-1-1-1-1-1$ és a $2-2-2-2-2-2$ is megengedett megoszlás). A szita formula alkalmazásához azt kell csak észrevenni, hogy itt is események metszetének valószínűségét kell kiszámolnunk. Ha a A_i={nem dobtunk i-t} választással alkalmazzuk a formulát, akkor éppen a komplementerek metszetére felírt alakot kapjuk, és ebből $S_i^{(n)} = \binom{6}{i}(\frac{6-i}{6})^n$, azaz a keresett valószínűség $1 - \sum_{i=1}^{5}(-1)^{i-1}\binom{6}{i}(\frac{6-i}{6})^{12}$.

A 2.7 ábra a 2.12 példában szereplő valószínűséget $n = 10$, illetve $n = 20$ esetére mutatja. Az x tengelyen azt láthatjuk, hogy a szita formulában az első i tag milyen jól közelíti az eredményt. Ebből látszik, hogy az első $2-3$ tag a domináns (az igen valószínűtlen, hogy az adott dobásszámok mellett maximum 3 vagy még kevesebb különböző eredményt kapjunk).

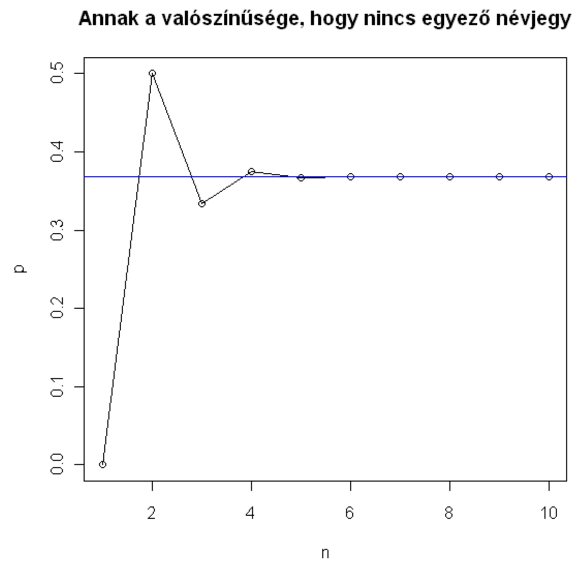
2.13 Feladat Mi a valószínűsége, hogy ha n ember bedobja a névjegyét egy dobozba, majd ezután véletlenszerűen mindenki ki is húz egyet, akkor nem lesz senki, aki a saját névjegyét húzza?

A 2.9 ábrából látható, hogy .a valószínűség nagyon gyorsan közelít $1/e$-hez (vízszintes kék vonal). Animált szimulációs ábra a www.cs.elte.hu/~zempleni/anim/nevjegy címen található. Egy screenshot a 2.9 ábra. Ebből az látható, hogy különböző csoportméret (n) esetén a szimulációk során átlagosan hány egyezés volt. Látható, hogy az értékek minden n-re közel vannak 1-hez.

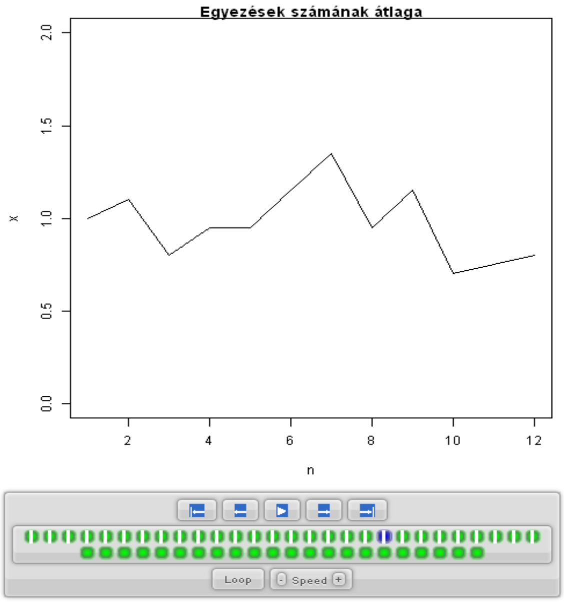
Megoldás. Itt is a szita formula a megoldás kulcsa. Ezúttal is események metszetének valószínűségét kell kiszámolnunk. Legyen A_i={az i-edik ember a saját névjegyét húzta}. A keresett esemény a komplementereik metszete, $S_i^{(n)} = \binom{n}{i}\frac{1}{n(n-1)\ldots(n-i+1)}$, azaz a keresett valószínűség $1 - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(\frac{1}{i!})$, ami éppen $1/e$-hez tart, ha $n \to \infty$.



2.7. ábra. Annak valószínűsége, hogy 20, illetve 10 kockadobásnál minden szám kijön, a valószínűséget a szita formulában szereplő összeg első i tagjával közelítve (2.12 feladat, 11.5 kód)



2.8. ábra. A névjegy probléma valószínűsége a csoport létszámának (n) függvényében (2.13 feladat, 11.4 kód)



2.9. ábra. A névjegy problémánál az egyezések számának átlaga a csoport létszámának (n) függvényében

A következő, 2.10 ábra azt mutatja, hogy a szita formula képletében rendre i-ig összegezve mennyire jó közelítést kapunk a keresett valószínűségre,

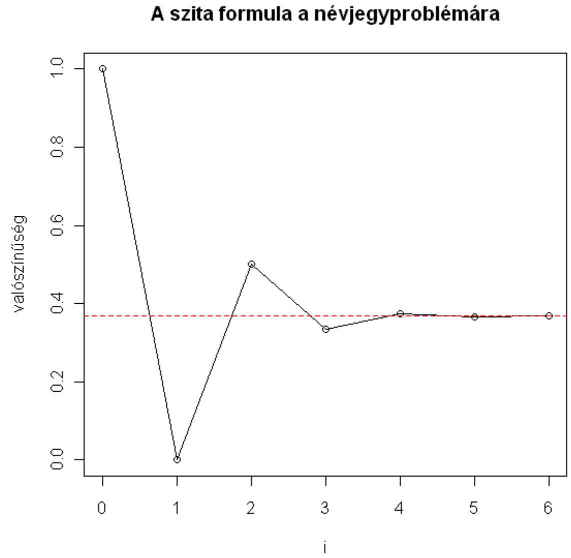
Vegyük észre, hogy az előzőekben a szita formulát arra a speciális esetre alkalmaztuk, amikor minden k tényezős metszet valószínűsége azonos. Ekkor a (2.2) képlet a következő, egyszerűbb alakba is írható:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_i). \tag{2.3}$$

De nem minden esetben tudunk ilymódon egyszerűsíteni a megoldásunkon. Ezt illusztrálja a következő feladat.

2.14 Feladat Tegyük fel, hogy egy házban az első emeleten 2, a másodikon 3, a harmadikon pedig 4 lakás van. Ha a földszinten 5-en szállnak be a liftbe, akik egymástól függetlenül, bármely lakásba ugyanolyan valószínűséggel mennek, akkor mi a valószínűsége, hogy minden emeleten megáll a lift?

Megoldás. Itt is azt a valószínűséget könnyű számolni, hogy egy (vagy néhány) emeleten nem áll meg a lift. A szita formulában tehát legyen A_i={az i-edik emeleten nem áll meg a lift} $(i = 1, \dots, 3)$. A keresett esemény a komplementereik metszete. Most különkülön ki kell számolni $S_i^{(3)}$ elemeit: $S_1^{(3)} = (\frac{7}{9})^5 + (\frac{6}{9})^5 + (\frac{5}{9})^5$, $S_2^{(3)} = (\frac{2}{9})^5 + (\frac{3}{9})^5 + (\frac{4}{9})^5$ és értelemszerűen $S_3^{(3)} = 0$. Innen a keresett valószínűség 1-$\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1} S_i^{(3)} = 0,553$.



2.10. ábra. A névjegy problémánál a valószínűség közelítése a szita formulában szereplő összeg első i tagjával (2.13 feladat, 11.6 kód)

Az előző példák eredményeinek kiszámításánál és az ábrákon is jól látszik, hogy a (2.2) formulában a az utolsó tagok (amikor tehát i közel van n-hez), nem játszanak jelentős szerepet. Ezt pontosítja a következő állítás – egyúttal a közelítések irányát is megadva:

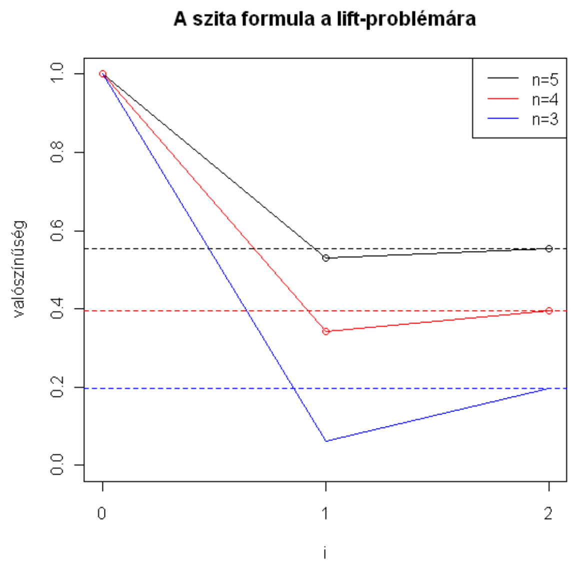
$$\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{i+1}S_i^{(n)} < P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) < \sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i+1}S_i^{(n)}, \tag{2.4}$$

ahol $2k+1 \leq n$. A (2.4) egyenlőtlenség Bonferroni nevéhez fűződik. A 2.11 és 2.10 ábra is szemléletesen mutatja gyakorlati alkalmazását.

A feladattípusnak egy fontos alkalmazása az az eset, amikor nemcsak a konkrét esemény (pl. az összes szám előfordulása) valószínűségét, hanem annak valószínűségét kell kiszámolnunk, hogy az esemény pontosan az adott időpontban következett be.

2.15 Feladat Mi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával pont 12-edikre jön ki minden szám legalább egyszer?

Megoldás. A 2.12 feladat megoldása szerint annak a valószínűsége, hogy k dobásból már minden szám megvan: $P(B_k) = 1 - \sum_{i=1}^{5}(-1)^i\binom{6}{i}(\frac{6-i}{6})^k$. Innen már csak azt kell észrevennünk, hogy a keresett esemény éppen $B_{12} \setminus B_{11}$ és így az eredmény $P(B_{12}) - P(B_{11}) = 0,06$. A 2.12 ábrán láthatjuk a 2.15 példához kapcsolódóan az eredményeket



2.11. ábra. A valószínűség kiszámítása a lift problémánál, a szita formulában szereplő összeget az első i tagjával közelítve, különböző utasszámra (2.14 feladat, 11.7 kód)

különböző dobásszámokra. Érdemes megfigyelni, hogy elég gyakran akár 25-nél több dobásra is szükség lehet az összes eredmény eléréséhez.

2.5. Gyakorló feladatok

1. Arithmetiában az autók rendszámai hatjegyű számok 000000 és 999999 között. Mi a valószínűsége, hogy van 6 a jegyek között?

2. Ha 8 bástyát leteszünk véletlenszerűen egy sakktáblára, mi a valószínűsége, hogy semelyik sem tud leütni egy másikat?

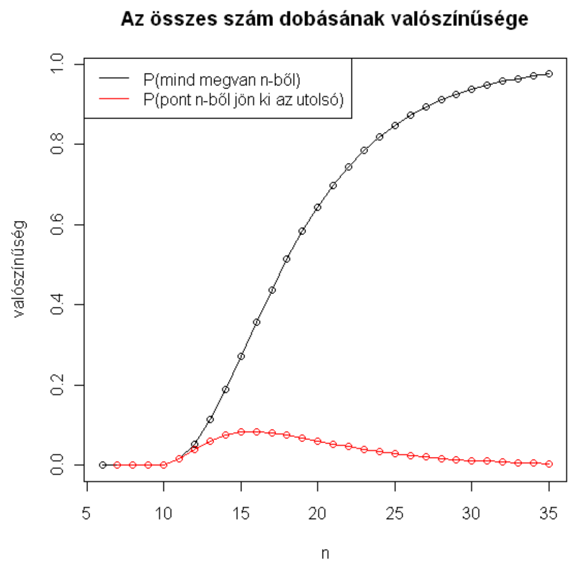
3. Egy dobozban 9 golyó van: 3 piros, 3 fehér és 3 zöld. 6 golyót húzunk

   (a) visszatevés nélkül

   (b) visszatevéssel.

   Mi a valószínűsége, hogy mind a három színből van a kihúzottak között?

4. n szabályos dobókockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott számok összege osztható 6-tal?



2.12. ábra. Az összes szám dobásának valószínűsége különböző dobásszámokra (2.15 feladat, 11.8 kód)

5. A spanyol labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 20 mezőnyjátékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 10-es csoportba, hogy Xavi és Raul egymás ellen játszik?

6. Egy tétova hangya a számegyenesen bolyong. 0-ból indul és minden lépésnél egyforma valószínűséggel vagy jobbra, vagy balra lép. Mennyi a valószínűsége, hogy $2n$ lépés után a hangya 0-ban (k-ban) lesz?

7. Melyik a valószínűbb: az, hogy 4 kockadobásból lesz legalább egy 6-os, vagy hogy 24 dupla kockadobásból lesz legalább egy dupla 6?

8. Tegyük fel, hogy 5 férfi és 5 nő vizsgázik egy adott tárgyból és hogy az eredményeik egyértelműen sorbarendezhetőek. Feltéve, hogy bármely sorrend egyformán valószínű, adjuk meg a legjobb helyezést elért nő helyezésének eloszlását

9. A 32 lapos kártyacsomagból visszatevés nélkül kihúzunk 7 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lapok között mind a négy szín előfordul?

10. Egy kisfiú "Sali baba" Kinder-figurákat gyűjt. 10 fajta ilyen baba van. Mennyi a valószínűsége, hogy a 20. "Sali babá"-nál lesz meg neki mind a 10 fajta (feltételezve, hogy mindegyikből ugyanannyi van)?

3. fejezet

A kísérletek függetlensége, feltételes eloszlások

Ez talán az eddigiek közül a legfontosabb rész, hiszen a függetlenség kulcsfogalom a valószínűségszámításban. Tulajdonképpen már az eddigiekben is használtuk, mikor a keresett kedvező és összes esetszámokat szorzással állítottuk elő. Ahhoz, hogy a fogalmat a szemléletünknek megfelelően bevezethessük, először a feltételes valószínűség fogalmával kell megismerkednünk. Szemléletesen ennek az a lényege, hogy az A esemény bekövetkezését csak a B esemény bekövetkezésének feltételezése mellett vizsgáljuk (azaz abból indulunk ki, hogy tudjuk: a B esemény bekövetkezett).

Az A esemény feltételes valószínűsége a B esemény bekövetkezése esetén:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ennek kiszámítása történhet közvetlenül, vagy a követezőkben említésre kerülő módszer (Bayes tétel) segítségével. A gyakorlatban inkább annak felismerése szokott problémát jelenteni, hogy egy adott feladatban valóban feltételes valószínűség számítására van-e szükség.

3.1 Feladat Tegyük fel, hogy két szabályos kockával dobva kaptunk hatost. Mi a valószínűség e, hogy az első kockán 6-os jött ki?

Megoldás. Legyen A az az esemény, hogy az első kockán 6-os jött ki, a B esemény pedig az, hogy kaptunk hatost. A kérdés $P(A|B)$, ami definíció szerint $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Mivel $P(B) = 1 - 25/36$ (a komplementer esemény éppen az, hogy mindkét dobás során az $\{1, 2, ..., 5\}$ számok valamelyike jön ki) és $P(A \cap B) = P(A) = 1/6$, ezért a keresett valószínűség $6/11$.

Hasonló jellegű a következő feladat is, első ránézésre még meglepőbb eredménnyel:

3.2 Feladat Tegyük fel, hogy két szabályos kockával dobva kaptunk hatost. Mi a valószínűsége, hogy mindkét kockán 6-os jött ki?

Megoldás. Legyen A az az esemény, hogy mindkét kockán 6-os jött ki, a B esemény pedig az, hogy kaptunk hatost. A kérdés $P(A|B)$, ami definíció szerint $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. $P(B) = 1 - 25/36$ az előző feladat alapján és $P(A \cap B) = P(A) = 1/36$, ezért a keresett valószínűség $1/11$.

Az eredmény azért tűnhet első pillantásra meglepőnek, mert logikusnak tűnik az $1/6$ válaszként, mondván, hogy ha az egyik hatos, akkor a másik ekkora valószínűséggel lesz szintén hatos. A baj csak ott van, hogy a feladat nem mondja meg, hogy melyik is a hatos, és ez eredményezi a lényeges különbséget.

3.3 Feladat Három különböző kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

Megoldás. Legyen A: egyikkel 6-ost dobunk; B: az összeg 12.
Írjuk össze az összes lehetséges esetet, amikor 3 kockadobás eredményének az összege 12:

12 felbontása	Esetek száma	Van-e 6-os
$6+5+1$	$3! = 6$	igen
$6+4+2$	$3! = 6$	igen
$6+3+3$	$\frac{3!}{2!} = 3$	igen
$5+5+2$	$\frac{3!}{2!} = 3$	nem
$5+4+3$	$3! = 6$	nem
$4+4+4$	1	nem
Összesen	25	

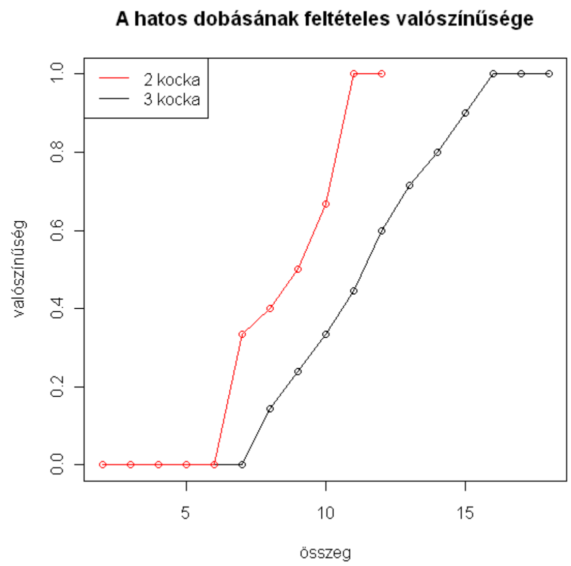
Tehát a jó esetek száma: $6 + 6 + 3 = 15$, az összes eset száma pedig 25, így a keresett $P(A|B)$ valószínűség 0,6.

A 3.1 ábra 2 és 3 kocka esetére is az összes lehetséges értékre mutatja a hasonlóképpen kiszámítható valószínűségeket.

3.1. Teljes valószínűség tétele

Sok esetben segít a feladatok megoldásánál, ha részekre bontjuk az eseményteret és külön-külön számolunk. Például más lehet egy betegség előfordulási gyakorisága a férfiakra, mint a nőkre. Ekkor a két rész: férfiak, illetve nők. Ezt az egyszerű megközelítést formalizálhatjuk a következőképpen:

3.1 Definíció Legyenek $A_1, ..., A_n$ események. Akkor mondjuk, hogy teljes eseményrendszert alkotnak, ha



3.1. ábra. Annak feltételes valószínűsége, hogy van 6-os dobás, különböző összegekre és kockaszámra (3.3 feladat)

1. páronként egymást kizárják;

2. egyesítésük az Ω (biztos esemény).

Azaz a teljes eseményrendszer a biztos esemény felbontását adja meg (az előző bekezdésben említetteknek megfelelően). Ezzel a felbontással és a teljes valószínűség tétele segítségével számos feladat megoldását megkaphatjuk. A Tétel a következőképpen szól.

3.1 Tétel *Legyen $A_1, ..., A_n$ teljes eseményrendszer, pozitív valószínűségű eseményekből. Ekkor $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + ... + P(B|A_n)P(A_n)$.*

Bizonyítás. A jobboldal definíció szerint $P(B \cap A_1) + ... + P(B \cap A_n)$ és ez a B esemény felbontása n diszjunkt részre, tehát a valószínűség additivitása miatt megegyezik $P(B)$-vel. $\square$

3.4 Feladat Egy betegség a fiataloknál 1%-os, a középkorúaknál 2%-os, míg az időseknél 10%-os valószínűséggel lép fel. A lakosság 30%-a fiatal, 50%-a középkorú és 20% pedig idős. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy beteg?

Megoldás. A teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + ... + P(B|A_3)P(A_3)$$

ahol $A_1, ..., A_3$ a három korcsoport. Innen

$$P(B) = \frac{1}{100} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{100} \cdot \frac{5}{10} + \frac{10}{100} \cdot \frac{2}{10} = \frac{33}{1000}.$$

3.5 Feladat Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 kockával kétszer dobva, mindkét esetben ugyanazt az eredményt kapjuk?

1. Ha a kockák megkülönböztethetőek,
2. ha a kockák nem különböztethetőek meg.

Megoldás.

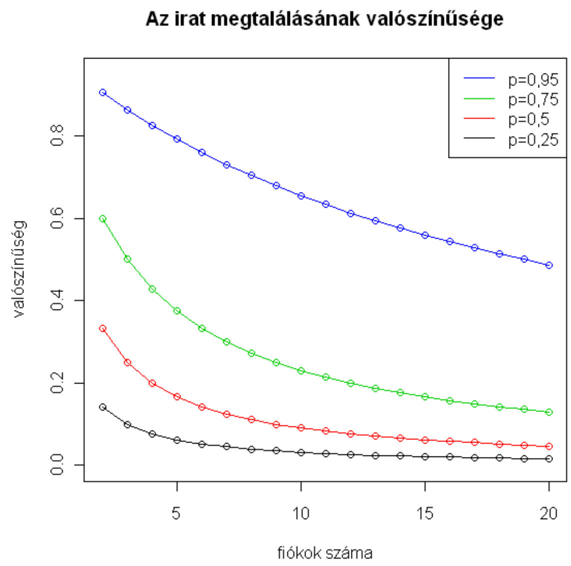
1. Ebben az esetben akármi is a dobás eredménye, a második dobásnál minden kockával pontosan azt kell dobjuk, mint elsőre. Ennek valószínűsége $1/6^3 = 1/216 = 0,0046$.
2. Itt viszont különböző eseteket kell megkülönböztetnünk.
   - Ha minden kockán ugyanaz jött ki (6 eset a 216-ból), akkor a második dobásnál ezt kockánként reprodukálnunk kell, ennek valószínűsége az előzőhöz hasonlóan $1/6^3 = 1/216$.
   - Ha két kockán azonos szám jött ki és a harmadik ettől eltérő ($6 \cdot 5 \cdot 3 = 90$ eset a 216-ból), akkor a második dobásnál háromféle eredmény adja számszerint ezt (ezek csak abban különböznek, hogy melyiken jött ki az a szám, amiből csak egyet dobtunk), ennek valószínűsége tehát $3/6^3 = 1/72$.
   - Ha minden kockán különböző szám jött ki ($6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ eset a 216-ból), akkor a második dobásnál hatféle eredmény is ugyanezeket a számokat adja, tehát a valószínűség itt $6/6^3 = 1/36$.

   A teljes valószínűség tételéből

   $$p = \frac{6}{216} \cdot \frac{1}{216} + \frac{90}{216} \cdot \frac{1}{72} + \frac{120}{216} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1 + 45 + 120}{216 \cdot 36} = \frac{166}{7776} = 0,0213$$

   ami értelemszerűen jóval nagyobb, mint az előző résznél kapott eredmény.

3.6 Feladat Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindultunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?



3.2. ábra. Az irat megtalálásának valószínűsége az utolsó fiókban különböző fiókszámokra és valószínűségekre (3.7 feladat, 3.2 kód)

Megoldás. Legyen A: egy adott időpillanatban kocsmában van; B_i: az i. kocsmában van $(i = 1, ..., 5)$. Így $P(A) = \frac{2}{3}$ és $P(B_i|A) = \frac{1}{5}$. Ebből $P(B_i) = P(B_i|A)P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$. A keresett valószínűség:

$$P(B_5|(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})) = \frac{P(B_5 \cap \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})}{P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4})} = \frac{P(B_5)}{P(\overline{B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4})} =$$

$$= \frac{P(B_5)}{1 - (P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4))} = \frac{\frac{2}{15}}{1 - 4 \cdot \frac{2}{15}} = \frac{2}{7}.$$

3.7 Feladat Egy fontos irat egyforma eséllyel lehet otthon és a munkahelyünkön. Utóbbi esetben az íróasztalunk kilenc fiókjában ugyanakkora eséllyel lehet. Már 8 fiókot átnéztünk, azokban nem volt. Mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó fiókban van?

Megoldás. A kérdés itt is egy feltételes valószínűség. Legyen A az az esemény, hogy az utolsó fiókban van az irat, B pedig az az esemény, hogy nincs az első 8 fiókban.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/18}{10/18} = 1/10.$$

A 3.2 ábrán a 3.7 feladat eredményét láthatjuk különböző fiókszámokra és annak p valószínűségére, hogy az irat a munkahelyünkön van. Látható, hogy ha kevesebb a fiók, akkor nagyobb a valószínűség, és értelemszerűen a nagyobb p-hez nagyobb valószínűség is tartozik.

3.2. A függetlenség szemléletes bevezetése

Az eddigiekben is többször alkalmaztuk a "szorzási szabályt", amely egymás utáni kísérleteknél a lehetséges esetszámok összeszorzódását mondja ki. A valószínűségeknél ez azt jelenti, hogy ezek is szorzatként állnak elő, mert mind a számlálóra, mind a nevezőre vonatkozik a szorzatszabály. Nézzünk erre egy egyszerű példát. Ha magyarkártyacsomagból húzunk 2 lapot, akkor a következő esélyeket írhatjuk fel a piros lap húzására: legyen A_1 az az esemény, hogy az első piros, A_2 pedig az, hogy a második piros. Ekkor $P(A_1) = P(A_2) = 8/32 = 1/4$.

Ha visszatevéssel húzunk, akkor a két piros húzására vonatkozó kedvező esetszámok $8 \cdot 8$, az összes esetszám pedig $32 \cdot 32$, azaz így $P(A_1 \cap A_2) = 1/16$.

A visszatevés nélküli esetben is működik a szorzatszabály, de akkor a második kísérlet már az elsőtől eltérő körülmények között valósul meg, ezért a két piros húzására vonatkozó kedvező esetszámok $8 \cdot 7$, az összes esetszám pedig $32 \cdot 31$, azaz így $P(A_1 \cap A_2) = 7/124$.

Az első esetben az adódott, hogy $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$, míg a másodikban $P(A_1 \cap A_2) < P(A_1) \cdot P(A_2)$ ($7/124 < 1/16 = 7/112$). A visszatevéses esetben az első húzásnak semmi hatása nincs a másodikra, tehát független a két esemény. A visszatevés nélküli esetben viszont ez nincsen így: ha először pirosat húztunk, akkor a második húzásnál már kevesebb lehetőségünk lesz ismét pirosat húzni.

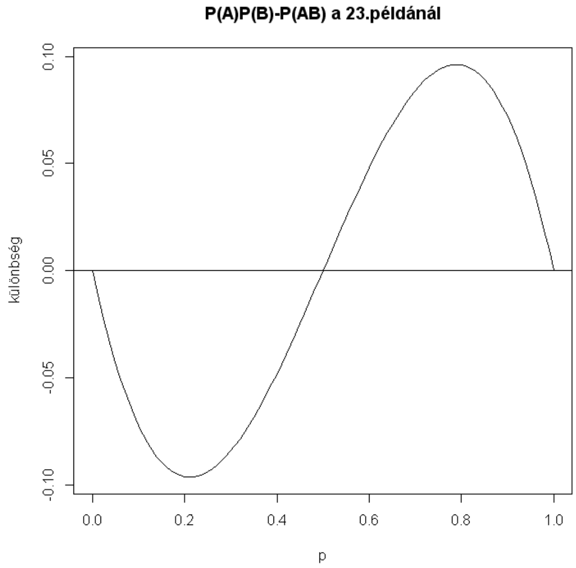
Ebből már adódik a definíció: Az A és a B esemény független, ha $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, ami éppen azt jelenti, hogy $P(A|B) = P(A)$ (ha a feltételes valószínűség értelmes, azaz $P(A) > 0$).

3.8 Feladat Egy hamisított érmével kétszer dobunk. A fejdobás valószínűsége p ($0 < p < 1$). Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B pedig az, hogy a két dobás eredménye különböző. Milyen p-re lesz az A és B esemény független?

Megoldás. $P(A) = p$, $P(B) = 2p(1-p)$. Az $A \cap B$ esemény azt jelenti, hogy az első dobás fej, a második pedig írás. Tehát $P(A \cap B) = p(1-p)$, amiből adódik, hogy a függetlenség feltétele $p \cdot 2p(1-p) = p(1-p)$, ami (a triviális $p = 0$ és $p = 1$ esetektől eltekintve) pontosan a $2p = 1$, azaz a $p = 1/2$ esetben teljesül.

A 3.3 ábra mutatja, hogy $0 < p < 1/2$ esetén $A \cap B$ a valószínűbb, míg ha $1/2 < p < 1$, akkor $P(A) \cdot P(B)$ a nagyobb.

3.9 Feladat Milyen $n > 1$-re lesz független



3.3. ábra. Az események összefüggőségének vizsgálata (3.8 feladat)

1. az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: legfeljebb egy írás van,

2. az a két esemény, hogy A: n érmedobásból van fej és írás is, valamint B: az első dobás fej.

Megoldás.

1.

$$P(A) = P(\text{ van fej és írás is}) = 1 - P(\text{csak az egyik van}) =$$
$$= 1 - 2P(\text{csak fej van}) = 1 - 2\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$P(B) = P(\text{legfeljebb 1 írás van}) = P(\text{pontosan 0 írás van}) + P(\text{pontosan 1 írás van}) =$$
$$= \frac{1}{2^n} + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n+1}{2^n}.$$

$$P(A \cap B) = P(\text{pontosan 1 írás van}) = \frac{n}{2^n}.$$

n-re megoldandó a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ egyenlet, amiből $n + 1 = 2^{n-1}$ lesz. Könnyen látható, hogy az egyenlőség csak $n = 3$ esetén lesz igaz.

2. P(A)$=1-\frac{1}{2^{n-1}}$, $P(B)=P(\text{az első fej})=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(\text{az első fej, a többiben van írás})\\ &= P(\text{az első fej}) - P(\text{az első fej és a többiben nincs írás}) =\\ &= \frac{1}{2} - (1 - P(n \text{ fej}) = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).\end{aligned}$$

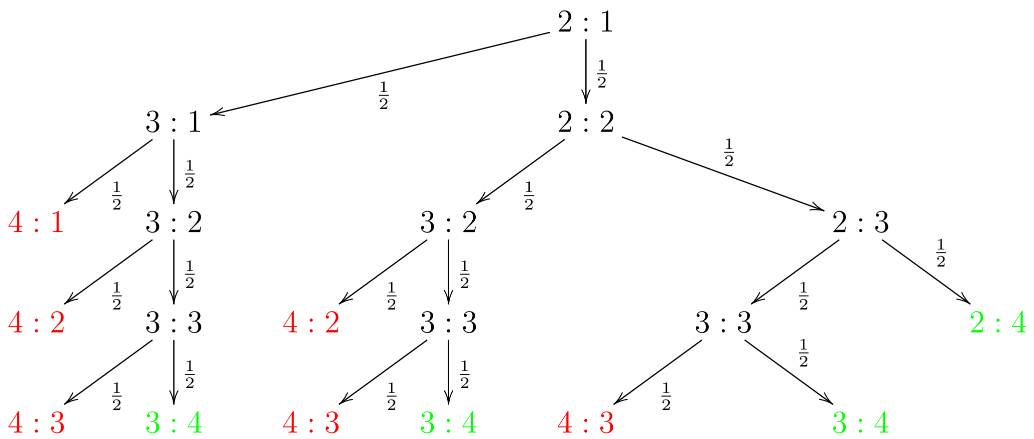
n-re megoldandó a $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ egyenlet, amiből

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

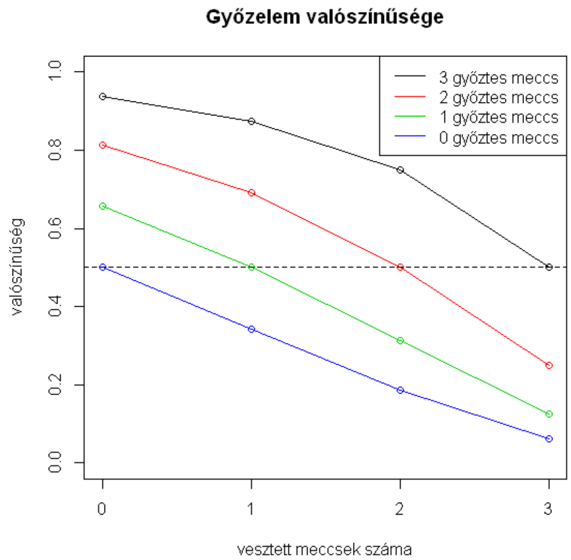
adódik, ez pedig azonosság $\Rightarrow$ minden $n>1$-re függetlenek.

3.10 Feladat Osztozkodási probléma: hogyan osztozzon a téten két játékos, ha 2 : 1 állásnál félbeszakadt a 4 győzelemig tartó mérkőzésük? (Tegyük fel, hogy az egyes játékok egymástól függetlenek, bármelyikük 1/2 valószínűséggel nyerhet az egyes játékoknál.)

Megoldás. A játék menetét gráffal is lehet ábrázolni. Piros jelöli azt az állást, amikor az első játékos nyer, és zöld, amikor a második. Akkor osztozkodnak "igazságosan", ha a tét annyiad részét kapja az adott játékos, amennyi a nyerési esélye.



Mivel az egyes mérkőzéseket egymástól függetlenül játsszák le, ezért a második játékos egy ágon további 3 játékból nyer ($p=\frac{1}{2^3}$), 3 ágon pedig további 4 játékból nyer ($p=\frac{3}{2^4}$). Azaz $P(\text{a második játékos nyer}) = 1\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$ és $P(\text{a második játékos nyer})=\frac{11}{16}$. Tehát úgy ossza fel a két játékos a tétet, hogy az első játékos kapja a tét $\frac{11}{16}$ részét, a második pedig a tét $\frac{5}{16}$ részét.



3.4. ábra. A végső győzelem valószínűsége egy 4 győzelemig tartó párosmérkőzésen, az aktuális állás függvényében, 3.10 példához, 11.10 kód

A 3.4 ábra azt mutatja meg, hogy az egyes állásokhoz milyen győzelmi valószínűségek tartoznak. Természetesen az egyenlő állásoknál ez 1/2. Például 3 : 0-nál közel 0,95 adódott az ábra alapjául szolgáló 100000 szimuláció alapján.

A következő feladat pedig a későbbiekben, például a nagy számok törvényénél (7.1 fejezet) fontossá váló gondolatot mutat be egyszerű formában.

3.11 Feladat Hányszor kell két kockát feldobnunk, hogy $p = 0,99$-nél nagyobb valószínűséggel legalább egyszer két hatost dobjunk?

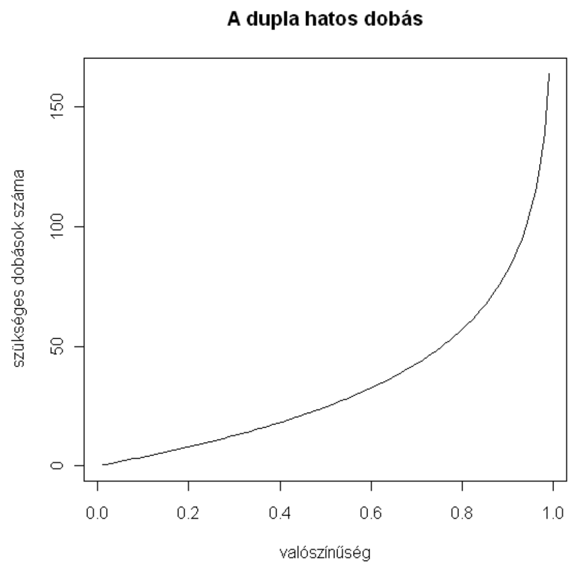
Megoldás.

$$0,99 < P(n \text{ dobásból legalább 1-szer dobunk 66-ot}) =$$
$$= 1 - P(n \text{ dobásból egyszer sem dobunk 66-ot}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n,$$

ezt átrendezve $n > 163,47$, azaz legalább 164-szer kell feldobni a két kockát. Az eredményt különböző p értékekhez a 3.5 ábra mutatja.

3.3. Bayes tétel

Gyakran nem elég a teljes valószínűség tétele szerinti felbontás, mert a kérdés ilyenkor is lehet feltételes valószínűség. Ekkor kombinálni kell a feltételes valószínűség definícióját



3.5. ábra. Kockadobások száma dupla hatoshoz, p függvényében, 3.11 példához, 11.11 kód

és a teljes valószínűség tételét. Az eredmény a nevezetes Bayes tétel:

3.2 Tétel *Legyen $A_1, ..., A_n$ teljes eseményrendszer, pozitív valószínűségű eseményekből és B egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor*

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + ... + P(B|A_n)P(A_n))}.$$

Bizonyítás. A jobboldal számlálója definíció szerint $P(A_1 \cap B)$, a nevező pedig a teljes valószínűség tétele értelmében $P(B)$. Ez pedig éppen a bizonyítandó állítást adja. □

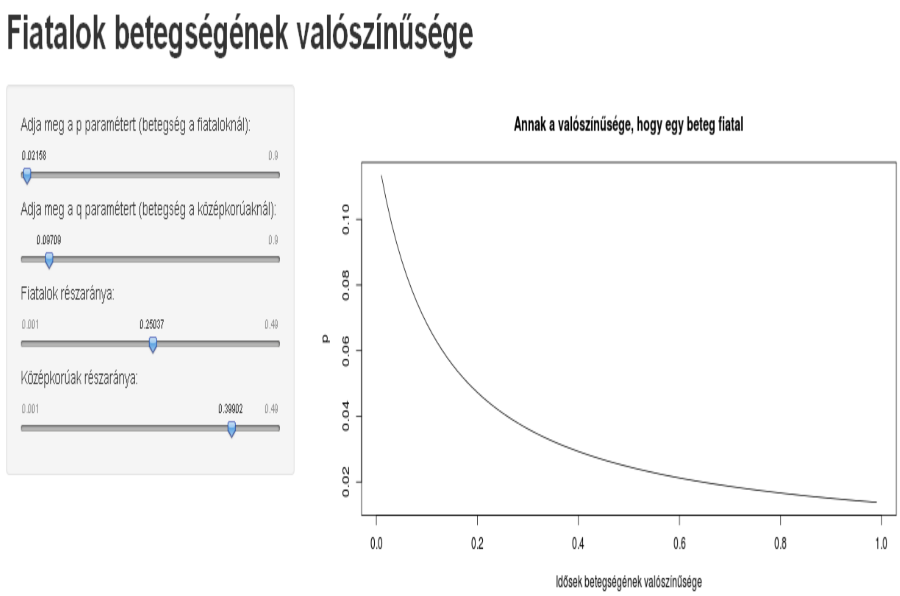
3.12 Feladat Egy betegség a fiataloknál 1%-os, a középkorúaknál 2%-os, míg az időseknél 10%-os valószínűséggel lép fel. A lakosság 30%-a fiatal, 50%-a középkorú és 20%-a idős. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott beteg fiatal?

Megoldás. A Bayes tétel értelmében (a 3.4 feladat jelöléseivel)

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + ... + P(B|A_3)P(A_3))}.$$

Tehát

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3/1000}{33/1000} = 1/11.$$



3.6. ábra. A (3.12) feladat valószínűségének függése az idősek megbetegedési valószínűségétől, az ábra baloldalán látható paraméterbeállítás mellett, 11.22 kód

A feladathoz készült interaktív animáció a http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_beteg/ címen található. Itt a felhasználó beállíthatja a betegség valószínűségét a fiataloknál és a középkorúaknál, valamint a fiatalok és középkorúak részarányát (ebből értelemszerűen következik az idősek részaránya: $r_i = 1 - r_f - r_k$. Az idősek megbetegedési valószínűségének függvényében megkapjuk a feladatban szereplő valószínűség értékét. A 3.6 egy screenshot az eredményről. További ábrák találhatóak a Függelékben: 11.1 és 11.2.

A 3.12 feladathoz hasonlóan oldható meg a következő feladat is:

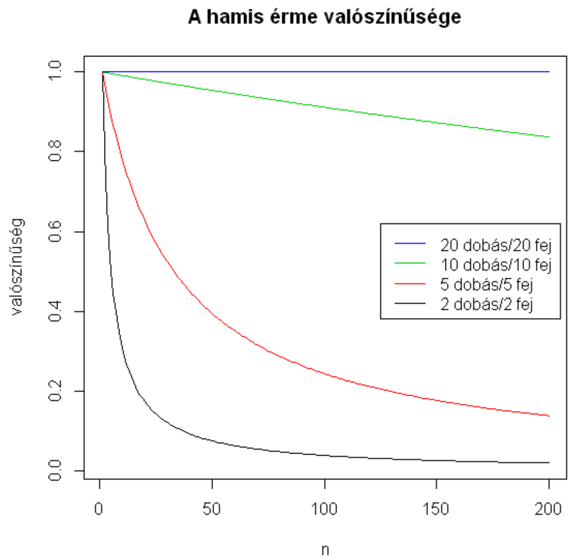
3.13 Feladat Tegyük fel, hogy $n = 100$ érme közül 1 hamis, ennek mindkét oldalán fej van. Egy érmét véletlenszerűen kiválasztottunk és ezt 10-szer feldobtuk. Az eredmény mind a 10 alkalommal fej lett. Mi a valószínűsége, hogy a kiválasztott érme hamis?

Megoldás. A Bayes tétel értelmében (legyen F a 10 fej dobás, A a jó, B pedig a hamis érme választása, ez kételemű teljes eseményrendszer)

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)P(B)}{P(F|B)P(B) + P(F|A)P(A))}.$$

Tehát a keresett valószínűség

$$P(B|F) = \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2^10} \cdot \frac{99}{100}} = 1024/1123.$$



3.7. ábra. A hamis érme választásának valószínűsége az érmék és a dobott fejek számának függvényében, a 3.13 példához, 11.12 kód

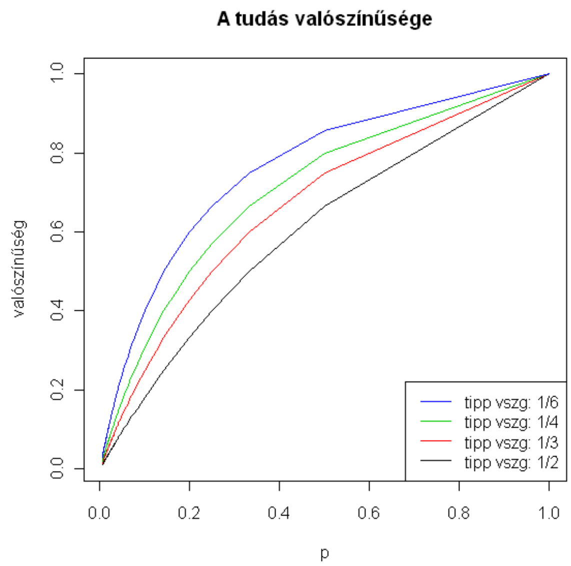
A 3.7 ábra a hamis érme választásának valószínűségét mutatja különböző érme- és dobásszámok esetén.

3.14 Feladat Egy diák a vizsgán p valószínűséggel tudja a helyes választ. Amennyiben nem tudja, akkor tippel, és 1/3 a jó válasz esélye. Feltesszük, hogy a diák tudása biztos (azaz ha tudja a választ, akkor az jó is). Határozzuk meg p értékét, ha 3/5 annak a valószínűsége, hogy amennyiben helyesen válaszolt, tudta is a helyes választ!

Megoldás. Legyen A: helyesen válaszolt; B_1: tudta a választ; B_2: nem tudta a választ.
P(B_1)=p P$(A|B_1)$=1
P(B_2)=$1-p$ P$(A|B_2)$=$\frac{1}{3}$
Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$\frac{3}{5} = P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{3} \cdot (1-p)} = \frac{3p}{2p+1}.$$

Ezt átrendezve, $p = \frac{1}{3}$. A 3.8 ábra mutatja a keresett valószínűséget a p és a tipp találati valószínűsége függvényében.



3.8. ábra. A válasz tudásának valószínűsége a tudás és a helyes tipp valószínűsége függvényében, a 3.14 példához, 11.13 kód

3.15 Feladat Vándorlásai közben Odüsszeusz egy hármas útelágazáshoz ér. Az egyik út Athénbe, a másik Spártába, a harmadik Mükénébe vezet. Az athéniek kereskedő népség, szeretik ámítani a látogatókat, csak minden 3. alkalommal mondanak igazat. A mükénéiek egy fokkal jobbak: ők csak minden második alkalommal hazudnak. A szigorú spártai neveltetésnek köszönhetően a spártaiak becsületesek, ők mindig igazat mondanak. Odüsszeusznak fogalma sincs, melyik út merre vezet, így feldob egy kockát, egyenlő esélyt adva mindegyik útnak. Megérkezve a városba, megkérdez egy embert, mennyi 2·2, mire közlik vele, hogy 4. Mi a valószínűsége, hogy Odüsszeusz Athénba jutott?

Megoldás. Legyen A: igazat mondanak; B_1: Athénba jutott; B_2: Spártába jutott; B_3: Mükénébe jutott.
P(B_1)=$\frac{1}{3}$ P($A|B_1$)=$\frac{1}{3}$
P(B_2)=$\frac{1}{3}$ P($A|B_2$)=1
P(B_3)=$\frac{1}{3}$ P($A|B_3$)=$\frac{1}{2}$
Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{2}{11}.$$

3.4. Valószínűségi változók

Sok esetben nem maga az Ω eseménytér, hanem valamilyen számszerű eredmény és az ezekhez kapcsolódó valószínűségek az igazán érdekes kérdések. Ez a megközelítés abból a szempontból is előnyös, hogy így az absztrakt eseménytér helyett a valós számok halmazán tudunk számolni. Formálisan az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt nevezzük valószínűségi változónak. Véges vagy megszámlálhatóan végtelen alaphalmazaink vannak, ezért nem is kell semmilyen feltétel a függvény tulajdonságairól.

A legegyszerűbb példa lehet egy kockadobás, ahol a kapott eredmény maga definiálja a valószínűségi változót. Eddig is kérdeztünk olyat, hogy mi a valószínűsége pl. a hatos dobásnak, ezt most formálisan úgy írhatjuk fel, hogy $P(X = 6) =?$ Ha az előző képletben a 6 helyett egy tetszőleges i értéket írunk és i végigfutja az összes lehetséges értéket 1-től 6-ig, akkor megkapjuk az X eloszlását (mivel $P(X = i)$ teljes eseményrendszert alkot, ezért a valószínűségeik összege 1). Ez most az $\{1, 2, \dots, 6\}$ számokon értelmezett egyenletes eloszlás: $P(X = i) = 1/6$.

Az előzőekben már látott mintavételi példák is természetszerűen leírhatók valószínűségi változókkal. Itt X a húzások során kapott selejtesek számát jelöli. Legyen a dobozban M selejtes és $N - M$ jó termék. A húzások száma pedig legyen n.

Ha visszatevéses a mintavétel, akkor

$$P(X = i) = \binom{n}{i} \frac{M^i (N - M)^{n-i}}{N^n}$$

$(i = 0, ..., n)$. Ezt nevezzük (n, p) paraméterű binomiális eloszlásnak. $p = M/N$ a selejtarány, és így a képlet a

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

alakra hozható. A binomiális tétel alapján azonnal adódik, hogy ez valóban valószínűségeloszlás:

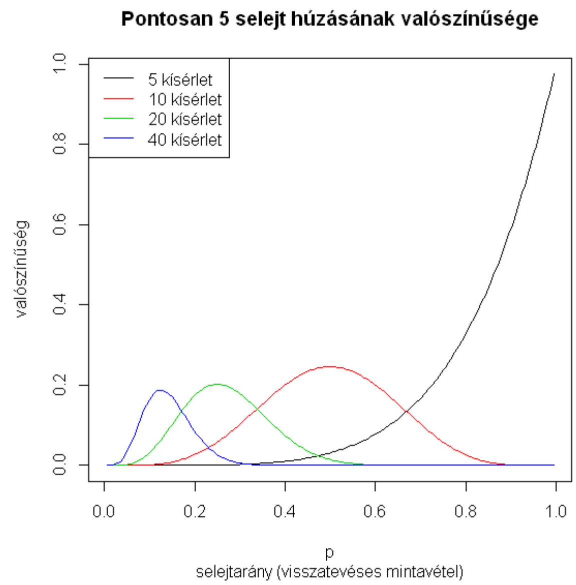
$$1 = (p + (1 - p)^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}.$$

A 3.9 ábra annak a valószínűségét mutatja meg p és n függvényében, hogy pontosan 5 sikeres kísérletünk legyen.

A visszatevés nélküli mintavételnél pedig

$$P(X = i) = \frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$$

$(i = 0, ..., n)$. Megjegyzendő, hogy a minta- és a sokaság elemszámától függően elképzelhető, hogy nem minden i érték jöhet ki pozitív valószínűséggel, de ezt a képlet jól



3.9. ábra. Pontosan 5 selejtes húzásának valószínűsége a kísérletek számának és a p-nek a függvényében, a visszatevéses mintavételnél 11.14 kód

tükrözi, például $i > M$ esetén 0 az eredmény. A kapott eloszlás a hipergeometrikus, (M, N, n) paraméterekkel. Ez is valószínűségeloszlás, hiszen ha i végigfutja az összes lehetőséget, akkor a számlálók összege pont kiadja az $\binom{N}{n}$ összes lehetőséget, amit aszerint bontottunk fel részekre, hogy hány selejtest választottunk az n elemű mintába.

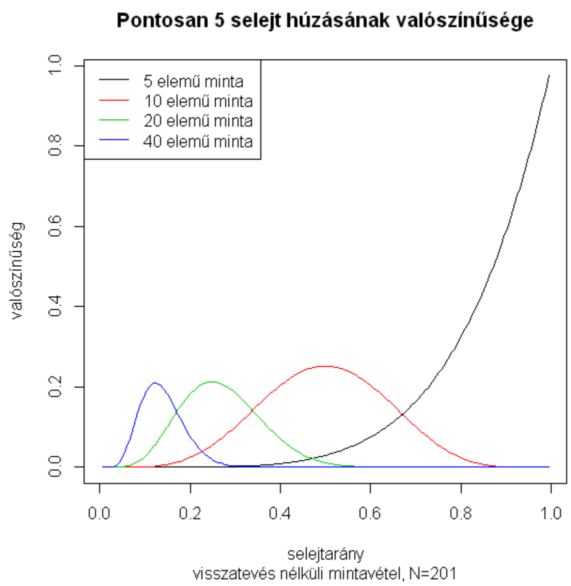
A 3.11 ábra együttesen mutatja a 3.9 és a 3.10 ábrákat. Jól látszik, hogy a visszatevés nélküli mintavételnél (azaz a hipergoeometriai eloszlásnál) valamivel nagyobb a maximális valószínűségek értéke, mert ezek koncentráltabb eloszlások - az azonos mintaelemek ismétlődő kézbevétele itt nem fordulhat elő és így az egyéb paraméterek azonossága esetén a várt (tipikus) értékek nagyobb valószínűséggel fordulnak elő.

3.16 Feladat Ha egy magyarkártya-csomagból visszatevés nélkül húzunk 3 lapot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy

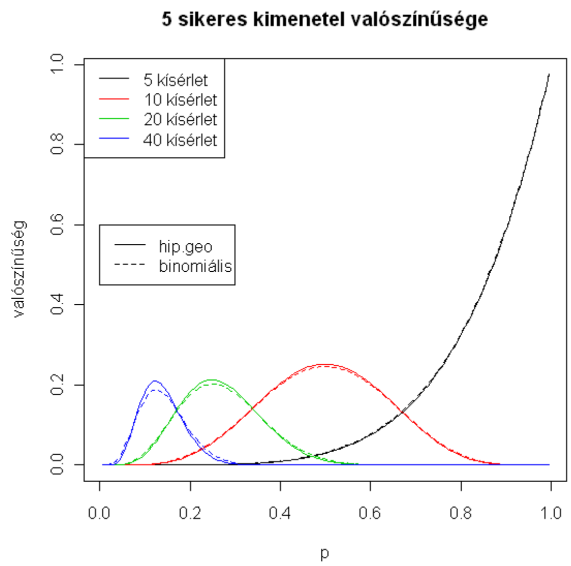
1. pontosan
2. legalább egy piros színű lapot húzunk?

És mi a helyzet visszatevéses esetben?

Megoldás. Oldjuk meg a mintavételes modell segítségével: $N = 32$ (összes lap), $M = 8$ (pirosak), $n = 3$.
Visszatevés nélkül:



3.10. ábra. Pontosan 5 selejtes termék húzásának valószínűsége a minta elemszámának és a sokaságban levő selejtesek számának a függvényében, N=201, 11.15 kód



3.11. ábra. A visszatevéses és a visszatevés nélküli mintavétel összehasonlítása, 11.16 kód

1.

$$\frac{\binom{8}{1}\binom{24}{2}}{\binom{32}{3}} = \frac{8*24*23*3}{32*31*30} = \frac{69}{155} = 0,44.$$

2.

$$P(\text{legalább 1 piros}) = 1 - P(0\text{ piros}) = 1 - \frac{\binom{8}{0}\binom{24}{3}}{\binom{32}{3} = 1 - \frac{24*23*22}{32*31*30} = 1 - \frac{253}{620}} = 0,59.$$

Visszatevéssel:

1. A "selejtarány"=8/32=1/4, így a keresett valószínűség: $\binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} = 0,42.$
2. $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0,58.$

Látható, hogy a kétféle mintavételi módszerrel kapott eredmény között nincs nagy eltérés, mert a minta nagysága kicsi a teljes sokaság elemszámához képest.

3.17 Feladat Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy egy lottóhúzásnál (90/5) a legnagyobb kihúzott szám k. Számítsuk ki a p_k értékeket, és mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségeloszlás!

Megoldás.

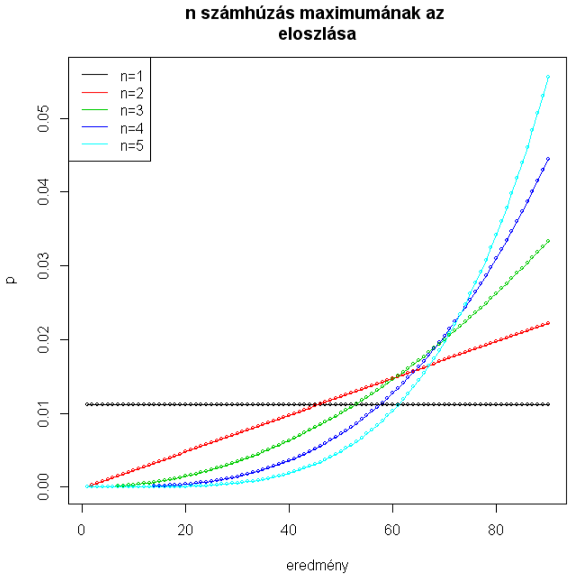
$$p_k = \frac{\binom{k}{5} - \binom{k-1}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}}, \quad k = 5, 6, \ldots, 90$$

ugyanis ki kell választanunk 5 számot az első k-ból, viszont nem k lesz a legnagyobb, amennyiben az első $k-1$- ből választottuk ki őket, így ezeket a rossz eseteket le kell vonni. (A végeredmény közvetlenül is indokolható: a k bent van a kihúzott számok között, a többi 4 szám pedig az $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ halmazból kell, hogy kikerüljön.) Ez valószínűségeloszlás, ugyanis

$$\sum_{k=5}^{90} p_k = \frac{\binom{5}{5} + (\binom{6}{5} - \binom{5}{5}) + (\binom{7}{5} - \binom{6}{5}) + \cdots + (\binom{90}{5} - \binom{89}{5})}{\binom{90}{5}} = \frac{\binom{90}{5}}{\binom{90}{5}} = 1.$$

A 3.12 ábrán azt láthatjuk, hogy különböző számú lottóhúzás esetén mi lesz az addig kihúzott legnagyobb szám eloszlása. A $k = 5$-höz tartozó eset éppen a 3.17 feladat eredményét mutatja.

3.18 Feladat Egy urnában K fehér és M fekete golyó van. Visszatevés nélkül kihúztunk n golyót, s ebből k lett fehér és $n-k$ fekete. Mi a valószínűsége, hogy az első húzás eredménye fehér golyó volt?



3.12. ábra. A kihúzott számok legnagyobbikának eloszlása $1, 2, 3, 4, 5$ lottóhúzás alapján a 3.17 példában

Megoldás. Legyenek A: az első húzás eredménye fehér; B: n kihúzott golyóból k fehér. Kiszámolandó a $P(A|B)$ valószínűség.

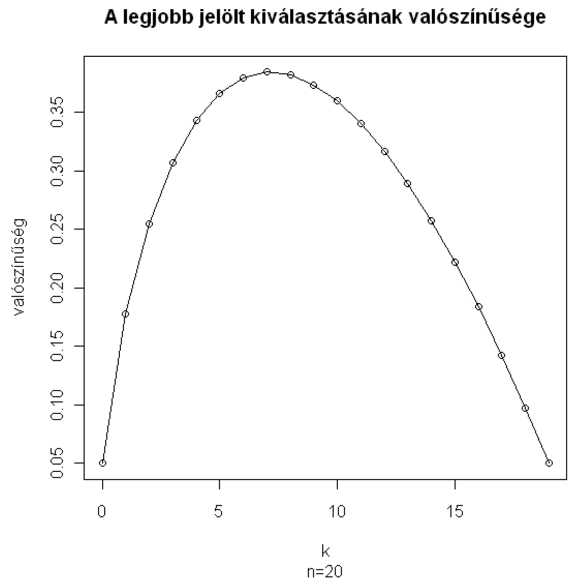
$$P(B) = \binom{n}{k} \cdot \frac{\frac{K!}{(K-k)!} \cdot \frac{M!}{(M-(n-k))!}}{\frac{(M+K)!}{(M+K-n)!}},$$

$$P(A \cap B) = K \cdot \binom{n-1}{k-1} \cdot \frac{\frac{(K-1)!}{(K-k)!} \cdot \frac{M!}{(M-(n-k))!}}{\frac{(M+K)!}{(M+K-n)!}},$$

ugyanis az első hely fehér, oda K darab golyót válaszhatunk, és a maradék minta $(n-1)$ elemű, ebbe kell választani $(k-1)$ fehéret és $(n-k)$ feketét, tehát

$$P(A|B) = \frac{K \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(K-1)!}{(K-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{K!}{(K-k)!}} = \frac{k}{n}.$$

3.19 Feladat Egy állásra n pályázó közül szeretnénk a legjobbat kiválasztani. A pályázók sorban bemutatkoznak, és a feltétel az, hogy rögtön kell döntenünk. Ha az a stratégiánk, hogy az első k pályázót biztosan nem alkalmazzuk, majd ezután az első olyat kiválasztjuk, aki mindegyik előzőnél jobb, akkor mi a valószínűsége, hogy a legjobb



3.13. ábra. A legjobb jelölt kiválasztásának valószínűsége különböző k értékekre a 3.19 példában, 11.17 kód

pályázót vesszük fel? Tegyük fel, hogy egyértelmű sorrend van a pályázók között, és hogy bármely sorrend egyformán valószínű.

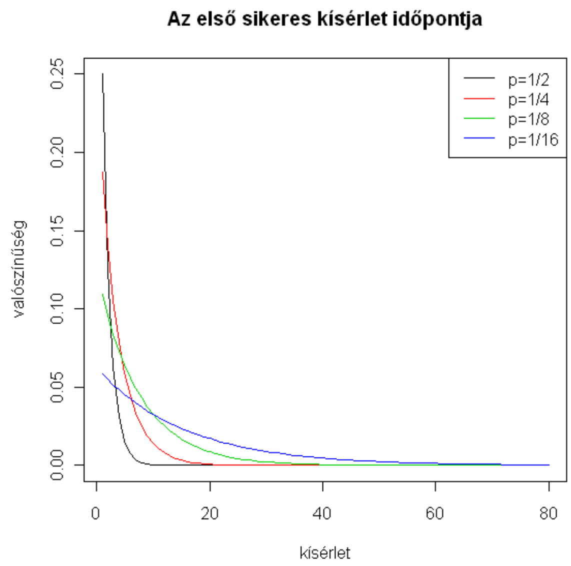
Megoldás. Tegyük fel, hogy a legjobb pályázó az m-edik helyen érkezik. Ha $m \leq k$, akkor nincs esélyünk a legjobbat kiválasztani. Egyébként pedig azon múlik a dolog, hogy a legjobb előtt érkezők legjobbika hányadik helyen jön. Ha az első k-ban, akkor nyert ügyünk van, viszont ha utána, akkor őt fogjuk választani, nem pedig a legjobbat. Ez alapján a keresett valószínűség

$$\frac{1}{n} \sum_{m=k+1}^{n} \frac{k}{m-1}.$$

Ha a fenti eredményt k-ban maximalizálni szeretnénk, akkor a $\sum_{m=k+1}^{n} \frac{k}{m-1} \sim \log(n-k)$ közelítést alkalmazva, $n \to \infty$-re a $k = n/e$ aszimptotikát kapjuk.

3.5. Végtelen kísérletsorozatok

Az eddigiekben véges sok lehetőségből kellett a kedvezőeket kiválasztani, illetve véges sokszor ismételtünk kísérleteket (esetleg különböző körülmények között). Ugyanakkor a gyakorlatban számos olyan kérdés is felmerül, amit a legcélszerűbben végtelen eseménytérrel írhatunk le. A matematikai axiomatizálás az úgynevezett Kolmogorov-féle



3.14. ábra. Az első sikeres kísérlet sorszámának eloszlása különböző p-re, 11.18 kód

valószínűségi mezővel adható meg. Ennek lényege, hogy az additivitás helyett az általánosabb, σ-additivitást követeljük meg: ha $A_1, ..., A_n, \ldots$ páronként egymást kizáró események, akkor

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + ... + P(A_n) + \ldots .$$

Ennek segítségével többek között a teljes valószínűség tételét végtelen sok eseményből álló teljes eseményrendszerre is átírhatjuk. Előbb azonban nézzünk egy példát. Tegyük fel, hogy egy érmével addig dobunk, míg először fejet nem kapunk. Könnyen látható, hogy annak a valószínűsége, hogy ez pont az i-edik kísérletnél következik be, $\frac{1}{2^i}$. Itt valójában végtelen kísérletsorozatot kell elképzelnünk, mert i értéke felülről nem korlátos. A gyakorlatban azonban ez nem jelent problémát, mert a kapott valószínűségi változó értéke 1 valószínűséggel véges. Ez általában is teljesül, akkor is, ha nem szabályos érmével dobunk. Jelölje p a fej dobásának valószínűségét, X pedig az első fej bekövetkezéséig szükséges dobások számát. X eloszlása: $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ $(k = 1, 2, ...)$. Itt lényeges annak ellenőrzése, hogy ezen valószínűségek összege 1, mert az $\{X = \infty\}$ esemény sem zárható ki. Mivel $\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1} = 1/(1-(1-p))$, ezért a véges k értékekhez tartozó valószínűségek összege 1 és így $P(X = \infty) = 0$.

A 3.14 ábra mutatja, hogy különböző p értékek esetén mekkora értékek előfordulására számíthatunk. Jól látszik, hogy minden esetben a legkisebb érték (az 1) a legvalószínűbb.

Ha nem az első, hanem az r-edik sikeres esemény időpontját keressük, akkor a következő eloszláshoz jutunk: $P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$ $(k = r, r+1, r+2, ...)$. Ezt nevezzük r-ed rendű negatív binomiális eloszlásnak.

Végül tekintsük azt az esetet , amikor a "kísérletek" száma nem is határozható meg egyértelműen. Hogyan modellezzük azt az X valószínűségi változót, ami azt adja meg, hogy...

1. ...hány hurrikán tör ki egy adott időszakban?
2. ...hány hiba van egy autó fényezésén?
3. ...hány baleset történik egy adott területen egy napon?

Ezek mind olyan kérdések, amelyeknél különbözőképpen felbontva a keresett tartományt (például az időszakot az 1. esetben) reális lehet a binomiális eloszlás alkalmazása. Itt az n az aktuális felbontás elemszáma, p pedig annak a valószínűsége, hogy az adott időszakban van hurrikán (ha elég sok részre bontjuk fel az alaphalmazt, akkor reális annak a feltételezése, hogy egy részen belül nem következhet be két esemény). A felbontás finomításával $n \to \infty$ és $p \to 0$. Belátható, hogy $np \to \lambda > 0$ esetén

$$P(X = k) \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \ (k = 0, 1, \dots).$$

A kapott eloszlás a λ paraméterű Poisson eloszlás. Az, hogy ez valóban eloszlás, a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$ összefüggésből adódik. A 3.15 ábra különböző paraméterértékek mellett mutatja a Poisson eloszlást. Látható, hogy mindig λ közelében van a legvalószínűbb érték. A modell általánosításával a 10. részben még találkozhatunk.

Ha már bevezettünk olyan eseteket, ahol végtelen sok kísérlettel is számolnunk kellett, akkor érdemes megemlíteni, hogy a teljes valószínűség tétele is kiterjeszthető végtelen sok elemű teljes eseményrendszerre. Legyen $A_1, ..., A_n, \dots$ teljes eseményrendszer, pozitív valószínűségű eseményekből. Ekkor $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + ... + P(B|A_n)P(A_n) + \dots$

Számos esetben tudjuk használni ezt az általánosabb felírást.

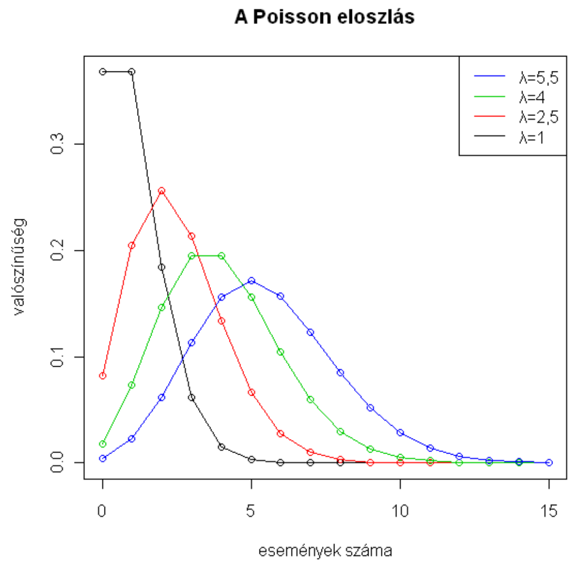
3.20 Feladat Annak a valószínűsége, hogy egy gyümölcsfán n virág van $p(1-p)^{n1}$ ($n \geq 1$) ez az előzőekben bevezetett, úgynevezett geometriai eloszlás). Minden egyes virágból a többitől függetlenül r valószínűséggel lesz gyümölcs. Mi a valószínűsége, hogy

1. pontosan k gyümölcs lett?
2. Ha pontosan k gyümölcs lett, akkor mi a valószínűsége, hogy m virág volt?

Megoldás. Legyen A_k a keresett esemény (hogy pontosan k gyümölcs lett), B_m pedig az az esemény, hogy m virág volt a fán.

1. A teljes valószínűség tétele értelmében

$$P(A_k) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_k|B_m)P(B_m).$$



3.15. ábra. A Poisson eloszlás különböző λ-ra, 11.19 kód

$P(A_k|B_m)$ nyilván 0, ha $m < k$, egyébként pedig a binomiális eloszlás alkalmazható a $P(A_k|B_m)$ kiszámítására (legyen először $k > 0$):

$$P(A_k) = \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} r^k (1-r)^{m-k} p(1-p)^{m-1}.$$

Itt alkalmazhatjuk, hogy a $k+1$-ed rendű és $(1-p)(1-r)$ paraméterű negatív binomiális eloszlás tagjainak összege 1, tehát az eredmény

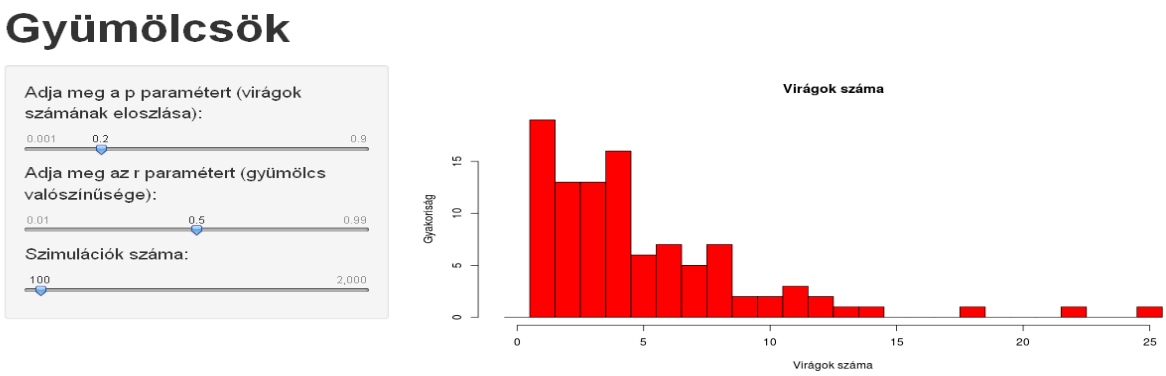
$$\frac{p(1-p)^{k-1} r^k}{(1-(1-r)(1-p))^{k+1}}.$$

A $k = 0$ esetet külön kell kezelni, mert a virágok száma legalább 1.

$$P(A_0) = \sum_{m=1}^{\infty} r^k (1-r)^m p(1-p)^{m-1} = \frac{p(1-r)}{(1-(1-r)(1-p))}.$$

2. A Bayes tétel értelmében ($m \geq k$-ra)

$$P(B_m|A_k) = \frac{P(A_k|B_m)P(B_m)}{\sum_{m=1}^{\infty} P(A_k|B_m)P(B_m)}.$$



3.16. ábra. A virágok számának szimulált eloszlása a (3.20) feladatnál, az ábra baloldalán látható paraméter és szimulációszám esetén,11.23 kód

Tehát a keresett valószínűség

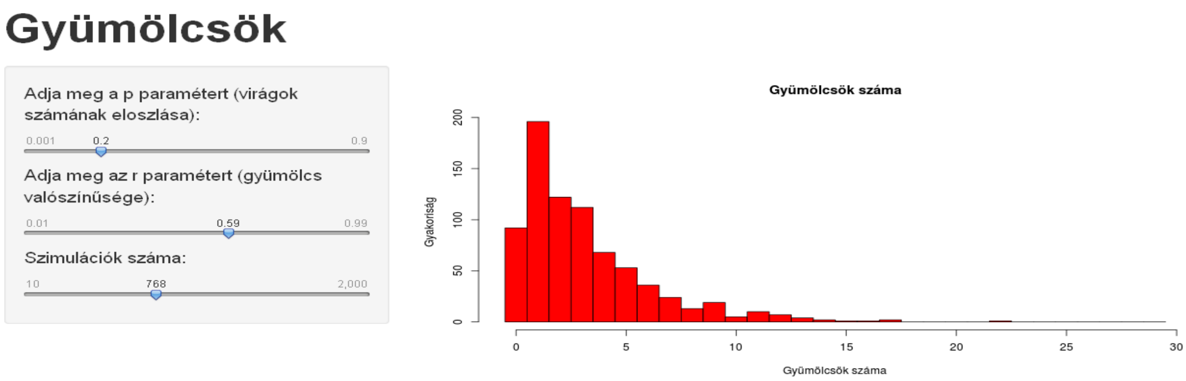
$$P(B_m|A_k) = \frac{(1-(1-r)(1-p))^{k+1}\binom{m}{k}r^k(1-r)^{m-k}p(1-p)^{m-1}}{p(1-p)^{k-1}r^k}$$

$$= \binom{m}{k}(1-(1-r)(1-p))^{k+1}\left[(1-p)(1-r)\right]^{m-k}.$$

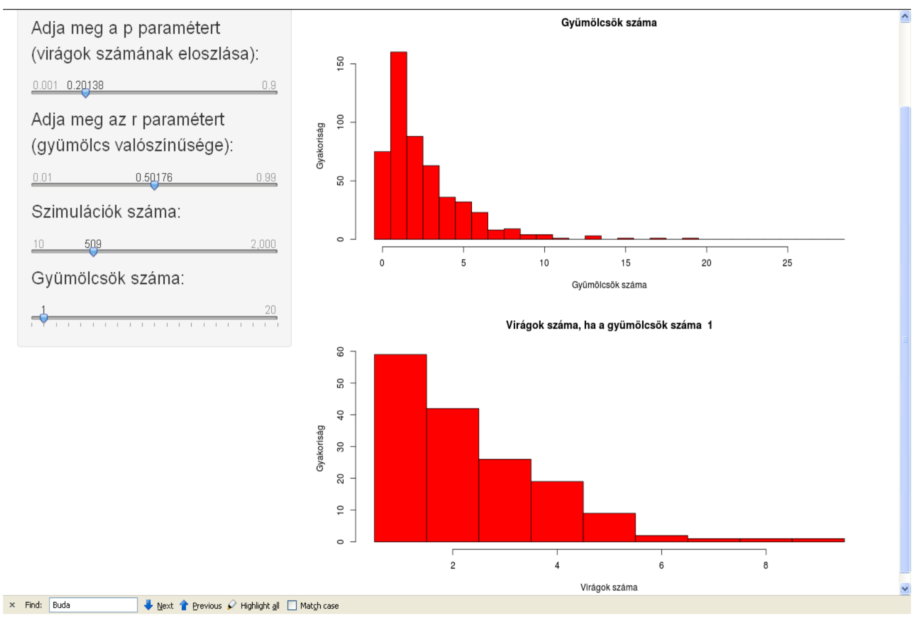
A feladat első részéhez készült interaktív animációk a http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_jovirag_a/ és a http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_jovirag_b/ címen található. Az elsőben a felhasználó beállíthatja a virágok számát meghatározó geometriai eloszlás paraméterét (p), a másodikban pedig annak r valószínűségét is, hogy egy virágból gyümölcs lesz, valamint a szimulációk számát. Eredményként egy-egy hisztogramot kapunk: a virágok számáról és a gyümölcsök számáról. A http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_jovirag/ anmációban pedig együttesen is megnézhetjük az ábrákat. A 3.16 és 3.17 ábra egy-egy screenshot az eredményről. További (összevont) ábrák találhatóak a Függelékben: 11.3, 11.4 és 11.5.

A feladat második részéhez készült interaktív animáció pedig a http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_jovirag2/ címen található. Itt az előzőeken kívül még azt is meg kell adni, hogy hány gyümölcs is lett. Eredményként két hisztogramot kapunk: a gyümölcsök számáról és a kiválasztott gyümölcsszámhoz tartozó virágszám-eloszlásról. A 3.18 ábra egy screenshot az eredményről.

3.21 Feladat Legyenek A, B, C, D egy szabályos tetraéder csúcsai. Egy légy az A csúcsból indulva sétál a tetraéder élein, mégpedig minden csúcsból véletlenszerűen választva a lehetséges három irány közül. Jelölje X azt a valószínűségi változót, hogy A-ból indulva, hányadikra ér vissza először A-ba.Számítsuk ki a $P(X = n)$ valószínűséget! Mutassuk meg, hogy ez valóban valószínűségeloszlás!



3.17. ábra. A gyümölcsök számának szimulált eloszlása a (3.20) feladatnál, az ábra baloldalán látható paraméterek és szimulációszám esetén,11.23 kód



3.18. ábra. A gyümölcsszám és a kiválasztott gyümölcsszámhoz tartozó virágszám-eloszlás szimulációja a (3.20) feladatnál, az ábra baloldalán látható paraméterek és szimulációszám esetén 11.24 kód

Megoldás. Írjuk fel a megoldást a valószínűség klasszikus képlete alapján:

$$P(X=k) = \frac{3 \cdot 2^{k-2} \cdot 1}{3^k} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \quad (k = 2, 3, ...),$$

ugyanis

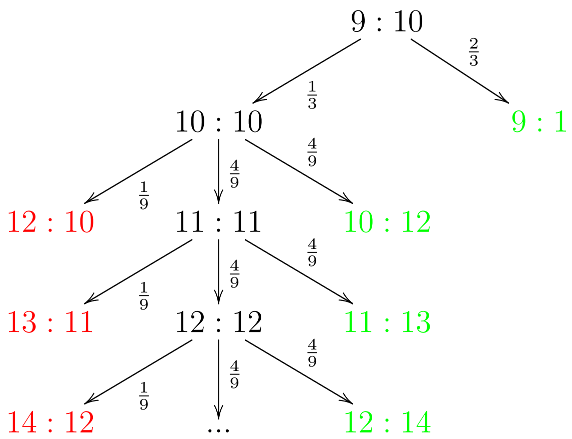
- legalább 2 lépésre van szükség, hogy visszaérjünk A-ba
- minden lépésben összesen 3 irányba haladhatunk, így az összes eset 3^k
- jó lépések: elsőként 3 helyre mehetünk, utána $(k-2)$ alkalommal 2 helyre, végül vissza kell lépni A-ba

Ez valószínűségeloszlás, mivel

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X=k) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

3.22 Feladat Aladár és Béla pingpongoznak. Minden labdamenetet egymástól függetlenül, 1/3 valószínűséggel Aladár, 2/3 valószínűséggel Béla nyer meg. A jelenlegi állás 10 : 9 Béla javára. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a játszmát mégis Aladár nyeri meg? (Az nyer, akinek sikerül legalább két pontos előny mellett legalább 11 pontot szerezni.)

Megoldás. Az ábra mutatja a játék lehetséges kimeneteleit, Aladár:Béla sorrendben. A piros kimenetek azt mutatják, amikor Aladár nyert, a zöld azt, amikor Béla.



Az egyes labdamenetek egymástól függetlenek, így

$$P(\text{Aladár nyer}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+... = \frac{1}{27}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{1}{15}.$$

Matematikailag az egyik legfontosabb kérdés a véletlen jelenségek aszimptotikájának vizsgálata, amihez végtelen sok kísérletet is tudnunk kell vizsgálni. A leggyakoribb modell, amit használunk, a független kísérletsorozat. Itt minden n-re alkalmazható a szorzat-szabály.

3.23 Feladat Legyenek az A_1, A_2 és A_3 egymást kizáró események, melyek a $\mathrm{P}(A_1)=p_1$, $\mathrm{P}(A_2)=p_2$ és $\mathrm{P}(A_3)=p_3$ valószínűségekkel következnek be. Mennyi a valószínűsége, hogy n független kísérletet végezve, a kísérletek során az A_2 előbb következik be, mint az A_1 vagy az A_3? Számítsuk ki e valószínűség határértékét, ha a kísérletek száma a végtelenhez tart!

Megoldás. Legyen B_i: az i. kísérletnél A_2 bekövetkezik; C_i: az i. kísérletnél egyik se következik be. Ekkor $\mathrm{P}(B_i)=p_2$ és $\mathrm{P}(C_i)=1-p_1-p_2-p_3 =: q$. Fel fogjuk használni, hogy a C_i és a B_{i+1} események függetlenek egymástól. Írjuk fel a keresett eseményt A_2 első bekövetkezése szerint:

$$\begin{aligned}
&P(A_2 \text{ előbb következik be, mint } A_1 \text{ vagy } A_3) = \\
=&P(B_1 \cup (C_1\cap B_2)\cup(C_1\cap C_2\cap B_3)\cup ...\cup(C_1\cap ...\cap C_{n-1}\cap B_n)\cup ...) = \\
=&P(B_1)+P(C_1)P(B_2)+P(C_1)P(C_2)P(B_3)+...+P(C_1)\cdot ...\cdot P(C_{n-1})P(B_n)+... = \\
&p_2+qp_2+q^2p_2+...+q^{n-1}p_2+... = \frac{p_2}{1-q} = \frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}.
\end{aligned}$$

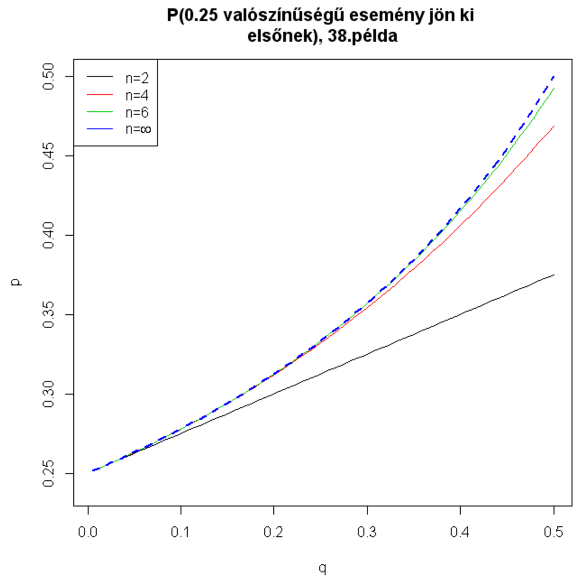
A 3.19 ábrán azt látjuk, hogy a 3.23 feladatnál milyen gyorsan konvergál a valószínűség a határértékéhez. Már 6 kísérlet esetén is igen jó a közelítés.

Végül következzék egy érdekes és nem is könnyű feladat az aszimptotika témaköréből.[1]

3.24 Feladat Tegyük fel, hogy egy dobozba 12 óra előtt $1/2^n$ perccel beletesszük a $10(n-1)+1, 10(n-1)+2, \dots, 10n$ sorszámú golyókat ($n = 1, 2, \dots$) és

1. ugyanekkor ki is vesszük a $10n$ sorszámú golyót
2. ugyanekkor kivesszük az n sorszámú golyót
3. ugyanekkor kiveszünk egy véletlenszerűen választott golyót.

[1] Forrás: Ross, [6]



3.19. ábra. Az első sikeres kísérlet sorszámának eloszlása különböző p-re

Mennyi golyó lesz a dobozban pontban 12 órakor?

Megoldás.

1. Ez még könnyű, hiszen csak a 10-zel osztható sorszámú golyókat vesszük ki, a többi bent marad - tehát délben nyilván végtelen sok golyó lesz a dobozban.

2. Ez pedig meglepő: tekintsünk a k sorszámú golyót. Mivel őt kivesszük $1/2^k$ perccel dél előtt, ezért délben már nem lesz a dobozban. És mivel ez az érvelés tetszőleges sorszámra elmondható, ezzel beláttuk, hogy a doboz üres lesz délben.

3. Itt pedig ízelítőt kapunk a valószínűségszámításban gyakori becsléses módszerből és egyúttal bemutatjuk, hogy miképpen lehet végtelen sok eseménnyel számolni. Tekintsünk egy golyót, amit a k. csoportban tettünk be a dobozba. Annak a valószínűsége, hogy ez $1/2^n$ perccel dél előtt bent van a dobozban ($n > k$):

$$\left(1 - \frac{1}{9k+1}\right)\left(1 - \frac{1}{9(k+1)+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{9(n-k+1)+1}\right).$$

Azt állítjuk, hogy ez 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Ezzel ekvivalens állítás, hogy a fenti szorzat reciproka végtelenhez tart.

$$\frac{9k+1}{9k} \cdot \frac{9(k+1)+1}{9(k+1)} \cdot \dots \cdot \frac{9(n-k+1)+1}{9(n-k+1)} \geq$$
$$\left(1+\frac{1}{9k}\right)\left(1+\frac{1}{9(k+1)}\right)\dots\left(1+\frac{1}{9(n-k+1)}\right) >$$
$$\frac{1}{9k}+\frac{1}{9(k+1)}+\dots+\frac{1}{9(n-k+1)}.$$

Ez utóbbi pedig a számok reciprokainak részletösszegének kilenced része. Mivel ez a sor divergens, a mi összegünk is végtelenhez tart, ha $n \to \infty$. Tehát bármely szám 0-hoz tartó valószínűséggel marad bent a dobozban. Mivel a valószínűség folytonos, ezért ebből következik, hogy bármely szám 0 valószínűséggel lesz délben a dobozban. Ebből viszont

$$P(\bigcup \text{az } i. \text{ golyó bent van délben}) \leq \sum P(\text{az } i.\text{golyó bent van délben}) = 0.$$

3.6. Gyakorló feladatok

1. Egy kockával (amelyik nem feltétlenül szabályos) kétszer dobunk. A hatos dobás esélyét jelölje p $(0 < p < 1)$. Legyen A az az esemény, hogy a második dobás hatos, B pedig az az esemény, hogy pontosan egy hatos van a két dobás között. Milyen p-re lesz az A és a B esemény független?

2. Egy városban ugyanannyi férfi él mint nő. Minden 100 férfi közül 5 és minden 10000 nő közül 25 színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy a színvakokról vezetett nyilvántartásból egy találomra kiválasztott karton férfi adatait tartalmazza?

3. Egy dobókockával addig dobunk, amíg valamelyik korábban dobott szám újra előfordul. Mekkora az esélye annak, hogy hármat dobtunk?

4. Egy szabálytalan érmével (fej valószínűsége 2/3) addig dobunk, amíg először fordul az elő, hogy a dobott fejek száma pontosan kettővel haladja meg a dobott írások számát. Mennyi az esélye, hogy 6-ot kellett dobnunk?

5. Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány hatost dob egymás után egy dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha egy lövésnél erre 1/1000 az esély?

6. Száz kocka közül 99 szabályos, egy pedig szabálytalan, ennek mindegyik oldalán 6-os van. Találomra választunk egy kockát a százból, majd a kiválasztott kockával háromszor dobunk. Mindhárom dobás eredménye hatos. Mekkora az esélye, hogy a szabálytalan kockával dobtunk?

7. Két kockadobásból az első eredményét jelöljük X-szel, a másodikét Y-nal. A következő eseményeket vizsgáljuk:

   (a) 2 osztója X-nek, 3 osztója Y-nak.

   (b) 2 osztója Y-nak, 3 osztója X-nek.

   (c) Y osztója X-nek.

   (d) X osztója Y-nak,

   (e) 2 osztója $X+Y$-nak,

   (f) 3 osztója $X+Y$-nak.

   Melyek lesznek közülük függetlenek?

8. 3 kockával dobunk, Y jelöli a dobott számok közül a legnagyobbat. $P(Y = 4) = ?$

9. Mi a valószínűsége, hogy egy hatgyermekes családban 3 fiú és 3 lány van? (Tegyük fel, hogy mindig $1/2 - 1/2$ a fiúk, ill. a lányok születési valószínűsége).

10. Mi az esélye annak, hogy a 90/5-ös lottónál a lottószámokat sorbarendezve a k. szám éppen l-lel egyenlő?

11. Ha visszatevéssel húzunk n-szer abból a sokaságból, ahol a selejtarány p, akkor mely selejtszám lesz a legvalószínűbb?

12. 2 érmével dobunk, majd még annyi érmével, ahány fejet az első két érmével kaptunk. Jelölje X az összesen kapott fejek számát. $P(X = k) = ?$

13. Két doboz közül az elsőben k db fehér és m db piros, a másodikban m db fehér és k db piros golyó van. Visszatevéssel húzunk az alábbi szabály szerint: ha a kihúzott golyó fehér, akkor a következő húzásnál az első dobozt, ha piros, akkor pedig a második dobozt használjuk. (Az első golyót az első dobozból húzzuk.) Mi a valószínűsége, hogy az n-edik húzásnál fehér golyót húzunk? Mihez tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$?

14. Egy játékos annyiszor lőhet egy léggömbre, ahány 6-ost dobott egymás után egy dobókockával (például, ha elsőre 6-ost, másodikra 2-est dob, akkor egyszer lőhet). Mennyi a valószínűsége, hogy szétlövi a léggömböt, ha egy lövésnél 1/1000 valószínűséggel talál?

15. Jelölje X, hogy egy szabálytalan érmével dobva (p a fej valószínűsége), hányadik dobásnál lesz először két egymás utáni dobás azonos. Adjuk meg X eloszlását.

16. Addig dobunk két kockával, amíg kétszer elő nem fordul az, hogy a két kockán lévő számjegyek összege 10.
    (a) Mennyi a valószínűsége, hogy összesen nyolcszor dobunk?
    (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan nyolcszor dobunk 10-nél kisebb összeget, mielőtt a keresett esemény bekövetkezik?

17. Egy célba lövünk addig, míg el nem találjuk, de legfeljebb háromszor. Az első lövésünk 60% eséllyel talál, de utána ügyesedünk és, így a másodszorra már 70%, harmadszorra pedig 80% a találati valószínűségünk. Mi a valószínűsége, hogy
    (a) 3 lövésből sem találjuk el a célt?
    (b) a 3. lövéssel találjuk el?
    (c) nem találjuk el, feltéve, hogy az első lövést elhibáztuk?

18. Egy szabálytalan érmével dobunk (p a fej valószínűsége). Jelölje X az első, azonosakból álló sorozat hosszát,Y pedig a második, azonosakból álló sorozat hosszát. Tehát például, ha a dobássorozat FFIIIF, akkor $X = 2$ és $Y = 3$ (1 hosszú "sorozat" is lehetséges.) Adjuk meg X, illetve Y eloszlását.

19. Három egyformán erős teniszjátékos: A, B és C játszik mérkőzéseket. A és B kezd, majd a győztes játszik C-vel, és így tovább, mindaddig, amíg valaki kétszer egymás után nyer és így megnyeri az egész meccset. Tegyük fel, hogy bármely mérkőzést bármely játékos a többi mérkőzéstől függetlenül $1/2$ valószínűséggel nyer meg. Mennyi a valószínűsége, hogy A, B ill. C nyeri meg a meccset?

4. fejezet

A kísérletek jellemzői: középértékek, ingadozás, várható érték, szórás

Kísérletsorozatok eredményeinek összefoglalása gyakori feladat. Gondoljunk csak arra, hogy mennyi adat keletkezik a legkülönbözőbb kísérletek során nap-mint nap és hogy ezek lényegének rögzítése nélkül teljesen áttekinthetetlenek lennének az eredmények. Tekintsük például a nap mint nap látott, hallott időjárás-jelentést! Ez az adott időszakra várt (gyakran éppen véletlen szimulációval vizsgált) kimenetelek összefoglalása. Szerepel benne a legalacsonyabb, illetve legmagasabb hőmérséklet-érték, gyakran az átlagos csapadékmennyiség és szélsebesség is. Tehát egyszerre az ingadozás egy lehetséges mérőszáma és a középértékek is szerepelnek benne. Kezdjük a vizsgálatainkat a középértékekkel.

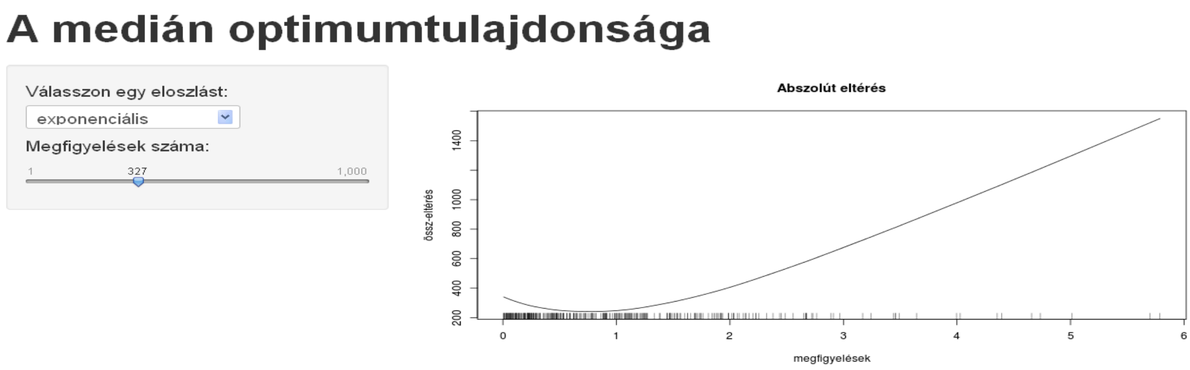
4.1. Középértékek

A mért adatok legfontosabb középértékei az átlag (számtani közép) és a medián (a nagyság szerint sorbarendezett értékek közül a középső. Páros sok megfigyelés esetén ez nem egyértelmű, ilyenkor a két középső érték átlagával szokták definiálni.)

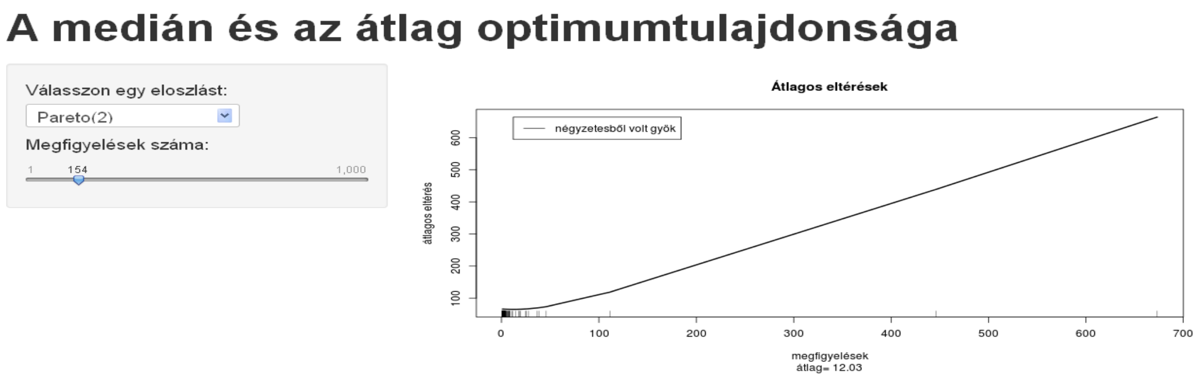
Érdemes megjegyezni, hogy bár az átlag sok eloszlás esetén optimális statisztikai tulajdonságú, ha kiugró értékek is vannak az adataink között, megbízhatatlan mérőszámmá is válhat. Ezt úgy mondjuk, hogy az átlag érzékeny a kiugró értékekre. A mediánt viszont nem befolyásolják ezek az értékek, ezért ajánlható az alkalmazása, ha számítani lehet (esetleg kevésbé megbízható) kiugró értékekre.

Mind a két középérték rendelkezik optimum-tulajdonsággal: az átlag a minimumhelye a $\min_a\{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2\}$ szélsőérték-feladatnak, a medián pedig a $\min_a\{\sum_{i=1}^n |x_i - a|\}$ szélsőérték-feladatnak.

Ennek illusztrálását interaktív animáció formájában a `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_median_a/` és a `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_median_b/` weblapon találhatjuk. Egy-egy screenshot a 4.1 és 4.2 ábra. További ábrák pedig a függelékben találhatóak: 11.6, 11.7 és 11.8. Jól látható, hogy mennyire eltérő az optimumok értéke az egyes eloszlásokra. A `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_median/` animáció pedig egy ábrában mutatja a kétfajta veszteségfüggvényt és a két optimumot.



4.1. ábra. A medián optimumtulajdonsága az ábra baloldalán látható eloszlásra és mintanagyságra

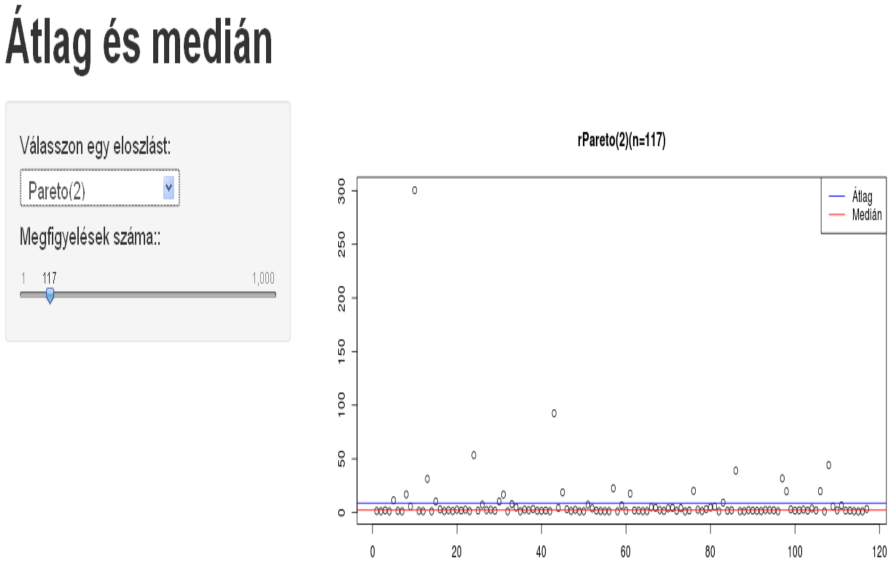


4.2. ábra. Az átlag optimumtulajdonsága az ábra baloldalán látható eloszlásra és mintanagyságra

Ha nem adatok, hanem az eloszlás alapján szeretnénk mondani valamit a jövőbeni értékek középértékéről, akkor célszerű bevezetni az átlag elméleti megfelelőjét, az úgynevezett várható értéket $E(X)$. Ez a most vizsgált esetekben egyszerűen a lehetséges értékeknek a hozzájuk tartozó valószínűséggel vett súlyozott összegeként kapható meg:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i),$$

azaz az átlag úgy is felfogható, mint a tapasztalati eloszlás – ez minden megfigyeléshez $1/n$ valószínűséget rendel – várható értéke. A medián elméleti értéke pedig definiálható



4.3. ábra. Az átlag és a medián összehasonlítása az ábra baloldalán látható eloszlásra és szimulációszámra, 11.25 kód

úgy, mint

$$\inf\{x \in \mathbb{R} : P(X < x) \geq 1/2\}.$$

A nevezetes eloszlások várható értékét gyakorlatilag minden tankönyv levezeti, ezért itt csak hivatkozunk ezekre az eredményekre:

Az (n, p) paraméterű binomiális eloszlás várható értéke np.

A λ paraméterű Poisson eloszlás várható értéke λ.

A p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke $1/p$.

Néhány folytonos eloszlásból származó minta átlagát és mediánját hasonlíthatjuk össze a `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_mean/` lapon található interaktív szimuláció segítségével. Itt kiválaszthatjuk az eloszlást (normális, exponenciális vagy 2 paraméterű Pareto) és megadhatjuk a szimuláció-számot. (Az eloszlások definícióját a 5. részben adjuk meg.) A 4.3 ábra egy screenshot a szimulációból. A folytonos eloszlások várható értékét a 5.2 fejezetben fogjuk definiálni.

Gyakran használható a várható érték azon fontos tulajdonsága, hogy $X = X_1 + ... + X_n$ esetén (ha léteznek a valószínűségi változók várható értékei) $E(X) = E(X_1) + ... + E(X_n)$.

4.1 Feladat Egy betegség a fiataloknál 1%-os, a középkorúaknál 2%-os, míg az időseknél 10%-os valószínűséggel lép fel. A lakosság 30%-a fiatal és 50%-a középkorú. Ezer véletlenszerűen kiválasztott személy közül mennyi lesz a betegek számának várható értéke?

Megoldás. A 3.4 feladatban láttuk, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy 33/1000 valószínűséggel beteg. A betegek száma $X = X_1 + ... + X_{1000}$, ahol X_i annak az eseménynek az indikátora, hogy az i-edik személy beteg (azaz X_i ekkor 1, egyébként pedig 0). Az előzőekben látott additivitás miatt $E(X) = 1000E(X_i)$ és mivel $E(X_i) = P(X_i = 1) = 33/1000$, így a végeredmény $E(X) = 33$.

4.2 Feladat Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000Ft-os, 10 db 100 000Ft-os, és 100 db1 000Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adtak ki. Mennyi a sorsjegy ára, ha egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke megegyezik a sorsjegy árával?

Megoldás. Most is az additivitást használhatjuk. Az összes sorsjegyen kiosztott össznyeremény $2,1$ millió Ft. Feltételezhetjük, hogy minden sorsjegy ugyanakkora eséllyel nyer, tehát az egy szelvényre eső várható nyeremény 210 Ft.

4.3 Feladat Tegyük fel, hogy egy dobozban van $2N$ kártyalap, melyek közül kettőn 1-es, kettőn 2-es szám van és így tovább. Válasszunk ki véletlenszerűen m lapot. Várhatóan hány pár marad a dobozban?

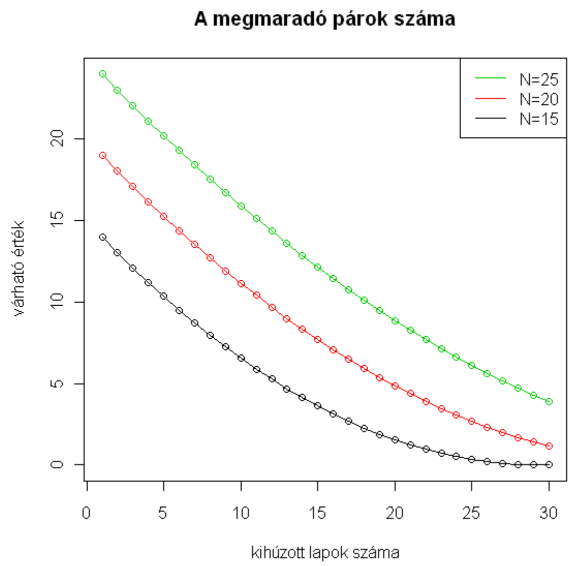
Ez a feladat még Bernoullitól származik, eredetileg N párból m haláleset után megmaradó házasságok számát modellezte ezen a módon. **Megoldás.** Most is az additivitást használhatjuk. Legyen X_i annak az eseménynek az indikátora, hogy az i-edik pár bent maradt a dobozban (azaz X_i ekkor 1, egyébként pedig 0).

$$\begin{aligned} E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{\binom{2N-2}{m}}{\binom{2N-2}{m}} = \\ = \frac{\frac{(2N-2)!}{m!(2N-2-m)!}}{\frac{(2N)!}{m!(2N-m)!}} = \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2N(2N-1)}. \end{aligned}$$

Tehát a keresett várható érték

$$\begin{aligned} E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = N\frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2N(2N-1)} \\ = \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)}. \end{aligned}$$

4.4 Feladat Várhatóan hányszor kell dobni egy szabályos kockával, hogy minden számot legalább egyszer megkapjunk?



4.4. ábra. A megmaradó párok számának várható értéke különböző N és m-re (a 4.3 feladathoz, 11.20 kód)

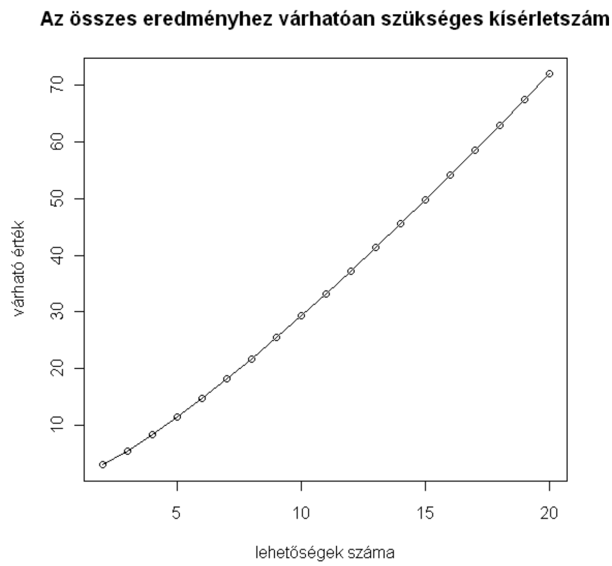
Megoldás. Most is használhatjuk az összegrebontást, de egy kevésbé triviális módon. Most azt célszerű észrevennünk, hogy az új számok dobása egyre nehezebbé válik, ahogy már egyre több számot dobtunk. Tehát X (a szükséges dobások száma) különböző eloszlású tagokra bontható:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots ... + X_6,$$

ahol X_i az a dobásszám ami ahhoz kell, hogy $i-1$ szám után az i-edik is kijöjjön. $X_1 = 1$, hiszen elsőre bármit dobhatunk. Ezután X_2 annak felel meg, hogy mennyit kell várni egy $5/6$ valószínűségű eseményre, tehát X_2 geometriai eloszlású, $E(X_2) = 6/5$. Ugyanígy $E(X_i) = 6/(7-i)$, mert ekkor már $i-1$ rossz szám van. A végeredmény tehát $E(X) = 1 + 6/5 + 3/2 + 2 + 3 + 6 = 14,7$.

4.5 Feladat Tegyük fel, hogy egy dobozban van n fehér és m piros golyó. Visszatevés nélkül húzunk addig, míg az első fehér golyót meg nem kapjuk. Várhatóan hány húzásra van ehhez szükség?

Megoldás. Jelölje X a kérdéses mennyiséget. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy az első fehér előtt kihúzott piros golyók számához hozzáadunk 1-et. Feltehetjük, hogy ezek meg vannak sorszámozva 1-től m-ig. Tekintsük ezeknek az indikátorait: $X_i = 1$ pontosan



4.5. ábra. Ahhoz szükséges kísérletek számának várható értéke, hogy egyformán valószínű kimenetelek mindegyike legalább egyszer kijöjjön, a lehetséges kimenetelek számának függvényében (a 4.4 feladathoz, 11.21 kód)

akkor, ha az i sorszámú pirosat az első fehér előtt húztuk ki (különben pedig 0). Ezekkel a jelölésekkel

$$E(X) = 1 + E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_m),$$

hiszen $X = 1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_m$. $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{n+1}$, hiszen az n fehéret és az adott pirosat bármilyen sorrendben ugyanakkora valószínűséggel húzhatjuk, és a sorrendek közül pontosan 1 olyan van, amikor a piros az első. A végeredmény tehát

$$E(X) = 1 + \frac{m}{n+1}.$$

A teljes valószínűség tételéhez hasonló állítás a várható értékekre is megfogalmazható.

4.1 Tétel *Legyen $A_1, ..., A_n$ teljes eseményrendszer, pozitív valószínűségű eseményekből. Ekkor $E(X) = E(X|A_1)P(A_1)+...+E(X|A_n)P(A_n)$, ahol $E(X|A)$ az X A bekövetkezése melletti, úgynevezett feltételes várható értéke.*

4.6 Feladat Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. $E(X) = ?$

Megoldás. A teljes eseményrendszer most a kockadobás lehetséges eredményének megfelelően 6 elemű. A teljes várható érték tétel értelmében $E(X) = E(X|A_1)P(A_1) + ... +$

$E(X|A_6)P(A_6) = (1/2+1+3/2+2+5/2+3)/6 = 7/4$, ami teljesen természetes, hiszen a kockadobás várható értéke 3,5 és várhatóan ezek fele lesz a fejre eső érmék száma.

4.2. Az ingadozás mértéke és lehetséges mérőszámai

Az ingadozásra még több mérőszámot vezethetünk be, mint a középértékekre. A leggyakrabban használt mérőszám a szórásnégyzet (D^2, variancia), mely a várható értéktől vett átlagos négyzetes eltérés, képlettel:

$$D^2(X) = E[(X - E(X))^2].$$

A szórásnégyzetet a gyakorlatban általában a

$$D^2(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

képlettel a legegyszerűbb kiszámítani.

4.7 Feladat Legyen X p paraméterű indikátor változó. $D^2(X) =?$

Megoldás. $E(X^2) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$, tehát $D^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

4.8 Feladat Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású változó. $D^2(X) =?$

Megoldás.

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{(i-1)!},$$

amit továbbalakítva

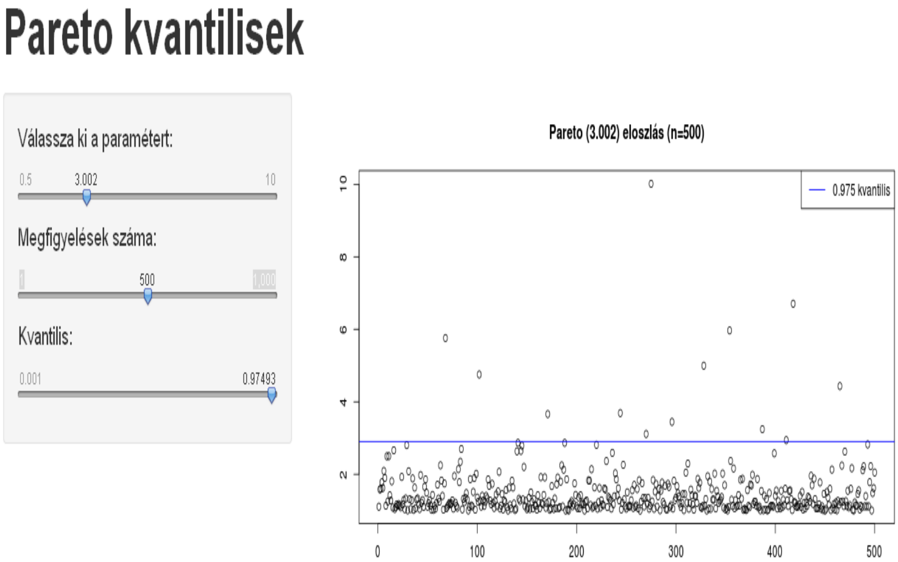
$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} (i-1+1) \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{(i-1)!} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{(i-1)!} = \lambda^2 + \lambda,$$

tehát $D^2(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Különböző becsléseknél gyakran célszerű a szórásnégyzet négyzetgyökének, a szórásnak ($D(X)$) a használata.

Ugyanakkor a szórásnégyzetre még inkább igaz, amit a kiugró értékek jelentős hatásáról a várható értékkel kapcsolatosan mondtunk.

Ha nem az elméleti eloszlás, hanem adatok alapján szeretnénk mérőszámokat kapni az ingadozásra, akkor erre is több lehetőségünk van. Kiszámolhatjuk például a tapasztalati eloszlás kvantiliseit, vagy ezek szélső értékét: a minimumot és a maximumot.



4.6. ábra. A $97,5\%$-os kvantilis a 3 paraméterű Pareto eloszlásra 500 szimuláció alapján, 11.33 kód

Elsősorban az egyszerű kiszámítása miatt volt régebben népszerű a terjedelem: $R = \max(X_1, ..., X_n) - \min(X_1, ..., X_n)$, amely azonban mint elméleti mennyiség nem különösebben érdekes. Viszont vannak változatai, amelyek a kiugró értékekre érzéketlenek, ezek közül elsősorban az interkvartilis terjedelmet (a felső és alsó kvartilisek különbségét – azaz annak a tartománynak a szélességét, amelybe a megfigyelések középső 50%-a esik –) szokták erre a célra a gyakorlatban használni.

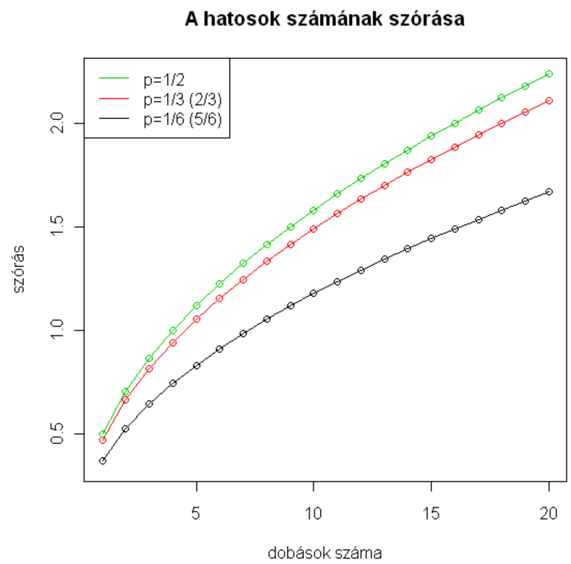
Különböző paraméterű szimulált Pareto eloszlások kvantiliseit vizsgálhatjuk a `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_quantile/` lapon található interaktív szimuláció segítségével. Itt kiválaszthatjuk az eloszlás paraméterét, a kvantilist és megadhatjuk a szimuláció elemszámát. Érdemes a szimulációt akár ugyanarra a beállításra is többször lefuttatni, ezzel is ellenőrizve a kapott értékek szóródását. Minél magasabb kvantilist és minél kisebb paramétert választunk, annál nagyobb lesz az ingadozás. A 4.6 ábra egy screenshot a szimulációból.

A szórásnégyzet legfontosabb tulajdonsága, hogy független (sőt: korrelálatlan – lásd a 6.4 szakaszt) valószínűségi változókra összeadódik. Ha még konstans szorzót is megengedünk, akkor az alábbi formulát kapjuk:

$$D^2(aX + bY) = a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y), \tag{4.1}$$

ahol X, Y független valószínűségi változók, $a, b \in \mathbb{R}$.

4.9 Feladat 5-ször dobunk egy szabályos kockával. Legyen X a 6-osok száma. $D^2(X) = ?$



4.7. ábra. A dobott hatosok számának szórása a dobások számának függvényében, a hatos dobásának különböző p valószínűségére (a 4.9 feladathoz)

Megoldás. $X = X_1 + \cdots + X_5$, ahol X_i akkor 1, ha az i-edik dobás hatos (különben 0). X_i indikátor változó $1/6$ paraméterrel, így $D^2(X_i) = 1/6 - 1/36 = 5/36$. A 4.1 képlet alapján $D^2(X) = 25/36$, ami speciális esete a binomiális eloszlásra vonatkozó általános $np(1-p)$ formulának.

4.10 Feladat Legyenek X és Y független, nulla várható értékű valószínűségi változók. $E(X^2) = 3$ és $E(Y^2) = 1$. Mennyi $D(X - Y)$?

Megoldás. A 4.1 képlet alapján $D^2(X - Y) = D^2(X) + (-1)^2 D^2(Y)$. És mivel a 0 várható érték miatt $D^2(X) = E(X^2)$, az eredmény $D^2(X - Y) = 3 + 1 = 4$, azaz $D(X - Y) = 2$.

4.3. Gyakorló feladatok

1. Egy dobozban az $1, 2, 3, 4$ feliratú 4 cédula van. Visszatevéssel húzunk, amíg 4-es nem kerül a kezünkbe. Mekkora a kihúzott számok összegének várható értéke?

2. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál

   (a) a párosak számát.

(b) a legkisebbet. Adjuk meg X várható értékét.

3. Legyenek X és Y független 0 várható értékű valószínűségi változók. Mennyi $D^2(XY)$, ha $E(X^2) = 2$ és $E(Y^2) = 3$?

4. Egy urnában 3 piros, 3 fehér és 3 zöld golyó van. Visszatevéssel húzunk, míg legalább egyet nem kapunk minden színből. Mennyi lesz a kihúzott golyók számának várható értéke?

5. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből három ajtó nyílik: az első ajtó 3 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 5 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe. A harmadik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 7 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe. A bányász minden alkalommal, amikor ebbe a terembe ér, e három ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül. Legyen X a szabadba kijutáshoz szükséges idő. $E(X) =?$

6. Dobjunk egy érmével annyiszor, amennyit egy szabályos kockával dobtunk. Jelölje X a fejek számát. $E(X) =?$

7. Jelölje X az ötöslottón kihúzott lottószámoknál

   (a) a párosak számát.

   (b) a legkisebbet.

   Adjuk meg X várható értékét.

8. Két kockával dobunk. Egy ilyen dobást sikeresnek nevezünk, ha van 6-os a kapott számok között. Várhatóan hány sikeres dobásunk lesz n próbálkozásból?

9. A zsebemben levő 5, 10, 20, 50, 100 és 200 forintos érmék száma független Poisson(λ) eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg aprópénzem értékének várható értékét!

10. Legyen X λ-paraméterű Poisson eloszlású. $E(1/(X+1)) =?$

11. Húzzunk egy francia kártyacsomagból két lapot visszatevés nélkül. Jelölje X a kőrök, Y pedig az ászok számát. Adjuk meg X és Y együttes eloszlását!

12. Tegyük fel, hogy egy adott területen és időszakban a hurrikánok száma Poisson folyamattal modellezhető. Várható értékben hetente 1 hurrikánra számíthatunk. Mi a valószínűsége, hogy 4 hét alatt legfeljebb 2 hurrikán lesz? Ha az egyes hurrikánok ereje $p = 1/5$ valószínűséggel haladja meg a 2-es fokozatot, akkor várhatóan hány ilyen hurrikán lesz egy hónap alatt?

13. Egy 10 emeletes ház földszintjén 15 ember száll be a liftbe. Mindenki a többitől függetlenül $1/10$ eséllyel száll ki az egyes emeleteken. Várhatóan hány emeleten áll meg a lift?

14. Tegyük fel, hogy 13-szor húzunk visszatevéssel egy magyarkártya-csomagból. Jelölje X azt, hogy hány különböző értékű lapot húztunk. Adjuk meg az X várható értékét.

15. 10 ember (5 pár) véletlenszerűen leül egy kerek asztalhoz. Várhatóan hány pár tagjai kerülnek egymás mellé?

16. n ember bedobja a névjegyét egy dobozba, majd mindenki véletlenszerűen húz egy névjegyet. Várhatóan hány ember húzza a saját névjegyét? (L. a 2.9 ábrát.)

17. 5-ször dobunk egy szabályos kockával. X a 6-osok száma. $D^2(X) =?$

18. Adjuk meg az $\{1, 2, ..., N\}$ számokon egyenletes eloszlás szórásnégyzetét.

5. fejezet

Folytonos modellek és tulajdonságaik

Az előző fejezetekben mind az eseményterünk, mind a véletlen mennyiségeink értékkészlete véges vagy megszámlálhatóan végtelen volt. Érezhető, hogy ezen modellek használhatósága behatárolt, hiszen gyakran igen egyszerű kérdésekre sem tudnánk válaszolni, ha csak ebben a körben maradnánk. Például egy radioaktív részecske bomlásának időpontja, egy ember élettartama és sok más is jobban modellezhető nem megszámlálható értékekkel. Ezen túlmenően nagyon sok esetben a folytonos modellek sokkal könnyebben kezelhetők mint a diszkrétek.

Ugyanazokat az elnevezéseket használjuk itt is, mint a korábbiakban.

5.1 Definíció Ω: biztos esemény, illetve eseménytér. $\omega \in \Omega$: elemi esemény. $A \in \mathcal{A}$: esemény (nem feltétlenül Ω összes részhalmaza). P: valószínűség. $P(A)$: az A esemény valószínűsége ($0 \leq P(A) \leq 1$).

Itt már jeleztük, hogy előfordulhat, hogy Ω nem minden részhalmaza esemény. Szükségünk lesz a következő fogalomra.

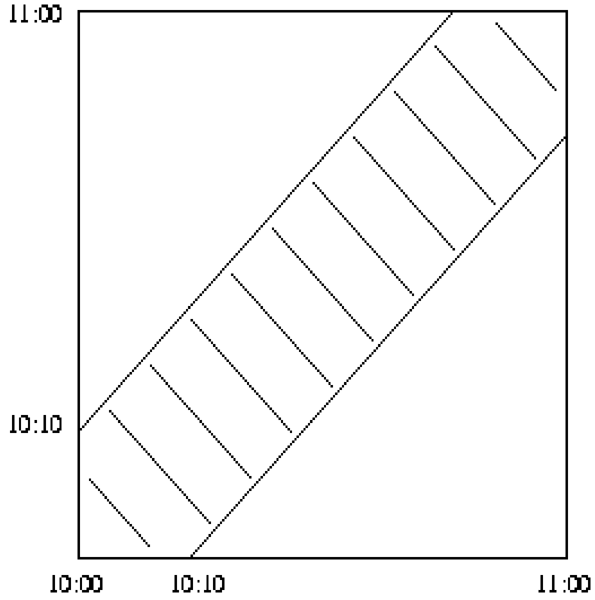
5.2 Definíció Az Ω részhalmazainak $\mathcal{A}$ rendszere **σ-algebra**, ha (i) $\Omega \in \mathcal{A}$, (ii) $A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{A}$ és (iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$.

Mit követelünk meg az eseménytértől, a valószínűségtől? Általánosan elfogadott A. N. Kolmogorov axiómarendszere.

5.3 Definíció $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ **Kolmogorov-féle valószínűségi mező**, ha (i) $\mathcal{A}$ Ω részhalmazainak σ-algebrája, (ii) P nemnegatív függvény $\mathcal{A}$ -n, (iii) $P(\Omega) = 1$ és (iv) $A_n \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazokra $P(\bigcup A_n) = \sum P(A_n)$.

Először nézzünk meg egy nagyon egyszerű esetet, amely nagyon hasonlít a kombinatorikus valószínűségi mezőhöz!

5.4 Definíció (Geometriai valószínűségi mező) Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ és $\mu(\Omega) < \infty$, ahol μ-vel jelöljük a d-dimenziós térfogatot. Minden $A \subset \Omega$ mérhető halmazra legyen $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$.



5.1. ábra. Péter és Juli érkezési időpontjai

Megjegyezzük, hogy $d = 3$ esetén a szokásos térfogatról, $d = 2$ esetén pedig területről van szó.

5.1 Feladat Péter és Juli 10 és 11 óra között véletlenszerű időpontban érkeznek egy találkozó színhelyére, legfeljebb 10 percet várva a másikra. Mekkora valószínűséggel találkoznak?

Megoldás. Péter és Juli érkezési időpontjait egy négyzet pontjainak feleltetjük meg és egyéb információ hiányában geometriai valószínűségi mezőt feltételezünk.
Az 5.1 ábrán satírozással jelöltük azokat a pontokat, melyek azoknak az érkezéseknek felelnek meg, amikor Péter és Juli találkoznak. Az ábráról jól látható, hogy a keresett valószínűség.
$P(\text{találkoznak}) = 1 - (\frac{5}{6})^2 = \frac{11}{36}$.

5.2 Feladat Egységnyi oldalú négyzetből találomra választunk egy pontot. Mekkora az esélye annak, hogy a kiválasztott pont oldalaktól mért távolságainak négyzetösszege legalább kétszer akkora, mint a bal alsó saroktól mért távolságának négyzete?

Megoldás. Geometriai valószínűségről szól a feladat, $\Omega = [0,1]^2$. Legyen A a szóban forgó esemény. Ekkor

$$A = \left\{(x, y) \,:\, x^2 + (1-x)^2 + y^2 + (1-y)^2 \geq 2(x^2 + y^2)\right\}$$

Az A halmaz pontjaira vonatkozó feltételt átalakíthatjuk

$$\begin{aligned} x^2 + (1-x)^2 + y^2 + (1-y)^2 &\geq 2(x^2+y^2) \\ x^2 + 1 - 2x + x^2 + y^2 + 1 - 2y + y^2 &\geq 2(x^2+y^2) \\ 2 - 2(x+y) &\geq 0 \\ 1 &\geq x+y \end{aligned}$$

Azaz A a négyzet bal alsó sarkánál lévő egységnyi befogójú derékszögű háromszög. Így $\mathbf{P}(A) = t_A = 1/2$.

5.1. Valószínűségi változók

Az általános esetben a valószínűségi változó meghatározásánál kénytelenek vagyunk bizonyos megkötéseket tenni.

5.5 Definíció $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ **valószínűségi változó**, ha minden $x \in \mathbb{R}$ számra $\{w : \xi(w) < x\} \in \mathcal{A}$.

Az előző fejezetekben vizsgált valószínűségi változók diszkrétek voltak.

5.6 Definíció A ξ valószínűségi változó **diszkrét**, ha értékkészlete véges vagy megszámlálható, azaz léteznek olyan x_k valós számok és A_k teljes eseményrendszer, hogy $\xi = \sum\limits_k x_k \cdot \chi_{A_k}$.

A valószínűségi változó eloszlását határozza meg az eloszlásfüggvény.

5.7 Definíció A ξ valószínűségi változó **eloszlásfüggvénye** $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$.
Diszkrét esetben $P(\xi = x_k) = F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)$.

5.1 Tétel *Az F_ξ eloszlásfüggvényre teljesülnek az alábbiak:*
(i) F_ξ monoton növő.
(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$ és $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$
(iii) F_ξ balról folytonos és jobbról létezik a határértéke minden $x \in \mathbb{R}$ helyen.

Az állítás megfordítása is igaz, azaz, ha egy fügvény kielégíti az állításban szereplő három tulajdonságot, akkor létezik olyan valószínűségi változó, amelynek ez a függvény az eloszlásfüggvénye.

5.3 Feladat Tekintsük az $[a, b]$ intervallumon a geometriai valószínűségi mezőt és legyen $\xi(w) = w$. Ez megfelel annak, hogy az intervallumból véletlenszerűen és egyenletesen választunk egy pontot. Mi ξ eloszlásfüggvénye?

Megoldás. Ekkor az eloszlásfüggvény a következo alakú $P(\xi < x) = \begin{cases} 0 \ : \ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \ : \ a < x < b \\ 1 \ : \ b \leq x \end{cases}$.

Az ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változót egyenletes eloszlásúnak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon. Jelölése: $E(a, b)$ vagy $U(a, b)$.

5.8 Definíció Egy pozitív ξ valószínségi változó örökifjú eloszlású, ha
$P(\xi > t + s \mid \xi > s) = P(\xi > t)$
teljesül minden $t, s > 0$-ra.

5.4 Feladat ($\boldsymbol{\lambda}$-exponenciális eloszlás) Jelölje τ egy hagyományos izzó élettartamát. Nyilvánvaló, hogy τ csak pozitív értékeket vehet fel és megfigyelték azt is, hogy az izzók élettartama örökifjú tulajdonságú. Mi lehet az élettartamok eloszlása?

Megoldás. Legyen $G(t) = P(\tau > t), t > 0$, így $\frac{G(t+s)}{G(s)} = \frac{P(\tau > t+s \ , \ \tau > s)}{P(\tau > s)} = G(t)$, azaz $G(t+s) = G(t) \cdot G(s)$. Ebből következik, hogy $G(t) = e^{-\lambda t}$ alakú. Mivel $G(t)$ valószínűség, ezért $\lambda > 0$. Az eloszlásfüggvény balról folytonossága miatt $P(\tau < t) \geq \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) \geq \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau < t - \varepsilon) = P(\tau < t)$ és ebből $P(\tau < t) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0} P(\tau \leq t - \varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \searrow 0}(1 - e^{-\lambda(t-\varepsilon)}) = 1 - e^{-\lambda t}$. Könnyen látható a fordított irány is, tehát, hogy egy ilyen eloszlásfüggvényű valószínűségi változó örökifjú eloszlású.

5.9 Definíció Az $F(t) = \begin{cases} 0 \ : \ t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \ : \ 0 < t \end{cases}$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változókat λ-paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük.

5.5 Feladat Az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F. Határozzuk meg $m + \sigma X$ eloszlásfüggvényét, ahol $\sigma > 0$ és m rögzített konstansok!

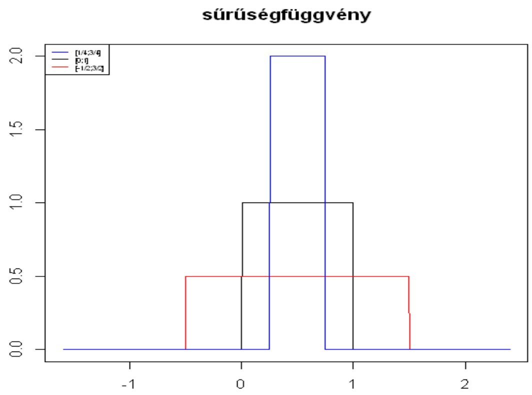
Megoldás. $P(m + \sigma X < x) = P(X < \frac{x-m}{\sigma}) = F(\frac{x-m}{\sigma})$.

A valószínűségi változók egyik legfontosabb osztálya a következő.

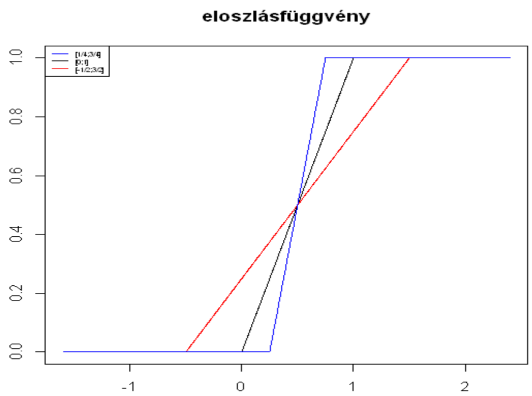
5.10 Definíció A ξ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, ha létezik olyan nemnegatív f függvény, hogy $F_\xi(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(s) \ ds$. Az f függvényt a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének nevezzük.

Ekkor $F'(x) = f(x)$ véges sok pontot kivéve, továbbá f integrálja az egész számegyenesen 1-el egyenlő. Ez utóbbi tulajdonság karakterizálja a sűrűségfüggvényeket, azaz, ha egy nemnegatív függvény integrálja az egész számegyenesen 1, akkor létezik olyan valószínűségi változó melynek pont ez a sűrűségfüggvénye.

Az $[a, b]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & : \ x \in [a,b] \end{cases}$.
Az 5.2 és 5.3 ábrán láthatjuk 3 különböző intervallumon értelmezett egyenletes eloszlású



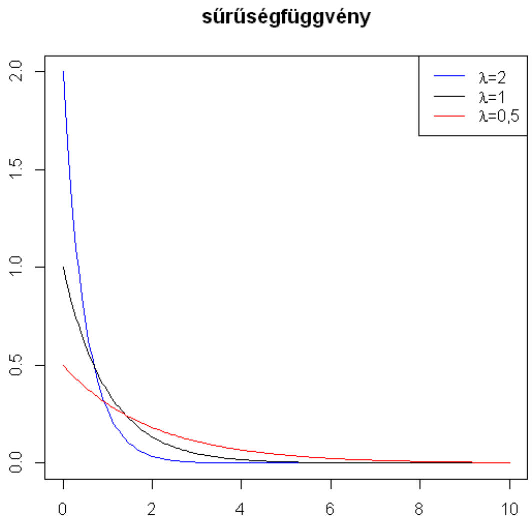
5.2. ábra. Egyenletes eloszlású változók sűrűségfüggvénye



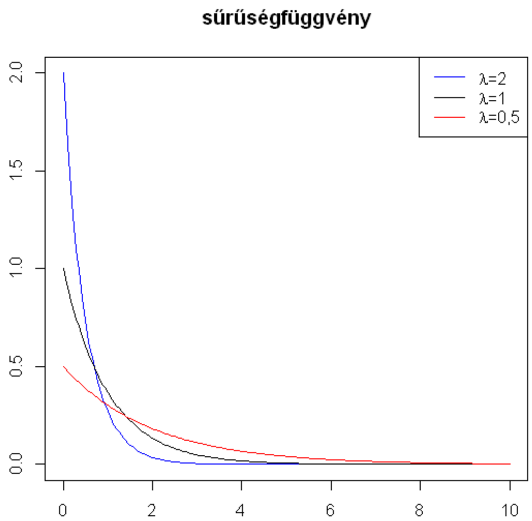
5.3. ábra. Egyenletes eloszlású változók eloszlásfüggvénye

valószínűségi változó sűrűség- illetve eloszlásfüggvényét.

Hasonlóan könnyen határozható meg a λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & : \ t \leq 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda t} & : \ 0 < t \end{cases}$. Az 5.4 és 5.5 ábrán az exponenciális eloszlás sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényét ábrázoltuk.

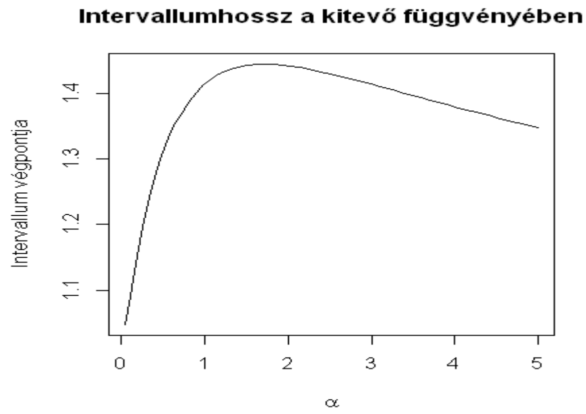


5.4. ábra. Különböző paraméterű exponenciális eloszlások sűrűségfüggvénye



5.5. ábra. Különböző paraméterű exponenciális eloszlások eloszlásfüggvénye

5.6 Feladat Az X valószínűségi változó a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit és ott sűrűségfüggvénye x^2. Határozzuk meg c értékét és annak valószínűségét, hogy $1 < X < 3$!



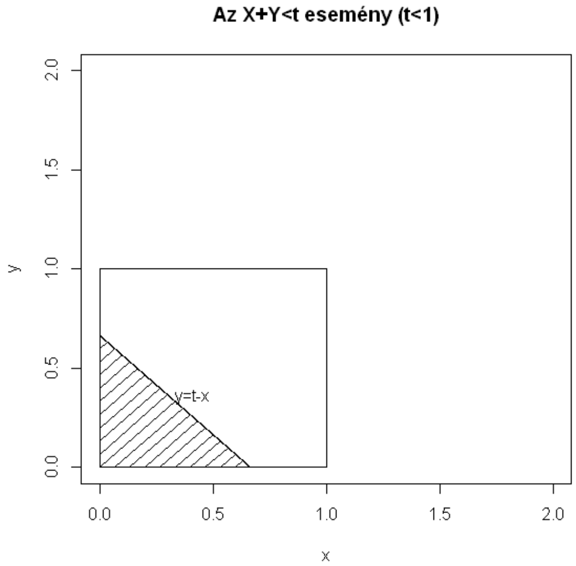
5.6. ábra. Intervallumhossz különböző kitevőjű sűrűségfüggvények esetében

Megoldás. Mivel X a $[0, c]$ intervallumon veszi fel értékeit, ezért az intervallumon kívül a sűrűségfüggvény 0. Így mivel a sűrűségfüggvény integrálja a számegyenesen 1, ezért az $\int_0^c x^2\ dx = \frac{c^3}{3} = 1$ egyenlőségnek kell teljesülnie. Ebből rögtön megkapjuk a $c = 3^{1/3}$ értéket. A keresett valószínűséget mint a sűrűségfüggvény integrálját kapjuk meg:
$P(1 < X < 3) = \int_1^{\min(c,3)} x^2\ dx = 1 - \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}$
Az 5.6 ábrán mutatjuk be, hogy amyennyiben a sűrűségfüggvény x^α, akkor az intervallum hossza hogyan függ az α paramétertől.

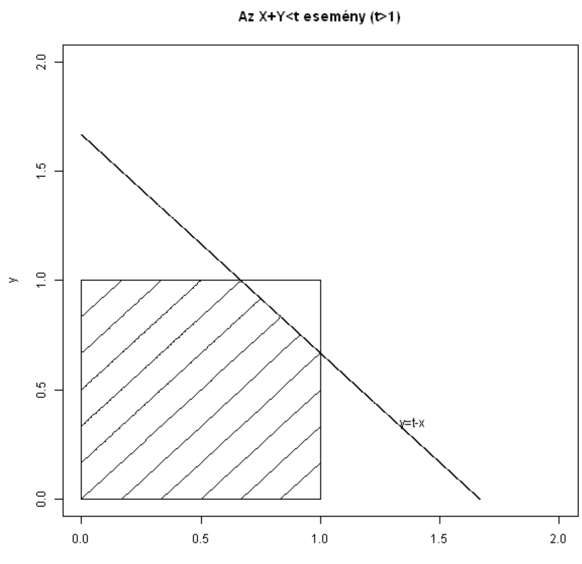
Nézzünk most egy geometriai valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változót!

5.7 Feladat Válasszunk egy pontot találomra az egységnégyzetből, azaz $[0, 1] \times [0, 1]$-ből! Jelölje ξ a választott pont két koordinátájának az összegét. Számítsuk ki ξ eloszlás és sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Az $F_\xi(t) = P(\xi < t)$ értékeket kell meghatároznunk. ξ értéke biztosan 0 és 2 közé esik, ezért $P(\xi < t) = 0$ ha $t \leq 0$ és $P(\xi < t) = 1$, ha $t > 2$. Így érdemi számolást csak a $t \in (0, 2)$ eset igényel. Jelölje X, Y a választott pont két koordinátáját. Ha $t \in (0, 2)$, akkor $P(\xi < t) = P(X + Y < t) = P(Y < t - X)$, azaz a számunkra kedvező kimenetelek az egységnégyzetnek az $y = t - x$ egyenes alá eső része. Ennek a síkidomnak a területe adja a kérdéses valószínűséget. $t \in (0, 1]$ esetén ez egy t befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög, melynek területe $t^2/2$, ahogy az az 5.7 ábrából rögtön látszik. Ha $t \in (1, 2]$ akkor a négyzetből egy $2-t$ befogójú derékszögű háromszöget kell elhagynunk (a jobb felső saroknál, ahogy ez a 5.8 ábrán látszik), így a megmaradó terület $1 - (2 - t)^2/2$.



5.7. ábra. 2 koordináta összege



5.8. ábra. 2 koordináta összege

Összefoglalva

$$F_\xi(t) = P(\xi < t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \le 0 \\ \frac{t^2}{2} & \text{ha } 0 < t \le 1 \\ 1 - \frac{(2-t)^2}{2} & \text{ha } 1 < t \le 2 \\ 1 & \text{ha } t > 2. \end{cases}$$

Ennek deriváltja adja a sűrűségfüggvényt:

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \notin (0,2) \\ t & \text{ha } t \in (0,1) \\ 2-t & \text{ha } t \in (1,2) \end{cases}$$

5.8 Feladat Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f. Határozzuk meg $m + \sigma X$ sűrűségfüggvényét, ahol $\sigma > 0$ és m rögzített konstansok!

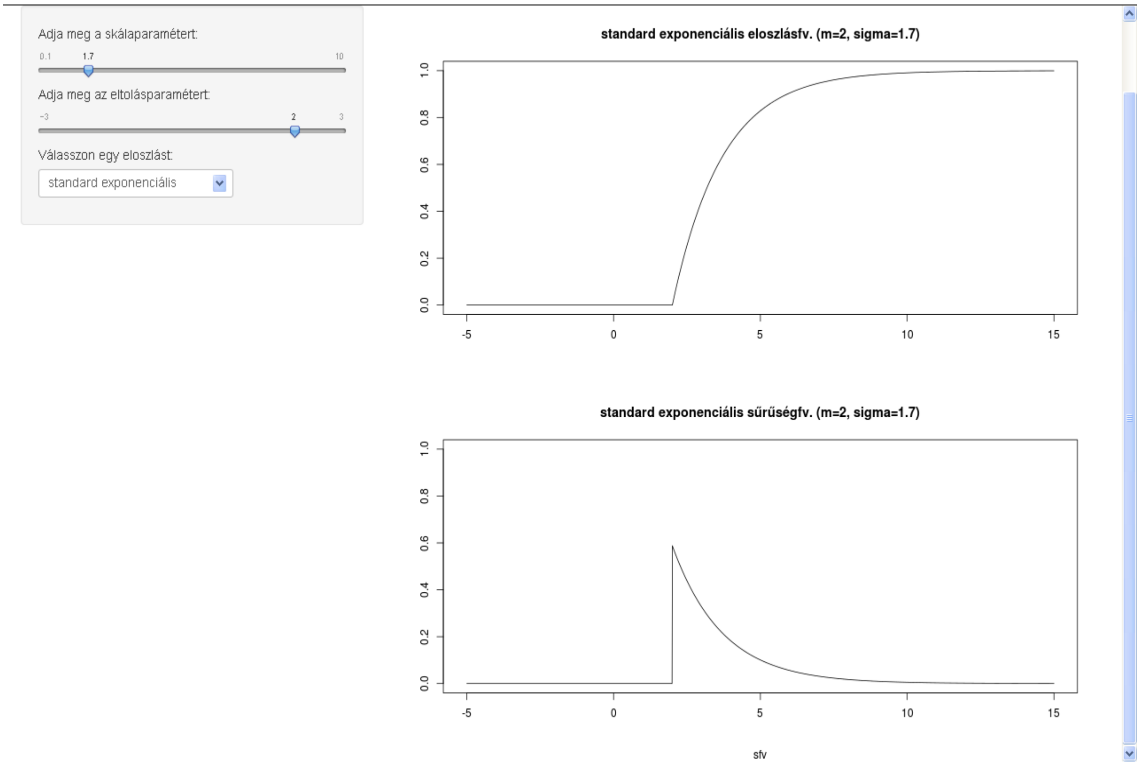
Megoldás. Láttuk korábban, hogy $P(m + \sigma X < x) = F(\frac{x-m}{\sigma})$. Mivel $\int_{-\infty}^{x} \frac{f(\frac{s-m}{\sigma})}{\sigma}\, ds = F(\frac{x-m}{\sigma})$, ezért a sűrűségfüggvény $\frac{f(\frac{s-m}{\sigma})}{\sigma}$

Az 5.9 ábrán láthatjuk exponenciális eloszlású valószínűségi változó lineáris transzformáltjának eloszlás- illetve sűrűségfüggvényét. A http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_transzf/ címen ugyanezt az ábrát további paraméterekre és eloszlásokra (normális, egyenletes) is megkaphatjuk.

A valószínűségszámításban és az alkalmazásokban leggyakrabban használt eloszlás a normális eloszlás. Azt mondjuk, hogy ξ valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ $(x \in \mathbb{R})$. A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$. A Φ függvény értékeit táblázatokból vagy számítógépes programokból lehet meghatározni. Az eloszlás rövid jelölése: $N(0,1)$.

5.9 Feladat Mutassuk meg, hogy a fenti függvény valóban sűrűségfüggvény!

Megoldás. A kívánt integrál négyzetéről látjuk be, hogy 1-gyel egyenlő. A számolás során a polárkordinátás helyettesítést használjuk.
$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}\, dt\, ds \overset{(\varphi,r)}{=} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\, dr = 2\pi \cdot \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi.$
Így $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1.$

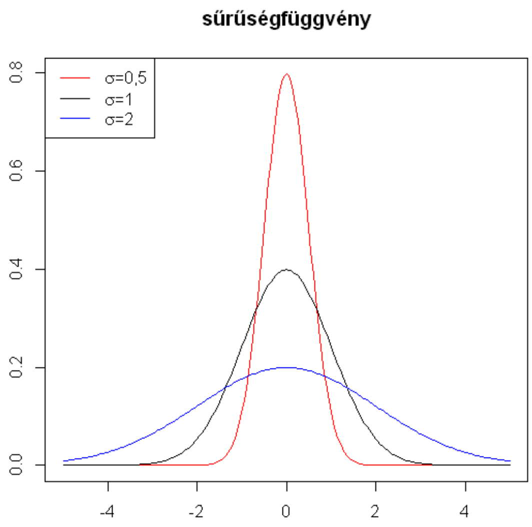


5.9. ábra. Exponenciális eloszlás lineáris transzformáltjának eloszlás- és sűrűségfüggvénye

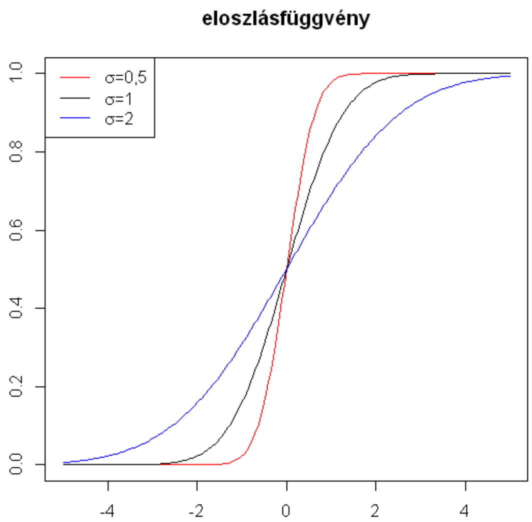
Korábbi példáinkból már láttuk, hogy $\sigma > 0$ és m konstansokra $m + \sigma\xi$ eloszlás- és sűrűségfüggvénye $P(m + \sigma\xi < x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$, $f_{m+\sigma\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Az ilyen sűrűségfüggvényű valószínűségi változókat m és σ^2 paraméterű normális eloszlásúnak nevezzük, jelölésük: $N(m, \sigma^2)$. Rögtön adódik, hogy, ha $\eta \sim N(m, \sigma^2)$, akkor $\frac{\eta-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Az 5.10 és 5.11 ábrán a normális eloszlás sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényét ábrázoltuk. Jól látható, hogy minél kisebb a σ paraméter, annál "csúcsosabb" a sűrűségfüggvény. A normális sűrűségfüggvény grafikonját haranggörbének is szokták nevezni.

5.10 Feladat Nagyon gyakori, hogy egy részvény árfolyamáról feltételezik, hogy logaritmusa normális eloszlású. Határozzuk meg sűrűségfüggvényét!

Megoldás. Legyen az X valószínűségi változó logaritmusa (μ, σ^2) paraméterű normális eloszlású (ekkor (μ, σ^2) paraméterű lognormális eloszlásúnak nevezzük) . Ekkor az eloszlásfüggvény pozitív x-ekre (a többi x-re az eloszlásfüggvény nyilvánvalóan 0):
$P(X < x) = P(\ln(X) < \ln(x)) = \Phi(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})$.
Ezt deriválva kapjuk meg X sűrűségfüggvényét:
$f_X(x) = \Phi'(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma})\frac{1}{\sigma\, x} = \frac{1}{\sigma\, x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$, $\quad x > 0$.

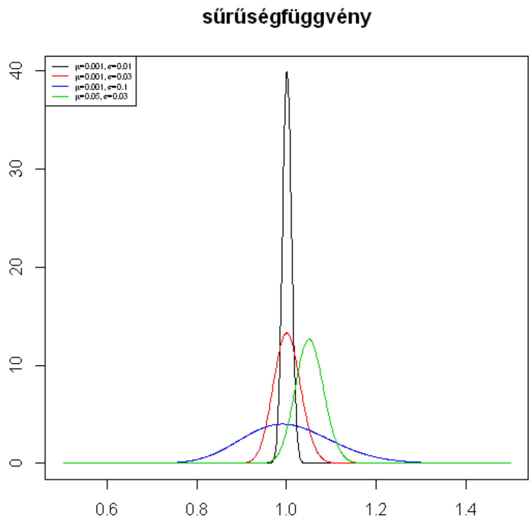


5.10. ábra. Különböző paraméterű normális eloszlások sűrűségfüggvénye

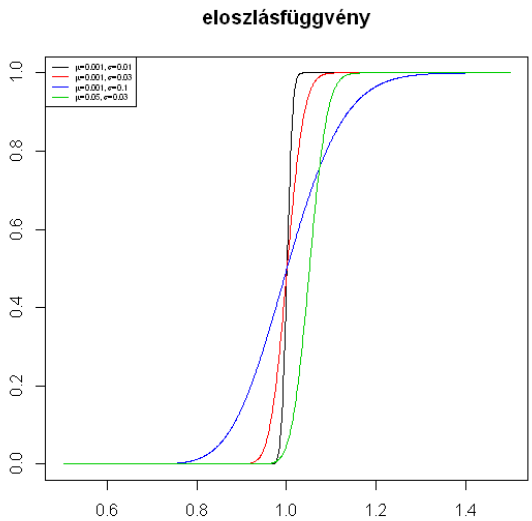


5.11. ábra. Különböző paraméterű normális eloszlások eloszlásfüggvénye

Az 5.12 és 5.13 ábrán a lognormális eloszlás sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényét ábrázoltuk.



5.12. ábra. Különböző paraméterű lognormális eloszlások sűrűségfüggvénye



5.13. ábra. Különböző paraméterű lognormális eloszlások eloszlásfüggvénye

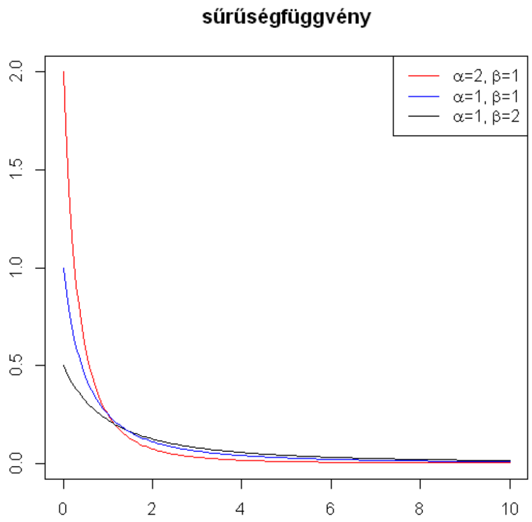
5.11 Feladat A LOM részvény tőzsdei záróárfolyama 7800 Ft volt ma este. Korábbi tapasztalatok alapján feltételezzük, hogy holnapi záró árfolyama a mai záróárfolyammal osztva (0,001, 0,01) paraméterű lognormális eloszlású. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a holnapi záróárfolyam kisebb lesz 7500 Ft-nál?

Megoldás. Jelöljük a holnapi záróárfolyamot Y-al. Ekkor
$P(Y < 7500) = P(\ln(Y/7800) < \ln(7500/7800)) = \Phi(\frac{\ln(7500/7800)-0{,}001}{0{,}1}) = \Phi(-0,18033) = 1 - \Phi(-0,18033) = 42,84\%$

Biztosítóknál gyakran feltételezik, hogy egy-egy kár nagyságának eloszlása ún. Pareto eloszlású. Azt mondjuk, hogy Az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású $(\alpha > 0, \beta > 0)$, ha eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^{\alpha} & x > 0. \end{cases}$$

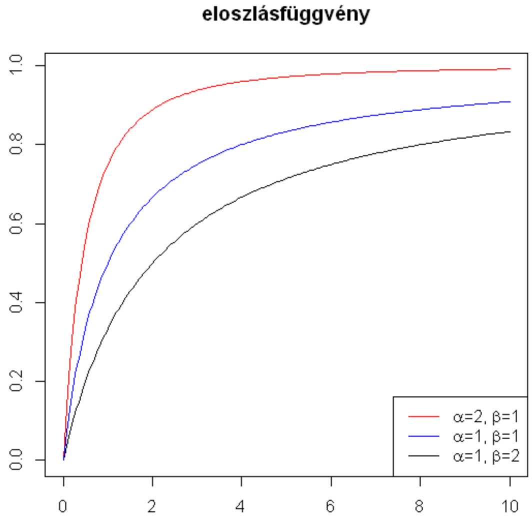
Az ilyen eloszlású károkat "veszélyesnek" szokták mondani, mert a nagy károk $P(X > x)$ valószínűsége csak polinomiálisan cseng le. Az 5.14 és 5.15 ábrán Pareto-eloszlások



5.14. ábra. Különböző paraméterű Pareto-eloszlások sűrűségfüggvénye

sűrűség- és eloszlásfüggvényét ábrázoltuk.

5.12 Feladat A Piroska Biztosító felelősségi kárairól tudják, hogy millió forintban számolva $(1, 2)$ paraméterű Pareto-eloszlásúak. Amennyiben egy kárról tudjuk, hogy meghaladta az 1 millió forintot, akkor mi annak a valószínűsége, hogy nem haladja meg a 3 millió forintot?



5.15. ábra. Különböző paraméterű Pareto-eloszlások eloszlásfüggvénye

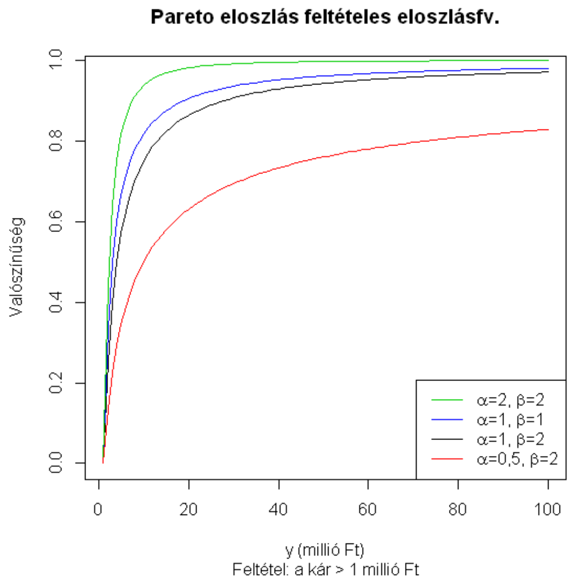
Megoldás. Mivel az eloszlásfüggvény folytonos, ezért a valószínűségek értéke nem változik, ha kisebb-egyenlőt írunk kisebb helyett. Legyen $x = 3, y = 1, \alpha = 1, \beta = 2$. A keresett valószínűségre $P(X \leq x \mid X > y) = \frac{P(y \leq X < x)}{P(X \geq y)} = \frac{P(X<x) - P(X<y)}{1-P(X<y)} = \frac{F_X(x)-F_X(y)}{1-F_X(y)} = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha}{\left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^\alpha} = 1 - \left(\frac{\beta+y}{\beta+x}\right)^\alpha = 0,4$
Az 5.16 ábrán azt ábrázoltuk, hogy hogyan alakul különböző paraméterű Pareto-eloszlások feltételes eloszlásfüggvénye, akkor, ha tudjuk, hogy 1-nél nagyobb értéket vesznek fel.

Könnyű kapcsolatot találni az exponenciális és Pareto-eloszlás között.

5.13 Feladat Mutassuk meg, hogy ha az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású, akkor $\ln(1 + X/\beta)$ exponenciális eloszlású α paraméterrel.

Megoldás. Mivel mindkét valószínűségi változó pozitív, ezért elég belátni az eloszlásfüggvény egyezőségét a pozitív félegyenesen.
$P\left(\ln(1 + X/\beta) < x\right) = P\left(X < \beta(e^x - 1)\right) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+\beta(e^x-1)}\right)^\alpha = 1 - e^{-\alpha x}$

Az előbbi kapcsolat két különböző eloszlás között nem véletlen. A következő két példa azt mutatja, hogy bármely eloszlás eloállítható a (0,1) intervallumon egyenletes eloszlásból és ennek megfordítása is "majdnem" igaz. Ezeket az eredményeket mind a számítógépes szimulációkban, mind statisztikai vizsgálatoknál gyakran használják.



5.16. ábra. Különböző paraméterű Pareto-eloszlások feltételes eloszlásfüggvénye

5.14 Feladat Számítógépünkbe csak egy véletlen függvény van beépítve. Ennek segítségével a 0 és 1 között tudunk egy véletlen számot generálni. Ezt felhasználva, hogyan lehet tetszőlegesen előírt F eloszlásfüggvényű véletlen számot előállítani?

Megoldás. Jelölje F^{-1} az F általánosított inverzét, azaz a
$F^{-1}(u) = \inf(t \in \mathbb{R} : F(t) > u)$
Vizsgáljuk meg az $X = F^{-1}(U)$ változó eloszlását, ahol U a $(0, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású. Mivel
$(u : F^{-1}(u) < s) = (u : \inf(t : F(t) > u) < s) =$
$(u : \exists t < s,\ F(t) > u) =$
$(u : F(s) > u) = (-\infty, F(s))$ ezért

$$P(X < s) = P(F^{-1}(U) < s) = P(U < F(s)) = F(s)$$

Azaz X eloszlásfüggvénye F.

5.15 Feladat X az (a, b) intervallumból (a végpontok lehetnek végtelenek is) veszi fel értékeit és ott F eloszlásfüggvénye folytonos és szigorúan monoton. Mutassuk meg, hogy ekkor X-et eloszlásfüggvényébe beleírva a (0,1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót kapunk!

Megoldás. Legyen $U = F(X)$ és jelölje F^{-1} az F inverzét. Ekkor U a $[0, 1]$ intervallumból veszi fel értékeit és $0 < x < 1$-re $P(U < x) = P(F(X) < x) = P(X < F^{-1}(x)) =$

$F\left(F^{-1}(x)\right) = x$, azaz U a (0,1) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó .

A hidrológiában, távközlésben, biológiában és más területeken az egyik leggyakrabban alkalmazott eloszlás a gamma eloszlás. Egy valószínűségi változó gamma eloszlású, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x) & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

alakú ahol $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}\exp(-x)dx$. $\lambda > 0$ az eloszlás paramétere, $\alpha > 0$ pedig a rendje. Jelölése $\Gamma_{\alpha,\lambda}$.

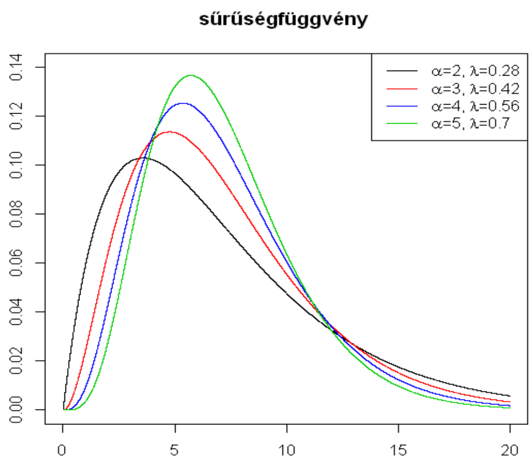
5.16 Feladat Mutassuk meg, hogy az imént definiált függvény valóban sűrűségfüggvény!

Megoldás. f nem negatív, tehát csak annyit kell megmutatni, hogy az integrálja 1.

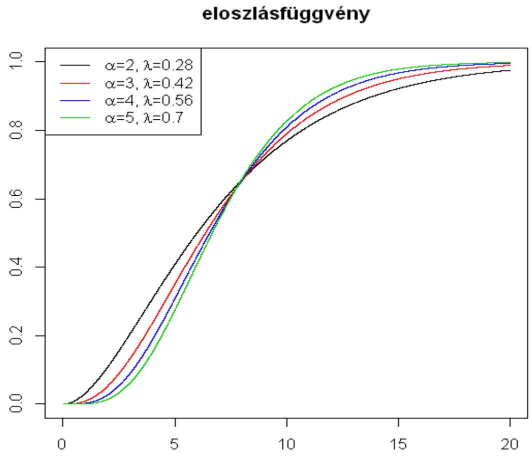
$$\int_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx|_{y=\lambda x} = \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^y dy = \Gamma(y).$$

Tehát f sűrűségfüggvény.

Az 5.17 és 5.18 ábrán láthatjuk néhány gamma eloszlású valószínűségi változó eloszlás- illetve sűrűségfüggvényét. A http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_gamma/ címen ugyanezt az ábrát további paraméterekre is megkaphatjuk.



5.17. ábra. Γ eloszlások sűrűségfüggvénye



5.18. ábra. Γ eloszlások eloszlásfüggvénye

5.2. Valószínűségi változók várható értéke

Korábban már definiáltuk a diszkrét valószínűségi változók várható értékét. A következo definíció ezt általánosítja úgy, hogy a várható érték tulajdonságai ebben az általános esetben is teljesülnek.

5.11 Definíció $E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \; dF_\xi(x)$ és $Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \; dF_\xi(x)$, ahol a $dF_\xi(x)$ szerinti integrálás a Lebesgue-Stieltjes-integrálást jelöli, ha $\int_{\mathbb{R}} |x| \; dF_\xi(x)$ illetve $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \; dF_\xi(x)$ véges.

Abszolút folytonos esetben a várható érték a sűrűségfüggvény segítségével határozható meg. $E\xi = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f_\xi(x) \; dx$ és $Eg(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f_\xi(x) \; dx$.

A következő példában a legnevezetesebb abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók várható értékét határozzuk meg.

5.17 Feladat Határozzuk meg az egyenletes, exponenciális és normális eloszlás várható értékét!

Megoldás. (1) Az **egyenletes** eloszlás várható értéke $\xi \sim E(a, b)$ esetén
$E\xi = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} \; dx = \frac{a+b}{2}$.

(2) A **λ-exponenciális** eloszlás várható értéke
$E\xi = \int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} \; dx = [-x \cdot e^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} \; dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$.

(3) A **normális** eloszlás várható értéke $\xi \sim N(0, 1)$ esetén
$E\xi = \int_{-\infty}^\infty x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \; dx = 0$,
hiszen a sűrűségfüggvény szimmetrikus, így az integrálban egy páratlan függvény szerepel

(továbbá az integrál konvergens, mert elég nagy x-re $x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ felülről becsülhető az e^{-x} függvénnyel). Általánosan pedig $m+\sigma\xi \sim N(m,\sigma^2)$ esetén $E(m+\sigma\xi) = m+\sigma \cdot E\xi = m$.

Bizonyos esetekben kényelmesebb az eloszlásfüggvény felhasználása a várható érték meghatározásához.

5.2 Tétel $E\xi = \int_0^\infty (1 - F_\xi(y))\ dy - \int_{-\infty}^0 F_\xi(y)\ dy$. *Speciálisan, ha* $\xi \geq 0$, *akkor* $E\xi = \int_0^\infty (1 - F_\xi(y))\ dy$.

Az előző állítás segítségével talán még könnyebben határozható meg az exponenciális eloszlás várható értéke.

5.18 Feladat Határozzuk meg az exponenciális eloszlás várható értékét az előző tétel segítségével!

Megoldás. Legyen $\xi \sim \lambda$-exponenciális, ekkor
$E\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda y}\ dy = \frac{1}{\lambda}$.

Eddigi példáinkban a várható érték mindig létezett (véges volt). Ez természetesen nem mindig teljesül.

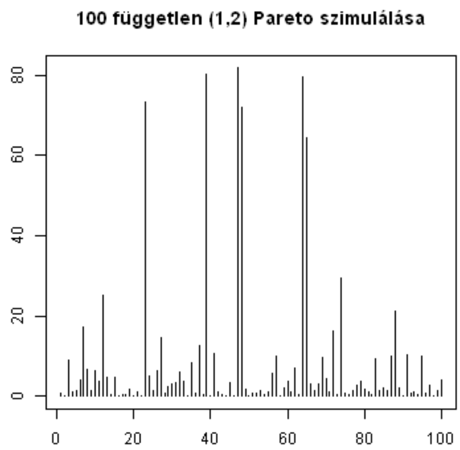
5.19 Feladat Határozzuk meg a Pareto-eloszlás várható értékét!

Megoldás. Az X valószínűségi változó (α, β) paraméterű Pareto-eloszlású. Ekkor várható értéke:
$EX = \int_0^\infty (1 - F_X(y))\ dy = \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^\alpha\ dy = \frac{\beta}{\alpha-1}$, ha $\alpha > 1$.
$\alpha \leq 1$ esetben az integrál $+\infty$ értéket vesz fel.

A Pareto-eloszláshoz kapcsolódnak következő - talán egy kissé meglepő - példák is, melyek egy korábbi példánk folytatása.

5.20 Feladat A Piroska Biztosító felelősségi kárairól tudják, hogy millió forintban számolva $(1,2)$ paraméterű Pareto-eloszlásúak. Várhatóan mennyi ekkor egy kár nagysága?

Megoldás. Az előző példa alapján rögtön tudjuk a kérdésre a választ, hiszen az (α, β) paraméterű Pareto-eloszlás várható értéke $\frac{\beta}{\alpha-1}$, így a felelősségi károk várható értéke $+\infty$. Vajon hogyan fordulhat ez elő? Miért modellezhetjük ezeket a károkat olyan eloszlással, melynek nem véges a várható értéke? Bizonyos esetekben valóban jogos az ilyen modellezés, mert a tapasztalt eloszlás egy végtelen várható értékű eloszláshoz hasonlít. Az 5.19 ábrán látható 100 független (1,2) paraméterű Pareto eloszlású változó generálásának eredménye. Az ábrából elsőre egyáltalán nem látszik, hogy itt végtelen várható értékről van szó. A felelősségbiztosításoknál az is előfordulhat, hogy a kárkifizetések nincsenek korlátozva és - különösen személyi sérülésekkel is járó esetekben - a biztosítóknak nagyon sokat kell fizetnie.

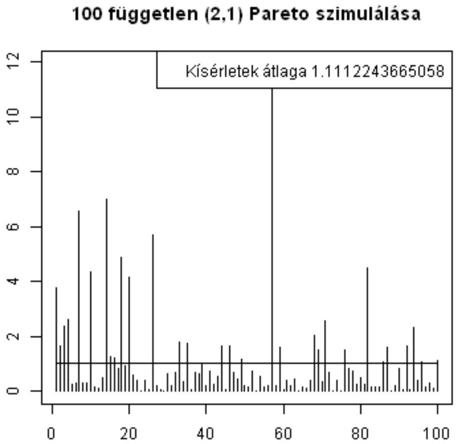


5.19. ábra. Egy végtelen várható értékű Pareto eloszlású valószínűségi változó generálása

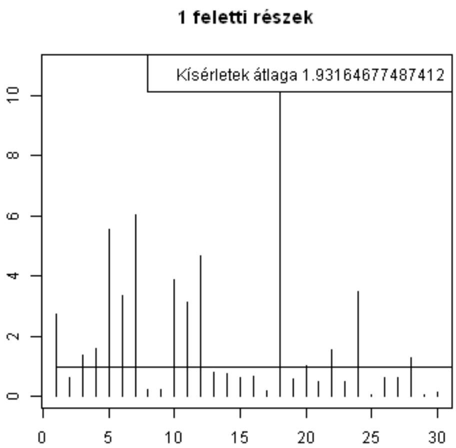
5.21 Feladat A Piroska Biztosító tűzkárai is Pareto-eloszlásúak, de $(2, 1)$ paraméterűek. Itt azonban a biztosító csak az 1 millió forint feletti károkra fizet és ekkor is csak a károk 1 millió forint feletti részét. Mennyi a tűzkárok illetve a biztosító kifizetéseinek várható értéke?

Megoldás. A Pareto-eloszlás várható értékére vonatkozó formula szerint a tűzkárok várható értéke 1 millió forint. Az 5.20 ábrán látható 100 ilyen eloszlású kár értéke. A következő 5.21 ábrán viszont már csak azon károk 1 millió Ft feletti része látható, melyek meghaladták az 1 millió Ft-ot. Meglepő módon azt tapasztalhatjuk, hogy ezen meghaladások átlaga jóval nagyobb az eredeti átlagnál. A következő számolás mutatja, hogy ez nem véletlen. A tűzkár kifizetések eloszlásfüggvénye az x helyen a $P((X-1) < x \mid X > 1)$ feltételes valószínűséggel adható meg. Ez a valószínűség nem pozitív x-ekre nyilvánvalóan 0, a többi x-re pedig könnyen számolható $P((X-1) < x \mid X > 1) = \frac{P(1 \le X < x+1)}{P(X \ge 1)} = \frac{P(X<x+1)-P(X<1)}{1-P(X<1)} = \frac{F_X(x+1)-F_X(1)}{1-F_X(1)} = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta+x+1}\right)^\alpha}{\left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha} = 1 - \left(\frac{\beta+1}{\beta+1+x}\right)^\alpha$. Ez azt mutatja, hogy a kifizetés is Pareto-eloszlású, csak már $(2, 2)$ paraméterekkel és így 2 millió forint várható értékkel. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben bár levonunk 1 millió forintot a károkból, mégis nagyobb várható értéket kapunk!

Az előző példa látszólagos paradoxonát a következővel magyarázhatjuk. A Pareto eloszlás rendelkezik az ún. „fiatalodó” tulajdonsággal, azaz
$P(X > t + s \mid X > s) \ge P(X > t)$.
Tehát, ha tudjuk, hogy a kárunk elér egy adott értéket, akkor a kár várhatóan nagyobb lesz, mintha nem rendelkeztünk volna ezzel az információval. A károk szimulációját



5.20. ábra. Egy 1 várható értékű Pareto eloszlású valószínűségi változó generálása



5.21. ábra. Egy 1 várható értékű Pareto eloszlású valószínűségi változó generálásból az 1 feletti részek mutatja be a http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_bizt/ címen található interaktív animáció. A 5.22 ábra egy screenshot az eredményekről.

5.22. ábra. A Piroska biztosító szimulált káreseményei a 5.21 feladathoz

Térjünk vissza megint egy korábbi példánkhoz!

5.22 Feladat Válasszunk egy pontot találomra az egységnégyzetből, azaz $[0,1] \times [0,1]$-ből! Jelölje ξ a választott pont két koordinátájának az összegét. Számítsuk ki ξ várható értékét!

Megoldás. ξ sűrűségfüggvényét már korábban meghatároztuk.

$$f_\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } t \notin (0,2) \\ t & \text{ha } t \in (0,1) \\ 2-t & \text{ha } t \in (1,2) \end{cases}$$

Ennek alapján a várható érték
$E\xi = \int t f_\xi(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 t(2-t)dt =$
$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 3 - \frac{7}{3} = 1.$
Ezt az értéket azonban egyszerűbben is megkaphattuk volna, mivel ξ két a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó összege. Mindkét változó $\frac{1}{2}$ várható értékű, ezért összegük várható értéke 1.

Következő feladatunk is egy korábbi példa folytatása.

5.23 Feladat A LOM részvény tőzsdei záróárfolyama 7800 Ft volt ma este. Korábbi tapasztalatok alapján feltételezzük, hogy holnapi záró árfolyama a mai záróárfolyammal osztva (0,001, 0,01) paraméterű lognormális eloszlású. Mennyi a holnapi záróárfolyam várható értéke?

Megoldás. Jelöljük a holnapi záróárfolyamot Y-al. Ekkor $Y = 7800X, EY = 7800EX$, ahol X (0,001, 0,01) paraméterű lognormális eloszlású. Az (m, σ^2) paraméterű lognormális eloszlás várható értéke az alábbi módon számolható.

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} exp(m + \sigma x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = exp(m + \sigma^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{2}}\ dx = exp(m + \sigma^2/2)$.

Az utolsó integrál azért 1, mert egy $N(\sigma, 1)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét integráltuk. Esetünkben $m = 0,001, \sigma^2 = 0,01$, ezért $EY = 7800 exp(0,006) = 7847$.

A példamegoldás mutatta, hogy tetszőleges f függvényre és ξ valószínűségi változóra nem feltétlenül teljesül az $E(f(\xi)) = f(E\xi)$ egyenlőség.

5.3. Szórásnégyzet, momentumok

A szórásnégyzetet általános esetben is ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét valószínűségi változókra. A korábban felsorolt tulajdonságok itt is teljesülnek.

5.12 Definíció $D^2\xi = E(\xi - E\xi)^2$ a ξ valószínűségi változó szórásnégyzete, ha az $E\xi$ létezik és véges. ξ **szórása** pedig a szórásnégyzet négyzetgyöke, azaz $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$.

Gyakran jól jellemzik a valószínűségi változó eloszlását a különböző momentumok

5.13 Definíció $E\xi^k$ a ξ **k-adik momentuma** és $E|\xi|^k$ a ξ **k-adik abszolút momentuma**.
Az $E(\xi - E\xi)^k$ a ξ **k-adik centrális momentuma** és $E|\xi - E\xi|^k$ a ξ **k-adik abszolút centrális momentuma**.

A definíció alapján felírhatjuk az abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók szórásnégyzetét és momentumait a sűrűségfüggvénye segítségével.

$D^2\xi = \int_{\mathbb{R}} (x - E\xi)^2 \cdot f_\xi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f_\xi(x)\ dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_\xi(x)\ dx\right)^2$
$E\xi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k \cdot f_\xi(x)\ dx$
$E|\xi|^k = \int_{\mathbb{R}} |x|^k \cdot f_\xi(x)\ dx$
$E(\xi - E\xi)^k = \int_{\mathbb{R}} (x - E\xi)^k \cdot f_\xi(x)\ dx$
$E|\xi - E\xi|^k = \int_{\mathbb{R}} |x - E\xi|^k \cdot f_\xi(x)\ dx$

A következő példákban nevezetes abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók szórásnégyzetét határozzuk meg.

5.24 Feladat Határozzuk meg az exponenciális eloszlás szórásnégyzetét!

Megoldás. Legyen η λ-**exponenciális** valószínűségi változó melynek várható értéke korábbi ismereteink alapján $E\eta = \frac{1}{\lambda}$. Továbbá
$E\eta^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ dx = \left[x^2(-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x \cdot e^{-\lambda x}\ dx$,
ahol az összeg első tagja 0, az integrál pedig
$\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x}\ dx = \frac{2}{\lambda}E\eta$,
tehát $E\eta^2 = \frac{2}{\lambda^2}$. Ezzel a szórásnégyzet
$D^2\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

5.25 Feladat Mutassuk meg, hogy a normális eloszlású változók szórásnégyzete megegyezik az eloszlás második paraméterével!

Megoldás. Legyen $\xi \sim N(0,1)$, azaz **standard normális** eloszlású valószínűségi változó. Mivel $E\xi = 0$, ezért

$$D^2\xi = E\xi^2 = \int_{-\infty}^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[x \cdot (-e^{-\frac{x^2}{2}})\right]_{-\infty}^\infty + \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1} = 1.$$

Általánosan pedig legyen $m + \sigma\xi \sim N(m, \sigma^2)$, ekkor
$D^2(m+\sigma\xi) = \sigma^2 \cdot D^2\xi = \sigma^2$.

5.26 Feladat Mivel egyenlő egy egyenletes eloszlású változó szórásnégyzete?

Megoldás. Legyen X **egyenletes** eloszlású az (a,b) intervallumon. Azt már tudjuk, hogy $EX = \frac{a+b}{2}$. $EX^2 = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\ dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$. Ebből a szórásnégyzet
$D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

5.27 Feladat Hogyan határozható meg egy Pareto eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete?

Megoldás. Y (α,β)-**Pareto** eloszlású. Ekkor $EY = \frac{\beta}{\alpha-1}$, ha $\alpha > 1$. $EY^2 = \int_0^\infty 2y(1 - F_Y(y))\ dy = \int_0^\infty 2y\left(\frac{\beta}{\beta+y}\right)^\alpha\ dy = \frac{2\beta^2}{\alpha-2} - \frac{2\beta^2}{\alpha-1}$, ha $\alpha > 2$. $\alpha \le 2$ esetben az integrál $+\infty$ értéket vesz fel. Ebből a szórásnégyzet $D^2Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \alpha > 2$

5.28 Feladat Számoljuk ki a gamma eloszlás szórásnégyzetét!

Megoldás. Z $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ eloszlású. Ekkor
$EZ = \int_0^\infty x\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\lambda^{\alpha+1}x^{\alpha+1-1}\exp(-\lambda x)dx = \frac{\alpha}{\lambda}$,
$EZ^2 = \int_0^\infty x^2\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)}\lambda^{\alpha+2}x^{\alpha+2-1}\exp(-\lambda x)dx =$

$\frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2}$,
$D^2Z = EZ^2 - (EZ)^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

A várható érték és a szórásnégyzet a valószínűségi változók alapvető jellemzői, azonban a valószínűségi változó eloszlását természetesen nem határozzák meg. Ezt szemlélteti a következő példa.

5.29 Feladat Határozzuk meg az m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális, gamma, lognormális és Pareto eloszlások paramétereit!

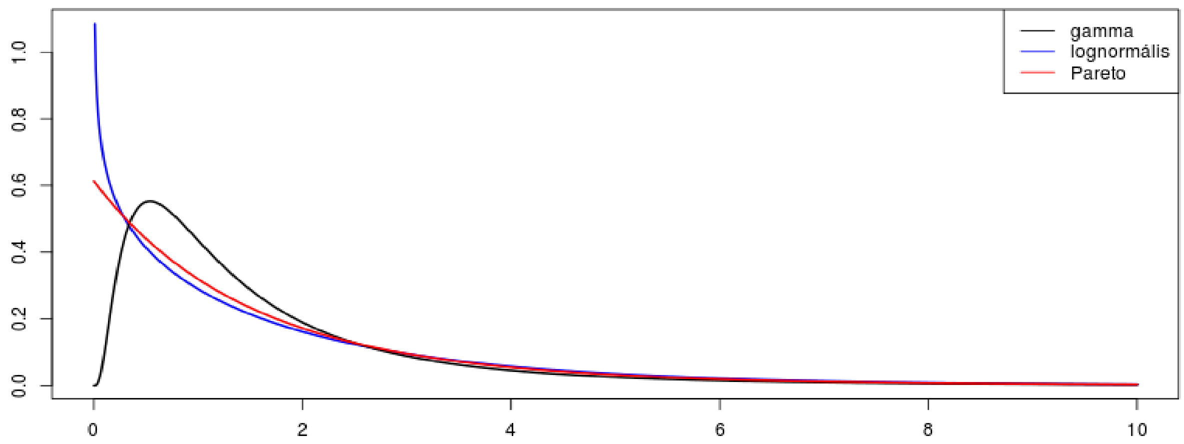
Megoldás. A normális eloszlás paraméterei a várható érték és szórásnégyzet, tehát $N(m, \sigma^2)$ eloszlásról van szó.

A $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ eloszlású változó várható értéke $\frac{\alpha}{\lambda}$, szórásnégyzete $\frac{\alpha}{\lambda^2}$. A kettő hányadosa pont λ, így az eloszlásunk $\Gamma_{\frac{m^2}{\sigma^2},\frac{m}{\sigma^2}}$.
A (μ, s^2) paraméterű lognormális eloszlás várható értékét már korábban meghatároztuk:
$exp(\mu + s^2/2)$
A szórásnégyzet meghatározásához először kiszámoljuk a második momentumot.
$\int_{-\infty}^{\infty} (exp(\mu + sx))^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = exp(2\mu + 2s^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2s)^2}{2}}\, dx = exp(2\mu + 2s^2)$.
Ebből rögtön adódik a $exp(2\mu + s^2)(exp(s^2) - 1)$ szórásnégyzet, amiből elemi számításokkal kapjuk, hogy
$\mu = ln\left(\frac{m}{\sqrt{1+\sigma^2/m^2}}\right)$ és $s = \sqrt{\ln(1 + \sigma^2/m^2)}$.
Az (α, β)-Pareto eloszlásnál a várható érték és szórásnégyzet $\frac{\beta}{\alpha-1}$ illetve $\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$, ha $\alpha > 2$. Ebből megint elemi számításokkal adódik, hogy
$\alpha = \frac{2\sigma^2}{\sigma^2-m^2}, \beta = m\frac{\sigma^2+m^2}{\sigma^2-m^2}$, ha $\sigma^2 > m^2$.
A kapott sűrűségfüggvények különbözőségét mutatja be az 5.23 ábra, ahol $m = 1,8, \sigma = 2$. A `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_2mom/` címen ugyanezt az ábrát különböző várható értékekre és szórásokra is megkaphatjuk.

Több alkalmazásnál szükségünk lehet a normális eloszlás momentumaira.

5.30 Feladat Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó $E\xi^k$ k-ik momentumát minden $k = 0, 1, 2, \ldots,$ nem negatív egész számra!

Megoldás. ξ sűrűségfüggvénye $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$, ezért $E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\varphi(x)\, dx$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ számra. Mivel páratlan $\bar{k} = 2k + 1$ számokra a fenti integrálban szereplő $x^{2k+1}\varphi(x)$ függvény páratlan és abszolút értékének integrálja a számegyenesen véges, adódik, hogy $E\xi^{2k+1} = 0$. Páros indexekre parciálisan integrálhatunk.
$E\xi^{2k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k}\varphi(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1}xe^{-x^2/2}\, dx =$



5.23. ábra. 1,8 várható értékű és 2 szórású változók sűrűségfüggvénye

$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{d}{dx} \left(e^{-x^2/2} \right) dx =$
$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \left[x^{2k-1} e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} e^{-x^2/2} \, dx =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} e^{-x^2/2} = (2k-1) E\xi^{2k-2} \, dx.$
$E\xi^0 = 1$ miatt a fenti azonosságból kapjuk, hogy $E\xi^2 = 1$ (ezt már korábban is kiszámoltuk), $E\xi^4 = 3E\xi^2 = 3$, $E\xi^6 = 5E\xi^4 = 5 \cdot 3$, és teljes indukcióval $E\xi^{2k} = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot (2k-5) \cdots 3 \cdot 1$.

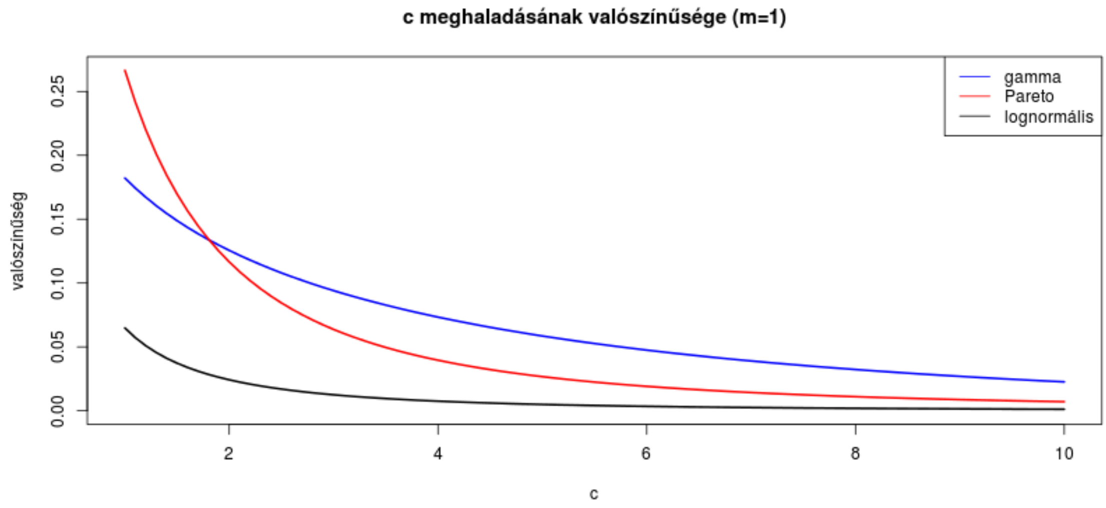
5.4. Egyenlőtlenségek

A valószínűségi változók várható értékét és szórásnégyzetét a változók eloszlása határozza meg. Egy kissé meglepő módon az is igaz, hogy a várható érték és szórásnégyzet ismeretében bizonyos következtetéseket tudunk levonni a valószínűségi változók eloszlásáról a következő két egyenlőtlenség segítségével.

5.3 Tétel (Markov-egyenlőtlenség) *Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik az $E\xi$ várható értéke, továbbá legyen c pozitív szám. Ekkor $P(\xi \geq c) \leq \frac{E\xi}{c}$.*

5.4 Tétel (Csebisev-egyenlőtlenség) *Ha ξ szórásnégyzete véges, azaz $D^2\xi < \infty$, valamint $0 \leq \lambda$, akkor teljesül a $P(|\xi - E\xi| \geq \lambda) \leq \frac{D^2\xi}{\lambda^2}$ egyenlőtlenség.*

A következő fejezetben fogjuk bemutatni az egyenlőtlenségek alkalmazását, most csak azt nézzük meg, hogy egyes esetekben mennyire éles vagy nem éles eredményeket adnak.



5.24. ábra. 1 várható értékű és 3 szórású valószínűségi változók milyen valószínűséggel haladják meg c-t?

5.31 Feladat Határozzuk meg az m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű gamma, lognormális és Pareto eloszlások esetében a $P(\xi \geq cm), c > 2$ valószínűségeket, illetve becsüljük meg őket a Markov- és Csebisev-egyenlőtlenséggel!

Megoldás. A Markov-egyenlőtlenségből rögtön adódik a $P(\xi \geq cm) \leq \frac{E\xi}{cm} = \frac{1}{c}$ becslés. Mivel a valószínűségi változó pozitív és $c > 2$, ezért $P(\xi \geq cm) = P(|\xi - m| \geq (c-1)m) \leq \frac{\sigma^2}{(c-1)^2 m^2}$ a Csebisev-egyenlőtlenség szerint.
Korábbi példánkban meghatároztuk az m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű eloszlások paramétereit. Ebből a gamma eloszlásra a következő érték adódik.
$P(\xi \geq cm) = \int_{cm}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} \exp(-\lambda x) dx, \alpha = \frac{m^2}{\sigma^2}, \lambda = \frac{m}{\sigma^2}$
A lognormális eloszlásról tudjuk, hogy logaritmusa normális eloszlású, ezért
$P(\xi \geq cm) = P(\frac{\ln(\xi)-\mu}{s} \geq \frac{\ln(cm)-\mu}{s}) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(cm)-\mu}{s}\right)$, ahol $\mu = ln\left(\frac{m}{\sqrt{1+\sigma^2/m^2}}\right)$ és $s = \sqrt{\ln(1+\sigma^2/m^2)}$.
A Pareto-eloszlásnál
$P(\xi \geq cm) = \left(\frac{\beta}{\beta+cm}\right)^\alpha$, ahol $\alpha = \frac{2\sigma^2}{\sigma^2-m^2}, \beta = m\frac{\sigma^2+m^2}{\sigma^2-m^2}$. Természetesen itt szükséges a $\sigma^2 > m^2$ feltétel.

A pontos valószínűségeket mutatja be a 5.24 ábra, ahol $m = 1, \sigma = 3$. A `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_meghalad/` címen ugyanezt az ábrát különböző szórásokra és c-kre is megkaphatjuk.

5.5. Gyakorló feladatok

1. Válasszunk egy pontot találomra az $(0,1) \times (0,1)$ egységnégyzetből! Jelölje ξ_1, ξ_2 a választott pont két koordinátáját. Számítsuk ki $\xi = -\ln(\xi_1 \xi_2)$ eloszlás, sűrűségfüggvényét és várható értékét!

2. Ketté törünk egy 1m hosszú botot. Jelölje X a nagyobb rész hosszát és Y a rövidebbét. $P(X < t) =?$, $P(Y < t) =?$

3. Egy pálcát találomra választott pontjánál kettétörünk, majd a hosszabbik darabbal ugyanezt megismételjük. Mekkora a valószínűsége, hogy a három keletkezett darabból háromszög állítható össze?

4. Egységnyi oldalhosszúságú négyzetben találomra választunk egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az oldalaktól mért távolságainak négyzetösszege kisebb, mint $3/2$?

5. Egy körön találomra kiválasztunk három pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott háromszög tartalmazza a kör középpontját?

6. A $[0,1]$ intervallumot találomra választott két pontjával három részre osztjuk. Jelölje X a legrövidebb darab hosszát! Írjuk fel X eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7. Eloszlásfüggvények-e a következők?

   (a) $f(x) = x$ ha $x \in (0,1)$ $f(x) = 0$ ha $x < 0$ és $f(x) = 1$ ha $x > 1$,

   (b) $(0,1)$-en kívül mint előbb, ha $x \in (0,1)$ akkor $f(x) = 1/\pi \arcsin(2x-1) + 1/2$,

   (c) $f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + 1/2$

   (d) $f(x) = \sin(x)$

8. Válasszunk egy számot találomra a (0,1) intervallumból. A köbét jelölje X. Számítsuk ki X eloszlásfüggvényét!

9. Sűrűségfüggvény-e f, ha

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0 \\ x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x) & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$ ahol $\lambda > 0$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \notin (0, 3/2\pi) \\ \sin x & \text{egyébként} \end{cases}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

10. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paraméterekkel. Jelölje $Y = \min X_i$ ezek minimumát. Milyen eloszlású Y?

11. $F_Y' = f_Y$ az Y nem negatív valószínűségi változó sűrűség fv.-e. Fejezzük ki $\xi = 1/Y$ eloszlás– és sűrűségfüggvénvét az Y eloszlás ill. sűrűségfv.-ének segítségével!

12. $F_Y' = f_Y$ az Y nem negatív valószínűségi változó sűrűség fv.-e. Fejezzük ki $\xi = Y^a$ $(a > 0)$ eloszlás– és sűrűségfüggvénvét az Y eloszlás ill. sűrűségfv.-ének segítségével!

13. f_Y az Y nem negatív valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Fejezzük ki $\eta = \max(Y, 1/Y)$ eloszlás– és sűrűségfüggvényét Y eloszlás ill. sűrűségfüggvényének segítségével!

6. fejezet

Együttes viselkedés

Nagyon sok esetben egy véletlen eseménynél nem egy, hanem több változót figyelünk meg. A több változó eloszlását is az eloszlásfüggvénnyel határozzuk meg.

6.1 Definíció A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{\xi}}(\underline{x}) := P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$ függvény.

Amennyiben a valószínűségi változók diszkrétek, akkor az eloszlást (eloszlásfüggvényt) egyértelműen meghatározzák az együttes $P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n)$ valószínűségek. Abszolút folytonos esetben az együttes sűrűségfüggvénnyel jellemezzük az eloszlást.

6.2 Definíció A $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ változók együttes sűrűségfüggvénye az n-változós f függvény, ha együttes eloszlásfüggvényük minden $(x_1, \ldots, x_n)$ pontban megegyezik $\int_{-\infty}^{x_n} \ldots \int_{-\infty}^{x_1} f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$-el.

Amennyiben ismerjük az f együttes sűrűségfüggvényt, úgy meg tudjuk határozni a valószínűségi változók függvényének várható értékét.
$E(h(\xi_1, \ldots, \xi_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, \ldots, y_n) f(y_1, \ldots, y_n) dy_1 \ldots dy_n$.

6.1. Valószínűségi változók függetlensége

A fejezetben először azzal esettel foglalkozunk, amikor a változók semmilyen formában nem befolyásolják egymást. A kísérletek függetlenségéről szóló részben már volt szó valószínűségi változók függetlenségéről, amit most általánosabban is megnézünk.

6.3 Definíció A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek, ha bármely $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervallumra $P(\xi_1 \in I_1, \ldots, \xi_n \in I_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \in I_i)$.

A definícióból rögtön látszik (hiszen a teljes számegyenest is intervallumnak tekintjük), hogy amennyiben $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek, akkor közülük $k \leq n$-et kiválasztva szintén független változókat kapunk. A definíciót továbbá kiterjeszthetjük végtelen sok változó esetére is.

6.4 Definíció A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, ha minden n-re $\xi_1, \ldots, \xi_n$ függetlenek.

Független valószínűségi változók függvényei is függetlenek lesznek. Például, ha ξ_1, ξ_2, ξ_3 függetlenek, akkor ξ_1^2, ξ_2, ξ_3^5 is függetlenek, vagy $\xi_1 + \xi_2, \xi_3^3$ is.

A függetlenséget az eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény segítségével is meghatározhatjuk.

6.1 Tétel *(i) A $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha együttes eloszlásfüggvényük megegyezik eloszlásfüggvényeik szorzatával $F(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$ minden $\underline{x}$-re. (ii) Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ diszkrétek. Ekkor pontosan akkor függetlenek, ha $P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i)$ minden x_i-re. (iii) Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ abszolút folytonos valószínűségi változók. Itt a függetlenség ekvivalens azzal, hogy együttes sűrűségfüggvényük megegyezik sűrűséfüggvényeik szorzatával $f(\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i)$.*

6.2. Konvolúció

Gyakran szükségünk van független változók összegének eloszlására. Ez különösen diszkrét esetben számolható ki könnyen.

6.2 Tétel (Diszkrét konvolúciós formula) *Legyenek ξ és η függetlenek, értékkészletük pedig $\{x_k\}$ és $\{y_l\}$. Ekkor $P(\xi + \eta = z) = \sum_{x_k + y_l = z} P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_l)$.*

6.1 Feladat Legyenek $\xi \sim B(n_1, p)$ és $\eta \sim B(n_2, p)$ függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Megoldás. $\xi + \eta$ értékkészlete $0, 1, \ldots, n_1 + n_2$, így $P(\xi + \eta = k) = \sum_{l=0}^{k} P(\xi = l) \cdot P(\eta = k - l) = \sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n_1-l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^{k-l} \cdot (1-p)^{n_2-k+l} = \sum_{l=\max\{k-n_2,0\}}^{\min\{k,n_1\}} \binom{n_1}{l} \cdot \binom{n_2}{k-l} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} = p^k \cdot (1-p)^{n_1+n_2-k} \cdot \binom{n_1+n_2}{k}$, azaz $\xi + \eta \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Meg kell jegyezni, hogy ugyanezt sokkal egyszerűbben is kiszámíthattuk volna. Tudjuk, hogy úgy kaphatunk egy n és p paraméterű binomiális eloszlású változót, ha megszámoljuk n független kísérletből a sikeres kísérletek számát (mindegyik kísérlet p valószínűséggel sikeres). Ez azt jelenti, hogy n független p-paraméterű indikátor változó összege $B(n, p)$ eloszlású. Legyenek ekkor $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású

p-indikátorok, ekkor $X_1 + \ldots + X_n \sim B(n,p)$, $X_{n+1} + \ldots + X_{n+m} \sim B(m,p)$, és $X_1 + \ldots + X_{n+m} \sim B(n+m,p)$.

6.2 Feladat Legyenek $\xi \sim \lambda$-Poisson és $\eta \sim \mu$-Poisson függetlenek. Ekkor $\xi + \eta \sim (\lambda+\mu)$-Poisson.

Megoldás. $P(\xi+\eta=k) = \sum\limits_{l=0}^{k} P(\xi=l)\cdot P(\eta=k-l) = \sum\limits_{l=0}^{k} \frac{\lambda^l \cdot e^{-\lambda}}{l!} \cdot \frac{\mu^{k-l}\cdot e^{-\mu}}{(k-l)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot \sum\limits_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \cdot \lambda^l \cdot \mu^{k-l} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \cdot (\lambda+\mu)^k$, azaz valóban $(\lambda+\mu)$ paraméterű Poisson-eloszlást kapunk.

Független kísérleteket végzünk. Egy kísérlet p valószínűséggel sikeres. Jelöljük ξ-vel az r-edik sikeres kísérlet sorszámát. Ekkor ξ lehetséges értékei $\{r, r+1, r+2, \ldots\}$ és a $\{\xi = k\}$ esemény pontosan azt jelenti, hogy az első $k-1$ kísérletből $r-1$ sikeres és $k-r$ sikertelen, továbbá az r-edik kísérlet sikeres. Így ennek valószínűsége:
$P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r$.

6.5 Definíció A $P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot (1-p)^{k-r} \cdot p^r, k = r, r+1, r+2, \ldots$ eloszlást (r,p) paraméterű (vagy másképpen r-edrendű p-paraméterű) negatív binomiális eloszlásnak nevezzük. Az $r = 1$ speciális esetet p-paraméterű Pascal vagy geometriai eloszlásnak nevezzük (ld. 3.5 fejezet).

6.3 Feladat Legyenek $\xi \sim p$-Pascal és $\eta \sim p$-Pascal függetlenek. Mi összegük eloszlása?

Megoldás. Végezzünk p valószínűséggel sikeres kísérleteket. Legyen X az első sikeres kísérlet sorszáma. Utána addig kísérletezünk, amíg megint sikeresek nem leszünk. Ezen újabb kísérletek számát jelöljük Y-al. Ekkor X és Y független p-Pascal eloszlásúak, így egyrészt összegük eloszlása megegyezik $\xi + \eta$ eloszlásával, másrészt összegük pont a 2. sikeres kísérlet sorszáma, melynek eloszlása másodrendű p paraméterű negatív binomiális.

Abszolút folytonos esetben is nagyon hasonló a konvolúciós formula, csak itt összegzés helyett integrálni kell.

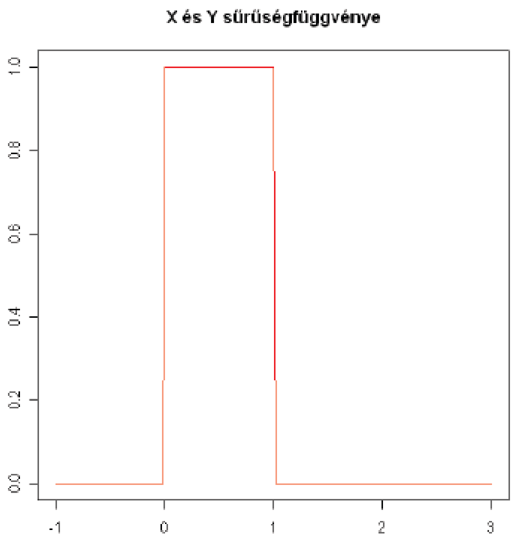
6.3 Tétel (Konvolúciós formula) *Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Ekkor $\xi + \eta$ is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye* $f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y)\cdot f_\eta(y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(y) \cdot f_\eta(x-y)\, dy.$

Ezzel a formulával a legkülönbözőbb eloszlású független valószínűségi változók összegének eloszlását lehet meghatározni, amit a következő példákban be is mutatunk.

6.4 Feladat X és Y független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók a $[0, 1]$ intervallumon. Mi lesz összegük eloszlása?

Megoldás. Az $X + Y$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x - y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x - y) = 1$, ha $0 \leq y \leq 1$, és $0 \leq x - y \leq 1$, azaz $x - 1 \leq y \leq x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy az $X + Y$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $[0, 1] \cap [x - 1, x]$ intervallum hosszával. Ha $x < 0$ vagy $x > 2$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x) = 0$. Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor ez a metszet a $[0, x]$ intervallum, és ennek hossza x, azaz ebben az esetben $g(x) = x$. Ha $1 \leq x \leq 2$, akkor ez a metszet a $[x - 1, 1]$ intervallum amelynek hossza $2 - x$, azaz $g(x) = 2 - x$ ebben az esetben.

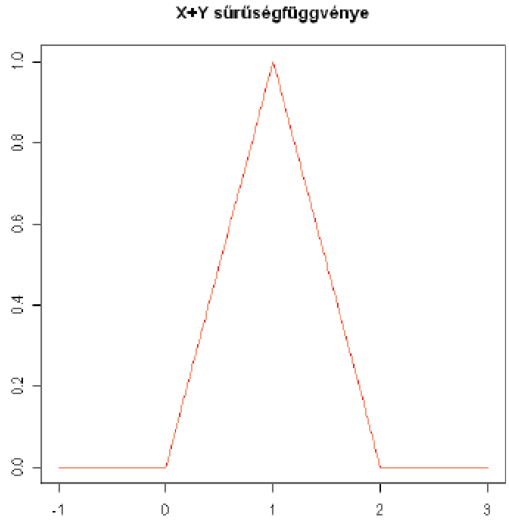
A 6.1 és 6.2 ábrán látható, hogy ennél a konvolúciónál az eredeti sűrűségfüggvényre



6.1. ábra. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású változók sűrűségfüggvénye

egyáltalán nem hasonlító sűrűségfüggvényt kaptunk. Meg kell jegyezni azt is, hogy ez a példa valójában megegyezik azzal a korábban megoldott példával, amikor az egységnégyzetben véletlenszerűen választott pont 2 koordinátája összegének eloszlását határoztuk meg.

6.5 Feladat Vegyünk egy olyan autóbuszjáratot, ahol a buszok követési ideje egymástól független, azonos λ-exponenciális eloszlású. Jelölje ξ_1 az első busz beérkezési idejét, ξ_2



6.2. ábra. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású változók konvolúciójának sűrűségfüggvénye

az első és a második busz érkezése közötti időt, ξ_3 a második és harmadik busz érkezése közöztti időt, stb. Ekkor mi a $[0,t)$ időintervallumban beérkező buszok számának eloszlása?

Megoldás. A http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/busz.gif animációban láthatjuk a buszok érkezési idejét és a beérkező buszok számát abban a speciális esetben, amikor az első busz 6-kor indul és a buszok átlagosan óránként követik egymást. Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független λ-exponenciális valószínűségi változók és $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Azt állítjuk, hogy ekkor S_n sűrűségfüggvénye $g_n(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda x}}{(n-1)!} & x > 0 \end{cases}$. Ezt n-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be a következőképpen.
Az $n = 1$ esetben g_1 pont a λ-exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Tegyük fel, hogy

n-ig igaz az állítás, és belátjuk $(n+1)$-re:

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) =& f_{(\xi_1+\ldots+\xi_n+\xi_{n+1})}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(x-y)}_{g_n(x-y)} \cdot \underbrace{f_{\xi_{n+1}}(y)}_{g_1(y)} dy \\
=& \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda(x-y)}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda y} dy \\
=& \frac{\lambda^{n+1}e^{-\lambda x}}{n!} \underbrace{\int_0^x n(x-y)^{n-1} dy}_{\int_0^x nz^{n-1}dz} = \frac{x^n \lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda x}
\end{aligned}$$

$(x > 0)$, amivel a kívánt eredményt kaptuk.
Jelölje N a beérkezett buszok számát. Erről az N-ről mutatjunk meg, hogy (λt)-Poisson eloszlású, ugyanis:

$$P(N = n) = P(N \geq n) - P(N \geq n+1) = P(S_n < t) - P(S_{n+1} < t) =$$

$$\int_0^t \frac{x^{n-1}\lambda^n e^{-\lambda x}}{(n-1)!} dx - \int_0^t \frac{x^n \lambda^{n+1} e^{-\lambda x}}{n!} dx = \frac{\lambda^n}{n!} \left\{ \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx - \underbrace{\int_0^t x^n \lambda e^{-\lambda x} dx}_{[x^n e^{-\lambda x}]_0^t - \int_0^t n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx} \right\} =$$

$$= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},$$

azaz ilyen valószínűséggel érkezik pontosan n busz a megállóba t idő alatt. Mellékesen megkaptuk azt az eredményt is, hogy amennyiben a buszok követési idejének várható értéke m, akkor t idő alatt várhatóan $\frac{t}{m}$ busz érkezik be a megállóba.

A megoldás során valójában azt mutattuk meg, hogy n db. független λ-exponenciális eloszlású változó (ezek eloszlása egyben $\Gamma_{1,\lambda}$) összege $\Gamma_{n,\lambda}$ eloszlású. Nézzük ezt meg általánosabban!

6.6 Feladat X és Y független $\lambda > 0$ paraméterű, $\alpha > 0$ illetve β rendű gamma eloszlásúak. Mutassuk meg, hogy $X + Y$ $\lambda > 0$ paraméterű és $\alpha + \beta$ rendű gamma eloszlású!

Megoldás. Jelöljük f-el X, g-vel Y sűrűségfüggvényét. Mivel f is és g is csak a pozitív félegyenesen nem 0, ezért a konvolúciós formulában csak egy véges intervallumon kell integrálni:
$f_{X+Y}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(t-x)\ dx = \int\limits_0^t f(x) \cdot g(t-x)\ dx$. Ez az azonosság természetesen nemcsak gamma eloszlású valószínűségi változókra, hanem tetszőleges pozitív abszolút

folytonos eloszlásúakra is igaz. A gamma eloszlásúakra kapjuk, hogy

$$\int_0^t \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\lambda^\beta (t-x)^{\beta-1}e^{-\lambda(t-x)}dx =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda t}\lambda^{\alpha+\beta}\int_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}dx|_{y=tx} =$$
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda t}\lambda^{\alpha+\beta}t^{\alpha+\beta-1}\underbrace{\int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}dy}_{\beta(\alpha,\beta)}$$

A $\beta(\alpha,\beta)$-val jelölt integrál nem függ t-től, tehát a sűrűségfüggvény az $\alpha+\beta$ rendű, λ paraméterű Γ eloszlás sűrűségfüggvényével arányos, és akkor az arányossági tényező csak 1 lehet. Azt is megkaptuk tehát, hogy

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\beta(\alpha,\beta)$$

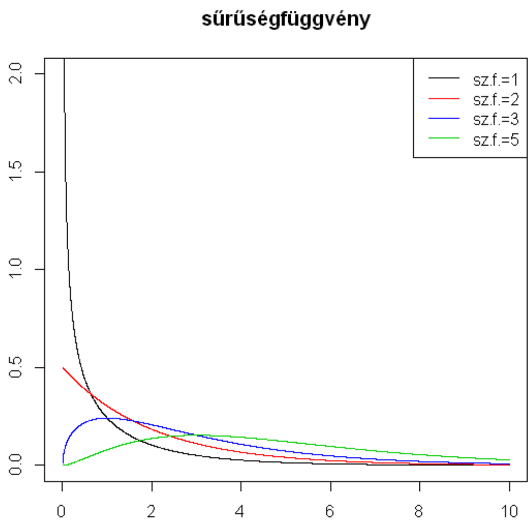
Tehát

$$\beta(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

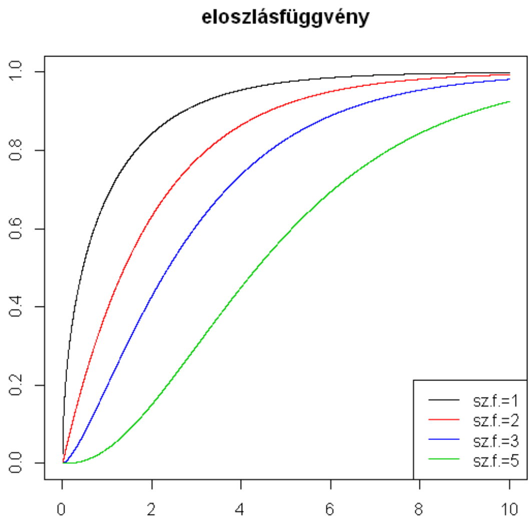
6.7 Feladat Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy $\xi^2+\eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

Megoldás. $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \geq 0$. Ebből a ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Írjuk fel a konvolució segítségével a kívánt sűrűségfüggvényt.
$f(x) = \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}}e^{-u/2}e^{-(x-u)/2}\,du =$
$= e^{-x/2}\int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\,dv = \frac{1}{2}e^{-x/2}$, ha $x \geq 0$,
és $f(x) = 0$, ha $x \leq 0$.
Észrevehetjük azonban, hogy valójában ezt a példát már megoldottuk, hiszen ξ^2 eloszlása nem más, mint $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, így $\xi^2+\eta^2$ eloszlása az előző példa szerint $\Gamma_{1,\frac{1}{2}}$, ami pont $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlás.
ξ^2 eloszlását χ^2 eloszlásnak, r darab független χ^2 eloszlású változó összegének eloszlását pedig r szabadságfokú χ^2 eloszlásnak nevezzük. Ez utóbbi jelölése χ^2_r.

A 6.3 és 6.4 ábrán különböző szabadságfokú χ^2 eloszlások sűrűség-, illetve eloszlásfüggvényét ábrázoltuk.



6.3. ábra. Különböző paraméterű χ^2 eloszlások sűrűségfüggvénye



6.4. ábra. Különböző paraméterű χ^2 eloszlások eloszlásfüggvénye

Felmerülhet a kérdés, hogy meg tudjuk-e határozni független valószínűségi változók különbségének sűrűségfüggvényét. Erre ad választ a következő példa.

6.8 Feladat Legyenek ξ és η független, abszolút folytonos valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy ekkor $\xi - \eta$ is abszolút folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye

$$f_{\xi-\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y) \cdot f_\eta(-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(y) \cdot f_\eta(y-x)\ dy.$$

Megoldás. A példa állítása rögtön következik abból, hogy ξ és $-\eta$ is független, abszolút folytonos valószínűségi változók, továbbá $-\eta$ sűrűségfüggvénye $f_{-\eta}(y) = f_\eta(-y)$.

Az előző példa eredményét rögtön alkalmazhatjuk a következő feladat megoldásánál.

6.9 Feladat Legyenek X, Y független, azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg $|X-Y|$ eloszlását!

Megoldás. X sűrűségfüggvénye $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{x} < 0 \end{cases}$, -$Y$ sűrűségfüggvénye pedig $\begin{cases} \lambda e^{\lambda x}, & x < 0 \\ 0, & \text{x} \geq 0 \end{cases}$. A konvolúciós formula szerint X-Y sűrűségfüggvénye

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x-y) f_{-Y}(y) dy = \int_{-\infty}^{\min(x,0)} f_X(x-y) f_{-Y}(y) dy = \int_{-\infty}^{\min(x,0)} \lambda e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{\lambda y} dy =$
$\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{2} \left[e^{2\lambda y}\right]_{-\infty}^{\min(x,0)} =$
$= \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{2}, & x \geq 0 \\ \frac{\lambda e^{\lambda x}}{2}, & x < 0 \end{cases}$

Ebből az abszolút érték sűrűségfüggvénye (ez csak a pozitív félegyenesen nem 0):

$$f_{X-Y}(x) + f_{X-Y}(-x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Így ugyanolyan paraméterű exponenciális eloszlást kaptunk.

Következő példánk azt mutatja meg, hogy független, normális eloszlású változók összege szintén normális eloszlású lesz. Ennek a ténynek igen sok alkalmazása van.

6.10 Feladat Legyen η_1 és η_2 két független normális eloszlású valószínűségi változó m_1 illetve m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel. Lássuk be, hogy az $\eta_1 + \eta_2$ összeg $m_1 + m_2$ várható értékű és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Megoldás. Legyen először $m_1 = m_2 = 0$ és $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = \sigma^2$. Ekkor a konvolúciós formula szerint az összeg sűrűségfüggvénye:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-u^2/2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} e^{-(x-u)^2/2\sigma^2}\ du$
$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(u-x/(\sigma^2+1))^2}{2\sigma^2/(\sigma^2+1)} - \frac{x^2/(\sigma^2+1) - x^2/(\sigma^2+1)^2}{2\sigma^2/(\sigma^2+1)} \right\} du$
$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(\sigma^2+1)}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2/(\sigma^2+1)}} \exp\left\{ -\frac{(u-x/(\sigma^2+1))^2}{2\sigma^2/(\sigma^2+1)} \right\} du$

$= \frac{1}{2\sqrt{\pi(\sigma^2+1)}} \exp\left\{ -\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)} \right\}.$

Itt kihasználtuk azt, hogy

$\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma^2/(\sigma^2+1)}} \exp\left\{ -\frac{(u-x/(\sigma^2+1))^2}{2\sigma^2/(\sigma^2+1)} \right\}$

egy $N(x/(\sigma^2+1), 2\sigma^2/(\sigma^2+1))$ eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Megkaptuk tehát, hogy az összeg eloszlása $N(0, 1+\sigma^2)$.

Visszatérve az általános esethez láthatjuk, hogy

$\eta_1 + \eta_2 = m_1 + m_2 + \sigma_1 \left(\frac{\eta_1 - m_1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1}(\eta_2 - m_2) \right) = m_1 + m_2 + \sigma_1(\xi_1 + \xi_2),$

ahol ξ_1 $N(0,1)$ és ξ_2 $N(0, \sigma_2^2/\sigma_1^2)$ függetlenek. A kiszámoltak szerint $\xi_1 + \xi_2$ $N(0, 1 + \sigma_2^2/\sigma_1^2)$, így $\eta_1 + \eta_2$ $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

6.11 Feladat A Súlytalan Kft által gyártott digitális konyhamérlegek mérési hibája két független tényezőre vezethető vissza. Az egyik az elem töltöttségétől függ, a másik a levegő páratartalmától. Az első hiba grammban mérve $N(0,1)$ eloszlású, a második $N(0, 2^2)$. Milyen eloszlású a mérési hiba? Mennyi a valószínűsége, hogy egy 52 grammos zsemlét legfeljebb 48 grammosnak mérünk?

Megoldás. Mivel a hibákról feltételeztük, hogy függetlenek és normális eloszlásúak, ezért összegük $N(0, 1+4) = N(0,5)$ eloszlású. Jelöljük a zsemle mérésének eredményét X-el. Ekkor X eloszlása $N(52, 5)$. Ebből a keresett valószínűség $P(X \leq 48) = P(\frac{X-52}{\sqrt{5}} \leq \frac{48-52}{\sqrt{5}}) = \Phi(-1,7889) = 1 - \Phi(1,7889) = 1 - 0,9632 = 0,0368$

6.12 Feladat Korábbi vizsgálatok szerint Budapesten egy köbméter levegőben a butin gázmolekulák mennyisége jó közelítésben normális eloszlásúnak tekinthető. Kis szennyezettségű napon a paraméterek 950 és 10^2. Amennyiben egy kis szennyezettségű napon 50 független mérést végzünk, akkor mennyi a valószínűsége, hogy a mérések átlaga meghaladja a 960-as értéket?

Megoldás. Amennyiben a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi változók függetlenek és $N(m, \sigma^2)$ eloszlásúak, akkor $\sum_{l=1}^{n} \xi_l$ eloszlása is normális nm és $n\sigma^2$ paraméterekkel. Így a $\frac{\sum_{l=1}^{n} \xi_l}{n}$ átlag eloszlása $N(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Esetünkben ez azt jelenti, hogy a mérések átlaga $N(950, 2)$ eloszlású. Amennyiben az átlagot Y-al jelöljük, úgy a keresett valószínűség $P(Y > 960) = P(\frac{Y-950}{\sqrt{2}} > \frac{960-950}{\sqrt{2}}) = 1 - \Phi(7,07)$, ami 0-hoz nagyon közeli érték.

6.3. Független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete

Korábban láttuk, hogy valószínűségi változók összegének várható értéke a várható értékek összege. A szorzatnál azonban már feltételekre is szükség van.

6.4 Tétel *Legyenek ξ és η független valószínűségi változók véges várható értékkel. Ekkor szorzatuk várható értéke is létezik és $E(\xi \cdot \eta) = E(\xi) \cdot E(\eta)$.*

Ebből a tulajdonságból vezethető le, hogy független valószínűségi változók összegének szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege.

6.5 Tétel *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként függetlenek és $D^2\xi_1, \ldots, D^2\xi_n < \infty$. Ekkor $D^2(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} D^2\xi_i$.*

A tételből rögtön levezethető a következő tulajdonság.

6.13 Feladat Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként függetlenek és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstansok. Ekkor $D^2(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 D^2\xi_i$

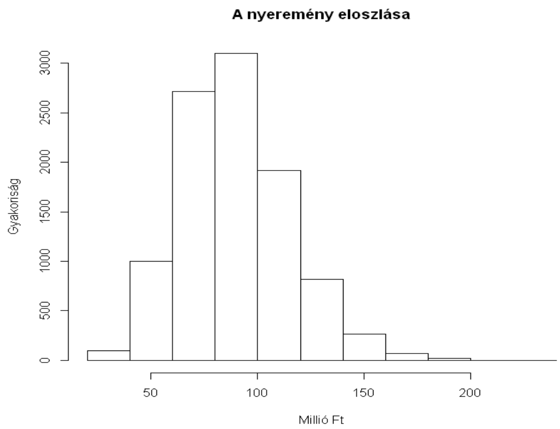
Megoldás. Mivel $c_1\xi_1, c_2\xi_2, \ldots, c_n\xi_n$ is páronként függetlenek, továbbá $D^2(c_i\xi) = c_i^2 D^2\xi_i$, ezért az összeg szórásnégyzetére vonatkozó példából rögtön következik a példa állítása. Nagyon fontos megjegyezni, hogy független valószínűségi változók különbségének szórásnégyzete megegyezik összegük szórásnégyzetével, azaz a szórásnégyzetek összegével.

6.14 Feladat Egy televíziós játékban a főnyereményt nagyon bonyolult módon sorsolják ki. 10 független kísérletet végeznek, mindegyiknél két független 3-paraméterű Poison eloszlású változót sorsolnak ki és veszik ezek szorzatát. A nyeremény ezen véletlen szorzatok összege millió forintban. Határozzuk meg a nyeremény várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás. Jelölje X_j és Y_j a j-ik kísérlet során a két eredményt, és legyen $Z_j = X_jY_j$, $1 \leq j \leq 10$. Ekkor minket az $\xi = \sum_{j=1}^{10} Z_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. Felírhatjuk, hogy $E\xi = \sum_{j=1}^{10} EZ_j = \sum_{j=1}^{10} EX_jEY_j$, és

$$D^2\xi = \sum_{j=1}^{10} D^2Z_j = \sum_{j=1}^{10}(EZ_j^2 - (EZ_j)^2) = \sum_{j=1}^{10} EX_j^2EY_j^2 - \sum_{j=1}^{10}(EX_jEY_j)^2.$$

Továbbá, $EX_j = EY_j = 3$, és $EX_j^2 = EY_j^2 = 3 + 3^2 = 12$ minden $1 \leq j \leq 10$ számra. Innen $E\xi = 10 \cdot 3 \cdot 3 = 90$, és $D^2\xi = 10 \cdot 12 \cdot 12 - 10 \cdot 9^2 = 630$.



6.5. ábra. TV játék nyereményeinek gyakorisága

A 6.5 ábrán mutatjuk be, hogy 10000 játékot véletlenül generálva mi a nyeremények gyakorisága.

6.15 Feladat Egy párt szavazótáborát szeretnénk megbecsülni úgy, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb 1%-ot tévedjünk. Hány embert kell ehhez legalább megkérdezni?

Megoldás. Jelölje N az összes ember, M a kérdéses pártra szavazók, n pedig a megkérdezettek számát, ekkor $p := \frac{M}{N}$-et akarjuk jól közelíteni. Legyen továbbá X_i értéke 1, ha az i-edik megkérdezett az adott pártra szavaz és 0 különben. Egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy X_i-k függetlenek. Ekkor a

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M}{N}\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, ami pontosan akkor igaz, ha

$$P\left(|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - p| > 0,01\right) \leq 0,05.$$

A Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$P\left(|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - p| > 0,01\right) \leq \frac{D^2(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n})}{0,01^2},$$

ahol

$$\frac{\frac{1}{n^2} D^2(\sum X_i)}{0,01^2} = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p(1-p)}{0,01^2} = \frac{10000 \cdot p(1-p)}{n} \leq \frac{10000 \cdot \frac{1}{4}}{n} \leq \frac{5}{100},$$

tehát $n \geq 50000$ ember választása biztosan elegendő.

6.16 Feladat Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy szabályos érme 1000-szeri feldobásánál legalább 600 fejet dobunk!

Megoldás. Legyen Y_i értéke 1, ha az i-edik dobás fej és 0 különben. Mivel az érme szabályos, ezért Y_i-k független $\frac{1}{2}$-paraméterű indikátor változók és nekünk a $P(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \geq 600)$ valószínűséget kell megbecsülnünk.
A Markov egyenlőtlenség közvetlen alkalmazásával a

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq 600) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} EY_i}{600} = \frac{500}{600} = \frac{5}{6}$$

becslés jön ki. Ez azonban láthatóan nagyon gyenge becslés, hiszen a szabályosság miatt annak valószínűsége, hogy egy szabályos érme 1000-szeri feldobásánál legalább 600 fejet dobunk ugyanannyi, mint annak valószínűsége, hogy egy szabályos érme 1000-szeri feldobásánál legalább 600 írást dobunk,így a becslendő valószínűség kisebb $\frac{1}{2}$-nél. A Csebisev egyenlőtlenség alkalmazásánál először használjuk újból, hogy annak valószínűsége, hogy legalább 600 fejet dobunk ugyanannyi, mint annak, hogy legalább 600 írást dobunk, az írások száma pedig $1000 - \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$. Ebből kapjuk, hogy

$P(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \geq 600) = \frac{P(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \geq 600) + P(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i \leq 400)}{2} = \frac{1}{2}P(|\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i - 500| \geq 100) \leq \frac{D^2(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i)}{2*100^2} = \frac{1}{80}$

A Markov egyenlőtlenséget azonban megpróbálhatjuk egy kicsit "trükkösebben" alkalmazni.

$$P(\sum_{i=1}^{1000} Y_i \geq 600) = P(\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{1000} Y_i}) \geq \left(\tfrac{3}{2}\right)^{600} \leq \frac{E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{1000} Y_i}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^{600}}$$

A $E\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{1000} Y_i}\right)$ várható érték megegyezik $E\left(\prod\limits_{i=1}^{1000} \left(\frac{3}{2}\right)^{Y_i}\right) = \prod\limits_{i=1}^{1000} E\left(\frac{3}{2}\right)^{Y_i} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1000}$-vel, így a jóval pontosabb

$P(\sum\limits_{i=1}^{1000} Y_i \geq 600) \leq \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^{1000}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{600}} = 1.799938 \cdot 10^{-9}$ becslést kapjuk.

6.17 Feladat A bizin részecskék számát egy nagyon bonyolult műszerrel mérik. A mérési hiba 100 különböző és egymástól független $N(0, 2^2)$ eloszlású hiba eredőjéből adódik. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a mért érték az igazitól legalább 100-al tér el!

Megoldás. Jelöljük a mérési hibát ε-al. Ekkor ε szórásnégyzete 400, így a Csebisev-egyenlőtlenségből $P(|\varepsilon| \geq 100) \leq \frac{400}{100^2} = 0,04$ becslés adódik. Azonban ebben az esetben felesleges becslést alkalmazni, mivel a hiba pontos $N(0, 100 \cdot 2^2)$eloszlása is ismert. Ebből $P(|\varepsilon| \geq 100) = P(\left|\frac{\varepsilon}{\sqrt{400}}\right| \geq \frac{100}{\sqrt{400}}) = \Phi(-5) + 1 - \Phi(5) = 2 \cdot (1 - \Phi(5)) = 5,733031 \cdot 10^{-7}$.

6.4. Kovariancia és korreláció

A valószínűségi változók természetesen nem mindig függetlenek. Összefüggésük mértékére különböző mérőszámok vannak, ezek közül talán a leggyakoribb a következőkben definiált kovariancia és korreláció.

6.6 Definíció A ξ és η valószínűségi változók **kovarianciája**

$$cov(\xi, \eta) = E\big\{(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)\big\},$$

korrelációja

$$R(\xi, \eta) = corr(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi, \eta)}{D\xi \cdot D\eta}.$$

ξ és η korrelálatlanok, ha kovarianciájuk 0.

Felsoroljuk a kovariancia és korreláció néhány fontosabb tulajdonságát.
$cov(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta$.
$|R(\xi, \eta)| \leq 1$.
$|R(\xi, \eta)| = 1$ akkor és csak akkor, ha létezik $a \neq 0$ és b, hogy $\xi = a\eta + b$ (1 valószínűséggel).
Amennyiben ξ és η függetlenek, akkor $R(\xi, \eta) = 0$.
Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ páronként korrelálatlanok és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ konstansok. Ekkor $D^2(c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2 D^2\xi_i$.

6.18 Feladat X egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy X és X^2 korrelálatlanok, de nem függetlenek!

Megoldás. Intuitíve látszik, hogy X^2 nem független X-től, de könnyű ezt megmutatni formálisan is. Mivel X $E[-1, 1]$ eloszlású, ezért $P(X < -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ és $P(X^2 < \frac{1}{4}) = P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy
$P(X < -\frac{1}{2}, X^2 < \frac{1}{4}) = P(X < -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(X < -\frac{1}{2})P(X^2 < \frac{1}{4})$,
ami mutatja, hogy a két változó nem független egymástól.
Tudjuk, hogy $EX = 0$ ás $D^2X = E(X^2) = \frac{1}{3}$. Rögtön látszik az is, hogy $E(X \cdot X^2) =$

$E(X^3) = 0$. Ebből a kovarianciára $cov(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - EXE(X^2) = 0$ adódik, tehát a két valószínűségi változó korrelálatlan.

A példa azt mutatja, hogy a függetlenség erősebb követelmény, mint a korrelálatlanság, ezért ezt a két tulajdonságot soha nem szabad összekeverni!

6.19 Feladat X és Y független standard normális eloszlásúak. Mutassuk meg, hogy $Z = XY$ esetén X és Z korrelálatlanok, de X^2 és Z^2 már nem!

Megoldás. Tudjuk, hogy standard normális eloszlású változókra $EX = 0, E(X^2) = 1, E(X^4) = 3$. Ebből kapjuk, hogy $EZ = EXEY = 0, E(Z^2) = E(X^2)E(Y^2) = 1$, továbbá, hogy $E(XZ) = E(X^2)EY = 0$ és $E(X^2Z^2) = E(X^4)E(Y^2) = 3$. Így a kovarianciákra adódnak a $cov(X, Z) = E(XZ) - EXEZ = 0$ és $cov(X^2, Z^2) = E(X^2Z^2) - E(X^2)E(Z^2) = 2$ eredmények, ami pont a példa állítását igazolja.

Gyakran nehéz kideríteni, hogy bizonyos véletlen mennyiségek függetlenek-e, viszont a korrelációt könnyebb számítani. Tudjuk, hogy ξ és η függetlenségéből következik, hogy ξ^k és η^k függetlenek és korrelálatlanok minden k hatványra. Ezért a függetlenség elvetéséhez elég egy hatványra megmutatni a korreláltságot.

6.20 Feladat X_1 és X_2 független, egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon. Legyen $Y_1 = \min(X_1, X_2), Y_2 = \max(X_1, X_2)$. Határozzuk meg $R(Y_1, Y_2)$-t!

Megoldás. $P(Y_2 < x) = x^2, 0 < x < 1$, így Y_2 sűrűségfüggvénye $2x$ a $[0, 1]$ intervallumon és 0 különben. Ebből kapjuk, hogy
$EY_2 = \int_0^1 x2xdx = \frac{2}{3}, EY_2^2 = \int_0^1 x^2 2xdx = \frac{1}{2}, D^2Y_2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$
Mivel $EY_1 + EY_2 = E(Y_1 + Y_2) = E(X_1 + X_2) = EX_1 + EX_2 = 1$, ezért $EY_1 = \frac{1}{3}$. A szorzatnál is hasonlóképpen járhatunk el.
$E(Y_1Y_2) = E(X_1X_2) = EX_1 \cdot EX_2 = \frac{1}{4}$,
amiből $cov(Y_1, Y_2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{36}$. Ennek segítségével meg tudjuk határozni Y_1 szórásnégyzetét.
$D^2(Y_1) = D^2(Y_1 + Y_2) - D^2Y_2 - 2cov(Y_1, Y_2) = D^2(X_1 + X_2) - D^2Y_2 - 2cov(Y_1, Y_2) = \frac{2}{12} - \frac{1}{18} - \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
Ebből már rögtön adódik a korreláció.
$R(Y_1, Y_2) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}$.

6.21 Feladat Mutassuk meg, hogy két esemény pontosan akkor független, ha indikátor változóik korrelálatlanok!

Megoldás. Amennyiben A és B függetlenek, úgy χ_A és χ_B indikátoraik is függetlenek, így korrelálatlanok is. Amennyiben $R(\chi_A, \chi_B) = 0$, úgy $E(\chi_A\chi_B) - E\chi_A E\chi_B = 0$. Azonban $E(\chi_A\chi_B) = E\chi_{AB} = P(AB), E\chi_A = P(A), E\chi_B = P(B)$, ezért A és B függetlenek.

Nem független valószínűségi változók összege szórásnégyzetének meghatározásához szükségünk van a változók korrelációjára. Ilyen típusú példák a következők.

6.22 Feladat 100-szor húzunk visszatevéssel egy dobozból, melyben 20 piros és 80 fehér golyó van. Tekintsük az egymást követő piros-piros húzáspárok számát és határozzuk meg ezen szám várható értékét és szórásnégyzetét? (Major Péter példája nyomán)

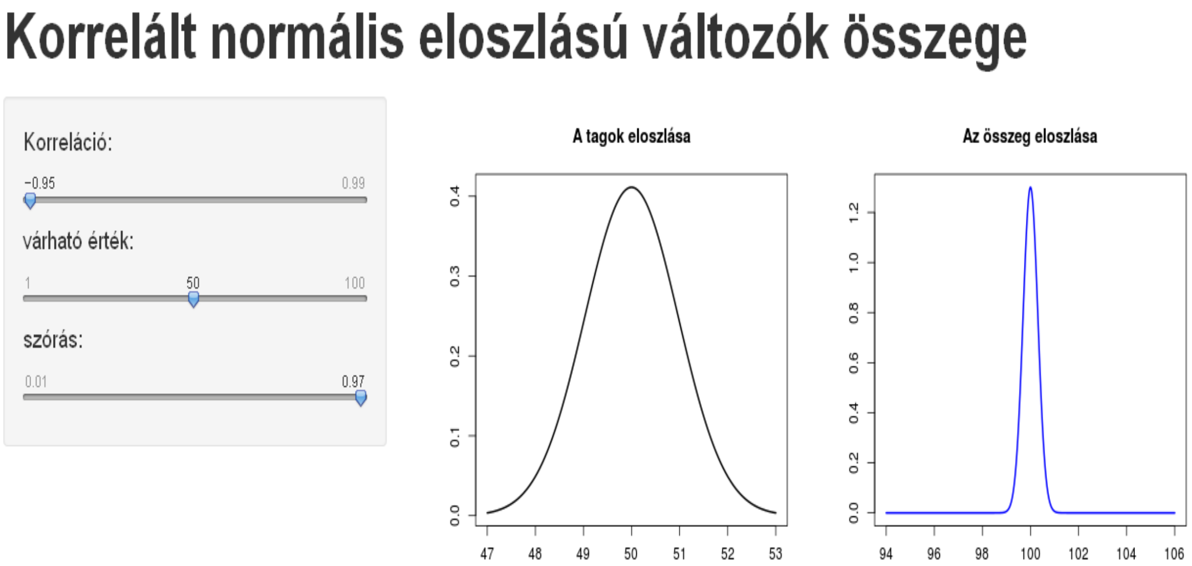
Megoldás. Vezessük be a következő ξ_j, $1 \leq j \leq 99$, valószínűségi változókat: $\xi_j = 1$, ha mind a j-edik és $j+1$-ik húzásnál pirosat húzunk, $\xi_j = 0$ egyébként. Az $S = \sum_{j=1}^{99} \xi_j$ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét akarjuk meghatározni. A várható értéket könnyen meghatározhatjuk $ES = E\left(\sum_{j=1}^{99} E\xi_j\right) = \frac{99}{25}$, mivel $E\xi_j = \frac{1}{25}$. Érdemes megjegyezni, hogy az ebben a feladatban tekintett ξ_j valószínűségi változók nem függetlenek, de a függetlenségre nincs szükség a várható érték additivításához.
A szórásnégyzet kiszámításában viszont figyelembe kell vennünk azt, hogy nem csupa független valószínűségi változó összegét vizsgáljuk. Használjuk a szórásnégyzet kiszámolásánál a következő formulát.

$$D^2 S = D^2\left(\sum_{j=1}^{99} \xi_j\right) = \sum_{j=1}^{99} D^2\xi_j + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq 99} cov(\xi_j, \xi_k).$$

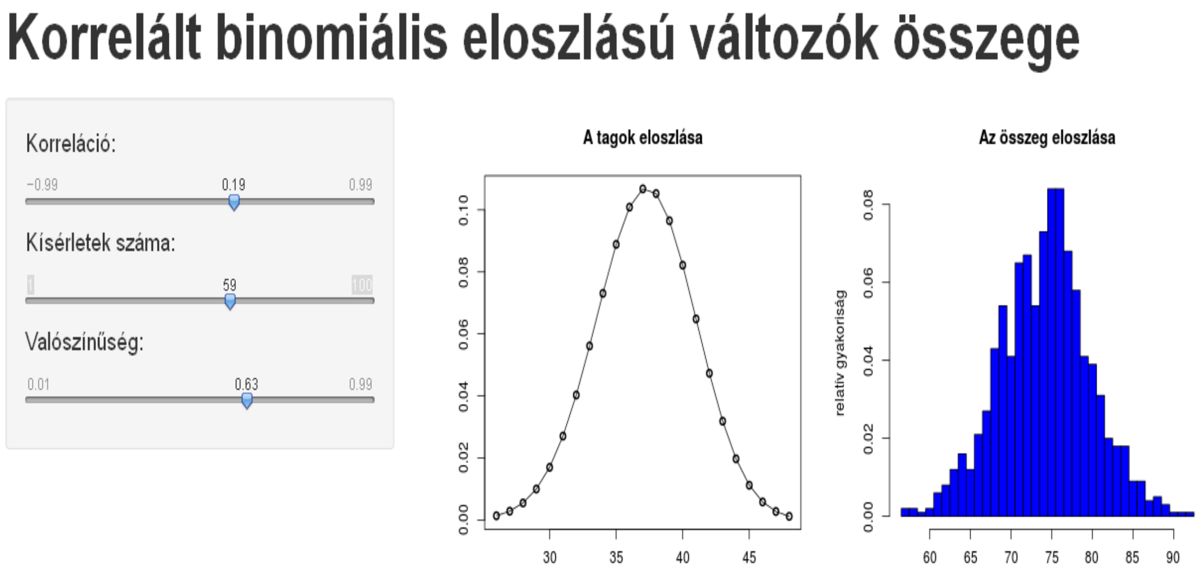
Továbbá $cov(\xi_j, \xi_k) = 0$, ha $k \geq j+2$, mert ebben az esetben ξ_j és ξ_k függetlenek, és $cov(\xi_j, \xi_{j+1}) = \frac{1}{125} - \frac{1}{625} = \frac{4}{625}$ minden $1 \leq j \leq 98$ számra. Ugyanis $E\xi_j\xi_{j+1} = \frac{1}{125}$, mivel $\xi_j\xi_{j+1} = 1$, ha a j-edikre, $j+1$-ikre és $j+2$-ikre mind pirosat húzunk, aminek valószínűsége $\frac{1}{125}$, és $\xi_j\xi_{j+1} = 0$ egyébként. Továbbá $E\xi_j E\xi_{j+1} = \frac{1}{625}$. Ezenkívül $D^2\xi_j = \frac{24}{625}$. Innen $D^2 S = 99 \cdot \frac{24}{625} + 2 \cdot 98\frac{4}{625} = \frac{632}{125}$.

A korreláció jelenléte természetesen nemcsak az összeg szórásnégyzetét befolyásolja, hanem magát az eloszlást is. Erre a hatásra mutat példát a http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_konv1/ oldal animációja. Itt korrelált normális eloszlások összegét vizsgáljuk. A 6.6 ábra egy screenshot az animációból (jól látható, hogy a negatív korreláció hatására az összeg eloszlása koncentrálódik a várható érték körül). A http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_konv2/ oldalon pedig összefüggő binomiális eloszlásokat vizsgálhatunk. A 6.7 ábra egy screenshot ebből az animációból. Itt a korrelációt csak bizonyos korlátok között változtathatjuk, mert a binomiális eloszlásokat úgynevezett polinomiális eloszlás komponenseiként modellezzük. Az összeg eloszlását itt 1000 szimuláció hisztogramja mutatja.

6.23 Feladat Bergengóciában a király minden alattvalóját megajándékozza a születésnapján. Az alattvaló olyankor 10-szer húz visszatevéssel egy magyar kártyás pakliból és annyi aranyat kap ahány különböző lapot húzott. Határozzuk meg a kapott aranyak számának várható értékét és szórásnégyzetét? (Major Péter példája nyomán)



6.6. ábra. Korrelált normális eloszlások összegének eloszlása



6.7. ábra. Korrelált binomiális eloszlások összegének eloszlása

Megoldás. Számozzuk meg a kártyákat 1-től 32-ig, és vezessük be a következő ξ_j, $1 \leq j \leq 32$ valószínűségi változókat. $\xi_j = 1$, ha a j-ik kártyát kiválasztjuk, $\xi_j = 0$, ha a j-ik kártyát nem választjuk ki a 10 húzás során. Jelölje X a kapott aranyak számát. Ekkor

$X=\sum_{j=1}^{32}\xi_j$. Ezért $EX=\sum_{j=1}^{32}E\xi_j=\sum_{j=1}^{32}P(\xi_j=1)$. Annak a valószínűsége, hogy a j-edik kártyát nem húzzuk ki 10 húzás során $(\frac{31}{32})^{10}$. Innen $P(\xi_j=1)=1-(\frac{31}{32})^{10}$, $EX=32\left(1-(\frac{31}{32})^{10}\right)=8,704763$.
Jelölje Y a ki nem húzott kártyák számát, és vezessük be az $\eta_j=1-\xi_j$, $1\le j\le 32$, valószínűségi változókat, amelyekre $\eta_j=1$, ha a j-edik kártyát nem választjuk ki, és $\eta_j=0$, ha a j-edik kártyát kiválasztjuk a 10 húzás során. Ekkor $Y=\sum_{j=1}^{32}\eta_j$, és $Y=32-X$, ahonnan $D^2Y=D^2X$.
$D^2X=D^2Y=\sum_{j=1}^{32}D^2\eta_j+2\sum_{1\le i<j\le 32}cov(\eta_i,\eta_j)$. Mivel η-k indikátor változók, ezért $D^2\eta_j=P(\eta_j=1)-P(\eta_j=1)^2$, és $cov(\eta_i,\eta_j)=P(\eta_i=1,\eta_j=1)-P(\eta_i=1)P(\eta_j=1)$, ha $i\ne j$. Továbbá $P(\eta_i=1,\eta_j=1)=\left(\frac{30}{32}\right)^{10}$,
$P(\eta_i=1)=P(\eta_j=1)=\left(\frac{31}{32}\right)^{10}$. Innen $cov(\eta_i,\eta_j)=\left(\frac{30}{32}\right)^{10}-\left(\frac{31}{32}\right)^{20}$, és $D^2\eta_j=\left(\frac{74}{75}\right)^{40}-\left(\frac{74}{75}\right)^{20}$. Ezért

$$D^2X=D^2Y=32\left(\frac{31}{32}\right)^{10}\left(1-\left(\frac{31}{32}\right)^{10}\right)+32\cdot 31\left(\left(\frac{30}{32}\right)^{10}-\left(\frac{31}{32}\right)^{20}\right)=11,78176.$$

Igen gyakori, hogy nem a megfigyelt változóra van szükségünk, hanem egy másikra. A következő példa azt mutatja meg, hogy hogyan érdemes lineárisan előrejelezni. Keressük azt az a és b értéket melyre az η valószínűségi változó és az $a\xi+b$ változó átlagos négyzetes eltérése a legkisebb.

6.24 Feladat $\min\limits_{a,b}E(\xi-a\eta-b)^2=E(\xi-m_1-r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\cdot(\eta-m_2))^2=(1-r^2)\cdot\sigma_1^2$, ahol $m_1=E\xi$, $m_2=E\eta$, $\sigma_1^2=D^2\xi$, $\sigma_2^2=D^2\eta$ és $r=R(\xi,\eta)$.

Megoldás. $E(\xi-a\eta-b)^2=E(\xi-m_1-a(\eta-m_2)+m_1-am_2-b)^2=$
$=\sigma_1^2+a^2\sigma_2^2+(m_1-am_2-\underbrace{b}_{=m_1-am_2})^2-2a\cdot\underbrace{cov(\xi,\eta)}_{=r\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}=\sigma_1^2+\underbrace{a^2\sigma_2^2-2a\cdot r\sigma_1\sigma_2}_{(a\sigma_2-r\sigma_1)^2-r^2\sigma_1^2}=(1-r^2)\cdot\sigma_1^2+(a\sigma_2-r\sigma_1)^2$, ami $a:=r\cdot\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ választása esetén lesz minimális.

A példából következik, hogy a korreláció egy lineáris összefüggőségi mérőszám, hiszen minél közelebb van abszolút értékben 1-hez, annál kisebb lesz a lineáris előrejelzés hibája. Felmerül a kérdés, hogy milyen módon érdemes előrejelezni, ha nemcsak lineáris előrejelzésekben gondolkodunk. Ebben segít a feltételes várható érték általánosított fogalma.

6.5. Feltételes várható érték

6.7 Definíció Legyenek ξ és η diszkrét valószínűségi változók, melyekre $P(\xi = x_l) > 0, P(\eta = y_k) > 0$ és $\sum\limits_{l=1}^{\infty} P(\xi = x_l) = 1, \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(\eta = y_k) = 1$. A feltételes valószínűséget jelöljük $p_{\xi|\eta}(x_l|y_k) = P(\xi = x_l|\eta = y_k)$-val. Feltesszük, hogy $E(h(\xi))$ véges. Legyen $m(y_k) = \sum\limits_{l=1}^{\infty} h(x_l)p_{\xi|\eta}(x_l|y_k)$. Ekkor $h(\xi)$ feltételes várható értéke η-ra nézve $E(h(\xi)|\eta) = m(\eta)$. Az m függvényt $E(h(\xi)|\eta = y_k)$-val jelölik.

Hasonlóan határozzuk meg a feltételes várható értéket abszolút folytonos esetben. Először együttesen abszolút folytonos eloszlású változók feltételes sűrűségfüggvényét definiáljuk.

6.8 Definíció Feltételes sűrűségfüggvény: $f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}, & ha\ f_\eta(y) > 0 \\ 0, & ha\ f_\eta(y) = 0 \end{cases}$

A továbbiakban egy valószínűségi változó függvényének egy másik valószínűségi változóra vonatkozó feltételes várható értékét fogjuk értelmezni.

6.9 Definíció ξ és η együttesen abszolút folytonosak. Feltesszük, hogy $E(h(\xi))$ véges. Legyen $m(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)f_{\xi|\eta}(x|y)dy$.Ekkor $h(\xi)$ feltételes várható értéke η-ra nézve $E(h(\xi)|\eta) = m(\eta)$. Az m függvényt $E(h(\xi)|\eta = y)$-val jelölik.

Felsoroljuk a feltételes várható érték néhány fontos tulajdonságát.
Feltételes várható érték tulajdonságai
(1) Ha $\xi = c$, akkor $E(\xi|\eta) = c$. Ha $\xi \leq \psi$ 1 valószínűséggel, akkor $E(\xi|\eta) \leq E(\psi|\eta)$ (speciálisan $E(\xi|\eta) \leq E(|\xi||\eta)$).
(2) $E(a\xi + b\psi|\eta) = aE(\xi|\eta) + bE(\psi|\eta)$.
(3) Amennyiben ξ η függvénye, akkor $E(\xi|\eta) = \xi$.
(4) $E(E(\xi|\eta)) = E\xi$ (teljes várható érték tétel).
(5) Ha ξ független η-tól, akkor $E(\xi|\eta) = E\xi$.
(6) Legyen ψ η függvénye és $E|\xi\psi| < \infty$, ekkor $E(\xi\psi|\eta) = \psi \cdot E(\xi|\eta)$.

A következő példa mutatja, hogy a tulajdonságokból következik, hogy η ismeretében ξ-t a $E(\xi|\eta)$ feltételes várható értékkel tudjuk a legjobban közelíteni.

6.25 Feladat Legyen $E\xi^2 < \infty$. Ekkor a $E(\xi - f(\eta))^2$ négyzetes hiba akkor a legkisebb, ha $f(\eta) = E(\xi|\eta)$.

Megoldás. $E(\xi - f(\eta))^2 = E(\xi - E(\xi|\eta) + E(\xi|\eta) - f(\eta))^2 = E(\xi - E(\xi|\eta))^2 + E(E(\xi|\eta) - f(\eta))^2 + 2 \cdot \underbrace{E[(\xi - E(\xi|\eta)) \cdot (E(\xi|\eta) - f(\eta))]}_{*}$, ahol $* \overset{4)}{=} E\big(E\big[\xi - E(\xi|\eta)) \cdot (E(\xi|\eta) - f(\eta))|\eta\big]\big) \overset{6)}{=} E((E(\xi|\eta) - f(\eta)) \cdot \underbrace{E[\xi - E(\xi|\eta)|\eta]}_{**}) = 0$, ugyanis $** \overset{2)}{=} E(\xi|\eta) - E(E(\xi|\eta)|\eta) \overset{3)}{=} E(\xi|\eta) - E(\xi|\eta) = 0$. Rögtön látjuk azt is, hogy a négyzetes hiba legkisebb értéke $D^2\xi - D^2(E(\xi|\eta))$.

6.26 Feladat ξ és η együttes eloszlását a következő táblázat adja meg:

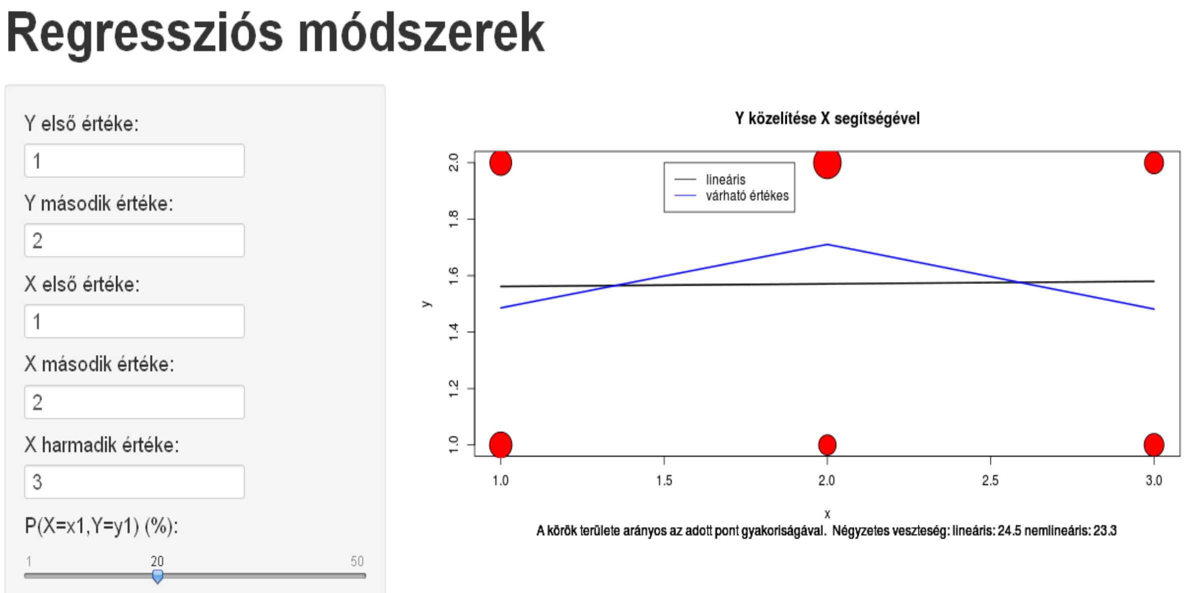
ξ η	**2**	**3**	**5**
2	6/18	3/18	2/18
5	3/18	3/18	1/18

Határozzuk meg ξ és η várható értékét, szórásnégyzetét, kovarianciájukat és korrelációjukat. Jelezzük előre ξ-t lineárisan és a legjobb módon η megfigyelése alapján!

Megoldás. Először a peremeloszlásokat írjuk fel.
$P(\xi = 2) = \frac{11}{18}, P(\xi = 5) = \frac{7}{18}$ és $P(\eta = 2) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}, P(\eta = 3) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}, P(\eta = 5) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.
Ebből a várható értékek $E\xi = 2 \cdot \frac{11}{18} + 5 \cdot \frac{7}{18} = \frac{57}{18} = \frac{19}{6}, E\eta = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$, a második momentumok $E\xi^2 = 4 \cdot \frac{11}{18} + 25 \cdot \frac{7}{18} = \frac{219}{18} = \frac{73}{6}, E\eta^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot \frac{1}{3} + 25 \cdot \frac{1}{6} = \frac{55}{6}$.
Ebből a szórásnégyzetek $D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{77}{36}, D^2\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{41}{36}$. A kovarianciához először a szorzat várható értékét határozzuk meg. $E(\xi\eta) = 4 \cdot \frac{6}{18} + 6 \cdot \frac{3}{18} + 10 \cdot \left(\frac{2}{18} + \frac{3}{18}\right) + 15 \cdot \frac{3}{18} + 25 \cdot \frac{1}{18} = \frac{162}{18} = 9$
Ebből a kovariancia $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = \frac{1}{36}$
és a korreláció $R(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{D\xi D\eta} = 0,01779765$.
Látható, hogy a változók alig korrelálnak. A lineáris előrejelzés ξ-re $E\xi + R(\xi, \eta) \cdot \frac{D\xi}{D\eta} \cdot (\eta - E\eta) = 3,166667 + 0,02439024(\eta - 2,833333)$.
Az előrejelzés várható négyzetes hibája $(1 - R(\xi, \eta)^2) \cdot D^2\xi = 2,138211$ alig kisebb, mint ξ 2,138889 szórásnégyzete.
Határozzuk meg ezután a legjobb előrejelzést! $E(\xi|\eta = j) = 2 \cdot P(\xi = 2|\eta = j) + 5 \cdot P(\xi = 5|\eta = j)$, ezért $E(\xi|\eta = 2) = E(\xi|\eta = 5) = 3$ és $E(\xi|\eta = 3) = 3,5$. Ebből $E(E(\xi|\eta)^2) = 3^2 \cdot (P(\eta = 2) + P(\eta = 5)) + 3,5^2 \cdot P(\eta = 3) = \frac{121}{12}$ és $D^2(E(\xi|\eta)) = E(E(\xi|\eta)^2) - (E\xi)^2 = \frac{1}{18} = 2,083333$, ami kissé kisebb, mint a lineáris előrejelzés hibája.

A http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_szimelore/ oldalon különböző eloszlásokból szimulált minták esetén számolható ki a lineáris és legjobb előrejelzés. A 6.8 ábra egy screenshot az animációból (sajnos nem látszik minden paraméter). További ábrák (11.9, 11.10, 11.11) a Függelékben találhatóak. A http://hpz400.cs.elte.hu:

3838/ZA_elore/ oldalon pedig ugyanilyen elméleti eloszlásokra számoljuk ki a lineáris és legjobb előrejelzést. A 6.9 ábra egy screenshot ebből az animációból (sajnos itt sem látszik minden paraméter).. A kétfajta animációnál azért eltérőek a veszteségfüggvény értékek, mert a szimulált esetben a teljes veszteséget számoljuk, ami a pontos számával együtt nő, míg az elméleti esetben a várható értéket.



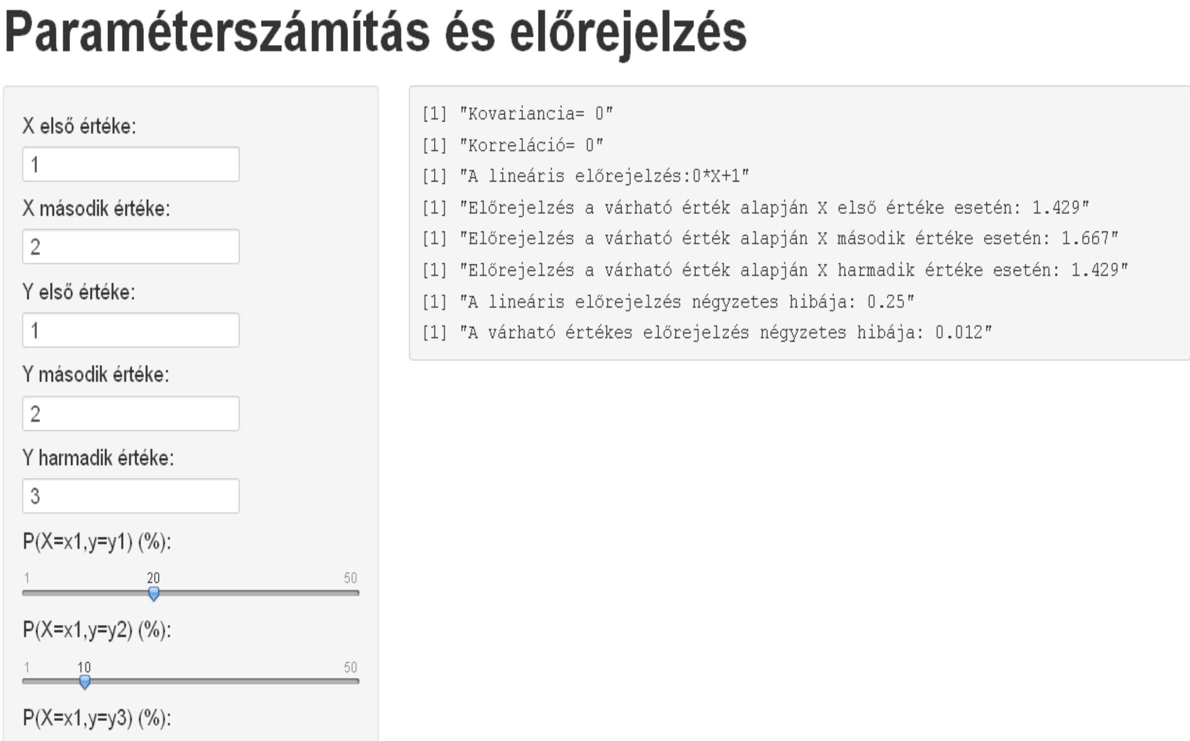
6.8. ábra. A lineáris és a nemlineáris előrejelzés összehasonlítása szimulált adatokon

6.27 Feladat („Buszparadoxon”) Vizsgáljuk meg, mennyit kell átlagosan várnunk a buszmegállóban! Korábban már vizsgáltuk azt a feladatot, hogy feltéve, hogy a buszok érkezése közti idők $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású λ-exponenciális változók, akkor a t időpontig várhatóan hány busz érkezik be. Most azt vizsgáljuk, hogy a t időpontban beérkezve a megállóba várhatóan mennyi ideig kell várnunk a következő buszra.

Megoldás. A http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/busz2.gif animációban láthatjuk a buszok érkezési idejét és várakozási időnket abban a speciális esetben, amikor az első busz 6-kor indul, a buszok átlagosan óránként követik egymást és 12-től kezdünk várni a buszra. Egy screenshot az animációból a 6.10 ábra.

Jelölje ω_t a várakozási időt, ha t-kor érkezünk. Ekkor az $E\omega_t$ várható értékre vagyunk kíváncsiak.

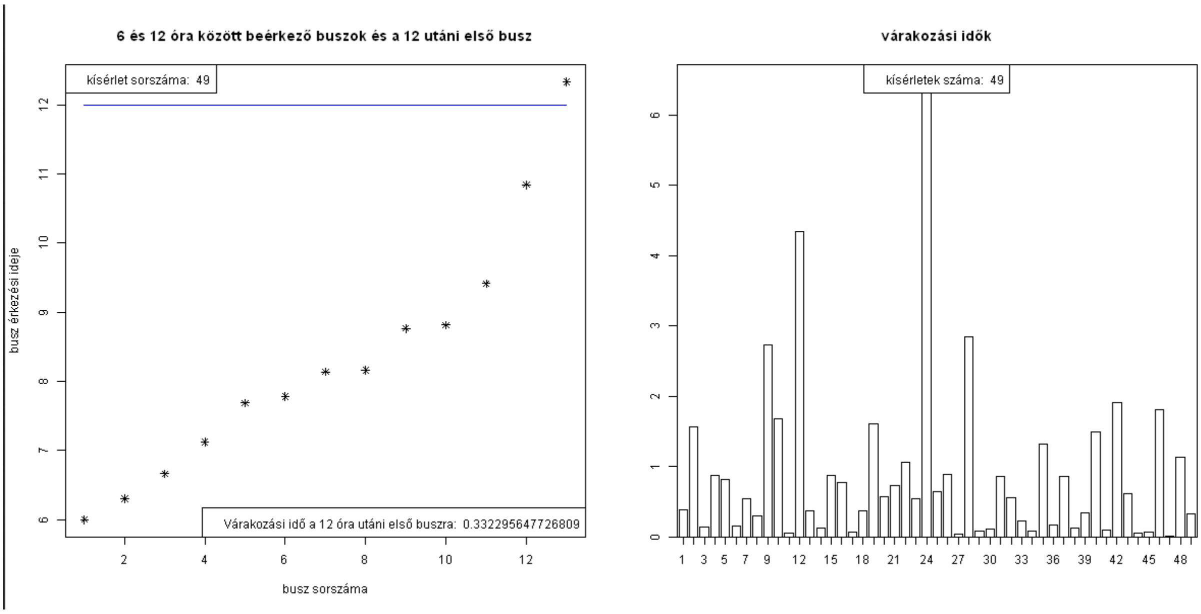
Legyen $S_0 = 0$ és $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. Ekkor $\omega_t = S_k - t$, ha $S_{k-1} < t \leq S_k$. Tudjuk, hogy $P(\omega_t < x) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\omega_t < x,\ S_{k-1} < t \leq S_k) = P(\omega_t < x,\ 0 < t \leq S_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(S_{k-1} + X_k - t < x,\ S_{k-1} < t \leq S_{k-1} + X_k)$.



6.9. ábra. A lineáris és a nemlineáris előrejelzés összehasonlítása

Ekkor $P(\omega_t < x,\ 0 < t \le S_1) = P(X_1 - t < x,\ t \le X_1) = P(t \le X_1 < x + t) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+t)}$. A feltételes várható érték tulajdonságai között szerepelt a teljes várható érték tétel, mely szerint $P(S_{k-1} + X_k - t < x,\ S_{k-1} < t \le S_{k-1} + X_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_{k-1}(y) \cdot P(S_{k-1} + X_k - t < x,\ S_{k-1} < t \le S_{k-1} + X_k \mid S_{k-1} = y)\, dy$, ahol a $k-1$ darab független λ-exponenciális változó konvolúciójának sűrűségfüggvénye $g_{k-1}(y) = \frac{\lambda^{k-1} \cdot y^{k-2} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-2)!}$, ha $0 < y$, különben pedig 0 (korábban már meghatároztuk, hogy az összeg ilyenkor $\Gamma_{k-1,\lambda}$ eloszlású). Így a keresett integrál $= \int\limits_0^t \frac{\lambda^{k-1} \cdot y^{k-2} \cdot e^{-\lambda y}}{(k-2)!} \cdot \underbrace{P(X_k < x + t - y,\ X_k \ge t - y)}_{e^{-\lambda(t-y)} - e^{-\lambda(x+t-y)}}\, dy = (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+t)}) \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1}$.

Ebből pedig $P(\omega_t < x) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+t)} + (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+t)}) \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda t} - 1} = (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(x+t)}) \cdot e^{\lambda t} = 1 - e^{-\lambda x}$. Megkaptuk tehát, hogy a várakozási idő szintén λ-exponenciális eloszlású, így a várakozási idő megegyezik a buszok követési idejének várható értékével. Meg kell jegyezni, hogy ennél rosszabb eset is előfordulhat, hiszen ha a követési idő várható



6.10. ábra. A buszok érkezési időpontjai és a várakozási idők

értéke véges, de szórása végtelen, akkor várhatóan végtelen sok ideig kell várakoznunk a következő buszra. Az exponenciális eloszlás esetén kapott eredmény (azaz, ha „belépünk" egy exponenciális eloszlású szakaszban, akkor a hátralévő idő is exponenciális eloszlású) összhangban van az eloszlás örökifjú tulajdonságával.

6.28 Feladat X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} 6xy(2-x-y) & \text{ha } 0 < x < 1.\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $E(X \mid Y)$-t!

Megoldás.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^1 6xy(2-x-y)dx = 6y\left((2-y)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right)$$
$$= 6y\left(1 - \frac{y}{2} - \frac{1}{3}\right) = y(4-3y), \quad 0 < y < 1,$$

és 0 máshol.
Ebből a feltételes sűrűségfüggvény:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{6x(2-x-y)}{4-3y} & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Így a feltételes várható érték:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,(X|Y=y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}dx \\
&= \frac{6}{4-3y}\left((2-y)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\right) = \frac{6}{4-3y}\left((2-y)\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{4-2y-\frac{3}{2}}{(4-3y)} = \frac{5-4y}{8-6y}, \\
\mathbf{E}\,(X|Y) &= \frac{5-4Y}{8-6Y}.
\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x\,|y)dx = \int_0^1 x\frac{6x(2-x-y)}{4-3y}dx =$
$= \frac{6}{4-3y}\left((2-y)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\right) = \frac{6}{4-3y}\left((2-y)\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \frac{4-2y-\frac{3}{2}}{(4-3y)} = \frac{5-4y}{8-6y},$
$\mathrm{E}(X|Y) = \frac{5-4Y}{8-6Y}.$

6.29 Feladat X, Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left(1+\frac{x+y}{2}\right) & \text{ha } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbf{E}\,(X|Y)$-t!

Megoldás. Y sűrűségfüggvénye:
$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\left(1+\frac{x+y}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(1+\frac{y}{2}\right)2\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\pi}(2+y)\,, \quad |y|<1.$
Ebből a feltételes sűrűségfüggvény:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1+\frac{x+y}{2}}{(2+y)\sqrt{1-y^2}} & \text{ha } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Így a feltételes várható érték:
$E(X|Y=y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x\left(1+\frac{x+y}{2}\right)}{(2+y)\sqrt{1-y^2}}dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2}{2(2+y)\sqrt{1-y^2}}dx = \frac{1-y^2}{3(2+y)}$
$E(X|Y) = \frac{1-Y^2}{3(2+Y)}$

6.6. Gyakorló feladatok

1. Legyen X és Y független exponenciális λ ill. μ paraméterekkel. Számítsuk ki $X+Y$ sűrűségfv.-ét!

2. Egy szabályos kocka oldalaira a -1,-1,0,0,1,1 számokat írjuk fel. Háromszor dobunk a kockával. Számítsuk ki a dobott számok összegének eloszlását!

3. Kockával n-szer dobunk. Jelölje X a dobott hatosok, Y pedig a dobott páratlan számok számát. $E(XY) =?$

4. Egy dobozban 5 piros és 5 kék golyó van. 100-szor húzunk visszatevéssel. Jelölje X az első 50, Y az első 75, Z pedig az utolsó 30 húzásból a pirosak számát. Határozzuk meg, az $X+Z$ és Y korrelációs együtthatóját, azaz a

$$\frac{\mathbf{E}\left((X+Z-\mathbf{E}\left(X+Z\right))\left(Y-\mathbf{E}\left(Y\right)\right)\right)}{D(X+Z)D(Y)}$$

   hányadost!

5. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független 1-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Számítsuk ki,

$$Y_k = \frac{X_k}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \text{ és } \quad Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

   együttes sűrűségfüggvényét. Igaz-e, hogy $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ és Y függetlenek.

7. fejezet

A kísérletek számának növelése: aszimptotikus tulajdonságok

A köznapi beszédben az egyik leggyakrabban emlegetett matematikai tétel "A nagy számok törvénye". Sajnálatos módon általában hibásan interpretálják, de az azért kiderül, hogy sok kísérlet esetén az átlag valamihez konvergál. Először az úgynevezett gyenge törvényt mondjuk ki.

7.1. Gyenge törvények

7.1 Tétel (A nagy számok gyenge törvénye) *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként korrelálatlan, azonos várható értékű és szórásnégyzetű valószínűségi változók, $D^2\xi_i = \sigma^2 < \infty$ és $E\xi_i = m$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$-ra*

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

A következő példa mutatja, hogy nem kell feltételnül megkövetelnünk a várható értékek és szórásnégyzetek egyezőségét.

7.1 Feladat Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots$ páronként korrelálatlan valószínűségi változók, melyekre $D^2\xi_i \leq c < \infty$, $E\xi_i = m_i$, $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}{n} \to m$, ha $n \to \infty$. Ekkor minden $0 < \varepsilon$-ra

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \text{ ha } n \to \infty.$$

Megoldás. Tudjuk, hogy $E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}{n}$. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk elég nagy n-re, hogy

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i}{n}\right|\geq\varepsilon\right)\leq P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}-m\right|\geq\varepsilon/2\right)+P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i}{n}-m\right|\geq\varepsilon/2\right)\leq\frac{D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right)}{e^2/4}=$$

$\frac{\frac{4}{n^2}\cdot D^2\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{4}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}D^2\xi_i}{\varepsilon^2}\leq\frac{4}{n}\cdot\frac{c}{\varepsilon^2}\to 0$, ha $n\to\infty$. Itt felhasználtuk azt, hogy elég nagy n-re $P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i}{n}-m\right|\geq\varepsilon/2\right)$ 0-val egyenlő.

7.2. Valószínűségi változók konvergenciái

A nagy számok törvényében szereplő konvergencia csak az egyik a valószínűségi változók konvergenciái közül. Az alábbiakban bevezetjük a legfontosabb konvergenciafajtákat.

7.1 Definíció $\xi_n\to\xi$ **eloszlásban**, ha $F_{\xi_n}(x)\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}F_\xi(x)$ az utóbbi minden folytonossági pontjában.

$\xi_n\to\xi$ **sztochasztikusan**, ha $P|\xi_n-\xi|\geq\varepsilon\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ minden $0<\varepsilon$-ra.

$\xi_n\to\xi$ **majdnem mindenütt**, ha $P\left(w:\xi_n(w)\to\xi(w)\right)=1$. [1 valószínűségű konvergencia].

$\xi_n\to\xi$ **L^p-ben**, ha $E|\xi_n-\xi|^p\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Az 1 valószínűségű, illetve L^p konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, míg ez utóbbiból az eloszlásbeli konvergencia. Az 1 valószínűségű és L^p konvergencia esetében nem beszélhetünk arról, hogy valamelyik konvergencia erősebb a másiknál.

7.2 Feladat Adjunk meg olyan valószínűségi változó sorozatot, amely majdnem mindenütt konvergál, de L^p-ben nem.

Megoldás. Legyen $\Omega:=[0,1]$ geometriai valószínűségi mező és $\xi_n(w)=\begin{cases}e^n & : & w\in[0,\frac{1}{n}]\\ 0 & : & w\notin[0,\frac{1}{n}]\end{cases}$.

Ekkor $\xi_n\to 0$ majdnem mindenütt, viszont $E|\xi_n|^p=\frac{1}{n}e^{np}+(1-\frac{1}{n})\cdot 0=\frac{e^{np}}{n}\nrightarrow 0$.

Ahhoz, hogy példát adjunk arra, hogy az L^p konvergenciából sem következik az egy valószínűségű szükségünk lesz a következő lemmákra.

7.2 Definíció Legyen az A_n eseménysorozatra

$$\liminf\overline{A_l}:=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{l=n}^{\infty}\overline{A_l},$$

illetve

$$\limsup A_k:=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

Ekkor $w \in \liminf \overline{A_l}$ pontosan akkor teljesül, ha w az A_n-ek közül csak véges soknak eleme, illetve $w \in \limsup A_k$ pontosan akkor teljesül, ha w végtelen sok A_n-nek eleme.

7.2 Tétel (Borel-Cantelli-lemmák)

1) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$*, akkor az* A_n*-ek közül* 1 *valószínűséggel csak véges sok következik be.*

2) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ *és az* A_n*-ek függetlenek, akkor az* A_n*-ek közül* 1 *valószínűséggel végtelen sok bekövetkezik.*

7.3 Feladat Adjunk meg olyan valószínűségi változó sorozatot, amely L^p-ben konvergál, de majdnem mindenütt nem!

Megoldás. Legyenek ξ_n-ek függetlenek, $P(\xi_n = 1) = d_n$, $P(\xi_n = 0) = 1 - d_n$. Ekkor $E|\xi_n|^p = d_n$. A ξ_n sorozat pontosan akkor tart L^p-ben 0-hoz, ha $d_n \to 0$. Továbbá ξ_n pontosan akkor tart 0-hoz majdnem mindenütt, ha 1 valószínűséggel véges sok ξ_n nem 0, ami pedig a Borel-Cantelli-lemma szerint ekvivalens azzal, hogy $\sum d_n$ véges. Így például a $d_n = \frac{1}{n}$ választás esetén $\xi_n \nrightarrow 0$ majdnem mindenütt, viszont L^p-ben igen.

7.3. Erős törvény

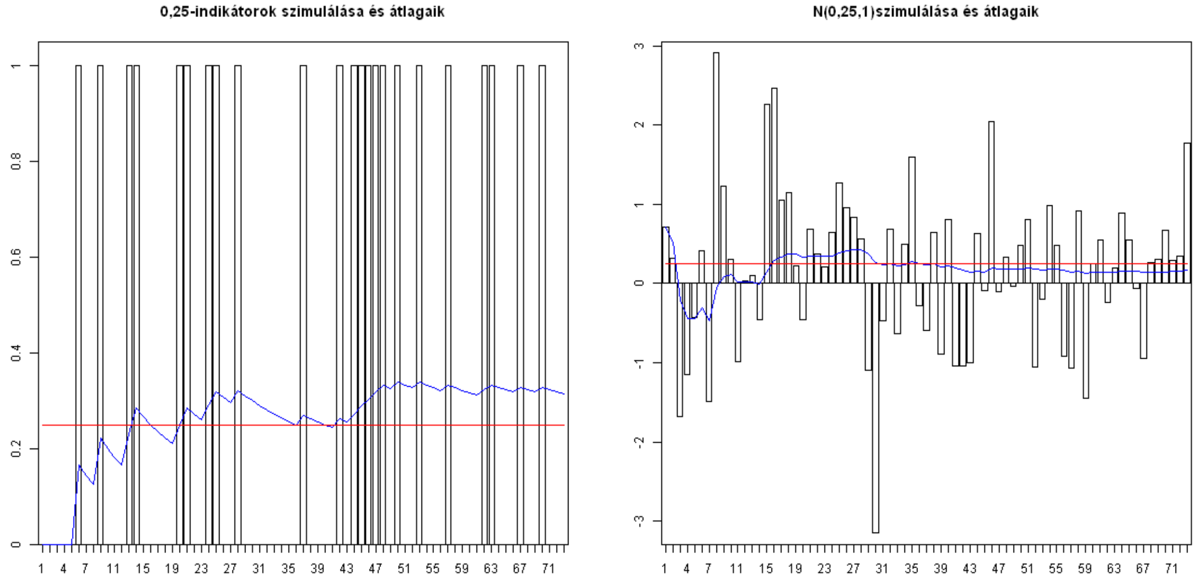
Független, azonos eloszlású valószínűségi változókra teljesül a nagy számok erős törvénye.

7.3 Tétel (Nagy számok Kolmogorov-féle erős törvénye) *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású véges várható értékű valószínűségi változók. Ekkor* $\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \to E\xi_1$ *majdnem mindenütt és* L^1*-ben.*

A http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/nszt.gif animációban láthatjuk, hogy 0,25-paraméterű indikátor illetve N(0,25,1) változók átlaga hogyan tart a 0,25-ös várható értékhez. Egy screenshot a 7.1 ábra.

A http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/pareto.gif animációban már egészen más képet láthatunk, hiszen ott Pareto(5,1) változókat szimulálunk és azok átlagát nézzük és ezekről tudjuk, hogy várható értékük végtelen.

7.4 Feladat (Borel) Legyen $\Omega = [0, 1]$ és azon a geometriai valószínűségi mező. Az elemi eseményeket írjuk fel 2-es diadikus tört $w = 0, w_1 w_2 \ldots$ alakban. Milyen arányban fordulnak elő a 0-ák és 1-esek a számokban?



7.1. ábra. A nagy számok törvényének illusztrálása indikátorokra és normális eloszlású változókra

Megoldás. Tekintsük a $\xi_n(w) = w_n$ valószínűségi változókat, azaz az n-edik számjegyet.
Ekkor
$\left\{w : \xi_1(w) = x_1, \ldots, \xi_n(w) = x_n\right\} = \left\{w : \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} \le w < \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right\}$.
Mivel $P(\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{2^n}$, ezért $P(\xi_i = x_i) = \frac{1}{2}$, ahol $x_i = 0$ vagy 1 és függetlenek. Ekkor a nagy számok erős törvénye szerint $\frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} \to E\xi_1 = \frac{1}{2}$ majdnem mindenütt. Ezek szerint a [0,1] intervallum majdnem minden számának diadikus tört felírásában átlagosan ugyanannyi 0 van mint 1.

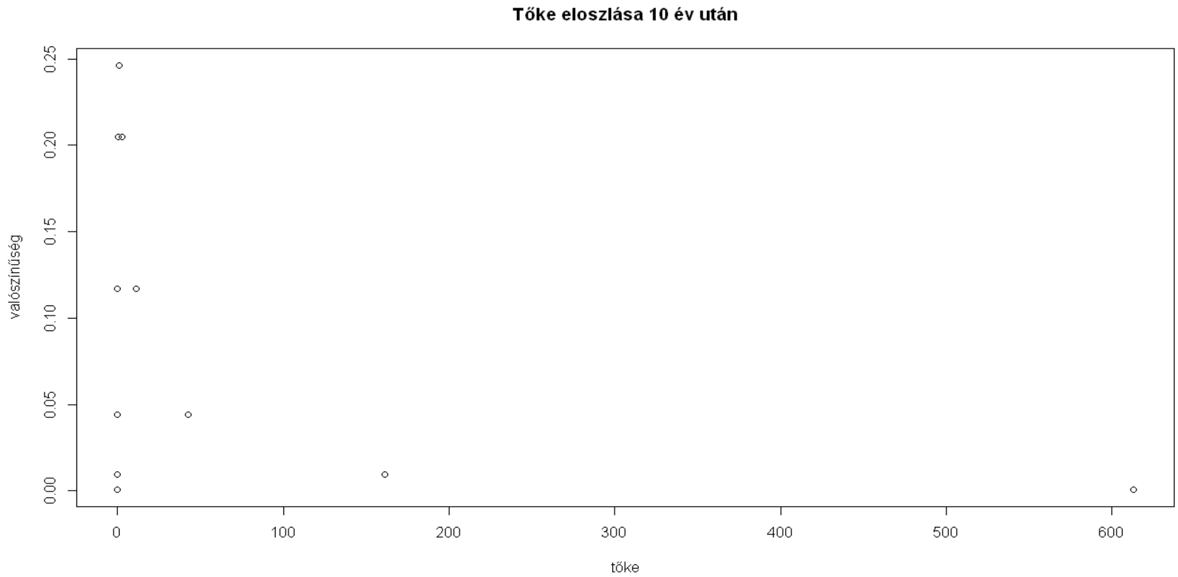
7.5 Feladat (Monte-Carlo módszer) Legyen $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos. Kérdés: hogyan becsülhető$\int_0^1 f(x)\, dx$ véletlen számgenerálás segítségével?

Megoldás. Legyenek $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \ldots$ független $E(0,1)$-eloszlásúak és

$$\varrho_i = \begin{cases} 1, & ha\ f(\xi_i) > \eta_i \\ 0, & különben \end{cases}.$$

Belátható, hogy $E\varrho_i = P\left(f(\xi_i) > \eta_i\right) = \int_0^1 f(x)dx$, így a tétel szerint $\frac{\sum_{i=1}^{n} \varrho_i}{n} \to \int_0^1 f(x)\, dx$ majdnem mindenütt.

7.6 Feladat Mihez tart n szabályos kockadobás mértani közepe?

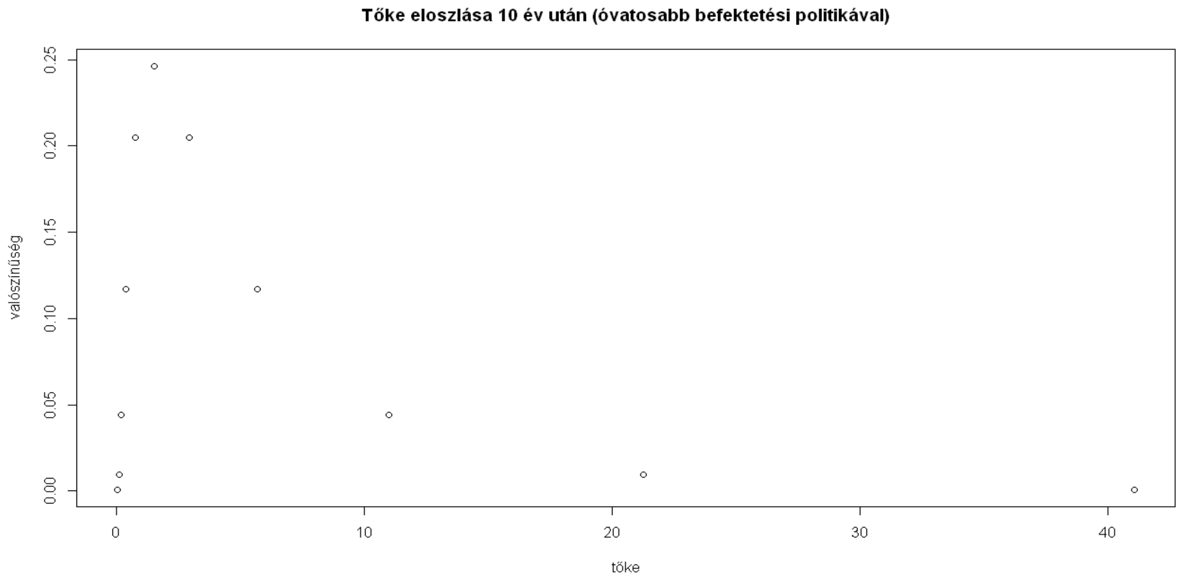


7.2. ábra. A HUNCUT részvény eloszlása

Megoldás. Jelöljük X_n-el az n-edik dobás eredményét. Ekkor a mértani közép felírható a következő alakban.
$(X_1 \cdots X_n)^{1/n} = \exp \frac{\ln X_1 + \cdots + \ln X_n}{n}$ A nagy számok erős törvénye szerint $\frac{\ln X_1 + \cdots + \ln X_n}{n} \to E(\ln X_1)$ 1 valószínűséggel. Mivel $E(\ln X_1) = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \ln 6}{6} = \ln \left(6!^{1/6}\right)$, ezért a mértani közép 1 valószínűséggel $(6!)^{1/6}$-hoz tart.

7.7 Feladat (Györfi László példájának alapján) A HUNCUT részvény éves árfolyamváltozásai független, azonos eloszlásúak. A részvény árfolyama egy év alatt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 90%-al nő és ugyanilyen valószínűséggel 50%-al csökken. 1 részvény most 1 Ft-ot ér, n év múlva az értékét jelöljük X_n-el. Mihez tart X_n várható értéke és tart-e 1 valószínűséggel valahová X_n?

Megoldás. A feladat feltételei szerint a részvény várható éves hozama 20%. Jelöljük Y_n-el, hogy hányszorosára változik a részvény árfolyama az n-edik évben. Ekkor $X_n = Y_1 \ldots Y_n$ és $EX_n = EY_1 \ldots EY_n = 1,2^n$, azaz a várható érték $+\infty$-hez tart. A http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/reszveny.gif címen azonban láthatunk egy tipikus HUNCUT részvényárváltozást, amely azt mutatja, hogy egy idő után a részvény nagyon keveset ér. Hogy ez nem véletlen mutatja a 7.2 ábra is, ahol a részvény árfolyamának eloszlását láthatjuk 10 év után. Eszerint a részvény nagyon kis valószínűséggel nagyon sokat fog érni és nagy valószínűséggel keveset. Hasonlóan az előző példához X_n-et felírhatjuk logaritmusok segítségével, $X_n = \exp\{\ln Y_1 + \cdots + \ln Y_n\}$. Ekkor a nagy



7.3. ábra. Tőkénk eloszlása, ha mindig csak a felét fektetjük be a HUNCUT részvénybe

számok erős törvénye szerint $\frac{\ln Y_1+\dots+\ln Y_n}{n} \to E(\ln Y_1) = \frac{1}{2}\ln(0,95) < 0$ 1 valószínűséggel. Ebből következik, hogy $X_n = \left(\exp\left\{\frac{\ln Y_1+\dots+\ln Y_n}{n}\right\}\right)^n$ tart 0-hoz 1 valószínűséggel.

7.8 Feladat (Előző példa folytatása) Az előző példából okulva tőkénket másképp fektetjük be. Minden év végén tőként felét a HUNCUT részvénybe fektetjük, a másik felét azonban párnánk alatt készpénzben tartjuk. Tőkénk n év múlvabeli értékét most jelöljük Z_n-el. Mihez tart Z_n várható értéke és tart-e 1 valószínűséggel valahová Z_n?

Megoldás. A feladat feltételei szerint tőkénk várható éves hozama
$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 190\% + \frac{1}{2}\cdot 100\%\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 50\% + \frac{1}{2}\cdot 100\%\right) - 100\% = 10\%$.
Jelöljük U_n-el, hogy hányszorosára változik a részvény árfolyama az n-edik évben. Ekkor $Z_n = U_1\dots U_n$ és $EZ_n = EU_1\dots EU_n = 1,1^n$, azaz a várható érték most is $+\infty$-hez tart, bár jóval kisebb ütemben. A http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/toke.gif címen látható animációból sejthetjük, hogy új stratégiánkkal nagyobb valószínűséggel lesz több pénzünk. Ezt támasztja alá a 7.3 ábra is, ahol a 10 év utáni tőkénk eloszlását láthatjuk. Most is logaritmusok segítségével írjuk fel Z_n-et $Z_n = \exp\{lnU_1+\dots+lnU_n\}$. Ekkor a nagy számok erős törvénye szerint $\frac{lnU_1+\dots+lnU_n}{n} \to E(lnU_1) = \frac{1}{2}\ln(1,45\cdot 0,75) > 0$ 1 valószínűséggel. Ebből következik, hogy $Z_n = \exp\left(\frac{lnU_1+\dots+lnU_n}{n}\right)^n$ 1 valószínűséggel szintén $+\infty$-hez tart.

7.4. Centrális határeloszlástétel

Korábban már említettük, hogy a normális eloszlás a legfontosabb valószínűségeloszlás. Ennek oka, hogy igen általános feltételek mellett független valószínűségi változók összegét normálva közel standard normális eloszlást kapunk.

7.4 Tétel (Centrális határeloszlástétel független, azonos eloszlású változókra) *Legyenek*
$\xi_1, \xi_2, \ldots$ *független, azonos eloszlásúak,* $m := E\xi_1$ *és* $0 < \sigma^2 = D^2\xi_i < \infty$*. Ekkor minden* $x \in \mathbb{R}$*-re*

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i - n\cdot m}{\sigma\cdot\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Látható, hogy az előző tételben a konvergencia eloszlásbeli.

7.9 Feladat Egy párt szavazótáborát akarjuk megbecsülni, ehhez az egyszerűség kedvéért N embert választunk visszatevéssel, közülük M számú szavazna a pártra és legyen $p = \frac{M}{N}$. Ekkor vajon hány embert kell megkérdeznünk, hogy legalább $0,95$ valószínűséggel legfeljebb $0,01$ legyen a tévedés?

Megoldás. A
$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} - p\right| \leq 0,01\right) \geq 0,95.$
Egyenlőtlenséget szeretnénk biztosítani. A centrális határeloszlástétel szerint

$$P\left(\frac{-\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \sim$$

$$\sim \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) =^{1} 2\cdot\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 0,95,$$

azaz $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0,975 = \Phi(1,96)$, tehát legyen $\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \geq 1,96$. Ezzel $\sqrt{n} \geq 1,96\cdot\frac{1}{0,01}\cdot\sqrt{p(1-p)}$, ami teljesül [2], ha $n \geq 10000$, tehát ha normális közelítéssel dolgozunk, kb. 10 000 embert kell megkérdezni, ami jóval kevesebb, mint amit korábban a Csebisev-egyenlőtlenség alkalmazásával kaptunk.

[1] hiszen $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

[2] mivel a $\sqrt{p(1-p)}$ nem lehet nagyobb $0,5$-nél, így a jobb oldal felülről becsülhető 98-cal

Többször előfordul, hogy nem valószínűségszámítási állításokat is lehet igazolni valószínűségszámítási ismeretek segítségével. Ezt mutatja a következő példa is.

7.10 Feladat Mihez tart $e^{-n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}$?

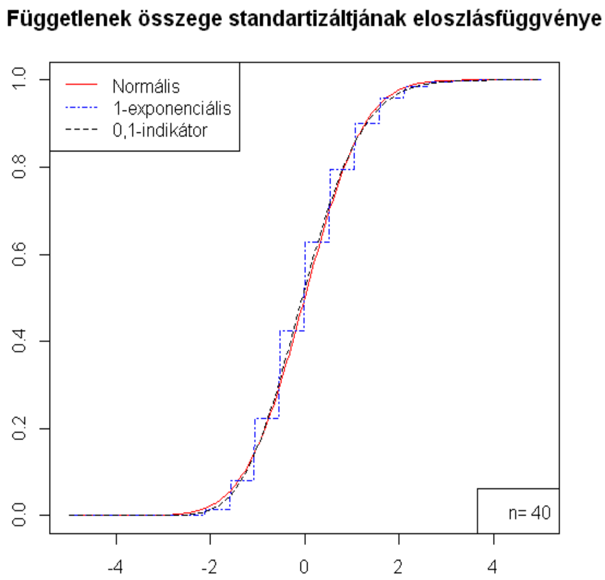
Megoldás. Ha végtelenig összegeznénk, nyilván 1 lenne az összeg, de most $n-1$-ig megyünk! Legyenek $\eta_i \sim$ 1-Poisson függetlenek. Mivel ez esetben teljesülnek a centrális határeloszlástétel feltételei, ezért felírható:
$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i - n\cdot 1}{1\cdot\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x)$.

Tudjuk, hogy független Poisson eloszlású változók összege Poisson eloszlású, ezért $\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i$ eloszlása n-Poisson. Ebből következik, hogy $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i < n\right) = e^{-n}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}$. „A centrális határeloszlástételt alkalmazva $x=0$-ra $P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i - n}{\sqrt{n}} < 0\right) \to \Phi(0) = \frac{1}{2}$. Tehát a keresett határérték pont $\frac{1}{2}$.

Nemcsak azonos eloszlású változókra igaz a normális határeloszlás.

7.5 Tétel (A centrális határeloszlástétel általános alakja) *Legyenek $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots$ független valószínűségi változók, várható értékeiket jelölje $m_1, m_2, \ldots$, azaz $m_k = E\xi_k$. Szórásnégyzeteik legyenek pozitívak és végesek, tehát $0 < \sigma_k^2 = D^2\xi_k < \infty$, legyen továbbá $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $D_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$ és $F_k(x) = P(\xi_k < x)$. Valamint teljesüljön minden $0 < \varepsilon$-ra az úgynevezett Ljapunov-feltétel: $\frac{1}{D_n^{2+\delta}}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} E|\xi_k - m_k|^{2+\delta} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ valamely $0 < \delta$-ra. Ekkor $\frac{S_n - ES_n}{D_n}$ eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz.*

Természetesen felmerül az a kérdés, hogy rögzített n-re mennyire pontos a normális közelítés. A 7.4 ábrán 40 független azonos eloszlású 1-exponenciális illetve 0,1-indikátor összege standartizáltjának eloszlásfüggvényét hasonlítjuk össze a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével. Látható, hogy mennyire közel vagyunk exponenciális esetben és relatíve milyen nagy a távolság az indikátorok esetében. A `http://www.math.elte.hu/~arato/peldatar/normkoz.gif` animációban láthatjuk, hogy kulonboző elemszámoknál milyen mértékű a közelítés hibája.
A következő tételek felső becslést adnak a normális közelítés hibáira..



7.4. ábra. Normális közelítés

7.6 Tétel (Berry-Esséen) *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók, továbbá* $E|\xi_1|^3 < \infty$ *és* $T_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - n \cdot m}{\sigma\sqrt{n}}$. *Ekkor* $\sup_x |F_{T_n}(x) - \Phi(x)| \leq 0,4785 \cdot \frac{E|\xi_1 - m|^3}{\sigma^3\sqrt{n}}$.

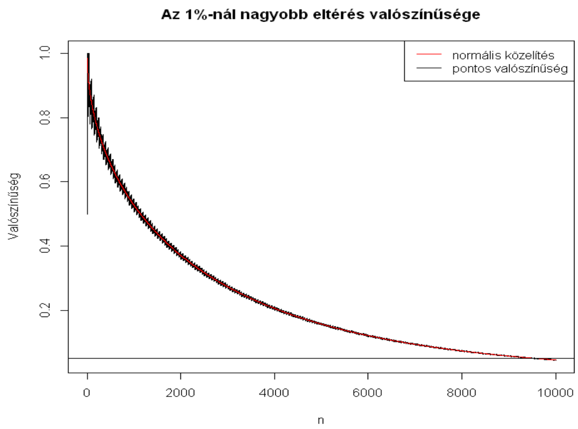
7.7 Tétel (Esséen) *Legyenek* $X_1, X_2, \dots$ *független valószínűségi változók, továbbá* $E|\xi_1|^3 < \infty$. *Az* $m_j = EX_j, \sigma_j^2 = D^2X_j, B_n = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$ *és* $L_n = B_n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} E(|X_j - m_j|^3)$ *jelölésekkel kapjuk, hogy az* $F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}(X_j - m_j)}{\sqrt{B_n}} < x\right)$ *eloszlásfüggvényre igaz, hogy* $\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq 0,56 \cdot L_n$.

A tételekben szereplő konstansok Tyurin és Sevcova eredményei.

7.11 Feladat Határozzuk meg a 7.4.1 példa megoldásában szereplő normális közelítés hibáját, ha a közvéleménykutatásban 10000 embert kérdeztek meg!

Megoldás. A

$$P\left(\frac{-\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \leq \frac{\sqrt{n} \cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right) -$$



7.5. ábra. Pontos valószínűség és a normális közelítés eredménye $p = 0.5$ esetén

$$-\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right)+\Phi\left(\frac{-\sqrt{n}\cdot 0,01}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$$

eltérés abszolút értékét kell megbecsülni, ha X_i-k független p-indikátorok. A Berry-Esséen tétel jelöléseit alkalmazva $\sigma^2 = p(1-p)$, $E|X_1 - EX_1|^3 = (1-p)p^3 + p(1-p)^3 = p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$ és $n = 10000$. Ekkor a tétel alapján az eltérésre a felső becslés.
$2 \cdot 0,4785 \cdot \frac{E|X_1-m|^3}{\sigma^3\sqrt{n}} = 0,00957 \cdot \frac{p(1-p)(p^2+(1-p)^2)}{(p(1-p))^{3/2}} = 0,00957 \cdot \frac{(p^2+(1-p)^2)}{\sqrt{p(1-p)}}$.
Látható, hogy ez a becslés kis és nagy p-kre nem ad hasznos eredményt, de például $p = 0,4$-re a felső becslés 1,02%. Az 7.5 ábrán mutatjuk be, hogy valójában a normális közelítés hibája ebben az esetben nem is olyan nagy 10000 megkérdezett esetén.

7.12 Feladat A CTF csapat kemény magja 500 ETU szurkolót bántalmazott. A korábbi évek tapasztalata alapján a CTF csapat vezetősége tudja, hogy a vendégcsapat szurkolói a (0,5) intervallumon egyenletes eloszlású (millió forintban) kártérítési igényeket fognak nekik benyújtani egymástól függetlenül. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a CTF csapat legalább 500 millió forintot fog kifizetni, ha a NYUGI Biztosító a károk 2 millió Ft alatti részét fizeti ki, a GIC Biztosító pedig a károk 4 millió forint feletti részét!

Megoldás. Jelöljük az i-edik kártérítési igényt X_i-vel. Ekkor az i-edik kártérítési igénynél a csapat kifizetése $Y_i = h(X_i)$, ahol

$$h(x) = \begin{cases} 0 \ : \ x \le 2 \\ x-2 \ : \ 2 < x \le 4 \\ 2 \ : \ 4 < x \end{cases}$$

A momentumokat ennek segítségével tudjuk meghatározni.
$EY_i = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{X_i}(x)dx = \int_2^4 (x-2)\frac{1}{5}dx + \int_4^5 2\frac{1}{5}dx = 0,8$
$EY_i^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(x) f_{X_i}(x)dx = \int_2^4 (x-2)^2\frac{1}{5}dx + \int_4^5 2^2\frac{1}{5}dx = \frac{4}{3} = 1,3333, D^2Y_i = \frac{44}{45} = 0,9778$
$E|Y_i - EY_i|^3 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - EY_i|^3 f_{X_i}(x)dx = \int_0^2 0,8^3\frac{1}{5}dx + \int_2^4 |x-2,8|^3\frac{1}{5}dx + \int_4^5 1,2^3\frac{1}{5}dx = 0,67456$
Tehát a csapat várhatóan 400 millió forintot fog kifizetni. Csebisev-egyenlőtlenséggel a

$$P(\sum_{i=1}^{500} Y_i \geq 500) < P(|\sum_{i=1}^{500} Y_i - 400| \geq 100) \leq \frac{D^2(\sum_{i=1}^{500} Y_i)}{100^2} = \frac{500\frac{44}{45}}{100^2} = 0,04888889$$

becslés jön ki. A normális közelítés a

$$P(\sum_{i=1}^{500} Y_i \geq 500) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} Y_i - 400}{\sqrt{500\frac{44}{45}}} \geq \frac{500-400}{\sqrt{500\frac{44}{45}}}\right) \sim 1 - \Phi(4,52267) = 1 - 0,999997 = 0,000003$$

minimális értéket adja. Azonban a közelítés hibáját csak ennél nagyobb értékkel tudjuk becsülni, hiszen a Berry-Esséen tétel szerint

$$|P(\sum_{i=1}^{500} Y_i \geq 500) - (1 - \Phi(4,52267))| \leq 0,4785 \cdot \frac{E|Y_1 - EY_1|^3}{(DY_1)^3\sqrt{500}} = 0,03120454.$$

Így a valószínűségről csak azt állíthatjuk bizonyossággal, hogy kisebb 0,03120754-nél.

7.13 Feladat Az Üveghegyen túli Királyság döntő ütközetre készül a sárkányok által tüzelt SMF-el. A király a fegyverek költségét békekölcsönnel kívánja fedezni. Az 100 nemes mindegyike 100 fityingért jegyez békekölcsönt, a polgárok mindegyike (400-an vannak) 1000 fityinget fizet, az 500 paraszt 200 fityinget kell fizessen. A király népszerűségének fenntartásáért minden békekölcsön sorsoláson vesz részt. A nemesek 5%-os eséllyel 10000 fityinget és 10%-os eséllyel 2000 fityinget. A parasztok és polgárok 5%-os eséllyel 4000 illetve 5000 fityinget nyerhetnek. A királyi kincstárban a békekölcsön jegyzése előtt 1000 fitying volt. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy nem lesz elég pénz a nyeremények kifizetésére, ha a nyereményeket függetlenül sorsolják ki!

Megoldás. Számoljunk 500 fityinges egységekben és vezessük be a következő jelöléseket! $B_1 = 0.2, B_2 = 2, B_3 = 0.4$ a békekölcsönök nagysága, $B_4 = 2$ a királyi kincstárban lévő pénz. $n_1 = 100, n_2 = 400, n_3 = 500$ a nemesek, polgárok illetve parasztok száma. A sorsolás megkezdése előtt a kincstárban $B = n_1B_1 + n_2B_2 + n_3B_3 + B_4 = 1022$ egységnyi pénz van. Jelöljük X_i, Y_j, Z_k-val a nemesek, polgárok illetve parasztok nyereményét. Ezek eloszlása a következő.
$P(X_i = 20) = p_1 = 5\%, P(X_i = 4) = p_2 = 10\%, P(X_i = 0) = 1 - p_1 - p_2 = 85\%, i = 1, \ldots, n_1,$
$P(Y_j = 8) = q = 5\%, P(Y_j = 0) = 1 - q = 95\%, j = 1, \ldots, n_2,$
$P(Z_k = 10) = r = 5\%, P(Z_k = 0) = 1 - r = 95\%, k = 1, \ldots, n_3$. Ebből könnyen meghatározhatók a megfelelő momentumok.

$m_1 = EX_i = 20 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2 = 20 \cdot 5\% + 4 \cdot 10\% = 1,4, E(X_i^2) = 400 \cdot p_1 + 16 \cdot p_2 = 21,6, \sigma_1^2 = D^2X_i = 400 \cdot p_1 + 16 \cdot p_2 - (20 \cdot p_1 + 4 \cdot p_2)^2 = 19,64, u_1 = E|X_i - EX_i|^3 = (20 - m_1)^3 \cdot p_1 + (4 - m_1)^3 \cdot p_2 + m_1^3 \cdot (1 - p_1 - p_2) = 325,8328$
$m_2 = EY_j = 8 \cdot q = 8 \cdot 5\% = 0,4, E(Y_j^2) = 64 \cdot q = 3,2, \sigma_2^2 = D^2Y_j = 64 \cdot q - (8 \cdot q)^2 = 3,04, u_2 = E|Y_j - EY_j|^3 = (8 - m_2)^3 \cdot q + m_2^3 \cdot (1 - q) = 22,0096$
$m_3 = EZ_k = 8 \cdot r = 10 \cdot 5\% = 0,5, E(Z_k^2) = 100 \cdot r = 5, \sigma_3^2 = D^2Z_k = 100 \cdot r - (100 \cdot r)^2 = 4,75, u_3 = E|Z_k - EZ_k|^3 = (10 - m_3)^3 \cdot r + m_3^3 \cdot (1 - r) = 42,9875$
A nyeremények várható értéke tehát $n_1m_1 + n_2m_2 + n_3m_3 = 550$. A becsülendő valószínűség

$$P\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i + \sum_{j=1}^{n_2} Y_j + \sum_{k=1}^{n_3} Z_k > B\right) = P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k > 1022\right).$$

Csebisev-egyenlőtlenséggel a

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k > 1022\right) < P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k - 550\right| > 472\right)$$

$$\leq \frac{D^2\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k\right)}{472^2} = \frac{100 \cdot 19,64 + 400 \cdot 3,04 + 500 \cdot 4,5}{472^2} = 0,02493447$$

becslés jön ki. A normális közelítés a

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k > 1022\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k - 550}{\sqrt{D^2\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{4000} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k\right)}} > \frac{1022 - 550}{\sqrt{D^2\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k\right)}}\right) \sim$$

$1 - \Phi(6,332861) = 1,203281 \cdot 10^{-10}$ minimális értéket adja. Azonban a közelítés hibáját itt is csak ennél nagyobb értékkel tudjuk becsülni, hiszen az Esséen tétel szerint

$$\left|P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k > 1022\right) - (1 - \Phi(6,332861))\right|$$

$$\leq 0,56 \cdot \frac{\left(\sum_{i=1}^{100} E|X_i - EX_i|^3 + \sum_{j=1}^{400} E|Y_j - EY_j|^3 + \sum_{k=1}^{500} E|Z_k - EZ_k|^3\right)}{\left(D^2\left(\sum_{i=1}^{100} X_i + \sum_{j=1}^{400} Y_j + \sum_{k=1}^{500} Z_k\right)\right)^{3/2}} = 0,0850512.$$

Ez a hiba lényegesen meghaladja a Csebisev egyenlőtlenségből adódó becslést, így ebben az esetben ezzel célszerű becsülni.

A `http://hpz400.cs.elte.hu:3838/ZA_kolcson/` oldalon kiszámolhatók a csőd valószínűségeinek becslései és a normális közelítés hibája úgy is, hogy más paramétereket adunk meg a feladatnak. Egy screenshot a 7.6 ábra.

7.6. ábra. A csőd valószínűségének becslése a békekölcsönnél, 7.13 feladat

7.5. Gyakorló feladatok

1. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók véges várható értékkel és szórással. Mit mondhatunk az
$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}$$
sorozat konvergenciájáról?

2. Kockát gurítunk addig, amíg hatost nem kapunk. Ezt a kísérletet 10000-szer megismételjük. Megközelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy a 10000 kísérlet során összesen kevesebb mint 59800 dobást végeztünk?

3. Legyen ξ_n olyan valószínűségi változókból álló sorozat ami sztochasztikusan tart a c konstanshoz, továbbá $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a c pontban folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy az $f(\xi_n)$ valószínűségi változó sorozat sztochasztikusan tart $f(c)$-hez. Mi a helyzet, ha ξ_n 1 valószínűséggel (azaz majdnem biztosan) tart c-hez?

4. Legyen η_n valószínűségi változó sorozat, úgy hogy létezik K konstans amelyre $P(|\eta_n| < K) = 1$ és $\eta_n \to \eta$ sztochasztikusan. Mutassuk meg, hogy ekkor $E(\eta_n) \to E(\eta)$.

5. Legyen $f\ [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Mutassuk meg, hogy a
$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$
polinom sorozat minden $x \in [0,1]$ pontban az $f(x)$ számhoz tart.

6. A véletlenszám–táblázatból elhagyjuk azokat a számokat, amelyek hárommal oszthatók, mindaddig, amíg 1025 ilyen számot nem találunk. Mennyi annak a valószínűsége közelítőleg, hogy ehhez legalább 2500 számot tartalmazó táblázatra van szükségünk?

8. fejezet

Nem független kísérletek: Markov láncok elemei

8.1. Markov láncok, alapfogalmak

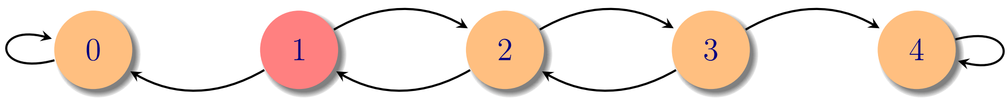
Szemléletesen a Markov lánc egy időben fejlődő véletlen folyamat, ahol a múlt csak a jelen állapoton keresztül befolyásolja a jövőbeni fejlődést. Kicsit formálisabban jelölje X_n a folyamat állapotát az n pillanatban. A lehetséges állapotok halmazát I-vel jelöljük, ez a feladatokban jellemzően egy véges gráf csúcsainak a halmaza lesz. Ekkor X_n olyan valószínűségi változó mely az I halmazból veszi fel az értékeit. Az, hogy a múlt csak az aktuális állapoton keresztül befolyásolja a folyamat fejlődését, pl. úgy írható le, hogy X_{n+1} értékét az X_n állapotból és a múlttól független véletlen hatás eredőjéből kapjuk meg. Azaz

$$X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}), \tag{8.1}$$

ahol $(\xi_n)_{n\geq 1}$ az X_0 kezdeti értéktől független iid sorozat.

A feladatokban legtöbbször $(\xi_n)_{n\geq 1}$ egy dobásorozat lesz (kockával, vagy pénzérmével) míg az f leképezés azt adja meg, hogy az adott dobott érték esetén hova lépünk a gráfon.

Illusztrációképpen nézzük a tönkremenési problémát. Ebben a feladatban egy olyan játékot játszunk, ahol minden lépésben vagy 1 Forinttal nő a pénzünk, vagy ugyanennyivel csökken. Addig játszunk, amíg a pénzünk el nem fogy vagy egy előre megadott értéket el nem érünk. Ha az egyes lépésekben egymástól függetlenül sorsoljuk ki a lehetőségeket, pl. egy pénzérmedobás sorozat segítségével, akkor a vagyonunk fejlődése (8.1) alakban írható. Valóban, jelölje X_n a vagyonunkat az n. lépés után $X_0 = x$ a kezdőtőkénk és y a játék során elérni kívánt vagyon. Ekkor, ha $(\xi_n)_{n\geq 1}$ sorozat független ± 1 értékű sorozat, akkor $X_{n+1} = X_n + \mathbf{1}_{0<X_n<y}\xi_{n+1}$. Azaz a folyamat állapottere $I = \{0, 1, 2, \ldots, y-1, y\}$. A 0 és y állapotok kivételével minden állapotból az eggyel nagyobb vagy az eggyel kisebb állapotba léphetünk. A 8.1 ábrán grafikusan szemléltetjük azt az esetet, amikor $x = 1$, $y = 4$.



8.1. ábra. A tönkremenési probléma Markov láncának gráfja

Ha a sorozat fejlődése a (8.1) alakú és a $(\xi_n)_{n\geq 0}$ sorozat független X_0-tól, akkor teljes indukcióval könnyen ellenőrizhető, hogy $X_0, \ldots X_n$ független $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$-tól és

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_k = x_k,\, 0 \leq k \leq n\right) \\
&= \frac{\mathbf{P}\left(f(X_n, \xi_{n+1}) = x_{n+1}, X_k = x_k,\, 0 \leq k \leq n\right)}{\mathbf{P}\left(X_k = x_k,\, 0 \leq k \leq n\right)} \\
&= \mathbf{P}\left(f(x_n, \xi_1) = x_{n+1}\right). \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

Itt csak annyit használtunk, hogy a függetlenség miatt a számláló szorzattá bomlik.

8.1 Definíció Legyen $(X_n)_{n\geq 0}$ I értékű valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov lánc, ha

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_k = x_k,\, k \leq n\right) = \mathbf{P}\left(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\right) \qquad (8.3)$$

minden n-re és $x_n, x_{n+1} \in I$-re.

Mi csak olyan eseteket fogunk nézni, amikor (8.3) jobboldala nem függ n-től. Ezeket homogén Markov láncnak szokás nevezni.

A Markov lánc állapottere I. Az átmenetvalószínűség-mátrixa pedig

$$\Pi_{x,y} = \mathbf{P}\left(X_1 = y | X_0 = x\right), \quad x, y \in I.$$

Például a fenti tönkremenési problémában $\Pi_{i,i+1} = \Pi_{i,i-1} = 1/2$, ha $0 < i < 4$ és $\Pi_{0,0} = \Pi_{4,4} = 1$, az összes többi átmenet nulla valószínűségű.

Azt láttuk, hogy az (8.1) alakban adott sorozatok mindig Markov láncot adnak, az átmenetvalószínűségek pedig (8.2) alapján számolhatóak. Bizonyos mértékig ennek a megfordítása is igaz, pl. ha I megszámlálható akkor minden I állapotterű Markov lánc fejlődése felírható (8.1) alakban.

8.1.1. Gyakorló feladatok

1. Egy víztárolónak véges h a kapacitása. A naponta befolyó vízmennyiség J_n független azonos eloszlású valószínűségi változó sorozatnak tekinthető, melynek közös eloszlása $g_j = P(J_n = j)$. Egységnyi mennyiségű vizet mindennap végén kiengednek a tárolóból feltéve, hogy az nem üres vagy nem csordult túl a nap folyamán. Ha üres természetesen nem eresztenek le vizet, túlcsorduláskor a kapacitásnak megfelelő mennyiségű víz marad a tárolóban. Jelölje X_n az n. nap végén a tárolóban lévő vízmennyiséget. Számítsuk ki az X_n Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixát.

2. Tegyük fel, hogy egy részecske egységnyi időtartam alatt a többitől függetlenül p valószínűséggel kerül ki egy adott térrészből, ha ott volt. Továbbá minden idő egység alatt új részecskék is kerülnek a térrészbe, melyek száma Poisson eloszlású λ paraméterrel. Jelölje X_n a térrészben lévő részecskék számát az n. idő egység végén. Számítsuk az X_n Markov-lánc átmenetvalószínűség mátrixát.

3. Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újság kupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel, valamelyik családtag fogja a teljes újság kupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük az esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

   Lehet-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűség mátrixát.

4. (Rekord időpontok) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos és folytonos eloszlású, nem negatív valószínűségi változók. Definiáljuk az R sorozatot a következő rekurzióval. $R_1 = 1$ és $R_{k+1} = \inf\{n > R_k \,:\, X_n > \max(X_1, \ldots, X_{n-1})\}$.

   (a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nagyság szerinti sorrendjét jelölje π_n. Ekkor π_n n elem egy véletlen permutációja. Milyen eloszlású π_n?

   (b) Markov lánc-e R_n? Ha igen, számítsuk ki az átmenetvalószínűségeket.

   (c) Legyen $T_n = R_{n+1} - R_n$. $\mathbf{P}(T_3 = 1 | T_1, T_2)$ vizsgálata alapján válaszoljunk arra a kérdésre, hogy Markov lánc-e T_n.

5. Válasszuk a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ értékeket egymástól függetlenül és találomra, azaz egyenletes eloszlás szerint az $\{1, 2, \ldots, N\}$ halmazból. Jelölje X_n a különböző értékek száma $\xi_1, \ldots, \xi_n$ között, azaz $X_n = |\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}|$. Markov láncot alkot-e az $(X_n)_{n\geq 1}$ sorozat?

6. S_n egy szimmetrikusan bolyongó részecske helyzete az n. lépés után. Mutassuk meg, hogy $R_n = |S_n|$ Markov lánc. Mi a helyzet nem szimmetrikusan bolyongó részecske esetén?

7. Legyen S_n egy szimmetrikusan bolyongó részecske helyzete az n. lépés után. Mutassuk meg, hogy $X_n = \max_{k\leq n} S_k$ nem Markov lánc.

8. Legyen $(\xi_k)_{k\geq 1}$ Markov-lánc $I = \{1, 2, 3\}$ állapottérrel és Π átmenetvalószínűséggel, $P(\xi_1 = i) = 1/3$. Legyen $\eta_k = 1$ ha $\xi_k = 1$ és $\eta_k = 2$ különben. $P(\eta_4 = 1 | \eta_1, \eta_2, \eta_3)$

vizsgálatával döntsük el, hogy Markov-lánc-e $(\eta_k)_{k\geq 1}$, ha igen számítsuk ki az átmenetvalószínűségeit.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

8.2. Többlépéses átmenetvalószínűségek, invariáns eloszlás

Legyen $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov lánc Π átmenetvalószínűség–mátrixszal. A teljes valószínűség tétel szerint:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_i = x_i,\, i \leq n\right) &= \mathbf{P}\left(X_i = x_i,\, i \leq n-1\right)\mathbf{P}\left(X_n = x_n | X_i = x_i,\, i \leq n-1\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X_i = x_i,\, i < n\right)\Pi_{x_{n-1},x_n}\end{aligned}$$

Ezt az összefüggést iterálva az $X_k = x_k$, $k \leq n$ „út” valószínűségét

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X_i = x_i,\, i \leq n\right) &= \mathbf{P}\left(X_i = x_i,\, i < n\right)\Pi_{x_{n-1},x_n} \\ &= \mathbf{P}\left(X_i = x_i,\, i \leq n-2\right)\Pi_{x_{n-2},x_{n-1}}\Pi_{x_{n-1},x_n} = \cdots = \\ &= \mathbf{P}\left(X_0 = x_0\right)\Pi_{x_0,x_1}\cdots\Pi_{x_{n-2},x_{n-1}}\Pi_{x_{n-1},x_n} = \\ &= \mathbf{P}\left(X_0 = x_0\right)\prod_{k=1}^{n}\Pi_{x_{k-1},x_k}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Ha most összegzünk az összes lehetséges útra, ami n lépés alatt az x_0 állapotból az x_n állapotba vezet, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(X_0 = x_0,\, X_n = x_n\right) = \mathbf{P}\left(X_0 = x_0\right)\sum_{x_1,x_2\ldots,x_{n-1}\in I}\prod_{k=1}^{n}\Pi_{x_{k-1},x_k} = \mathbf{P}\left(X_0 = x_0\right)\left(\Pi^n\right)_{x_0,x_n}$$

Azaz a Π^n mátrix $(\Pi^n)_{x,y}$ eleme, annak a valószínűségét adja meg, hogy a lánc az n. lépés után az y állapotban van, feltéve, hogy x-ből indult, azaz $X_0 = x$. Ezért Π^n-et *n-lépéses átmenetvalószínűség–mátrix*nak nevezzük.

Egy másik olvasata a 8.4 formulának az, hogy a folyamat eloszlását az X_0 eloszlása (kezdeti eloszlás) és Π együttesen meghatározza. Ha a kezdeti eloszlást sorvektorként írjuk, $p_0(x) = \mathbf{P}\left(X_0 = x\right)$, akkor

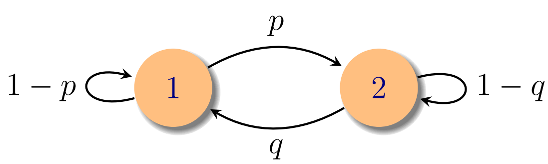
$$p_n(x) = \mathbf{P}\left(X_n = x\right) = \sum_y \mathbf{P}\left(X_0 = y\right)\mathbf{P}\left(X_n = x | X_0 = x\right) = (p_0\Pi^n)(x). \tag{8.5}$$

Azaz, X_n eloszlását a p_0 kezdeti eloszlás és a Π átmenetvalószínűség–mátrix n. hatványának szorzata adja. Ha $p_0\Pi = p_0$, akkor X_n eloszlása minden n-re ugyanaz. Az ilyen kezdeti eloszlást *invariáns* vagy *stacionárius* eloszlásnak hívjuk.

Szeretnénk megérteni, mi történik hosszú távon, azaz milyen eloszlású lesz X_n, ha n nagy. A 8.5 alapján ez egy lineáris algebrai kérdés. Szerencsés esetben p_0 felírható Π sajátvektorainak lineáris kombinációjaként. Ha n nagy akkor a legalább 1 abszolútértékű sajátértékekhez tartozó komponensek fognak dominálni a többi komponens geometriai sebességgel nullához tart. Ennek a gondolatnak az illusztrálására nézzük a két állapotú Markov láncot, melynek átmenetvalószínűségeit a

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

mátrix adja, ahol $p, q \in (0,1)$. Ez a Markov lánc $1-p$ valószínűséggel marad az egyes állapotban és p valószínűséggel lép át a kettes állapotba, ha az egyes állapotban van és $1-q$ ill. q valószínűséggel marad helyben ill. vált, ha a kettes állapotban van. Grafikus ábrázolását a 8.2 ábra mutatja.



8.2. ábra.

Π sajátértékeit a karakterisztikus polinom gyökei adják

$$(1-p-\lambda)(1-q-\lambda) - pq = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1-(p+q).$$

A hozzájuk tartozó baloldali sajátvektorok $v_1 = (q,p)$ és $v_2^T = (1,-1)$ Ezekkel a jelölésekkel

$$\Pi = \begin{pmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \Pi^n = \begin{pmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Azaz X_n eloszlása

$$p_0 \Pi^n = c_1(q,p) + c_2 \lambda_2^n (1,-1)$$

ahol $c = (c_1, c_2)$ a $c_1(q,p) + c_2(1,-1) = p_0$ megoldása. Mivel p_0 valószínűség eloszlása, ezért a koordinátáinak összege 1. A koordináták összege a bal oldalon $c_1(p+q)$, ezért $c_1 = 1/(p+q) > 0$. Mivel $|\lambda_2| < 1$, ezért nagy n-re

$$\mathbf{P}(X_n = 1) = (p_0\Pi^n)(1) = c_1 q + c_2 \lambda_2^n \approx c_1 q = \frac{q}{p+q},$$
$$\mathbf{P}(X_n = 2) = (p_0\Pi^n)(2) = c_1 p - c_2 \lambda_2^n \approx c_1 p = \frac{p}{p+q}.$$

Összefoglalva, azt kaptuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_n = 1\right) = \frac{q}{p+q}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_n = 2\right) = \frac{p}{p+q}.$$

Ez azt jelenti, hogy nagy n esetén X_n eloszlására a kezdeti eloszlásnak alig van hatása, azt lényegében az átmenetvalószínűség–mátrix határozza meg. Vegyük észre azt is, hogy a limesz eloszlás és a Π átmenetvalószínűség–mátrix egy sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora, azaz a lánc invariáns eloszlása.

A két állapotú Markov–lánc esetében az átmenetvalószínűség–mátrix sajátérték felbontását könnyen ki tudtuk számolni, de valójában csak annyit használtunk, hogy az 1 sajátérték, azaz van invariáns eloszlás és minden más sajátérték abszolútértékben egynél kisebb. A számolást az is egyszerűsítette, hogy az 1 egyszeres sajátérték volt.

Vegyük észre, hogy a vizsgált két állapotú Markov lánc esetében teljesült a következő két tulajdonság.

(i) Bármely állapotból, bármely másik állapotba el lehet jutni pozitív valószínűséggel, azaz a lánc irreducibilis. A 4 gyakorló feladat (b) pontja azt vizsgálja, mi történik, ha ez a feltétel nem teljesül.

(ii) Nincs periodicitás, azaz a lánc aperiodikus. A 4 gyakorló feladat (c) pontja azt vizsgálja, mi történik, ha ez a feltétel nem teljesül.

8.2 Definíció Legyen I megszámlálható.

Ha minden $x, y \in I$ párra létezik olyan n, hogy $\mathbf{P}\left(X_n = y | X_0 = x\right) > 0$ akkor azt mondjuk, hogy a lánc irreducibilis.

Az $x \in I$ pont periódusa a $\{n > 0 : \mathbf{P}\left(X_n = x | X_0 = x\right) > 0\}$ számhalmaz legnagyobb közös osztója. Meggondolható, hogy irreducibilis lánc esetén minden pont periódusa azonos. Egy irreducibilis Markov lánc aperiodikus, ha a közös periódus egy.

8.3 Tétel *Legyen (X_n) Markov lánc véges állapottérrel és Π átmenetvalószínűséggel.*

(i) Ha a lánc irreducibilis, akkor pontosan egy invariáns eloszlás létezik.

(ii) Ha a lánc emellett még aperiodikus is, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(X_n = x\right) = \pi(x),$$

ahol π a lánc invariáns eloszlása.

Az állítás azt mondja, hogy a kezdeti eloszlást elfelejti a folyamat, azaz hosszú idő után ránézve közel az invariáns eloszlást látjuk. Ebből persze az is adódik, hogy egy adott állapot meglátogatásának relatív gyakorisága az első n lépés során konvergál az alábbi értelemben

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{X_k=x}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\left(X_k=x\right)\to\pi(x), \tag{8.6}$$

ahol $\mathbf{1}_{X_k=x}$ az $X_k=x$ esemény indikátora.

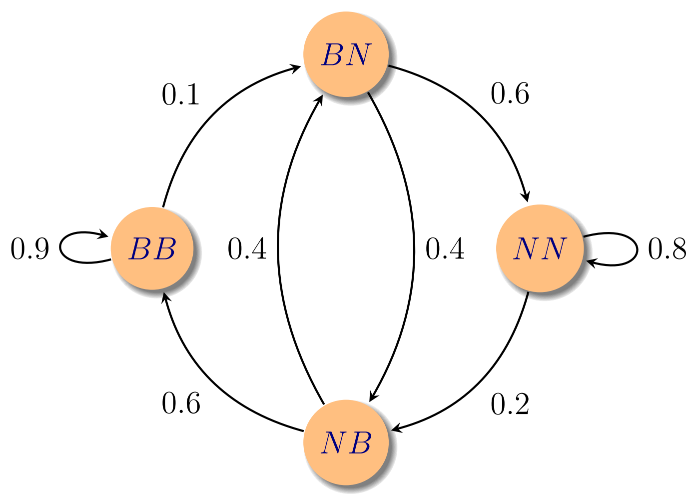
A (8.6) formulában a konvergencia várható érték nélkül is fennáll, azaz igaz a következő tétel

8.4 Tétel *Ha (X_n) irreducibilis, véges állapotterű Markov lánc, π invariáns eloszlással, akkor*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{X_k=x}\to\pi(x), \quad \textit{egy valószínűséggel minden } x\in I\textit{-re.}$$

8.1 Feladat Tegyük fel, hogy az időjárás alakulására az alábbi egyszerű szabályok igazak: Ha ma és tegnap napos idő volt, akkor holnap 0,8 eséllyel lesz ismét napos idő, ha ma napos, de tegnap borult idő volt akkor 0,6, ha ma volt borús idő és tegnap napos akkor 0,4, ha az előző két nap borús volt akkor 0,1 valószínűséggel lesz holnap napos idő. Adjuk meg a megfelelő Markov láncot, és számítsuk ki, hogy a napok átlagosan hány százaléka lesz napos?

Megoldás. A feladat feltételezése szerint az időjárási helyzetet a mai és a tegnapi időjárás írja le. A lehetséges állapotok NN, NB, BN, BB, ahol az N a napos a B pedig a borús időt jelöli az első betű a tegnapi a második pedig a mai időjárást adja meg, lásd a 8.3 ábrát.



8.3. ábra. A 8.1 feladat egyszerű időjárás modelljének gráfja

Ez a Markov lánc aperiodikus és irreducibilis, így a feladat második fele tulajdonképpen azt kérdezi, hogy a stacionárius eloszlás mellett mekkora az esélye, hogy az NN vagy a BN állapotban vagyunk.

A stacionárius eloszlást a következő egyenletrendszer megoldása szolgáltatja:

$$\begin{aligned}
p_{NN} &= 0.8p_{NN} + 0.6p_{BN} \\
p_{NB} &= 0.2p_{NN} + 0.4p_{BN} \\
p_{BN} &= 0.1p_{BB} + 0.4p_{NB} \\
p_{BB} &= 0.9p_{BB} + 0.6p_{NB} \\
1 &= p_{NN} + p_{NB} + p_{BN} + p_{BB}
\end{aligned}$$

Ennek a megoldása $p_{NB} = p_{BN} = \frac{1}{11}$, $p_{NN} = \frac{3}{11}$, $p_{BB} = \frac{6}{11}$. Azaz a napsütéses napok aránya hosszú távon közel $\frac{4}{11}$.

8.2 Feladat Egy légitársaság helyfoglalási rendszerében két számítógépet alkalmaznak. Egy számítógép látja el a feladatokat, a másik, ha működőképes akkor tartalékként szolgál. A számítógép üzemeltetése során egy nap alatt p valószínűséggel romlik el és a javítása két napba telik. A javítást egyszerre csak egy gépen tudják végezni. Modellezzük az előbbi rendszert Markov lánc segítségével. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hosszú üzemeltetés után egy adott napon a rendszer működésképtelen?

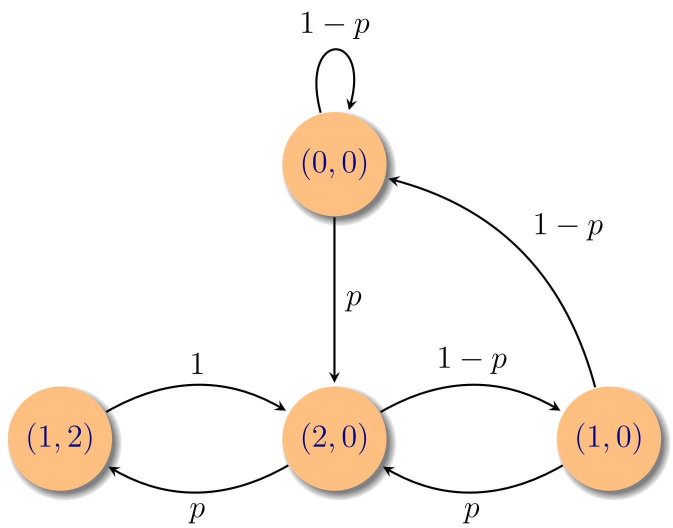
Megoldás. A rendszer lehetséges állapotai $\{(i,j) : i,j = 0,1,2\}$, ahol az (i,j) állapot azt jelenti, hogy az első számítógép i nap múlva, a második számítógép j nap múlva üzemképes. Nem minden kombináció fordulhat elő, és a két számítógép szimmetrikus szerepe miatt az (i,j) állapot nyilván ugyanaz mint a (j,i) állapot. Az így kapott Markov lánc gráfja a 8.4 ábrán látható.

Jelölje X_n azt, hogy az n. nap végén a rendszer melyik állapotban van. Az X_n Markov lánc π stacionárius eloszlását a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\begin{aligned}
\pi_{0,0} &= (1-p)\pi_{0,0} + (1-p)\pi_{1,0} \\
\pi_{2,0} &= p\pi_{0,0} + p\pi_{1,0} + 1\pi_{1,2} \\
\pi_{1,0} &= (1-p)\pi_{2,0} \\
\pi_{1,2} &= p\pi_{2,0}
\end{aligned}$$

Ennek megoldása $\pi_{0,0} = \frac{(1-p)^2}{1+p^2}$, $\pi_{1,0} = \frac{p(1-p)}{1+p^2}$, $\pi_{2,0} = \frac{p}{1+p^2}$, $\pi_{1,2} = \frac{p^2}{1+p^2}$. A rendszer működésképtelen, ha az $(1,2)$ állapotban van, ennek esélye hosszú üzemeltetés után jó közelítéssel a stacionárius eloszlás megfelelő tagja, azaz

$$P(\text{a rendszer működésképtelen}) \approx \frac{p^2}{1+p^2}.$$



8.4. ábra. A 8.2 feladat Markov lánca

8.3 Feladat Szabályos pénzérmét dobálunk. Fejfutamnak nevezzük a dobássorozat azon részét, amikor csupa fejet dobunk egymás után. Jelölje M 256 dobásból a leghosszabb fejfutam hosszát. Szimulációval becsüljük meg M eloszlását, azaz pl. 1000 kísérletből határozzuk meg az $(M = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$, és $(M > 10)$ események relatív gyakoriságát. Számítsuk ki a pontos valószínűségeket is.

Megoldás. A pontos értékek meghatározása pl. úgy történhet, hogy minden k értékre tekintjük azt az $(X_n)_{n\geq 0}$ Markov láncot, ahol

$$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = l+1 | X_n = l\right) = \mathbf{P}\left(X_{n+1} = 0 | X_n = l\right) = 1/2, \quad \text{ha } l = 0, \ldots, k-1,$$
$$\mathbf{P}\left(X_{n+1} = k | X_n = k\right) = 1.$$

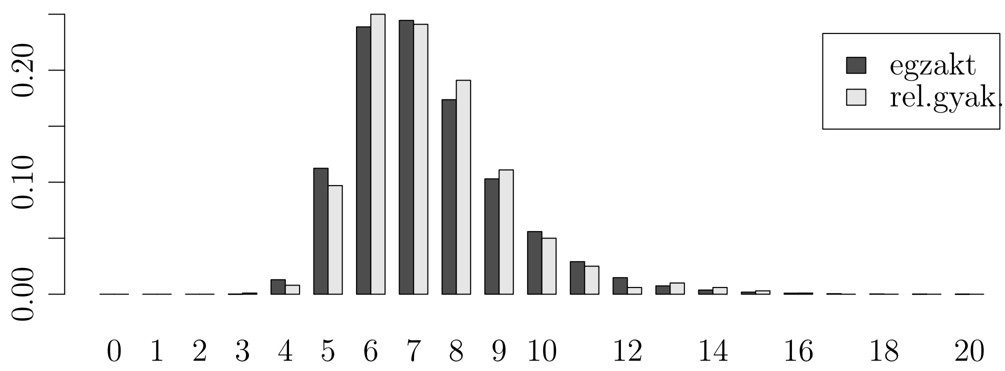
Ekkor $\mathbf{P}\left(X_{256} = k | X_0 = 0\right) = \mathbf{P}\left(M \geq k\right)$. X_{256} eloszlását pedig az átmenetvalószínűség–mátrix hatványozásával kaphatjuk.

```
pfutam<-function(k,n=8){
  Pi<-matrix(0,k+1,k+1)
  ind<-1:k
  Pi[cbind(ind,ind+1)]<-1/2
  Pi[cbind(ind,1)]<-1/2
  Pi[k+1,k+1]<-1
  for(i in seq_len(n)) Pi<-Pi%*%Pi
  Pi[1,k+1]
}
```

```
rfutam<-function(n=1,nsteps){
  sapply(seq_len(n),function(...){
      B<-rbinom(nsteps,1,0.5)
      max(sapply(split(B,cumsum(B)),length))-1
  })
}


rf<-rfutam(1000,nsteps=256)
p.emp<-tabulate(rf+1,nbins=21)/length(rf)

p<-rbind(diff(-c(1.0,sapply(1:21,pfutam,n=8))),p.emp)
colnames(p)<-0:20
rownames(p)<-c("egzakt","rel.gyak.")
barplot(p,legend.text=T,beside=T)
```



8.5. ábra. Leghosszabb futam eloszlása 256 hosszú dobássorozatban

Az eredmény érdekessége, hogy az esetek döntő többségében legalább 6 egymás utáni fejet fogunk látni egy viszonylag rövid dobássorozatban. Ennél több is igaz, ha n nagy akkor a maximális futam várható hossza körülbelül $\log_{(2)} n$.

8.2.1. Gyakorló feladatok

1. A szociológusok gyakorta feltételezik, hogy egy családon belül az egymást követő generációk társadalmi helyzetét Markov láncnak lehet tekinteni, azaz a fiú foglalkozása közvetlenül az apja foglalkozásától függ, de a nagyapjáétól már nem. Tegyük fel, hogy ez a modell megfelelő és az átmenetvalószínűség–mátrix Π, ahol az 1,2,3 indexek az alsó- közép- és felső osztálynak felelnek meg. Az emberek hány százaléka középosztálybeli egy olyan társadalomban, ahol a fenti modell hosszú időre visszatekintve helyesen írja le a társadalmi folyamatokat.

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 \end{pmatrix}$$

2. Legyen X megszámlálható állapotterű Markov lánc Π átmenetvalószínűség–mátrixszal. Azt mondjuk, hogy a Markov lánc reverzibilis a π eloszlásra nézve, ha $\pi_i \Pi_{i,j} = \pi_j \Pi_{j,i}$ minden i, j-re. Mutassuk meg, hogy ha a lánc reverzibilis π-re, akkor π a lánc stacionárius eloszlása, azaz $\pi\Pi = \pi$.

3. Kártyát keverünk oly módon, hogy a 32 lapból találomra választunk egyet, majd azt a pakli tetejére helyezzük. Mutassuk meg, hogy ezt az eljárást sokszor ismételve a pakli lapjai megközelítőleg véletlenszerű sorrendben lesznek, azaz a lapok bármely sorrendje közel azonos valószínűségű lesz.

4. Ellenőrizzük a következőket:

   (a) „A lépésenként egyet jobbra determinisztikus mozgás” a természetes számok halmazán egy olyan homogén Markov lánc, amelynek nincs invariáns valószínűség eloszlása.

   (b) A „statikus fejlődésű” azaz identitás mátrix átmenetvalószínűségű 2 állapotú Markov láncnak több invariáns eloszlása is van.

   (c) Két állapot „determinisztikus és ciklikus váltakozása” olyan Markov lánc, melynek egyetlen invariáns π eloszlása van, de csak $\mathbf{P}(X_0 = i) = \pi(i)$ kezdeti eloszlás esetén teljesül $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i) = \pi(i)$.

5. Egy embernek r db esernyője van, amelyeket munkába menet és onnan jövet használ szükség, azaz eső esetén (így csak akkor visz magával ernyőt, ha ahonnan indul ott található ernyő és éppen esik az eső). Tegyük fel, hogy egy esős reggel, délután valószínűsége, függetlenül a múlttól és jövőtől, mindig $p \in (0, 1)$.

   (a) Számítsuk ki annak a valószínűségét (közelítőleg), hogy emberünk elázik ha elég régóta követi a fenti módszert.

(b) Milyen nagyra kell r-et választani ahhoz, hogy legalább $\alpha \in (0,1)$ valószínűséggel ne ázzon el az emberünk, bármekkora is p?

6. Tekintsünk egy futószalagot, amelyről kikerülő munkadarabok p valószínűséggel hibásak. Tegyük fel, hogy az egyes munkadarabok állapota (hibás, vagy hibátlan voltuk) nem függ a többi munkadarab állapotától. A következő mintavételezési eljárást használjuk: Kezdetben minden munkadarabot ellenőrzünk egészen addig, amíg egymás után i db. hibátlan következik. Ezek után minden r darabból egyet választunk találomra, és csak azt ellenőrizzük, egészen addig, amíg hibás darabot nem találunk. Ekkor visszatérünk a kezdetben alkalmazott eljáráshoz tehát mindent ellenőrzünk addig, amíg i db hibátlan munkadarabot nem találunk. És így tovább.

   Modellezzük az eljárást Markov lánccal. Számítsuk ki

   (a) az átmenetvalószínűségeket,

   (b) a stacionárius eloszlást,

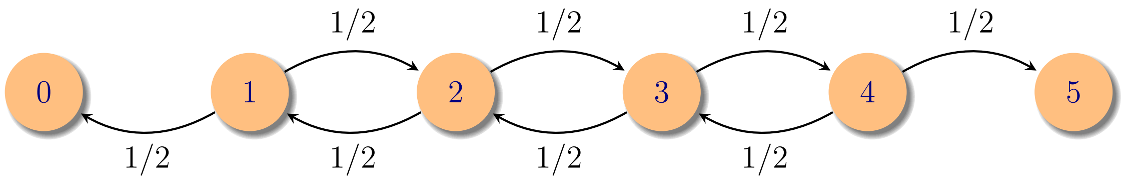
   (c) a megvizsgált alkatrészek arányát (hosszú távon),

   (d) a módszer átlagos hibaszázalékát (hosszú távon).

8.3. Elnyelődési valószínűségek

8.4 Feladat Szerencsejátékot játszunk, melyben a tétet 1/2 valószínűséggel megduplázzuk, 1/2 valószínűséggel elveszítjük. 1 petákkal kezdjük a játékot és addig folytatjuk, amíg öt petákunk nem lesz vagy el nem fogy a pénzünk. Mennyi az esélye annak, hogy 5 petákkal fejezzük be a játékot, ha óvatos stratégiával játszunk, azaz mindig csak 1 petákot kockáztatunk.

Megoldás. A nyereségünk minden játékkal vagy egy petákkal csökken vagy egy petákkal nő. Ez tehát a bevezetőben már említett tönkremenési probléma melynek gráfja a 8.6 ábrán látható.



8.6. ábra. A 8.4 feladat Markov lánca

Az 1-es állapotból indulunk és az egyes nyilakon a megjelölt valószínűségek szerint haladunk tovább. A kérdésünk az, hogy mennyi az esélye annak, hogy a bolyongás az

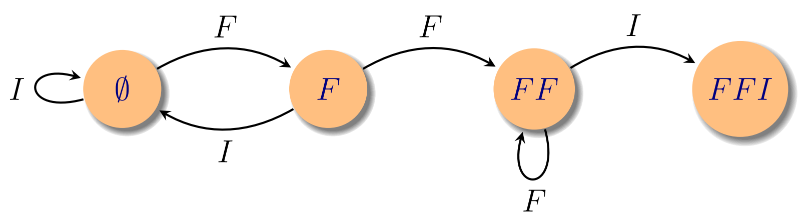
5-ös állapotban fejeződik be és nem a 0-ásban. Jelölje p_i ennek az esélyét, feltéve, hogy a bolyongás az i. állapotból indul. A teljes valószínűség tétel alapján p_i-kre az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0 \\
p_1 &= \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_2 \\
p_2 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \\
p_3 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_4 \\
p_4 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_5 \\
p_5 &= 1
\end{aligned}$$

aminek a megoldása $p_i = i/5$, azaz a kérdéses valószínűség $1/5$.

8.5 Feladat Anna és Pál egy pénzérmét dobál. Anna az FFI, Pál pedig az FII minta korábbi megjelenésére fogadott. Jelölje X az FFI, Y az FII minta első megjelenéséig szükséges dobásszámot. Mutassuk meg, hogy X és Y azonos eloszlású, de Anna és Pál nyerési esélyei nem egyenlők.

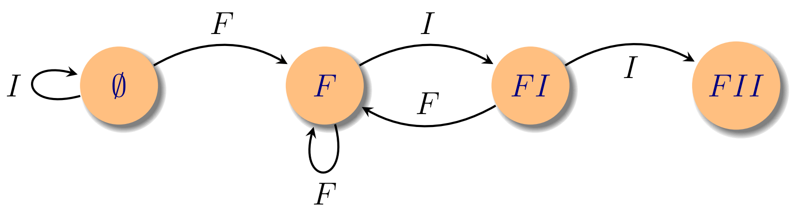
Megoldás. Azokat a sorozatokat, melyek végén az az FFI minta van a következő gráf segítségével lehet generálni:



8.7. ábra. Az FFI mintához tartozó gráf

Minden olyan véges sorozatnak, aminek csak a végén van FFI minta megfelel egy $\emptyset \to FFI$ út a gráfon. mindig azon az élen haladunk tovább aminek a címkéje a következő dobás értékével egyenlő. És megfordítva ha veszünk egy utat ami $\emptyset$-ből FFI-be vezet, akkor az élek címkéit egymás mellé írva egy olyan sorozatot kapunk, aminek csak a végén fordul elő az FFI minta.

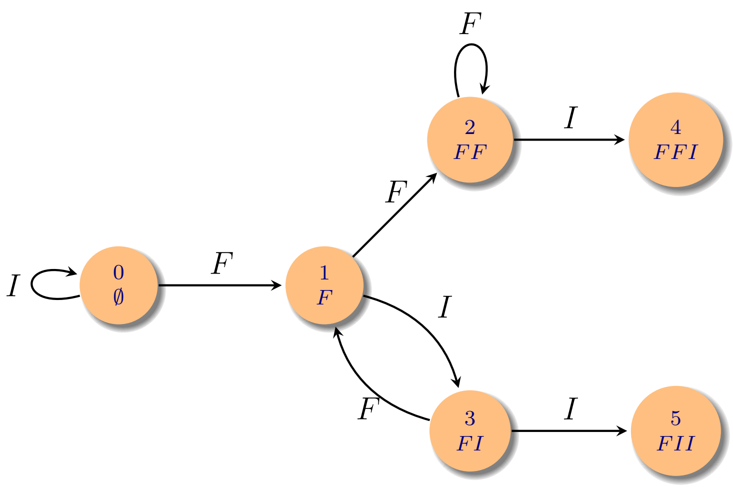
Az FII mintához tartozó gráf hasonló megfontolással:



8.8. ábra. Az FII mintához tartozó gráf

Az, hogy X és Y azonos eloszlású abból adódik, hogy ugyanannyi n hosszúságú út vezet az első gráfon a kezdő pontból a végpontba, mint a másodikon. A megfeleltetés például az lehet, hogy adott egy út az első gráfon, akkor az FF első elérése utáni darabot vágjuk le a végéről cseréljük fel az I és F szerepét és írjuk az út eleje elé. Így egy ugyanolyan hosszú utat kapunk a második gráfon. A megfeleltetés nyilván kölcsönösen egyértelmű.

Ha Anna és Pál egymás ellen fogadnak, akkor minden lehetséges dobássorozatnak megfeleltethető a fenti módszerrel egy út a következő gráfon:



8.9. ábra. Az FFI és FII minták első előfordulásához tartozó Markov lánc

Jelölje p_i annak az esélyét, hogy a gráfon i-vel jelölt csúcsból indulva egy szabályos érmét használva az út kisorsolására az FFI (4) csúcsba jutunk. A p_i valószínűségekre a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_1 && \text{azaz} \quad p_0 = p_1 \\
p_1 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\
p_2 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_4 && \text{azaz} \quad p_2 = p_4 = 1 \\
p_3 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_5 && \text{azaz} \quad p_3 = \frac{1}{2}p_1 \\
p_4 &= 1 \\
p_5 &= 0
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $p_0 = p_1 = 2/3$, $p_2 = p_4 = 1$, $p_3 = 1/3$, $p_5 = 0$. Anna nyerési esélye tehát $2/3$, míg Pálé $1/3$.

8.3.1. Gyakorló feladatok

1. A 8.4 feladatban hogyan változik a tönkremenés valószínűsége ha a mohó stratégiát követjük, azaz a pénzünkből mindig annyit kockáztatunk, hogy nyerés esetén a tőkénk nagysága a lehető legjobban megközelítse az 5 petákot.

2. Antal és Béla egy pénzdarabot dobálnak, melynél a fejdobás valószínűsége p. Antal az FFI, Béla az II sorozat első megjelenésére vár. Mekkora a valószínűsége, hogy Antal sorozata következik be előbb? Szimmetrikus érmére ez $1/2$, miért? Nem szimmetrikus érmére?

3. Két fej-írás sorozat közül azt nevezzük jobbnak, amelyiknél $1/2$-nél nagyobb a valószínűsége, hogy egy szabályos érmét dobálva előbb következik be, mint a másik. Mutassuk meg, hogy FFI jobb FII-nél, FII jobb IIF-nél, IIF jobb IFF-nél, és IFF jobb FFI-nél, azaz ezek a sorozatok „körbeverik” egymást, más szóval a fenti „rendezés” nem tranzitív.

4. Fej-írás játékban nyerünk egy forintot, ha a dobás eredménye fej, veszítünk egyet, ha írás. n forinttal kezdjük a játékot és addig játszunk, amíg $2n$ forintunk lesz, vagy elfogy a pénzünk. Mi az esély arra, hogy játék közben előfordul n hosszú nyerő széria, azaz n közvetlenül egymás utáni fej dobás?

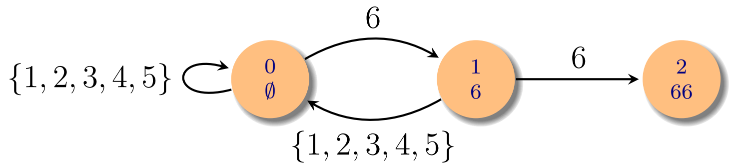
9. fejezet

Véletlen bolyongás: a klasszikus eset és a gráfok

9.1. Bolyongás átlagos hossza, a lépésszám szórásnégyzete

9.1 Feladat Átlagosan mennyit kell dobni egy szabályos kockával, amíg két szomszédos hatos megjelenik?

Megoldás. A kérdést átfogalmazhatjuk egy gráfon való bolyongásról szóló kérdéssé. Tekintsük ugyanis a 9.1 ábrán lévő gráfot:



9.1. ábra. A 66 mintára várakozás Markov lánca

Ha adott egy dobássorozat melynek a végén két szomszédos hatos áll, akkor a gráfon az $\emptyset$ csúcsból indulva és mindig a dobásnak megfelelő élen továbbhaladva a bolyongás vége a 66 csúcs. Megfordítva ha veszünk egy n hosszú bolyongást a gráfon ami az $\emptyset$ csúcsból a 66 csúcsba vezet, abból az összes n hosszú dobássorozat előállítható aminél először a végén található két szomszédos hatos. Így a kérdés valójában az, hogy a fenti gráfon átlagosan hány lépés alatt lehet eljutni a 0 csúcsból a 2 csúcsba.

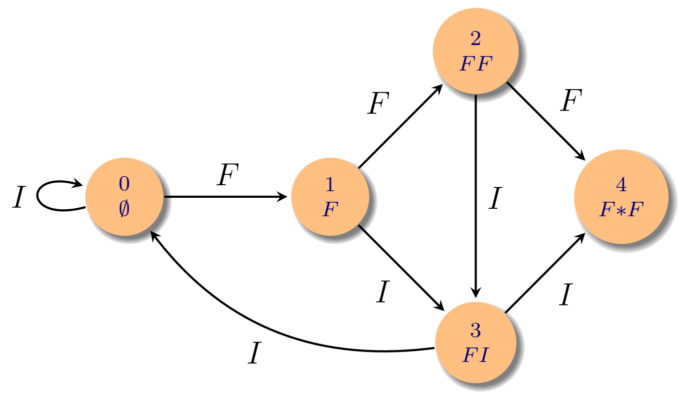
Jelölje m_i a szükséges lépésszám várható értékét, ha az i csúcsból indulunk. Az m_i mennyiségek között az első lépés szerint szétbontva az eseteket a következő összefüggések adódnak:

$$
\begin{aligned}
m_0 &= (1+m_0)\frac{5}{6} + (1+m_1)\frac{1}{6} && \iff && m_0 = m_1 + 6. \\
m_1 &= (1+m_0)\frac{5}{6} + (1+m_2)\frac{1}{6} && \iff && 6m_1 = 6 + 5m_0 \\
m_2 &= 0
\end{aligned}
$$

aminek a megoldása $m_1 = 36$ és $m_0 = 42$. Azaz az átlagosan szükséges dobásszám 42.

9.2 Feladat Egy pénzérmedobás sorozatban átlagosan mennyi ideig kell várni az FFF vagy FIF minták valamelyikének az első megjelenésére? Mennyi a szükséges dobásszám szórásnégyzete?

Megoldás. Gráfon való bolyongásra vezetjük vissza a kérdést. Tekintsük a 9.2 ábrán szereplő gráfot.



9.2. ábra. Az $F * F$ mintára várakozás Markov lánca

Az i pontból induló bolyongás esetén az elnyelődésig szükséges X_i lépésszám várható értékét m_i, a lépésszám négyzetének várható értékét d_i jelöli. Az első lépés szerint szétbontva az eseteket és a teljes várható érték tételt alkalmazva a következő egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \frac{1}{2}(m_0+1) + \frac{1}{2}(m_1+1)\\
m_1 &= \frac{1}{2}(m_2+1) + \frac{1}{2}(m_3+1)\\
m_2 &= \frac{1}{2}(m_3+1) + \frac{1}{2}(m_4+1)\\
m_3 &= \frac{1}{2}(m_0+1) + \frac{1}{2}(m_4+1)\\
m_4 &= 0
\end{aligned}$$

A négyzet várható értékére pedig az $\mathbf{E}\left((1+X)^2\right) = 1 + 2\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}\left(X^2\right)$ összefüggés alapján

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{1}{2}(d_0+2m_0+1) + \frac{1}{2}(d_1+2m_1+1)\\
d_1 &= \frac{1}{2}(d_2+2m_2+1) + \frac{1}{2}(d_3+2m_3+1)\\
d_2 &= \frac{1}{2}(d_3+2m_3+1) + \frac{1}{2}(d_4+2m_4+1)\\
d_3 &= \frac{1}{2}(d_0+2m_0+1) + \frac{1}{2}(d_4+2m_4+1)\\
d_4 &= 0
\end{aligned}$$

Az m-ekre felírt egyenletrendszer megoldása: $m_0 = 34/5$, $m_1 = 24/5$, $m_2 = 16/5$, $m_3 = 22/5$. Azaz a d-re vonatkozó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}
d_0 &= d_1 + 2(m_0+m_1+1) = d_1 + \frac{126}{5}\\
d_1 &= \frac{1}{2}d_2 + \frac{1}{2}d_3 + (m_2+m_3+1) = \frac{1}{2}d_2 + \frac{1}{2}d_3 + \frac{43}{5}\\
d_2 &= \frac{1}{2}d_3 + m_3 + 1 = \frac{1}{2}d_3 + \frac{27}{5}\\
d_3 &= \frac{1}{2}d_0 + m_0 + 1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{39}{5}
\end{aligned}$$

Ennek megoldása $d_0 = \frac{3388}{50} = 67.76$, $d_1 = \frac{2128}{50} = 42.56$ $d_2 = \frac{1312}{50} = 26.24$, $d_3 = \frac{2084}{50} = 41.68$. Végül a szükséges dobásszám szórásnégyzete:

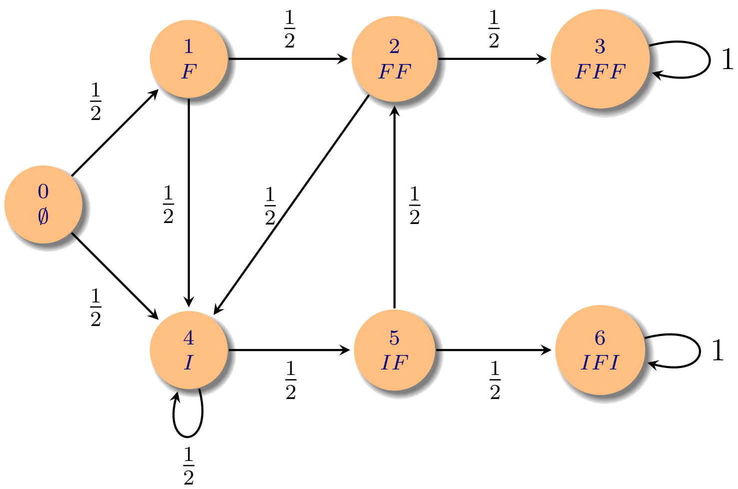
$$d_0 - m_0^2 = \frac{3388}{50} - \left(\frac{34}{5}\right)^2 = \frac{3388-2312}{50} = \frac{1076}{50} = 21.56.$$

9.3 Feladat Egy szabályos érmét dobálunk, X jelöli az FFF, Y az IFI minta első megjelenéséig szükséges dobásszámot. Számítsuk ki az $\mathbf{E}(X|X<Y)$ feltételes várható értéket.

Megoldás. Ha nem a feltételes várható érték volna a kérdés, akkor a megoldás egy lineáris egyenletrendszer megoldása volna. Ez az egyenletrendszer

$$m_i = \begin{cases} \sum_j \Pi_{i,j}(m_j+1) & \text{ha } i \text{ nem végállapot} \\ 0 & \text{ha } i \text{ végállapot} \end{cases}$$

alakú, ahol $\Pi_{i,j}$ egy alkalmas gráfon történő bolyongás átmenetvalószínűség mátrixa. A konkrét feladathoz tartozó gráf a 9.3 ábrán látható.



9.3. ábra.

Ezt a módszert szeretnénk alkalmazni, az általunk keresett feltételes várható érték kiszámítására is. Ehhez első lépésként azt mutatjuk meg, hogy a $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(A|X<Y)$ feltételes eloszlás szerint is Markov láncot kapunk, azonban az átmenetvalószínűségek megváltoznak.

Jelölje Z_n azt, hogy az n. lépés után a fenti gráfon melyik állapotban vagyunk. Első lépésként azt mutatjuk meg, hogy Z_n a $\mathbf{Q}$ valószínűséggel ellátott valószínűségi mezőn is Markov lánc, azaz

$$\mathbf{Q}(Z_{n+1} = k_{n+1}|Z_0 = k_0, \dots, Z_n = k_n) = \mathbf{Q}(Z_{n+1} = k_{n+1}|Z_n = k_n)$$

minden olyan $k_0, k_1, \dots, k_n$ sorozatra, amire a baloldalon a feltétel pozitív valószínűségű.

$$\mathbf{Q}(A|B) = \frac{\mathbf{Q}(A\cap B)}{\mathbf{Q}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A\cap B|(X<Y))}{\mathbf{P}(B|(X<Y))}$$
$$= \frac{\mathbf{P}(A\cap B|(X<Y))\,\mathbf{P}(X<Y)}{\mathbf{P}(B|(X<Y))\,\mathbf{P}(X<Y)} = \mathbf{P}(A|B\cap(X<Y)).$$

alapján

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}(Z_{n+1}=k_{n+1}|Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)\\ &=\mathbf{P}(Z_{n+1}=k_{n+1}|Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n,X<Y)\\ &=\frac{\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_{n+1}=k_{n+1},X<Y)}{\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n,X<Y)}.\end{aligned}$$

Legyen $p_i=\mathbf{P}(X<Y|Z_0=i)$. Mivel homogén Markov láncról van szó,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n,X<Y)\\ &=\mathbf{P}(X<Y|Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)\,\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)\\ &=\mathbf{P}(X<Y|Z_n=k_n)\,\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)=p_{k_n}\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n).\end{aligned}$$

Így aztán

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}(Z_{n+1}=k_{n+1}|Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)\\ &=\frac{p_{k_{n+1}}\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n,Z_{n+1}=k_{n+1})}{p_{k_n}\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)}\\ &=\frac{p_{k_{n+1}}\mathbf{P}(Z_{n+1}=k_{n+1}|Z_i=k_i,\ i\leq n)\,\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)}{p_{k_n}\mathbf{P}(Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)}=\frac{p_{k_{n+1}}\Pi_{k_n,k_{n+1}}}{p_{k_n}}.\end{aligned}$$

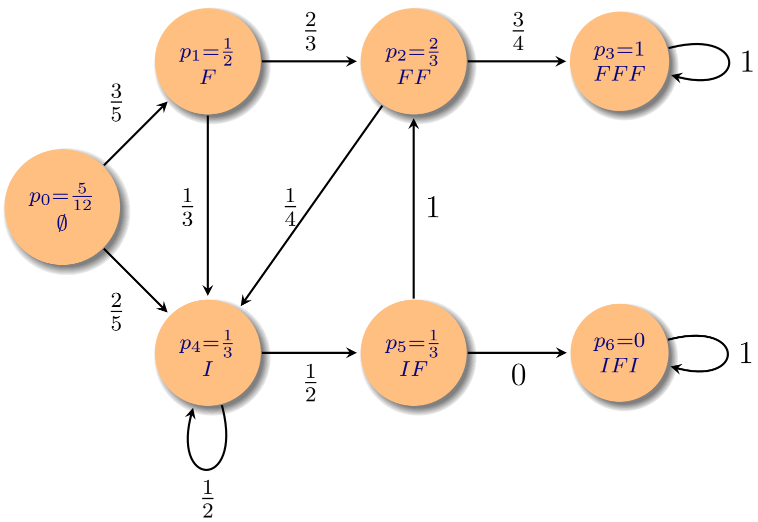
Azt kaptuk, hogy a $\mathbf{Q}(Z_{n+1}=k_{n+1}|Z_0=k_0,\dots,Z_n=k_n)$ feltételes valószínűség csak Z_n értékétől függ, azaz Z a $\mathbf{Q}$ mérték szerint is Markov lánc, továbbá az átmenetvalószínűség mátrix

$$\tilde{\Pi}_{i,j}=\frac{p_j\Pi_{i,j}}{p_i}.$$

A mi konkrét Markov láncunkra a p_i értékeket a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4\\
p_1 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_4\\
p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_4\\
p_3 &= 1\\
p_4 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_5\\
p_5 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_6\\
p_6 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $p_0 = \frac{5}{12}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{2}{3}$, $p_4 = p_5 = \frac{1}{3}$, $p_3 = 1$, $p_6 = 0$. Azaz a Q mértékkel ellátott valószínűségi mezőn, a Z Markov lánc átmenetvalószínűségei megváltoznak, az eredményt a 9.4 ábrán láthatjuk. Az egyes csúcsoknál a hozzájuk tartozó p_i értéket is feltüntettük.



9.4. ábra.

Innen a várható érték kiszámítására szolgáló egyenletrendszer

$$\begin{aligned}
m_0 &= \frac{3}{5}m_1 + \frac{2}{5}m_4 + 1\\
m_1 &= \frac{2}{3}m_2 + \frac{1}{3}m_4 + 1\\
m_2 &= \frac{3}{4}m_3 + \frac{1}{4}m_4 + 1\\
m_3 &= 0\\
m_4 &= \frac{1}{2}m_4 + \frac{1}{2}m_5 + 1\\
m_5 &= m_2 + 1
\end{aligned}$$

Aminek a megoldása $m_4 = m_5 + 2 = m_2 + 3 = \frac{16}{3}$, $m_1 = \frac{13}{3}$, $m_0 = \frac{86}{15}$. A feladat megoldása tehát

$$\mathbf{E}(X|X < Y) = \frac{86}{15}.$$

9.1.1. Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a 8.4 feladatban a játék átlagos hosszát.

2. Öt ember áll egy szabályos ötszög öt csúcsában és korongokat dobálnak egymásnak úgy, hogy minden fordulóban minden egyes korongot a többitől függetlenül mindkét lehetséges szomszédnak 1/2–1/2 valószínűséggel dobják tovább a játékosok. Ha valamelyik játékosnak egyszerre két korongot kellene elkapnia a játék megáll. Kezdetben két korong van két szomszédos játékosnál.

   (a) Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a játék legalább 100 fordulóból áll.

   (b) Határozzuk meg a fordulók átlagos számát és szórásnégyzetét.

3. Három tank párbajt vív, a rövidség kedvéért jelöljük őket A, B, C-vel. A 2/3, B 1/2, C 1/3 valószínűséggel talál célba. Minden fordulóban egyszerre tüzelnek, mindenki a még ki nem lőtt legerősebb ellenfélre céloz. Számítsuk ki a párbaj átlagos hosszát. Mekkorák az esélyek a győzelemre?

4. Egy szabályos érme esetén melyik három hosszú sorozat megjelenésére kell átlagosan a legrövidebb ideig várni?

5. Ketten a következő játékot játsszák: az első játékos húz visszatevés nélkül 3 cédulát egy olyan urnából, amelyikben az $1, 2, 3, 4, 5$ feliratú cédulák vannak. A nála lévő

3 Ft-ból annyit ad át társának, ahány páratlan szám van a kihúzottak között. Ezután a második játékos húz annyiszor, ahány Ft van nála és így tovább. Az nyeri a játékot, akinél először lesz 3 Ft (a kezdéstől eltekintve). Mennyi a valószínűsége, hogy a kezdő játékos nyer? Várhatóan hány húzásból áll a játék?

9.2. Elágazó folyamatok

Ebben a szakaszban nem negatív egész értékű valószínűségi változókkal fogunk dolgozni. Ebben az esetben a változó eloszlását generátorfüggvény segítségével is megadhatjuk. Az X változó G_X generátor függvényét egy hatványsor definiálja, melyben z^n együtthatója az eloszlás n. tagja $\mathbf{P}(X = n)$, azaz

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbf{P}(X = n) = \mathbf{E}\left(z^X\right).$$

Mivel az együtthatókra $0 \leq \mathbf{P}(X = n) \leq 1$ teljesül, ezért a a generátor függvény konvergens a $(-1, 1)$ intervallumban. G_X-ből a nulla körüli Taylor-sorának együtthatói, vagyis az X eloszlásának tagjai deriválással megkaphatóak: $\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$, ahol $G_X^{(n)}$ az n. deriváltat jelöli.

Ha $X \geq 0$, de nem feltétlenül egész értékű, akkor az eloszlást megadhatjuk X Laplace transzformáltjának $\mathcal{L}_X$-nek a segítségével is: $\mathcal{L}_X(\lambda) = \mathbf{E}\left(e^{-\lambda X}\right)$, $\lambda \geq 0$. Mi csak annyit fogunk kihasználni, hogy az $\mathcal{L}_X$ Laplace transzformált egyértelműen meghatározza X eloszlását.

A címben szereplő elágazó folyamat alatt a következő fogjuk érteni.

9.1 Definíció $(S_n)_{n \geq 0}$ elágazó folyamat, ha

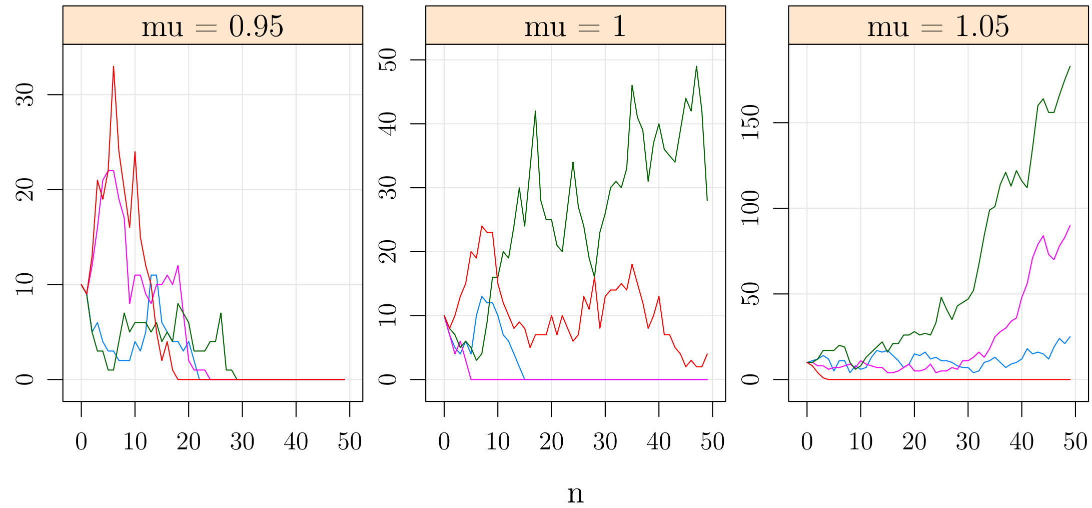
$$S_{n+1} = \sum_{\ell=1}^{S_n} X_{n,\ell},$$

ahol $\{X_{n,\ell} : n \geq 0,\ 1 \leq \ell \leq n\}$ azonos eloszlású, független, nem negatív egész értékű valószínűségi változók. Az üres összeg értéke 0.

S_n-re úgy gondolunk, hogy az az n. *generáció lélekszáma*, míg $X_{n,k}$ az n. generáció k. egyedének *utódszáma*. Azt mondjuk, hogy a folyamat *kihal*, ha valamelyik n-re $S_n = 0$.

Vegyük észre, hogy egy elágazó folyamat egyben Markov lánc is, ugyanis a fejlődése könnyen felírható (8.1) alakban. A 9.5 ábrán a folyamat néhány realizációját láthatjuk, különböző átlagos utódszám mellett.

9.4 Feladat Legyen $(S_n)_{n \geq 0}$ elágazó folyamat és tegyük fel, hogy $S_0 = 1$.



9.5. ábra. Elágazó folyamat néhány realizációja Poisson utódszám eloszlás mellett. μ az átlagos utódszám.

(a) Írjuk fel az S_n generátor függvényét az X-ek közös generátorfüggvényének a segítségével.

(b) Számítsuk ki a „kihalás” valószínűségét!

Megoldás.

(a) S_n egy véletlen tagszámú összeg, amelyben a tagok száma és az összeadandók függetlenek, így

$$
\begin{aligned}
G_{S_n}(z) = \mathbf{E}\left(z^{S_n}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(z^{S_n} | S_{n-1} = k\right) \mathbf{P}\left(S_{n-1} = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}\left(\prod_{\ell=1}^{k} z^{X_{n-1,\ell}} | S_{n-1} = k\right) \mathbf{P}\left(S_{n-1} = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} G_X^k(z) \mathbf{P}\left(S_{n-1} = k\right) = G_{S_{n-1}}(G_X(z))
\end{aligned}
$$

Iterálva

$$
G_{S_n}(z) = \underbrace{G_X \circ G_X \circ \cdots \circ G_X}_{n \text{ darab}}(z)
$$

adódik, azaz S_n generátorfüggvénye az utódszám G_X generátorfüggvényének n-szeres iteráltja.

(b) Annak az esélye, hogy az n. generáció lélekszáma nulla

$$\mathbf{P}(S_n = 0) = G_{S_n}(0).$$

Mivel $(S_n = 0) \subset (S_{n+1} = 0)$, ezért

$$\mathbf{P}(\text{a populáció kihal}) = \mathbf{P}(\cup_n (S_n = 0)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = \lim_{n\to\infty} G_{S_n}(0).$$

Legyen $x_n = G_{S_n}(0) = P(S_n = 0)$. Az (x_n) sorozat monoton és korlátos, ezért konvergens. Mivel $x_{n+1} = G_X(x_n)$ és G_X folytonos, ezért a limesz biztosan eleget tesz az $x = G_X(x)$ összefüggésnek. Megmutatjuk, hogy a minket érdeklő megoldás a legkisebb nem negatív gyök. Legyen tehát $x_0 = \min\{x \geq 0 : x = G_X(x)\}$.

Ha $x < x_0$, akkor $G(x) \leq x_0$. Valóban egy generátor függvény tetszőleges rendű deriváltja nem negatív, ezért $x < x_0$ esetén létezik $x' \in (x, x_0)$, amivel

$$\frac{G(x) - G(x_0)}{x - x_0} = G'(x') \geq 0$$

Vagyis $x < x_0$ miatt $G(x) \leq G(x_0)$ következik.

Mivel $0 \leq x_0$ ezért $x_n \leq x_0$ is fennáll minden $n \geq 1$-re, de akkor $\lim_{n\to\infty} x_n \leq x_0$ is igaz. Másfelől a limesz eleme annak a halmaznak aminek minimális eleme x_0, így csak $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ lehetséges. Azt kaptuk tehát, hogy a kihalás valószínűsége az

$$\mathbf{P}(\text{a populáció kihal}) = \min\{x \geq 0 : x = G_X(x)\}$$

ahol G_X az utódszám generátor függvénye.

9.5 Feladat Legyen X_n olyan elágazó folyamat, melynél $X_0 = 1$ és az utódszám generátorfüggvénye

$$G(s) = \frac{1 - (b + c)}{1 - c} + \frac{bs}{1 - cs},$$

ahol $b, c > 0$ és $b + c < 1$.

(a) Számítsuk ki a kihalás valószínűségét!

(b) Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = k | X_n > 0) \qquad k = 1, 2 \ldots$$

feltételes határeloszlást. (útmut.: számítsuk ki a feltételes eloszlás generátor függvényét!)

(c) Az $1-b-c=c(1-c)$ feltétel mellett számítsuk ki $\mathbf{P}(X_n>0)$ értékét és X_n/n-nak az $(X_n>0)$ eseményre vonatkozó feltételes eloszlásának Laplace transzformáltját.

(d) Tegyük fel, hogy a kihalás valószínűsége egynél kisebb. Számítsuk ki, erre az esetre $X_n/\mathbf{E}(X_1)^n$ Laplace transzformáltját és ennek segítségével számítsuk ki az $X_n/\mathbf{E}(X_1)^n$ változó $(X_n>0)$ eseményre vonatkozó feltételes eloszlásának a limeszét.

Megoldás. Az utódszám generátor függvénye:

$$G(s)=\frac{1-(b+c)}{1-c}+\frac{bs}{1-cs}=\frac{1-(b+c)}{1-c}+\sum_{k=1}^{\infty}bc^{k-1}s^k$$

Azaz annak a valószínűsége, hogy $k>0$ utód lesz bc^{k-1}.

(a) A $G(x)=x$ egyenlet legkisebb nem negatív megoldását keressük. Tudjuk, hogy $x=1$ megoldás és legfeljebb két megoldás lehet, ezért elegendő a másik gyököt megkapni. $p(x)=(1-cx)(G(x)-x)$ másodfokú polinom és $G(x)=x$ valamely $x\in[0,1]$-re pontosan akkor teljesül, ha $p(x)=0$. Ezért elegendő $p(x)/(x-1)$-et kiszámolni, amihez p első és másodfokú tagjának együtthatóját kell ismerni.

$$\begin{aligned}p(x)&=(1-cx)\left(1-\frac{b}{1-c}\right)+bx-x(1-cx)\\&=cx(x-1)+x\left(\underbrace{\frac{bc}{1-c}+b-1}_{=-\frac{1-b-c}{1-c}}\right)+\text{konstans}=(x-1)\left(cx-\frac{1-b-c}{1-c}\right)\end{aligned}$$

amiből p másik gyöke $\frac{1-b-c}{c(1-c)}$. Azaz,

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=0)=\min\left(\frac{1-b-c}{c(1-c)},1\right).$$

Ez pontosan akkor kisebb egynél, ha $1-b-c<c(1-c)$ azaz $b>1-c-c(1-c)=(1-c)^2$. Vegyük még észre, hogy az átlagos utódszám $G'(1)=\frac{b}{(1-c)^2}$. Azaz ha az átlagos utódszám nagyobb mint 1, akkor pozitív valószínűséggel nem hal ki a populáció. Ha az átlagos utódszám legfeljebb egy, akkor a populáció egy valószínűséggel kihal.

(b) Jelölje

$$G^{[n]}=\underbrace{G\circ\cdots\circ G}_{n\text{ darab}}$$

a G generátor függvény n. kompozíció hatványát. Ez az X_n generátor függvénye. Ezért

$$\begin{aligned}G_{X_n|X_n>0}(z) = E(z^{X_n}|X_n>0) &= \sum_{k\geq 1} z^k \mathbf{P}\left(X_n = k|X_n>0\right)\\ &= \frac{\sum_{k\geq 1} z^k \mathbf{P}\left(X_n = k\right)}{\mathbf{P}\left(X_n>0\right)} = \frac{G^{[n]}(z) - G^{[n]}(0)}{1-G^{[n]}(0)} = 1 - \frac{1-G^{[n]}(z)}{1-G^{[n]}(0)}.\end{aligned}$$

Ezért célszerű $1-G^{[n]}(1-x)$-et kifejezni. Vegyük észre, hogy ha $H(x) = 1-G(1-x)$, akkor $H^{[n]}(x) = 1-G^{[n]}(1-x)$. Ezt n szerinti indukcióval érdemes végiggondolni. Mivel

$$\begin{aligned}G(s) = \frac{1-(b+c)}{1-c} + \frac{bs}{1-cs} &= 1 - \frac{b}{1-c} + \frac{bs}{1-cs} =\\ 1 - \frac{b(1-cs)-bs(1-c)}{(1-c)(1-cs)} &= 1 - \frac{b(1-s)}{(1-c)^2+(1-c)c(1-s)}\end{aligned}$$

Ezért

$$H(x) = 1 - G(1-x) = \frac{bx}{(1-c)^2+(1-c)cx} = \frac{1}{\frac{(1-c)c}{b} + \frac{(1-c)^2}{b}\frac{1}{x}}$$

azaz $H(x) = 1/h(1/x)$ alakú, ahol

$$h(u) = \underbrace{\frac{(1-c)c}{b}}_{\alpha} + \underbrace{\frac{(1-c)^2}{b}}_{\beta} u$$

lineáris függvény és $\beta = 1/\mathbf{E}\left(X_1\right)$. Ugyancsak indukcióval érdemes végiggondolni, hogy $H^{[n]}(x) = 1/h^{[n]}(1/x)$. Mivel h lineáris a kompozíció hatványok egyszerűen számolhatóak:

$$\begin{aligned}h(u) &= \alpha + \beta u\\ h^{[2]}(u) &= \alpha + \alpha\beta + \beta^2 u\\ h^{[3]}(u) &= \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3 u\\ &\vdots\\ h^{[n]}(u) &= \alpha(1+\beta+\cdots+\beta^{n-1}) + \beta^n u\end{aligned}$$

Állapodjunk meg abban, hogy $\frac{1-\beta^n}{1-\beta}$ jelentése n, ha $\beta = 1$. Ezzel a megállapodással

$$1 - G^{[n]}(z) = H^{[n]}(1-z) = \frac{1}{h^{[n]}\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{1}{\beta^n\frac{1}{1-z} + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}} = \frac{1-z}{\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}(1-z)}$$

és

$$1-\frac{1-G^{[n]}(z)}{1-G^{[n]}(0)}=1-\frac{(1-z)\left(\beta^n+\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right)}{\beta^n+\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}(1-z)}=\frac{\frac{\beta^n}{\beta^n+\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}z}{1-\frac{\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}{\beta^n+\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}z}$$

Ez azt jelenti, hogy X_n-nek az $(X_n>0)$ eseményre vonatkozó feltételes eloszlása geometriai $p_n=\frac{\beta^n}{\beta^n+\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}$ paraméterrel. $n\to\infty$ esetén három féle viselkedés lehetséges:

(i) Ha $\beta<1$, azaz az átlagos utódszám egynél nagyobb, akkor a feltétel valószínűségének nem nulla limesze van és $p_n\to 0$ és $G_{X_n|X_n>0}(z)\to 0$. Ez azt jelenti, hogy a feltételes eloszlás limesze nem eloszlás. Az ok az, hogy az X_n valószínűségi változó a $(\inf X_n>0)$ eseményen végtelenhez tart.

(ii) Ha $\beta=1$ akkor $p_n=1/(1+n\alpha)$. és $G_{X_n|X_n>0}(z)\to 0$.

(iii) Ha $\beta>1$, akkor $p_n\to p=1/(1+\alpha/(\beta-1))\in(0,1)$ és a határeloszlás geometriai p paraméterrel.

(c) A részfeladatban megfogalmazott eset $\beta=1$-et jelent. Így

$$\mathbf{P}\left(X_n>0\right)=1-G^{[n]}(0)=\frac{1}{\beta^n+\alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}}=\frac{1}{1+n\alpha}.$$

$\beta=1$ mellett a feltételes generátor függvény:

$$G_{X_n|X_n>0}(z)=1-\frac{1-G^{[n]}(z)}{1-G^{[n]}(0)}=\frac{z}{1+n\alpha(1-z)}.$$

Ebből a feltételes Laplace transzformált is kifejezhető:

$$\mathcal{L}_{(X_n-1)/n|X_n>0}(t)=\mathbf{E}\left(e^{-t(X_n-1)/n}|X_n>0\right)=$$
$$e^{t/n}G_{X_n|X_n>0}(e^{-t/n})=e^{t/n}\frac{e^{t/n}}{1+n\alpha(1-e^{-t/n})}=\frac{1}{1+n\alpha(1-e^{-t/n})}.$$

Ha $n\to\infty$, akkor

$$\mathcal{L}_{(X_n-1)/n|X_n>0}(t)\to\frac{1}{1+\alpha t}=\int_0^\infty e^{-tx}\frac{1}{\alpha}\exp\left\{-\frac{x}{\alpha}\right\}dx$$

Azaz $(X_n-1)/n$ $X_n>0$ melletti feltételes eloszlásának van limesze és az α várható értékű exponenciális eloszlás. Mivel itt $1/n\to 0$ ezért X_n/n feltételes eloszlásának is ugyanez a limesze.

(d) A kihalás valószínűsége akkor kisebb mint egy, azaz az átlagos utódszám egynél nagyobb, vagyis $\beta = 1/E(X_1) < 1$. Ekkor

$$G_{X_n|X_n>0}(z) = 1 - \frac{(1-z)\left(\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right)}{\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}(1-z)}$$

A feltételes Laplace transzformált:

$$\mathcal{L}_{\beta^n X_n}(t) = \mathbf{E}\left(\exp\{-t(\beta^n X_n)\}\,|X_n > 0\right) =$$

$$G_{X_n|X_n>0}(e^{-t\beta^n}) = 1 - \frac{(1-z)\left(\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right)}{\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}(1-z)}\Big|_{z=e^{-t\beta^n}}$$

Kihasználjuk, hogy $\frac{1-e^{-t\beta^n}}{t\beta^n} \to 1$ ha $n \to \infty$. Így

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\beta^n X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{\beta^n t\left(\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\right)}{\beta^n + \alpha\frac{1-\beta^n}{1-\beta}\beta^n t} = 1 - \frac{t\frac{\alpha}{1-\beta}}{1+\frac{\alpha}{1-\beta}t} = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{1-\beta}t}$$

Az adódott, hogy a feltételes eloszlás limesze exponenciális melynek várható értéke $\alpha/(1-\beta)$.

9.2.1. Gyakorló feladatok

1. Legyen X_n elágazó folyamat, $X_0 = 1$. Tetszőleges rögzített k pozitív egész számra definiáljuk az $Y_r = X_{rk}$ sorozatot. Mutassuk meg, hogy Y_r, $r = 0, 1, 2, \dots$ szintén elágazó folyamat. Fejezzük ki az utódszámok generátorfüggvényeinek kapcsolatát a két folyamatban.

2. Legyen $f(s) = 1 - p(1-s)^\beta$ $(p, \beta \in (0,1))$ generátor függvény. Számoljuk ki az iteráltakat.

3. Mutassuk meg, hogy
$$f(s) = \frac{s}{(m-(m-1)s^k)^{1/k}}$$
generátor függvény és számítsuk ki az n-ik iteráltját.

4. A 0 pillanatban egy vértenyészetben legyen jelen egyetlen vörös vértest. Az első perc végén a vörös vértest elhal, és a következő kombinációk lehetségesek: 2 vörös vértest keletkezik 1/4 valószínűséggel, 1 vörös vértest és 1 fehér vérsejt keletkezik

2/3 valószínűséggel, 2 fehér vérsejt keletkezik 1/12 valószínűséggel. Minden egyes vörös vértest egy percig él, és az ősvértesthez hasonlóan hoz létre utódokat. Mindegyik fehér vérsejt egy percig él, és azután elhal anélkül, hogy utódokat hozna létre. Az egyes sejtek egymástól függetlenül viselkednek.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy a tenyészet a kezdetétől számított $n + 1/2$ perc múlva még egyetlen fehér vérsejt sem jelenik meg?

(b) Mekkora a tenyészet kihalásának a valószínűsége?

5. Legyen az utódszám generátor függvénye $f(s) = as^2 + bs + c$. Mutassuk meg, hogy a kihalás valószínűsége $\min(c/a, 1)$.

6. Jelölje X_n egy elágazó folyamatban az n. generáció lélekszámát és legyen $X_0 = 1$. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_k X_k > L | X_m = 0\right) \le \mathbf{P}\left(X_m = 0\right)^L .$$

7. Jelölje X_n egy elágazó folyamatban az n. generáció lélekszámát és legyen $X_0 = 1$. Tegyük fel, hogy az utódszám várható értéke $\mathbf{E}\left(X_1\right) = m < 1$. Számítsuk ki, az összes leszármazottak átlagos számát, azaz $\mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)$-et.

9.3. Martingálok

9.3.1. Feltételes várható érték: általános eset

Most a 6.5 fejezetben bevezetett fogalmakat általánosítjuk. $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ jelöli az $\mathcal{A}$ mérhető integrálható valószínűségi változók családját.

9.2 Definíció Ha $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész σ-algebra, akkor azt az $\mathcal{F}$–mérhető Y valószínűségi változót, amire tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esetén $\mathbf{E}\left(\mathbf{1}_A X\right) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_A Y\right)$ az X $\mathcal{F}$-re vonatkozó feltételes várható értéknek nevezzük és $\mathbf{E}\left(X|\mathcal{F}\right)$-fel jelöljük.

Az Y változóval kapcsolatban megfogalmazható események σ-algebráját, $\sigma(Y)$-nal fogjuk jelölni. $\sigma(Y)$ elemei az $(Y \in H)$ alakú események, ahol H a számegyenes Borel részhalmaza. Abban az esetben, ha $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ az $\mathbf{E}\left(X|\sigma(Y)\right)$ jelölés mellett az $\mathbf{E}\left(X|Y\right)$ jelölést is használjuk majd.

9.3 Tétel *Legyen $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ és $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$. Ekkor $\mathbf{E}\left(X|\mathcal{F}\right)$ létezik, és bármely két változata legfeljebb egy nulla valószínűségű eseményen különbözhet.*

Alaptulajdonságok.

(i) $\mathbf{E}(X+Y|\mathcal{F}) = \mathbf{E}(X|\mathcal{F}) + \mathbf{E}(Y|\mathcal{F})$ feltéve, hogy mindegyik feltételes várható érték létezik.

(ii) Ha X $\mathcal{F}$ mérhető, valamint Y és XY integrálható, akkor $\mathbf{E}(XY|\mathcal{F}) = X\mathbf{E}(Y|\mathcal{F})$.

(iii) Beppo Lévi tétel. Ha $X_{n+1} \geq X_n \geq 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}) = \mathbf{E}\left(\lim_{n\to\infty} X_n|\mathcal{F}\right)$$

(iv) Fatou lemma. Ha $X_n \geq 0$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{F}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n|\mathcal{F})$$

(v) Lebesgue (dominált konvergencia) tétel. Ha $X_n \to X$ egy valószínűséggel, $|X_n| \leq Z$ és $\mathbf{E}(Z) < \infty$, akkor $\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n|\mathcal{F})$.

A feltételes várható érték kiszámítása néhány speciális esetben igen egyszerű.

9.4 Definíció Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F}$ σ-algebra atomos, ha megadható egy $E = \{A_n : n \geq 0\}$ teljes eseményrendszer úgy, hogy $\mathcal{F} = \sigma(E)$. Azaz

$$\mathcal{F} = \left\{ \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \,:\, \mathcal{B} \subset E \right\}$$

E elemeit az $\mathcal{F}$ atomjainak nevezzük.

9.5 Lemma *Ha $\mathcal{F}$ atomos σ-algebra, akkor $\mathbf{E}(X|\mathcal{F}) = \sum_{A\in E} \mathbf{1}_A \mathbf{E}(X|A)$. (Itt $\mathbf{E}(X|A)$ a pozitív valószínűségű A eseményre vonatkozó feltételes várható érték.)*

Bizonyítás. Legyen $B \in \mathcal{F}$, akkor $B = \bigcup \mathcal{B}$ valamely $\mathcal{B} \subset E$ résszel. A teljes várható érték érték elemi változatát használva

$$\mathbf{E}\left(\sum_{A\in E} \mathbf{1}_A \mathbf{E}(X|A)\, \mathbf{1}_B\right) = \sum_{A\in E} \mathbf{P}(A\cap B)\, \mathbf{E}(X|A) =$$
$$\sum_{A\in\mathcal{B}} \mathbf{P}(A)\, \mathbf{E}(X|A) = \sum_{A\in E} \mathbf{P}(A)\, \mathbf{E}(X\mathbf{1}_B|A) = \mathbf{E}(X\mathbf{1}_B).$$

9.6 Következmény *Ha X, Y együttes eloszlása diszkrét, akkor*

$$\mathbf{E}(X|Y) = \sum_y \mathbf{1}_{Y=y} \mathbf{E}(X|Y=y) = \left.\sum_x x\mathbf{P}(X=x|Y=y)\right|_{y=Y}$$

9.7 Lemma *Legyen $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ valamely Y valószínűségi változóval, és $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amire tetszőleges $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\int_{-\infty}^{y_0} h(y) F_Y(dy) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{Y<y_0} X\right).$$

Ekkor $\mathbf{E}\left(X|\mathcal{F}\right) = h(Y)$.

Bizonyítás. Ha a feltétel teljesül, akkor tetszőleges $a < b$ esetén az

$$\mathbf{E}\left(h(Y)\mathbf{1}_{a\le Y<b}\right) = \int_{[a,b)} h(y) F_Y(dy) = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{a\le Y<b} X\right)$$

azonosság is fennáll. Ekkor viszont a következő két előjeles mérték

$$\begin{aligned} A \mapsto& \mathbf{E}\left(h(Y)\mathbf{1}_A\right) \\ A \mapsto& \mathbf{E}\left(X\mathbf{1}_A\right) \end{aligned}$$

megegyezik az $A = (Y \in \cup_i [a_i, b_i))$ alakú eseményeken, $a_i < b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Mértékelméletből ismert, hogy ez már elég ahhoz, hogy $\sigma(Y)$-on is megegyeznek, vagyis $h(Y)$ a feltételes várható érték. □

9.8 Lemma *Ha X, Y együttes eloszlása abszolút folytonos, akkor*

$$\mathbf{E}\left(g(X)|Y\right) = \int g(x) f_{X|Y}(x|y)dx\bigg|_{y=Y}$$

ahol

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} & \textit{ha } f_Y(y) > 0 \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}.$$

az X valószínűségi változó Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye.

Bizonyítás. A 9.7 lemma feltételét ellenőrizzük.

$$\int_{-\infty}^{y_0} h(y)F_Y(dy) = \int_{-\infty}^{y_0} h(y) f_Y(y) dy = \\ \int_{-\infty}^{y_0} \int g(x) \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx f_Y(y) dy = \\ \int \mathbf{1}_{y<y_0} g(x) f_{X,Y}(x,y) dxdy = \mathbf{E}\left(\mathbf{1}_{Y<y_0} g(X)\right)$$

9.9 Tétel *Legyen X, Y valószínűségi változó és $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan mérhető függvény, hogy $\mathbf{E}(|g(X,Y)|) < \infty$. Ha X független Y-tól, akkor*

$$\mathbf{E}(g(X,Y)|Y) = \mathbf{E}(g(X,y))|_{y=Y}$$

Bizonyítás. Mivel X, Y független, ezért $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. Legyen

$$h(y) = \mathbf{E}(g(X,y)) = \int g(x,y)F_X(dx)$$

□

és ellenőrizzük a 9.7 lemma feltételét.

$$\int_{(-\infty,y_0)} h(y)F_Y(dy) = \int \mathbf{1}_{y<y_0} g(x,y)F_X(dx)F_Y(dy) =$$

$$\int \mathbf{1}_{y<y_0} g(x,y)F_{X,Y}(dx,dy) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{Y<y_0} g(X,Y)).$$

Az előző állítás általánosabb feltételek mellett is igaz.

9.10 Tétel *Legyen $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ két független σ-algebra és $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ mérhető. Ha $Z(\omega) = g(\omega,\omega)$ integrálható, akkor*

$$\mathbf{E}(Z|\mathcal{G}) = \int_\Omega g(\omega_1,\omega)\mathbf{P}(d\omega_1)$$

Bizonyítás. A bizonyítás formailag ugyanaz, mint az előző tételben. Legyen $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega, \mathcal{F}) \times (\Omega, \mathcal{G})$ a következő $X(\omega) = \omega$ és $Y(\omega) = \omega$. Számítsuk ki (X,Y) eloszlását. Ha $A \in \mathcal{F}$, és $B \in \mathcal{G}$, akkor

$$\mathbf{P}((X,Y) \in A \times B) = \mathbf{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Utolsó lépésben azt használtuk, hogy $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ függetlenek. Ez azt jelenti, hogy (X,Y) eloszlása $\mathbf{P}|_\mathcal{F} \times \mathbf{P}|_\mathcal{G}$. Ezért aztán

$$\mathbf{E}(g(X,Y)\mathbf{1}_{Y\in A}) = \int_{\Omega\times\Omega} g(\omega_1,\omega_2)\mathbf{1}_{\omega_2\in A}\mathbf{P}(d\omega_1) \times \mathbf{P}(d\omega_2) =$$

$$\int_A \int_\Omega \underbrace{g(\omega_1,\omega_2)\mathbf{P}(d\omega_1)}_{U(\omega_2)} \mathbf{P}(d\omega_2) = \mathbf{E}(U\mathbf{1}_A)$$

Azaz $\mathbf{E}(Z|\mathcal{F}) = U = \int_\Omega g(\omega_1,.)\mathbf{P}(d\omega_1)$. □

9.11 Következmény (Függetlenségi lemma) *Ha X független $\mathcal{G}$-től, Y mérhető $\mathcal{G}$-re nézve, és $g(X,Y)$ integrálható, akkor*

$$\mathbf{E}(g(X,Y)|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(g(X,y))|_{y=Y}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{F} = \sigma(X)$ és $g'(\omega_1, \omega_2) = g(X(\omega_1), Y(\omega_2))$ Ekkor g' $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ mérhető és $Z(\omega) = g'(\omega, \omega) = g(X(\omega), Y(\omega))$. Az előző tétel szerint

$$\mathbf{E}\left(g(X,Y)|\mathcal{G}\right)(\omega) = \mathbf{E}\left(Z|\mathcal{G}\right)(\omega) = \int_\Omega g'(\omega_1, \omega)\mathbf{P}\left(d\omega_1\right) =$$

$$\int_\Omega g(X(\omega_1), Y(\omega))\mathbf{P}\left(d\omega_1\right) = \mathbf{E}\left(g(X,y)\right)_{y=Y(\omega)}.$$

Ezt röviden úgy írhatjuk, hogy $\mathbf{E}\left(g(X,Y)|\mathcal{G}\right) = \mathbf{E}\left(g(X,y)\right)|_{y=Y}$. □

9.3.2. Martingálok, összefoglaló

9.12 Definíció Az $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sorozatot martingálnak nevezzük, ha minden $n \geq 0$-ra

(i) $\mathcal{F}_n$ σ-algebra és az X_n valószínűségi változó $\mathcal{F}_n$ mérhető.

(ii) $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. (Ezt úgy is szokás mondani, hogy $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$ egy filtráció).

(iii) $\mathbf{E}\left(|X_n|\right) < \infty$, azaz X_n integrálható

(iv) $\mathbf{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = X_n$.

Ha a (iv) tulajdonság helyett a

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \geq X_n, \quad \left(\mathbf{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) \leq X_n\right)$$

tulajdonságot szerepeltetjük a definícióban, akkor szubmartingálról (szupermartingálról) beszélünk.

A legegyszerűbb példa martingálra, független, nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeiből álló sorozat. Ilyen a szimmetrikus bolyongás. A Jensen egyenlőtlenség miatt, ha X martingál és f konvex, $f(X_n) \in L^1(\Omega)$, minden n-re, akkor $f(X)$ szubmartingál, ha pedig f konkáv, akkor $f(X)$ szupermartingál.

9.6 Feladat Jelölje S_n a számegyenes egész koordinátájú pontjain szimmetrikusan mozgó pont helyzetét az n. lépés után, $S_0 = 0$. Mutassuk meg, hogy S_n, martingál, S_n^2, e^{S_n} szubmartingál, továbbá $S_n^2 - n$ és $e^{tS_n}/\operatorname{ch}(t)^n$ martingál.

Megoldás. Legyen $X_n = S_n - S_{n-1}$, ha $n > 0$. Az X_n sorozat független azonos eloszlású változókból áll, $P(X_n = \pm 1) = 1/2$.

Mindegyik esetben az $E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y)$ feltételes várható értéket kell kiszámítani valamely S-ből képzett Y folyamatra, ahol $\mathcal{F}_n^Y = \sigma(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$. Ehelyett először egy finomabb σ algebrát, $\mathcal{F}_n^S = \sigma(S_0, \ldots, S_n)$-et használunk majd.

(a)

$$E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n^S) = E(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S) = S_n + \underbrace{E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S)}_{E(X_{n+1})=0} = S_n.$$

(b) Legyen $Y_n = S_n^2 - n$, ekkor $\mathcal{F}_n^Y \subset \mathcal{F}_n^S$ és

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^S) = E(S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n^S) = E((S_n + X_{n+1})^2 - n - 1|\mathcal{F}_n^S) =$$
$$E(S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2 - n - 1|\mathcal{F}_n^S) =$$
$$S_n^2 - n + 2S_n \underbrace{E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S)}_{=E(X_{n+1})=0} + \underbrace{E(\underbrace{X_{n+1}^2}_{=1}|\mathcal{F}_n^S) - 1}_{=0} = S_n^2 - n = Y_n.$$

vagyis

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y) = E(\underbrace{E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^S)}_{=Y_n}|\mathcal{F}_n^Y) = E(Y_n|\mathcal{F}_n^Y) = Y_n$$

és Y valóban martingál.

(c) Legyen $t \in \mathbb{R}$ rögzített és $Y_n = \exp\{tS_n - n \ln \operatorname{ch} t\}$, ekkor $\mathcal{F}_n^Y \subset \mathcal{F}_n^S$ és

$$E(\exp\{tS_{n+1}\}|\mathcal{F}_n^S) = E(\exp\{t(S_n + X_{n+1})\}|\mathcal{F}_n^S) =$$
$$\exp tS_n \underbrace{E(\exp\{tX_{n+1}\}|\mathcal{F}_n^S)}_{=\frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \operatorname{ch}(t)} = \exp\{tS_n\} \operatorname{ch}(t) = Y_n \operatorname{ch}(t)^{n+1}.$$

vagyis

$$E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n^Y) = \operatorname{ch}(t)^{-(n+1)} E(E(\exp\{tS_{n+1}\}|\mathcal{F}_n^S)|\mathcal{F}_n^Y) =$$
$$\operatorname{ch}(t)^{-(n+1)} E(Y_n \operatorname{ch}(t)^{n+1}|\mathcal{F}_n^Y) = Y_n.$$

és Y valóban martingál.

Nevezetes egyenlőtlenségek.

A továbbiakban $X_n^* = \max_{k \le n} X_k$ a maximumok sorozat.

9.13 Definíció Legyen X_n valószínűségi változó sorozat és

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ \tau_{2n+1} &= \inf\{n > \tau_{2n} : X_n \le a\} \\ \tau_{2n+2} &= \inf\{n > \tau_{2n+1} : X_n \ge b\} \\ U(n,a,b) &= \min\{k : \tau_{2k+2} > n\} \end{aligned}$$

$U(n,a,b)$ az (X_n) sorozat átmetszési száma.

9.14 Tétel *Legyen X szubmartingál, ekkor*

(i) tetszőleges $\lambda > 0$ esetén

$$\lambda \mathbf{P}(X_n^* > \lambda) \le \mathbf{E}\left(X_n \mathbf{1}_{X_n^* > \lambda}\right)$$

speciálisan, ha $X_k \ge 0$, $k = 1, 2, \ldots$ akkor $\lambda \mathbf{P}(X_n^* > \lambda) \le \mathbf{E}(X_n^*)$.

(ii) Ha X nem-negatív és $1 < p < \infty$, akkor

$$\mathbf{E}(X_n^{*p}) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}(X_n^p).$$

(iii) Ha $U(n, a, b)$ az $[a, b]$ intervallum átmetszési száma az első n lépés során, akkor

$$\mathbf{E}(U(n, a, b)) \le \frac{\mathbf{E}\left(|X_n - a|_+\right)}{b - a}$$

9.15 Következmény *Ha (X_n) szubmartingál és $\sup_n \mathbf{E}\left(|X_n|_+\right) < \infty$, akkor (X_n) egy valószínűséggel konvergens.*

9.16 Következmény *Ha (X_n) nem-negatív szupermartingál (vagy speciálisan martingál), akkor egy valószínűséggel konvergens.*

9.17 Következmény *Ha (X_n) martingál, $1 < p < \infty$ és $\sup_n \mathbf{E}(|X_n|^p) < \infty$, akkor (X_n) egy valószínűséggel konvergens.*

Meg lehet azonban adni olyan martingált is, amely sztochasztikusan konvergál, de egy valószínűséggel divergens.

Megállási idő.

9.18 Definíció A $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ valószínűségi változót megállási időnek (szabálynak) nevezzük az $\mathcal{F}$ filtrációra nézve, ha

$$(\tau \le n) \in \mathcal{F}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9.19 Tétel *Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, τ megállási idő, akkor $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)$ szintén szubmartingál. ($X_{n\wedge\tau}$ neve megállított szubmartingál.)*

9.20 Következmény *Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, τ megállási idő, akkor $(X_{n\wedge\tau}, \mathcal{F}_n)$ szintén martingál. ($X_{n\wedge\tau}$ neve megállított martingál.)*

Ezt az összefüggést gyakran alkalmazzuk $\mathbf{E}(X_\tau)$ kiszámítására, azon a módon, hogy ha τ egy valószínűséggel véges, akkor $X_{n\wedge\tau} \to X_\tau$, mert elég nagy ($\omega$-tól függő) n-re már egyenlőség van és így

$$\mathbf{E}(X_0) = \mathbf{E}(X_{n\wedge\tau}) \to \mathbf{E}(X_\tau)$$

feltéve, hogy a várható érték képzés és a limeszelés felcserélhető. Ezt biztosíthatja a dominált konvergencia tétel, vagy a Beppo Lévi tétel. Azt, hogy ezen integálhatósági feltételek ellenőrzése nem felesleges, a következő egyszerű példa mutatja.

Legyen S a szimmetrikus bolyongás és $\tau = \inf\{n : S_n = 1\}$. Tudjuk, hogy a szimmetrikus bolyongás minden rácspontot egy valószínűséggel meglátogat, ezért τ egy valószínűséggel véges. Mivel $S_{n\wedge\tau}$ martingál, ezért

$$0 = \mathbf{E}(S_0) = \mathbf{E}(S_{n\wedge\tau}) \not\to 1 = \mathbf{E}(\underbrace{S_\tau}_{=1 \text{ egy valószínűséggel}}).$$

Itt az integrálást és a várható érték képzést azért nem lehetett felcserélni, mert

$$\mathbf{P}(\underbrace{\inf\{S_{n\wedge\tau} : n \geq 0\}}_{=M} \leq -k) = \frac{1}{1+k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

miatt

$$\mathbf{E}(-M) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(-M \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k} = \infty.$$

9.7 Feladat A 9.6 feladat segítségével, számítsuk ki újra a a 8.4 tönkremenési feladatban a játék várható lépésszámát.

Megoldás. Az A játékos kezdőtőkéje legyen x a B játékosé y. A 8.4 feladat az $x = 1$ és $y = 4$ esetnek felel meg. Jelölje X_n az A tőkéjét az n. játék után. Ekkor $X_0 = x$ és $X_n = x + S_n$, ahol S_n szimmetrikus bolyongás. Azaz a kérdés az, hogy átlagosan hány lépés alatt éri el a szimmetrikusan bolyongó részecske a $-x$ vagy y szintek valamelyikét. Legyen τ az ehhez szükséges idő, azaz

$$\tau = \min\{k : S_k = -x \text{ vagy } S_k = y\}$$

Tudjuk, hogy τ egy valószínűséggel véges megállási idő és $S_n^2 - n$ martingál. A megállított martingál $S_{n\wedge\tau}^2 - n\wedge\tau$ is martingál, tehát várható értéke nulla. Ha $n \to \infty$, akkor $\mathbf{E}(S_{n\wedge\tau}^2) \to \mathbf{E}(S_\tau^2)$ a dominált konvergencia tétel miatt és $\mathbf{E}(n\wedge\tau) \to \mathbf{E}(\tau)$ a Beppo Levi tétel miatt. Tehát $\mathbf{E}(\tau) = ES_\tau^2$.

τ definíciója miatt $S_\tau = -x$ vagy y. S_τ eloszlását az $S_{n\wedge\tau}$ megállított martingál vizsgálatából számíthatjuk ki. Ugyanis $0 = \mathbf{E}(S_{n\wedge\tau}) \to \mathbf{E}(S_\tau)$. Azaz

$$0 = -x\mathbf{P}(S_\tau = -x) + y\mathbf{P}(S_\tau = y).$$

Amiből

$$\mathbf{P}\left(S_\tau=-x\right)=\frac{y}{x+y} \quad \text{és} \quad \mathbf{P}\left(S_\tau=y\right)=\frac{x}{x+y}.$$

Tehát

$$\mathbf{E}\left(\tau\right)=\mathbf{E}\left(S_\tau^2\right)=x^2\frac{y}{x+y}+y^2\frac{x}{x+y}=xy.$$

A 8.4 feladat megoldását az $x=1$, $y=4$ választással kapjuk vissza.

9.8 Feladat S_n szimmetrikus bolyongás és $\tau=\min\left\{k\,:\,S_k=-1,\text{vagy } S_k=3\right\}$ jelöli az első olyan időpont, amikor a bolyongás a -1 vagy +3 érték valamelyikét eléri. Számítsuk ki az $\mathbf{E}\left(\tau|S_\tau\right)$ feltételes várható értéket.

Megoldás. A kérdéses feltételes várható értéket több módszerrel is kiszámítjuk.

1. megoldás. Tudjuk, hogy S_n, S_n^2-n martingál. Az is ellenőrizhető, hogy $S_n^3-3nS_n$ is az. Mindhárom martingált megállíthatjuk τ-val, így ismét martingálokhoz jutunk. Ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(S_{n\wedge\tau}\right)&=\mathbf{E}\left(S_0\right)=0\\ \mathbf{E}\left(S_{n\wedge\tau}^2-(n\wedge\tau)\right)&=\mathbf{E}\left(S_0^2\right)=0\\ \mathbf{E}\left(S_{n\wedge\tau}^3-3(n\wedge\tau)S_{n\wedge\tau}\right)&=\mathbf{E}\left(S_0^3\right)=0\end{aligned}$$

Ebből

$$\mathbf{E}\left(S_{n\wedge\tau}^2\right)=\mathbf{E}\left(n\wedge\tau\right) \tag{9.1}$$

$$\mathbf{E}\left(S_{n\wedge\tau}^3\right)=3\mathbf{E}\left((n\wedge\tau)S_{n\wedge\tau}\right) \tag{9.2}$$

következik. τ egy valószínűséggel véges megállási idő ezért, ha most $n\to\infty$, akkor $|S_{n\wedge\tau}|\le 3$ miatt $\mathbf{E}\left(S_\tau\right)=0$ (dominált konvergencia tétel). A (9.1) azonosság baloldalán a dominált konvergencia tétel, jobb oldalán a Beppo Lévi tétel miatt cserélhető fel a várható érték képzés és a határátmenet, vagyis $\mathbf{E}\left(S_\tau^2\right)=\mathbf{E}\left(\tau\right)$. Mivel S_τ korlátos ebből $\mathbf{E}\left(\tau\right)<\infty$ is adódik. Ezek után a (9.2) azonosság mindkét oldalán a dominált konvergencia tételre hivatkozhatunk, vagyis $\mathbf{E}\left(S_\tau^3\right)=3\mathbf{E}\left(\tau S_\tau\right)$.

$\mathbf{E}\left(S_\tau\right)=0$ ill. a $\mathbf{P}\left(S_\tau\in\{-1,3\}\right)=1$ összefüggésből

$$3\mathbf{P}\left(S_\tau=3\right)-\mathbf{P}\left(S_\tau=-1\right)=0.$$

Ebből $\mathbf{P}\left(S_\tau=-1\right)=1-\mathbf{P}\left(S_\tau=3\right)=3/4$ következik. Ekkor viszont $\mathbf{E}\left(S_\tau^2\right)=1^2\frac{3}{4}+3^2\frac{1}{4}=\frac{12}{4}=3$. Valamint $\mathbf{E}\left(S_\tau^3\right)=(-1)^3\frac{3}{4}+3^3\frac{1}{4}=\frac{24}{4}=6$. Ugyanezeket a mennyiségeket a teljes várható érték tétel segítségével felírva:

$$3=\mathbf{E}\left(S_\tau^2\right)=\mathbf{E}\left(\tau\right)=\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(\tau|S_\tau\right)\right)=\mathbf{E}\left(\tau|S_\tau=-1\right)\frac{3}{4}+\mathbf{E}\left(\tau|S_\tau=-1\right)\frac{1}{4}$$

és

$$6 = \mathbf{E}\left(S_\tau^3\right) = 3\mathbf{E}\left(\tau S_\tau\right) = 3\mathbf{E}\left(S_\tau \mathbf{E}\left(\tau | S_\tau\right)\right) =$$
$$(-3)\mathbf{E}\left(\tau | S_\tau = -1\right)\frac{3}{4} + 9\mathbf{E}\left(\tau | S_\tau = -1\right)\frac{1}{4}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása $\mathbf{E}\left(\tau | S_\tau = -1\right) = \frac{7}{3}$ és $\mathbf{E}\left(\tau | S_\tau = 3\right) = 5$.

2. megoldás. Végül az $\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3}\right)$ várható értéket még egy módszerrel is kiszámítjuk. A teljes várható érték tétel szerint

$$\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3} | S_1 = -1\right) + \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3} | S_1 = 1\right).$$

Itt az első feltételes várható érték nulla, mert ha $S_1 = -1$, akkor $\tau = 1$ és $S_\tau \neq 3$, azaz az $(S_1 = -1)$ eseményen $\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3}$ nulla. Az $S_1 = 1$ feltétel mellett, szimmetria miatt

$$\mathbf{P}\left(S_\tau = -1 | S_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(S_\tau = 3 | S_1 = 1\right)$$

és pozitív egész k számokra

$$\mathbf{P}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3} = k | S_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = -1} = k | S_1 = 1\right)$$

Azaz

$$\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3} | S_1 = 1\right) = \mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = -1} | S_1 = 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{E}\left(\tau | S_1 = 1\right) = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\left(\tau | S_0 = 1\right) + 1) = \frac{1}{2}(4+1) = \frac{5}{2}.$$

amiből $\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3}\right) = \frac{5}{4}$ és

$$\mathbf{E}\left(\tau | S_\tau = 3\right) = \frac{\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3}\right)}{\mathbf{P}\left(S_\tau = 3\right)} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = 5$$

és

$$\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = -1}\right) = \mathbf{E}\left(\tau\right) - \mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = 3}\right) = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4},$$

valamint

$$\mathbf{E}\left(\tau | S_\tau = -1\right) = \frac{\mathbf{E}\left(\tau \mathbf{1}_{S_\tau = -1}\right)}{\mathbf{P}\left(S_\tau = -1\right)} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{3}.$$

9.9 Feladat Válasszunk véletlenszerűen számokat a $[0,1]$ intervallumból. A kiválasztott számokat jelölje $X_1, X_2, \ldots$ és legyen $S_n = X_1 + \cdots X_n$ valamint $\nu = \inf\{n : S_n > 1\}$. Számítsuk ki az S_ν valószínűségi változó várható értékét.

Megoldás. Legyen $\Delta_k = \left\{x \in [0,\infty)^k \,:\, \sum x_i < 1\right\}$.

$$\mathbf{P}(\nu > k) = \mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_k < 1) = |\Delta_k| = \frac{1}{k!}$$

Ezért

$$\mathbf{E}(\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\nu \geq k) = \sum_k \frac{1}{(k-1)!} = e$$

Mivel $M_n = S_n - n\mathbf{E}(X_1)$ martingál, a ν megállási idővel kapott sorozat is martingál. $M_0 = 0$ miatt $\mathbf{E}(S_{n\wedge\nu} - (n\wedge\nu)\mathbf{E}(X_1)) = 0$ vagyis a Beppo-Lévy tételt használva

$$\mathbf{E}(S_\nu) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(S_{n\wedge\nu}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\mathbf{E}((n\wedge\nu)) = \frac{1}{2}\mathbf{E}(\nu)$$

és $\mathbf{E}(S_\nu) = e/2$.

9.3.3. Gyakorló feladatok

1. Jelölje S_n szimmetrikusan bolyongó pont helyzetét az n. lépés után. Keressünk minél több olyan p kétváltozós polinomot, amire $p(S_n, n)$ martingál.

2. Oldjuk meg a 9.8 feladatot a 9.3 feladat módszerével is.

3. Legyen $(M_n)_{n\geq 0}$ martingál, és tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(M_n^2)$ véges minden n-re és $M_0 = 0$. Jelölje X_n az M_n martingál differenciáit, azaz $X_n = M_n - M_{n-1}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{D}^2(M_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{D}^2(X_k)$.

4. Legyen $(S_n)_{n\geq 0}$ szimmetrikus bolyongás, $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ $|a| < m$ rögzített és $\tau_m = \min\{k \,:\, |S_k| = m\}$.

   (a) Mutassuk meg, hogy $M_n = |S_n - a| - |\{k < n \,:\, S_k = a\}|$ martingál. Az S_n bolyongás átlagosan hányszor látogatja meg az a szintet τ_m előtt?

   (b) Az S_n bolyongás átlagosan hányszor látogatja meg az a szintet τ_m előtt, ha tudjuk, hogy $S_{\tau_m} = m$?

5. Legyen X Markov lánc, I véges állapottérrel és Π átmenetvalószínűség–mátrixszal. $f : I \to \mathbb{R}$ függvény esetén legyen $f^* : I \to \mathbb{R}$ a következő $f^*(i) = \sum_{j\in I}(f(j) - f(i))\Pi_{i,j}$, továbbá

$$M_n = f(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} f^*(X_k), \quad n = 1, 2 \ldots$$

   Mutassuk meg, hogy $(M_n, \sigma(X_0, \ldots, X_n))$ martingál sorozat.

6. Legyen $(S_n)_{n\geq 0}$ elágazó folyamat, lásd a 9.2 szakaszt, és tegyük fel, hogy a 0. generáció egyetlen egyedből áll, azaz $S_0 = 1$. Jelölje μ az utód eloszlás várható értékét, σ^2 pedig a szórásnégyzetét, és tegyük fel, hogy $\mu > 1$ (*szuperkritikus eset*).

   (a) Mutassuk meg, hogy $W_n = \mu^{-n} S_n$ martingál, amely 1 valószínűséggel konvergens, és ha $\sigma^2 < \infty$, akkor L^2-ben is. Jelölje a határértékét W_∞.

   (b) Jelölje p a kihalás valószínűségét. Igazoljuk, hogy $\left(p^{S_n}\right)$ martingál.

   (c) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\left(W_\infty = 0\right) = p$. Ez azt jelenti, hogy azon az eseményen, ahol a folyamat nem hal ki, $W_\infty > 0$ és (a) alapján ezen az eseményen az S_n sorozat exponenciális gyorsasággal nő.

7. Szabályos pénzérmét dobálunk. Ha az eredmény fej a tét kétszerését kapjuk vissza, ha írás elveszítjük a tétet. Kezdetben két forintunk van és addig játszunk, amíg el nem veszítjük a pénzünket, vagy amíg össze nem gyűjtünk 5 Ft-ot. Mohó stratégiát követünk, azaz mindig akkora tétet teszünk fel, amivel szerencsés esetben a lehető legjobban meg tudjuk közelíteni az 5 Ft-ot. Jelölje τ a játék hosszát és $M_n = M_{n\wedge\tau}$ az n. játék után a pénzünket, továbbá legyen $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$, $f(0) = f(1) = 0$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 6$, $f(5) = 10$.

   Mutassuk meg, hogy $M_{n\wedge\tau}$ illetve $Y_n = f(M_{n\wedge\tau}) - n \wedge \tau$ martingál és számítsuk a játék átlagos hosszát, azaz $\mathbf{E}\left(\tau\right)$-t.

8. Egy urnában n fehér és n fekete golyó van. Visszatevés nélkül sorra kihúzzuk őket. Fekete golyó húzásakor 1 forintot fizetünk, fehér golyó esetén 1-et kapunk. Jelölje X_i a pénzünket i. golyó kihúzása után ($X_0 = 0$). Legyen

$$Y_i = \frac{X_i}{2n - i}, \quad 1 \leq i \leq 2n - 1$$

   és mutassuk meg, hogy (Y_i) martingál.

9. Egy szabálytalan pénzérmét dobálunk, a fej dobás valószínűsége $p \in (0, 1/2)$. Jelölje S_n a fej és írások számának a különbségét az első n dobás között. Milyen c-re lesz $M_n = \exp\left\{S_n - cn\right\}$ martingál?

10. fejezet

Ízelítő a folytonos idejű esetből: a Poisson folyamat

Motivációként nézzük az alábbi feladatot.

10.1 Feladat Egy telefonközpontban az egymás utáni hívások között eltelt időtartamok λ paraméterű exponenciális eloszlású, független valószínűségi változók. Átlagosan hány hívás fut be egy T hosszúságú időintervallumban?

Megoldás. Kihasználjuk, hogy azonos paraméterű, független exponenciálisok összege Gamma eloszlású, melynek rendje a tagok száma, paramétere pedig az exponenciálisak közös paramétere (ld. 6.10 feladat). Az egyes hívások közti időtartamokat jelölje X_i $i = 1, 2, \ldots,$ a k. hívás időpontját $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Ha $N(t)$ jelöli a $(0, t)$ intervallumban beérkezett hívások számát, akkor

$$N(t) = \min\{n : S_{n+1} > t\}$$

Először számítsuk ki $N(t)$ eloszlását. A $(0, t)$ intervallumban pontosan akkor érkezik legalább k darab hívás, ha a k. hívás időpontja t előtt van, azaz

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n < t) = \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} \lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} dx.$$

Emiatt ha $n \geq 1$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(t) = n) &= \mathbf{P}(N(t) \geq n) - \mathbf{P}(N(t) \geq n+1) \\ &= \int_0^t \frac{1}{n!} \lambda^n \left(n x^{n-1} - \lambda x^n\right) e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{n!} \left[x^n e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Ha $n = 0$, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(N(t) = 0) = \mathbf{P}(N(t) \geq 0) - \mathbf{P}(N(t) \geq 1) &= 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=t} = e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Így $N(t)$ eloszlása Poisson λt paraméterrel.

Következő lépésként kiszámítjuk $X_1, X_2, \ldots, X_n$ együttes eloszlását feltéve, hogy $N(t) = n$. Világos, hogy az $(N(t) = n)$ eseményen $S_n < t$, azaz ha

$$\Delta_n(t) = \left\{x \in (0,t)^n \, : \, \sum x_i < t\right\}$$

akkor tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^n$ Borel halmazra

$$\mathbf{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in H | N(t) = n\right) = \mathbf{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in H \cap \Delta_n(t) | N(t) = n\right).$$

Emiatt elegendő $H \subset \Delta_n(t)$ halmazokra kiszámítani a feltételes valószínűséget. Legyen tehát $H \subset \Delta_n(t)$, ekkor

$$\mathbf{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in H | N(t) = n\right) = \frac{\mathbf{P}\left(((X_1, \ldots, X_n) \in H) \cap (N(t) = n)\right)}{\mathbf{P}\left(N(t) = n\right)}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(((X_1, \ldots, X_n) \in H) \cap (N(t) = n)\right) &= \mathbf{P}\left(((X_1, \ldots, X_n) \in H) \cap \left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i > t\right)\right) \\
&= \int_{x \in H} \int_{t-(x_1+\cdots+x_n)}^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n+x_{n+1})} dx_{n+1} dx_n \ldots dx_1 \\
&= \int_{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in H} \lambda^n e^{-\lambda t} dx_n \ldots dx_1 = \lambda^n e^{-\lambda t} |H|.
\end{aligned}$$

Azaz

$$\mathbf{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in H | N(t) = n\right) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t} |H|}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = |H| \frac{n!}{t^n}.$$

Így a feltételes eloszlás egyenletes a $\Delta_n(t)$ szimplexen. Legyen

$$\Delta_n'(t) = \{s \in (0,t)^n \, : \, s_1 < s_2 < \cdots < s_n < t\}$$

Az $N(t) = n$ feltétel mellett $(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in \Delta_n'$. Legyen $\varphi : \Delta_n' \to \Delta_n$, $\varphi(s) = (s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_n - s_{n-1})$. φ térfogattartó (Jacobi determináns 1), ezért $H \subset \Delta_n'$ esetén

$$\mathbf{P}\left((S_1, \ldots, S_n) \in H | N(t) = n\right) = \mathbf{P}\left((X_1, \ldots, X_n) \in \varphi(H) | N(t) = n\right) = |H| \frac{n!}{t^n}.$$

Ez azt jelenti, hogy $S_1, S_2, \ldots, S_n$ eloszlása az $N(t) = n$ feltételre vonatkozóan ugyanaz, mint egy $(0,t)$-n egyenletesből származó $Z_1^*, \ldots, Z_n^*$ rendezett minta eloszlása. Ez alapján, ha $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$ és $\sum k_i = n$, akkor

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(N(t_i) - N(t_{i-1}) = k_i)\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(|\{j \,:\, S_j \in (t_{i-1}, t_i]\}| = k_i)|N(t) = n\right)\mathbf{P}\left(N(t) = n\right) \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}(|\{j \,:\, Z_j \in (t_{i-1}, t_i]\}| = k_i)\right)\mathbf{P}\left(N(t) = n\right) \\
&= \left\{\frac{n!}{\prod k_i!}\prod\left(\frac{t_i - t_{i-1}}{t}\right)^{k_i}\right\}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\frac{((t_i - t_{i-1})\lambda)^{k_i}}{k_i!}e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})}
\end{aligned}$$

Az adódott, hogy az $N(t_i) - N(t_{i-1})$ növekmények egymástól függetlenek és Poisson eloszlásúak $\lambda(t_i - t_{i-1})$ paraméterrel. Ezért tetszőleges rögzített T hosszúságú intervallumban átlagosan $T\lambda$ hívást kapunk.

Összefoglalva, ha az $N(t)$ a $[0, t]$-ben bekövetkezett események, pl. telefonhívások, számát adja meg (azaz $N(t)$ számláló folyamat), és az események között független azonos paraméterű exponenciális eloszlású időtartamok telnek el, akkor N növekményei függetlenek és Poisson eloszlásúak. Az ilyen folyamatokat Poisson folyamatnak nevezzük.

10.1 Definíció $(N(t))_{t \geq 0}$ Poisson folyamat, ha

(i) N számláló folyamat, azaz $N(0) = 0$ és a $t \mapsto N(t)$ véletlen függvény ugrásai egységnyiek, az ugrások között pedig konstans.

(ii) $t_0 = 0 < t_1 < \cdots t_n$ esetén az

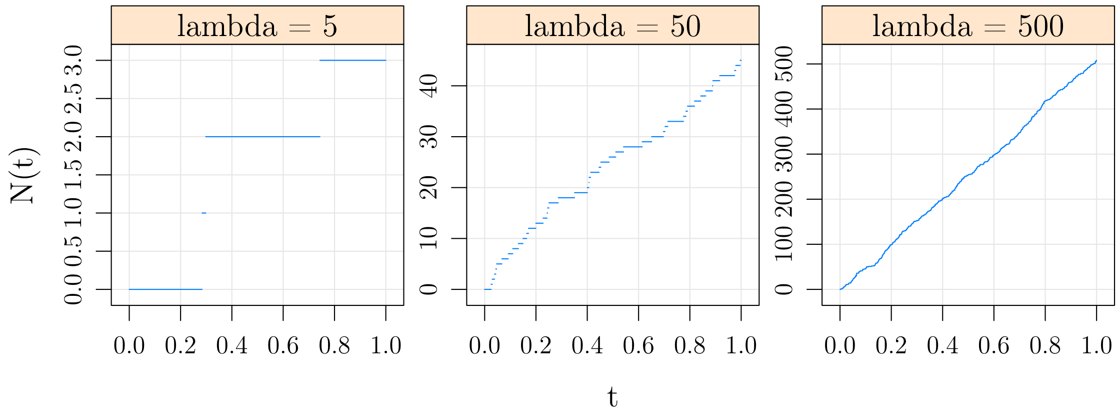
$$N(t_1) - N(t_0), \ldots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

növekmények függetlenek.

(iii) ha $s \leq t$, akkor $N(t) - N(s)$ Poisson eloszlású $\lambda(t - s)$ várható értékkel.

λ-t a folyamat intenzitásának hívjuk.

Különböző intenzitások mellett a folyamat egy-egy realizációját mutatja a 10.1 ábra. A 10.2 ábrán $N(t) - \lambda t$-t ábrázoltuk. Ha az intenzitás nagy akkor a kapott folyamat emlékeztet egy szimmetrikus bolyongás tipikus trajektóriájára. Ez nem véletlen egybeesés, alkalmas normalizálás után mindkét folyamatnak ugyanaz az eloszlásbeli limesze.



10.1. ábra. Poisson folyamat trajektóriái különböző intenzitások mellett

10.2 Feladat Egy sztráda melletti benzinkútnál dolgozunk. Az autópályán az autók átlagosan 5 percenként követik egymást, a követési időközökről tegyük fel hogy exponenciális eloszlásúak és függetlenek. Minden autós a többitől függetlenül $1/5$ valószínűséggel áll meg a kútnál.

Számítsuk a nyolc órás műszak alatt a kúthoz betérő autók számának eloszlását. Átlagosan mennyi borravalót kapunk, ha az autósok egymástól függetlenül adnak borravalót. Tegyük fel, hogy a borravaló eloszlása $\Gamma_{100,1}$.

Megoldás. Jelölje $N(t)$ a t időpontig elhaladt autósok számát. Erről tudjuk, hogy Poisson folyamat, azaz $s < t$ esetén $N(t) - N(s)$ Poisson eloszlású melynek paramétere $(t - s)\lambda$ ahol λ a követési időköz eloszlásának paramétere, vagyis ha az időt órában mérjük, akkor 12. Így nyolc óra alatt a benzinkút mellett elhaladó autósok számának eloszlása Poisson $12 \times 8 = 96$ paraméterrel. Minden autós $1/5$ valószínűséggel áll meg a kútnál, vagyis ha X jelöli az egy műszak alatt a kúthoz betérők, Y a kút mellett elhaladók számát, akkor

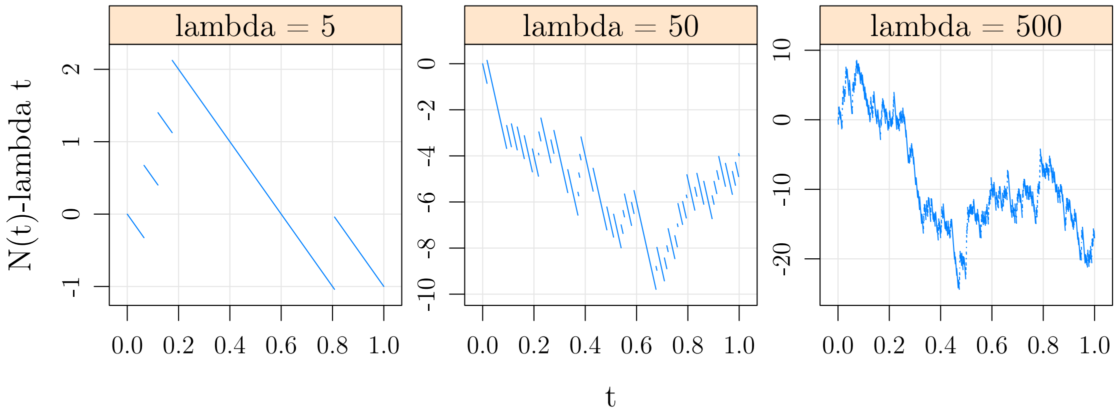
$$\mathbf{P}(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mathbf{P}(X = k | Y = n)\, \mathbf{P}(Y = n) =$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{5^k} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} \frac{96^n}{n!} e^{-96} = \frac{96/5^k}{k!} e^{-96/5}.$$

Azaz a betérő autósok száma Poisson eloszlású $96/5$ paraméterrel.

Az autósoktól kapott borravaló összege:

$$Z = \sum_{1 \le k \le X} Z_k$$



10.2. ábra. Kompenzált Poisson folyamat trajektóriái különböző intenzitások mellett

ahol a Z_k-k független, adott Γ eloszlású változók. Ennek várható értéke $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Z_1) = 100 \times 96/5 = 1920$.

A következő feladat megoldásához célszerű a Poisson folyamat fogalmát kissé általánosítani.

10.2 Definíció $\{N(A) : A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$ Poisson pontfolyamat a síkon μ intenzitás mértékkel, ha

(i) $A \mapsto N(A)$ véletlen mérték.

(ii) Ha $\mu(A)$ véges, akkor $N(A)$ Poisson eloszlású $\mu(A)$ várható értékkel.

(iii) Ha $A_1, \ldots, A_n$ diszjunktak, akkor $N(A_1), \ldots, N(A_n)$ függetlenek.

Poisson pontfolyamatra szolgáltat példát a következő állítás.

10.3 Állítás *Legyen $X_1 < X_2 < \ldots$, az N Poisson folyamat ugrás helyeinek sorozata és $Y_1, Y_2, \ldots$ független azonos eloszlású sorozat, amely az N folyamattól is független. Ekkor*

$$M(A) = |\{k : (X_k, Y_k) \in A\}|$$

Poisson pontfolyamatot alkot, melynek intenzitás mértéke

$$\mu(A) = \int_A dx dF_{Y_1}(dy).$$

Bizonyítás. A 10.1 feladatban kiszámoltuk, hogy $N(t) = n$ feltétel mellett $X_1, \ldots, X_n$ ugyanolyan eloszlású, mint $U_1^*, \ldots, U_n^*$, ahol $U_1, \ldots, U_n$ egyenletes $[0, t]$-en. Ha $U_1, \ldots, U_n$ független az Y sorozattól, akkor

$$(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n) \quad \text{és} \quad (U_1, Y_1), \ldots, (U_n, Y_n)$$

eloszlása az $N(t) = n$ feltétel mellett azonos. Legyen $A_0, A_1, \ldots, A_k$ a $[0, t] \times \mathbb{R}$ egy partíciója. Az $N(t) = n$ feltétel mellett $N(A_0), \ldots, N(A_k)$ együttes eloszlása polinomiális, hiszen az (U_i, Y_i) $i = 1, \ldots, n$ pontokat osztjuk szét az $A_0, \ldots, A_k$ halmazokba egymástól függetlenül. Minden i, j-re $\mathbf{P}((U_i, Y_i) \in A_j) = \mu(A_j)/(\lambda t)$. Ez alapján az együttes eloszlás

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(N(A_i) = n_i, i = 0, \ldots, k) &= \mathbf{P}(N(A_i) = n_i, i = 0, \ldots, k | N(t) = n)\, \mathbf{P}(N(t) = n) \\
&= \frac{n!}{\prod n_i!} \prod \left(\frac{\mu(A_i)}{\lambda t}\right)^{n_i} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp -\lambda t \\
&= \prod_i \frac{(\mu(A_i))^{n_i}}{n_i!} \exp\{-\mu(A_i)\},
\end{aligned}$$

ahol $n = n_0 + \cdots + n_k$. Azt kaptuk, hogy ha $A_1, \ldots, A_k$ diszjunktak és valamennyien részei a $[0, t] \times \mathbb{R}$ sávnak, akkor $N(A_1), \ldots, N(A_k)$ változók függetlenek és Poisson eloszlásúak.

Az általános esethez, legyen $A_{i,T} = A_i \cap [0, T] \times \mathbb{R}$ és T-vel tartsunk végtelenhez. □

10.3 Feladat Tekintsük a következő egyszerű modellt. A t időpontig felbocsátott műholdak $N(t)$ száma λ intenzitású Poisson folyamat. A műholdak élettartama N-től független, azonos eloszlású, független változók sorozatának tekinthető, közös G eloszlásfüggvénnyel. Mi annak az esélye, hogy a T időpontban működő műholdak mindegyike az $s < T$ időpont után került kilövésre?

Megoldás. Legyen ξ_k a k műhold kilövésének az időpontja és η_k az élettartama. A feladat szövege szerint $\{(\xi_k, \eta_k) : k \geq 0\}$ Poisson pontfolyamat $(0, \infty) \times (0, \infty)$-n melynek intenzitás mértéke $\mu = dx \times dG$. A kérdés az, hogy mekkora eséllyel nem esik a

$$A = \left\{(x, y) \in (0, \infty)^2 \,:\, 0 \leq x \leq s,\, x + y > T\right\}$$

halmazba pont. Az A halmazba eső pontok száma Poisson

$$\lambda_A = \int_A dx \times dG = \int_0^s \int_{T-x}^{\infty} dG(y) dx = \int_0^s (1 - G(T - x)) dx$$

paraméterrel, azaz a válasz $\exp(-\lambda_A)$

10.1. Gyakorló feladatok

1. Legyen N Poisson eloszlású valószínűségi változó. X jelöli a fejek, Y az írások számát egy dobássorozat első N számú dobása között. Független-e X és Y?

2. A főnököt egy adott napon telefonon keresők száma λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. A titkárnő minden hívást a többitől függetlenül p valószínűséggel kapcsol be. Milyen eloszlású a bekapcsolt hívások száma?

3. Tegyük fel, hogy a főnökhöz Poisson folyamat szerint érkeznek a hívások és a titkárnő minden egyes hívást a többitől függetlenül p valószínűséggel kapcsol be. Mutassuk meg, hogy a bekapcsolt hívások száma is Poisson folyamatot alkot. Mit kapunk akkor, ha p az időponttól is függ.

4. Legyen M Poisson pontfolyamat $[0,\infty) \times [0,\infty)$-n melynek intenzitás mértéke a Lebesgue mérték és Y M-től független $\Gamma_{\alpha,\lambda}$ eloszlású változó. Milyen eloszlású az $N(t) = M([0,t] \times [0,Z])$ folyamat? Igaz-e, hogy N független növekményű? Igaz-e, hogy stacionárius növekményű?

5. Legyen $N(t)$ azon baleseti helyzetek száma, amibe egy autós a $[0,t]$ intervallumon kerül. A 0 időpont a jogosítvány megszerzésének időpontja és feltesszük, hogy N Poisson folyamat λ intenzitással. Kezdetben minden baleseti helyzetből p valószínűséggel lesz baleset. Az első baleset után a vezető óvatosabbá válik, ezért ettől kezdve $q < p$ valószínűséggel válik a baleseti helyzet balesetté. Számítsuk ki, hogy átlagosan hány balesetet szenved egy autós az első két évben.

11. fejezet

Függelék

11.1. Válogatás az ábrák előállításához használt R programokból

11.1.1. Egyszerű, nem animált ábrák

11.1 Kód 2.1 ábra (2.4 példa)

```
n <- 12  #eddig megyunk
k <- 3  #ennyi fele
s <- c(6, 9, 12)
p <- matrix(0, k, n)
for (i in 1:n) {
  for (j in 1:k) {
    if (s[j] > i - 1)
      p[j, i] <- prod(s[j]:(s[j] - i + 1))/s[j]^i
  }
}
plot(p[1, ], type = "l", main = "Csupa különböző eredmény vszge",
  xlab = "Dobásszám", ylab = "p")
for (i in 2:k) lines(p[i, ], col = i)
legend("topright",
  c("12 oldalú kocka", "9 oldalú kocka", "6 oldalú kocka"),
  lty = c(1, 1, 1), col = c(1, 2, 3))
```

11.2 Kód 2.2 ábra (2.6 példa)

```
par(mfrow = c(1, 1))
```

```
i <- 1
j <- 60
n <- c(i:j)
prob <- rep(0, times = length(n))
for (ii in i:j) {
  k <- c(1:ii)
  prob[ii - i + 1] <- 1 - prod(366 - k)/(365^ii)
}
plot(n, prob, type = "l", main = "Azonos szül.napok valószínűsége",
  ylab = "p")

dat <- read.table("E:\\OKTATAS\\valszam_peldatar\\szul_nap.dat",
  header = T)
nn <- 10^5
su <- sum(dat[, 2])
vec <- rep(0, times = nn)
na <- c(1:366)
nap <- 0
for (ii in 1:366) nap <- c(nap, rep(ii, times = dat[ii, 2]))
nap <- nap[2:(length(nap))]
su <- length(nap)
ered <- rep(0, times = (j - i + 1))

for (ii in i:j) {
  for (jj in 1:nn) {
    vec[jj] <- length(unique(nap[sample(su, ii, replace = T)]))
  }
  ered[ii - i + 1] <- sum(vec < ii)/nn
  print(ii)
}
write.table(ered, "E:\\OKTATAS\\valszam_peldatar\\szul_nap_szimul.dat",
  quote = F)

lines(ered, col = 2)
abline(h = 0.5)
abline(v = 23, col = 4)
legend("topleft", c("elméleti", "szimulált"),
  lty = c(1, 1), col = c(1, 2))
```

11.3 Kód 2.4 ábra (2.8 példa)

```
#####urna ures
n <- 1e+06  #ismetlesek
k <- 20  #urnak es golyok szama
ered <- rep(0, times = k)
for (i in 1:n) {
  ur <- rep(0, times = k)
  for (j in 1:k) {
    r <- runif(1)
    ur[trunc(k * r) + 1] <- ur[trunc(k * r) + 1] + 1
  }
  ered[k - sum(ur > 0) + 1] <- ered[k - sum(ur > 0) + 1] + 1
}
ered <- ered[, 1]
plot(c(0:19), ered/n, type = "l", main = "Üres urnák száma",
  ylim = c(0, 0.36), xlab = "üres urnák száma",
  ylab = "valószínűség")
points(c(0:19), ered/n)

k <- 10  #urnak es golyok szama
ered <- rep(0, times = k)

for (i in 1:n) {
  ur <- rep(0, times = k)
  for (j in 1:k) {
    r <- runif(1)
    ur[trunc(k * r) + 1] <- ur[trunc(k * r) + 1] + 1
  }
  ered[k - sum(ur > 0) + 1] <- ered[k - sum(ur > 0) + 1] + 1
}

ered <- ered[, 1]
lines(c(0:9), ered/n, col = 2)
points(c(0:9), ered/n, col = 2)

legend("topright", c("n=20", "n=10"), lty = c(1, 1), col = c(1, 2))
```

11.4 Kód 2.8 ábra (2.13 példa)

```
#nevjegy
n <- 10
```

```
p <- rep(0, times = n)
for (i in 2:n) p[i] <- p[i - 1] + (-1)^(i)/prod(1:i)
plot(p, type = "l",
  main = "Annak a valószínűsége, hogy nincs egyező névjegy",
  ylab = "p", xlab = "n")
abline(h = 1/2.71828, col = 4)
```

11.5 Kód 2.7 ábra (2.12 példa)

```
par(mfrow = c(1, 1))
k <- 10
p <- rep(1, times = 6)
q <- rep(1, times = 7)

for (i in 1:6) {
  p[i] <- (-1)^i * prod(c(6:(6 - i + 1)))/prod(c(1:i)) * ((6 - i)^k)/(6^k)
  q[i + 1] <- q[i] + p[i]
}

plot(c(0:6), q, type = "l", main = "A szita formula a gyakorlatban",
  xlab = "i", ylab = "valószínűség")
k <- 20
for (i in 1:6) {
  p[i] <- (-1)^{
    i
  } * prod(c(6:(6 - i + 1)))/prod(c(1:i)) * ((6 - i)^k)/(6^k)
  q[i + 1] <- q[i] + p[i]
}

lines(c(0:6), q, col = 2)
legend(x = c(4.4, 6.2), y = c(0.44, 0.6),
  c("20 dobás", "10 dobás"), lty = c(1, 1), col = c(2, 1))
```

11.6 Kód (2.10 ábra 2.13 példa)

```
#### nevjegy2
par(mfrow = c(1, 1))
k <- 10
p <- rep(1, times = 6)
q <- rep(1, times = 7)
```

```
for (i in 1:6) {
  p[i] <- (-1)^i/prod(c(1:i))
  q[i + 1] <- q[i] + p[i]
}

plot(c(0:6), q, type = "l",
  main = "A szita formula a névjegyproblémára",
  xlab = "i", ylab = "valószínűség")
abline(h = 1/2.71, lty = 2, col = 2)
```

11.7 Kód (2.11 ábra, 2.14 példa)

```
#### lift
par(mfrow = c(1, 1))

p <- rep(1, times = 2)
q <- rep(1, times = 3)

{
  p[1] <- (-1) * ((7/9)^5 + (6/9)^5 + (5/9)^5)
  p[2] <- (2/9)^5 + (3/9)^5 + (4/9)^5
}
q[2] <- q[1] + p[1]
q[3] <- q[2] + p[2]
plot(c(0:2), q[1:3], ylim = c(0, 1), axes = FALSE, type = "l",
  main = "A szita formula a lift-problémára", xlab = "i",
  ylab = "valószínűség")
abline(h = q[3], lty = 2, col = 1)
axis(1, 0:2, c(0:2))
axis(2)
box()

{
  p[1] <- (-1) * ((7/9)^4 + (6/9)^4 + (5/9)^4)
  p[2] <- (2/9)^4 + (3/9)^4 + (4/9)^4
}
q[2] <- q[1] + p[1]
q[3] <- q[2] + p[2]
lines(c(0:2), q[1:3], col = 2)
abline(h = q[3], lty = 2, col = 2)
```

```
{
  p[1] <- (-1) * ((7/9)^3 + (6/9)^3 + (5/9)^3)
  p[2] <- (2/9)^3 + (3/9)^3 + (4/9)^3
}
q[2] <- q[1] + p[1]
q[3] <- q[2] + p[2]
lines(c(0:2), q[1:3], col = 4)
abline(h = q[3], lty = 2, col = 4)

legend("topright", c("n=5", "n=4", "n=3"), lty = c(1, 1,
  1), col = c(1, 2, 4))
```

11.8 Kód (2.12 ábra, 2.15 példa)

```
####kocka 2
par(mfrow = c(1, 1))
k1 <- 6
p <- rep(1, times = 6)
q <- rep(1, times = 7)
k2 <- 35
r <- rep(0, times = k2 - k1 + 1)

for (j in 1:(k2 - k1 + 1)) {
  for (i in 1:6) {
    p[i] <- (-1)^i * prod(c(6:(6 - i + 1)))/prod(c(1:i)) * ((6 -
      i)^j)/(6^j)
    q[i + 1] <- q[i] + p[i]
  }
  r[j] <- q[7]
}

plot(c(k1:k2), r, type = "l",
  main = "Az összes szám dobásának valószínűsége",
  xlab = "n", ylab = "valószínűség")

lines(c((k1 + 1):k2), diff(r), col = 2)

legend("topleft",
  c("P(mind megvan n-ből)", "P(pont n-ből jön ki az utolsó)"),
  lty = c(1, 1), col = c(1, 2))
```

11.9 Kód (3.2 ábra, 3.7 példa)

```
#####irat
par(mfrow = c(1, 1))
p <- c(0.25, 0.5, 0.75, 0.95)  #vszg
n <- c(2:20)  #fiokok
ered <- matrix(0, length(p), length(n))
for (i in 1:length(p)) {
  for (j in 1:length(n)) {
    ered[i, j] <- p[i] * 1/n[j]/(1 - p[i] + p[i] * 1/n[j])
  }
}
plot(n, ered[1, ], ylim = c(0, 0.95), type = "l",
  main = "Az irat megtalálásának valószínűsége",
  xlab = "fiókok száma", ylab = "valószínűség")
points(n, ered[1, ])

for (i in 2:4) {
  lines(n, ered[i, ], col = i)
  points(n, ered[i, ], col = i)
}

legend("topright", c("p=0,95", "p=0,75", "p=0,5", "p=0,25"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(4, 3, 2, 1))
```

11.10 Kód (3.4 ábra, 3.10 példa)

```
#7b abra (\ref{oszt} példa)
#####osztozkodas
n <- 1e+05  #ismetlesek
k <- 4  #szukseges gyozelmek szama
ered <- matrix(0, k, k)
for (l in 0:(k - 1)) {
  for (m in 0:(k - 1)) {
    for (i in 1:n) {
      ll <- l
      mm <- m
      while (max(ll, mm) < k) {
        r <- runif(1)
        if (r < 0.5)
          ll <- ll + 1
```

```
        if (r > 0.5)
          mm <- mm + 1
      }
      if (ll == k)
        ered[l + 1, m + 1] <- ered[l + 1, m + 1] +
          1
    }
  }
}
ered <- ered/n

for (i in 1:4) ered[i, i] <- 0.5
plot(c(0:3), ered[4, ], type = "l", axes = FALSE,
  main = "Győzelem valószínűsége",
  ylim = c(0.5, 1), xlab = "vesztett meccsek száma",
  ylab = "valószínűség")
points(c(0:3), ered[4, ])
axis(1, 0:3, c(0:3))
axis(2)
box()
lines(c(0:2), ered[3, 1:3], col = 2)
points(c(0:2), ered[3, 1:3], col = 2)
points(0, ered[2, 1], col = 3)
legend("topright",
  c("3 győztes meccs", "2 győztes meccs", "1 győztes meccs"),
  lty = c(1, 1, 1), col = c(1, 2, 3))
```

11.11 Kód (3.5 ábra, 3.11 példa)

```
##### dupla hatos
par(mfrow = c(1, 1))
p <- c(1:100)/101
ered <- rep(0, times = 100)

for (i in 1:100) {
  ered[i] <- log(1 - p[i])/log(35/36)
}

plot(p, ered, type = "l", main = "A dupla hatos dobás",
  ylab = "szükséges dobások száma", xlab = "valószínűség")
```

11.12 Kód (3.7 ábra, 3.13 példa)

```
#hamis erme
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:200)
d <- c(2, 5, 10, 20)
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j, i] <- (1/j)/(1/j + (j - 1)/(j * 2^d[i]))
}


plot(ered[, 1], type = "l", main = "A hamis érme valószínűsége",
  xlab = "n", ylab = "valószínűség")
for (i in 2:4) lines(ered[, i], col = i)
legend(x = c(155, 205), y = c(0.38, 0.62),
  c("20 fej", "10 fej", "5 fej", "2 fej"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(4, 3, 2, 1))
```

11.13 Kód (3.8 ábra, 3.14 példa)

```
####diak tud
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:200)
d <- c(1/2, 1/3, 1/4, 1/6)
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j, i] <- (1/j)/(1/j + d[i] * (j - 1)/(j))
}


plot(1/n, ered[, 1], type = "l", main = "A tudás valószínűsége",
  xlab = "p", ylab = "valószínűség")
for (i in 2:4) lines(1/n, ered[, i], col = i)
legend("bottomright", c("tipp vszg: 1/6", "tipp vszg: 1/4",
  "tipp vszg: 1/3", "tipp vszg: 1/2"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(4, 3, 2, 1))
```

11.14 Kód (3.9 ábra)

```
###binom
```

```
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:200)  #p=1-n/201
d <- c(5, 10, 20, 40)  #n
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j, i] <- prod(c(d[i]:(d[i] - 4)))/prod(c(1:5)) *
    (1 - j/201)^5 * (j/201)^(d[i] - 5)
}


plot(1 - n/201, ered[, 1], type = "l",
  main = "Pontosan 5 sikeres kimenetel valószínűsége",
  xlab = "p", ylab = "valószínűség")
for (i in 2:4) lines(1 - n/201, ered[, i], col = i)
legend("topleft",
  c("5 kísérlet", "10 kísérlet", "20 kísérlet", "40 kísérlet"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 3, 4))
```

11.15 Kód (3.10 ábra)

```
#hipgeo
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:200)  #selejtesek
N <- 201
d <- c(5, 10, 20, 40)  #n
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in c(n[5]:n[200])) {
    ered[j, i] <- prod(c(j:(j - 4)))/prod(c(1:5))/(prod(c(N:(N -
      d[i] + 1)))/prod(c(1:(d[i]))))
    if (d[i] > 5) {
      for (k in 0:(d[i] - 6)) ered[j, i] <- ered[j,
        i] * (N - j - k)/(k + 1)
    }
  }
}


plot(n/N, ered[, 1], type = "l",
```

```
  main = "5 selejtes valószínűsége",
  xlab = "selejtarány", ylab = "valószínűség")
for (i in 2:4) lines(n/N, ered[, i], col = i)
legend("topleft", c("5 elemű minta", "10 elemű minta",
  "20 elemű minta", "40 elemű minta"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 3, 4))
```

11.16 Kód (3.11 ábra)

```
#mintavetelek
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:200)  #p=1-n/201
d <- c(5, 10, 20, 40)  #n
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j, i] <- prod(c(d[i]:(d[i] - 4)))/prod(c(1:5)) *
    (1 - j/201)^5 * (j/201)^(d[i] - 5)
}


plot(1 - n/201, ered[, 1], type = "l",
  main = "5 sikeres kimenetel valószínűsége",
  xlab = "p", ylab = "valószínűség", lty = 2)
for (i in 2:4) lines(1 - n/201, ered[, i], col = i, lty = 2)
legend("topleft",
  c("5 kísérlet", "10 kísérlet", "20 kísérlet", "40 kísérlet"),
  lty = c(1, 1, 1, 1, 1, 2), col = c(1, 2, 3, 4, 1, 1))

n <- c(1:200)  #selejtesek
N <- 201
d <- c(5, 10, 20, 40)  #n
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in c(n[5]:n[200])) {
    ered[j, i] <- prod(c(j:(j - 4)))/prod(c(1:5))/(prod(c(N:(N -
      d[i] + 1)))/prod(c(1:(d[i]))))
    if (d[i] > 5) {
      for (k in 0:(d[i] - 6)) ered[j, i] <- ered[j,
        i] * (N - j - k)/(k + 1)
```

```
    }
  }
}

lines(n/N, ered[, 1], type = "l")
for (i in 2:4) lines(n/N, ered[, i], col = i)
legend(x = c(0, 0.3), y = c(0.45, 0.6), c("hip.geo", "binomiális "),
  lty = c(1, 2), col = c(1, 1))
```

11.17 Kód (3.13 ábra, 3.19 példa)

```
####szindbad
n <- 20
ered <- rep(1/n, times = n)
for (k in 1:(n - 1)) {
  tor <- k/c(k:(n - 1))
  ered[k + 1] <- sum(tor)/n
}
plot(c(0:(n - 1)), ered, type = "l", sub = "n=20",
  main = "A legjobb jelölt\nkiválasztásának valószínűsége",
  xlab = "k", ylab = "valószínűség")
points(c(0:(n - 1)), ered)
```

11.18 Kód (3.14 ábra))

```
####geom
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:80)
d <- c(1/2, 1/4, 1/8, 1/16)  #p
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j, i] <- d[i] * (1 - d[i])^j
}

plot(n, ered[, 1], type = "l",
  main = "Az első sikeres kísérlet időpontja",
  xlab = "kísérlet", ylab = "valószínűség")
for (i in 2:4) lines(n, ered[, i], col = i)
legend("topright", c("p=1/2", "p=1/4", "p=1/8", "p=1/16"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 3, 4))
```

11.19 Kód (3.15 ábra)

```
####poisson
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(0:15)
d <- c(1, 2.5, 4, 5.5)  #p
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j + 1, i] <- dpois(j, d[i])
}

plot(n, ered[, 1], type = "l", main = "A Poisson eloszlás",
  xlab = "események száma", ylab = "valószínűség")
points(n, ered[, 1])
for (i in 2:4) {
  lines(n, ered[, i], col = i)
  points(n, ered[, i], col = i)
}
legend("topright", c("\u03bb=5,5", "\u03bb=4", "\u03bb=2,5",
  "\u03bb=1"), lty = c(1, 1, 1, 1),
  col = c(4, 3, 2, 1))
```

11.20 Kód (4.4 ábra, 4.3 példa)

```
##### parok
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(1:30)  #m
d <- c(15, 20, 25)  #N
ered <- matrix(0, length(n), length(d))

for (i in 1:length(d)) {
  for (j in n) ered[j, i] <- (2 * d[i] - j) * (2 * d[i] -
    j - 1)/(2 * (2 * d[i] - 1))
}

plot(n, ered[, 1], type = "l", ylim = c(0, 24),
  main = "A megmaradó párok száma",
  xlab = "kihúzott lapok száma", ylab = "várható érték")
points(n, ered[, 1])
for (i in 2:3) {
```

```
  lines(n, ered[, i], col = i)
  points(n, ered[, i], col = i)
}
legend("topright", c("N=25", "N=20", "N=15"),
  lty = c(1, 1, 1), col = c(3, 2, 1))
```

11.21 Kód (4.5 ábra, 4.4 példa)

```
##### minden eredmeny
par(mfrow = c(1, 1))
n <- c(2:20)  #oldalszam

ered <- rep(0, times = length(n))

for (i in 1:length(n)) {
  ered[i] <- sum(n[i]/c(1:n[i]))
}
plot(n, ered, type = "l",
  main = "Az összes eredményhez várhatóan szükséges kísérletszám",
  xlab = "lehetőségek száma", ylab = "várható érték")
points(n, ered)

#m1:egyenletes eloszlás
x <- c(1:2000)
x <- (x - 800)/500
par(mfrow = c(1, 2))
y <- rep(0, times = length(x))
a <- 0
b <- 1
y[x < b & x > a] <- 1/(b - a)
plot(x, y, xlab = "", ylab = "", type = "l", ylim = c(0,
  2), main = "sűrűségfüggvény")
a <- -1/2
b <- 3/2
y <- rep(0, times = length(x))
y[x < b & x > a] <- 1/(b - a)
lines(x, y, col = 2)
a <- 0.25
b <- 0.75
y <- rep(0, times = length(x))
y[x < b & x > a] <- 1/(b - a)
```

```
lines(x, y, col = 4)
legend("topleft", cex = 0.5, c("[1/4;3/4]", "[0;1]", "[-1/2;3/2]"),
  lty = c(1, 1, 1), col = c(4, 1, 2))


a <- 0
b <- 1
y <- rep(0, times = length(x))
z <- (x - a)/(b - a)
y[x < b & x > a] <- z[x < b & x > a]
y[x >= b] <- 1
plot(x, y, xlab = "", ylab = "", type = "l", main = "eloszlásfüggvény")
a <- -1/2
b <- 3/2
y <- rep(0, times = length(x))
z <- (x - a)/(b - a)
y[x < b & x > a] <- z[x < b & x > a]
y[x >= b] <- 1
lines(x, y, col = 2)
a <- 0.25
b <- 0.75
y <- rep(0, times = length(x))
z <- (x - a)/(b - a)
y[x < b & x > a] <- z[x < b & x > a]
y[x >= b] <- 1
lines(x, y, col = 4)
legend("topleft", cex = 0.5, c("[1/4;3/4]", "[0;1]", "[-1/2;3/2]"),
  lty = c(1, 1, 1), col = c(4, 1, 2))

#########
#1.05 pl. c m2
#########
par(mfrow = c(1, 1))
alpha <- c(1:100)/20
plot(alpha, xlab = expression(alpha), ylab = "Intervallum végpontja",
  main = "Intervallumhossz a kitevő függvényében",
  ((alpha + 1))^(1/(alpha + 1)), type = "l")


###########
#1.021 lognorm m3
```

```
############
par(mfrow = c(1, 2))
x <- c(1:1000)
x <- 0.5 + x/1000
m <- 0.001
sig <- 0.01
plot(x, xlab = "", main = "s\u171r\u171ségfüggvény",
  ylab = "", dnorm((log(x) - m)/sig)/(x * sig), type = "l")
m <- 0.001
sig <- 0.03
lines(x, dnorm((log(x) - m)/sig)/(x * sig), col = 2)
m <- 0.001
sig <- 0.1
lines(x, dnorm((log(x) - m)/sig)/(x * sig), col = 4)
m <- 0.05
sig <- 0.03
lines(x, dnorm((log(x) - m)/sig)/(x * sig), col = 3)
legend("topleft", cex = 0.5, c(expression(paste(mu, "=0.001, ",
  sigma, "=0.01")), expression(paste(mu, "=0.001, ", sigma,
  "=0.03")), expression(paste(mu, "=0.001, ", sigma, "=0.1")),
  expression(paste(mu, "=0.05, ", sigma, "=0.03"))),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 4, 3))

m <- 0.001
sig <- 0.01
plot(x, xlab = "", main = "eloszlásfüggvény", ylab = "",
  pnorm((log(x) - m)/sig), type = "l")
m <- 0.001
sig <- 0.03
lines(x, pnorm((log(x) - m)/sig), col = 2)
m <- 0.001
sig <- 0.1
lines(x, pnorm((log(x) - m)/sig), col = 4)
m <- 0.05
sig <- 0.03
lines(x, pnorm((log(x) - m)/sig), col = 3)
legend("topleft", cex = 0.5, c(expression(paste(mu, "=0.001, ",
  sigma, "=0.01")), expression(paste(mu, "=0.001, ", sigma,
  "=0.03")), expression(paste(mu, "=0.001, ", sigma, "=0.1")),
  expression(paste(mu, "=0.05, ", sigma, "=0.03"))),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 4, 3))
```

```
###########
#chi-squared m4
############
par(mfrow = c(1, 2))
x <- c(1:10000)
x <- x/1000
plot(x, dchisq(x, df = 1), ylim = c(0, 2), xlab = "",
  main = "sűrűségfüggvény",
  ylab = "", type = "l")
lines(x, dchisq(x, df = 2), col = 2)
lines(x, dchisq(x, df = 3), col = 4)
lines(x, dchisq(x, df = 5), col = 3)

legend("topright", c("sz.f.=1", "sz.f.=2", "sz.f.=3", "sz.f.=5"),
  lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 4, 3))

plot(x, pchisq(x, df = 1), ylim = c(0, 1), xlab = "",
  main = "eloszlásfüggvény", ylab = "", type = "l")
lines(x, pchisq(x, df = 2), col = 2)
lines(x, pchisq(x, df = 3), col = 4)
lines(x, pchisq(x, df = 5), col = 3)

legend("bottomright", c("sz.f.=1", "sz.f.=2", "sz.f.=3",
  "sz.f.=5"), lty = c(1, 1, 1, 1), col = c(1, 2, 4, 3))

#################
#Poisson szorzatösszeg szim m5
##################
n <- 10
lam <- 3
N <- 10000
ered <- rep(0, times = N)
for (i in 1:N) {
  s <- 0
  for (j in 1:n) {
    s <- s + rpois(1, 3) * rpois(1, 3)
    ered[i] <- s
  }
}
par(mfrow = c(1, 1))
```

```
hist(ered, main = "A nyeremény eloszlása", xlab = "Millió Ft",
  ylab = "Gyakoriság")


###########
##párt becslés binom kvant+norm m6
###########
p <- 0.5

n <- c(1:10000)
er <- n
ern <- er
for (i in 1:length(n)) {
  er[i] <- 2 * (1 - pbinom(n[i] * (p + 0.01), n[i], p))
  ern[i] <- 2 * (1 - pnorm(n[i] * (p + 0.01), n[i] * p,
    sqrt(n[i] * p * (1 - p))))
}
par(mfrow = c(1, 1))
plot(n, er, type = "l",
  main = "Az 1%-nál nagyobb eltérés valószínűsége",
  xlab = "n", ylab = "Valószínűség")
lines(n, ern, col = 2)
abline(h = 0.05)

legend("topright", c("normális közelítés", "pontos valószínűség"),
  lty = c(1, 1), col = c(2, 1))
```

11.1.2. Interaktív animációk

Az interaktív szimulációk az R shiny csomagjának segítségével készültek. Néhány példánál az adatbeolvasó ui (user interface) file-t is megadjuk. de az animációk többségénél a helykímélés érdekében csak a lényegesebb server file-t közöljük.

11.22 Kód (3.6 ábra 3.12 példa)

```
####
#beteg
####
shinyUI(pageWithSidebar(
  # Application title
  headerPanel("Betegs"),
```

```
    sidebarPanel(
      sliderInput("param1",
        "Adja meg a p paramétert (betegs v fiatalok):",
        value = 0.01, min = 0.001, max = 0.9),
      sliderInput("param2", "k:",
        value = 0.02, min = 0.001, max = 0.9),
      sliderInput("fiat", "Fiatalok r:",
        value = 0.2, min = 0.001, max = 0.49),
      sliderInput("kozep", "Kok r.:",
        value = 0.2, min = .001, max = 0.49)
    ),

    # abrak
    mainPanel(plotOutput("betPlot"))
  )
)

shinyServer(function(input, output) {

  data <- reactive({
    p <- c(1:99)/100
    b <- as.numeric(input$param1) * as.numeric(input$fiat)/(as.numeric(input$param1)
      as.numeric(input$fiat) + as.numeric(input$param2) *
      as.numeric(input$kozep) + p * (1 - as.numeric(input$kozep) -
      as.numeric(input$fiat)))
    y <- cbind(p, b)
    y
  })

  output$betPlot <- renderPlot({
    plot(data()[, 1], data()[, 2], main = "Fiatalok ",
      xlab = "Idősek betegségének vszge", ylab = "p",
      type = "l")
  })
})
```

11.23 Kód (3.17 ábra 3.20 példa)

```
#####
#virág
#####
```

```
library(shiny)

shinyUI(pageWithSidebar(
  # Application title
  headerPanel("Gyümölcsök"),
    sidebarPanel(
      sliderInput("param1",
        "Adja meg a p paramétert (virágok számának eloszlása):",
         value = 0.2, min = 0.001, max = 0.9),
      sliderInput("param2",
        "Adja meg az r paramétert (gyümölcs valószínűsége):",
        value = 0.5, min = 0.01, max = 0.99),
      sliderInput("szimu", "Szimulációk száma:",
        value = 100, min = 10, max = 2000)
    ),
    # abrak
    mainPanel(plotOutput("viragPlot"), plotOutput("gyumPlot"))
  )
)

shinyServer(function(input, output) {

  data <- reactive(function() {
    n <- as.numeric(input$szimu)
    p <- as.numeric(input$param1)
    q <- as.numeric(input$param2)
    x <- rgeom(n, p) + 1
    g <- rbinom(n, x, q)
    cbind(x, g)
  })

  output$viragPlot <- reactivePlot(function() {

    hist(data()[, 1], main = "Virágok száma", xlab = "Virágok száma",
      ylab = "Gyakoriság", col = "red",
      breaks = c((min(data()[, 1]) - 1.5):(max(data()[, 1]) + 0.5)))
  })

  output$gyumPlot <- reactivePlot(function() {
    hist(data()[, 2], main = "Gyümölcsök száma",
      xlab = "Gyümölcsök száma", ylab = "Gyakoriság", col = "red",
```

```
      breaks = c((min(data()[, 1]) - 1.5):(max(data()[, 1]) + 0.5)))
  })
})
```

11.24 Kód (3.18 ábra 3.20 példa)

```
####
#virág2
####
shinyUI(pageWithSidebar(

# Application title
headerPanel("Gyümölcsök->virágok"),
  sidebarPanel(
    sliderInput("param1", "Adja meg a p paramétert (virágok számának eloszlása):",
      value = 0.2,
      min = 0.01, step=0.01,
      max = 0.9),
   sliderInput("param2", "Adja meg az r paramétert (gyümölcs valószínűsége):",
      value = 0.5,
      min = 0.01, step=0.01,
      max = 0.99),
    sliderInput("szimu",
      "Szimulációk száma:",
      value = 100,
      min = 20,
      max = 2000),
    sliderInput("gyum",
      "Gyümölcsök száma:",
      value = 1,
      min = 0,
     max = 20)
   ),

  # abrak
  mainPanel(
    plotOutput("gyumPlot"),
    plotOutput("feltPlot"))
  )
)
```

```
shinyServer(function(input, output) {

  data <- reactive({
     x=rgeom(as.numeric(input$szimu),as.numeric(input$param1))+1
     g=rep(0,times=  as.numeric(input$szimu))
     for (i  in 1:as.numeric(input$szimu))
       {
       g[i]=  rbinom(1,x[i],as.numeric(input$param2))
     }
     y=cbind(x,g)
     y
   })

 output$gyumPlot <- renderPlot({
   hist(data()[,2],  main=   "Gyümölcsök száma",xlab="Gyümölcsök száma",ylab="Gyakori
   breaks=c((min(data()[,1])-1.5):    (max(data()[,1])+0.5)))
 })
 output$feltPlot <- renderPlot({
   virk=data()[data()[,2]==as.numeric(input$gyum),1]
   hist(virk,breaks=c(min(virk-0.5):(max(virk)+0.5)),
     main=  paste("Virágok száma, ha a gyümölcsök    száma",
     as.numeric(input$gyum)),xlab="Virágok száma",ylab="Gyakoriság")
 })
})
```

11.25 Kód (4.3 ábra 4.1 alfejezet)

```
####
#Átlag
####

shinyUI(pageWithSidebar(

  # Application title
  headerPanel("Átlag es medián"),

    sidebarPanel(
      selectInput("dist", "Válasszon egy eloszlást:",
                  choices = c("normális", "exponenciális", "Pareto(2)")),

     sliderInput("megf", "Megfigyelések száma:",
```

```
                value = 10, min = 1, max = 1000)
    ),

    mainPanel(plotOutput("eloPlot"))
))

shinyServer(function(input, output) {

  rpareto <- function(n) {
    1/(1 - runif(n))
  }

  output$eloPlot <- renderPlot({
    dist1 <- switch(input$dist, normalis = rnorm, exponencialis = rexp,
      `Pareto(2)` = rpareto)
    n <- input$megf

    x <- dist1(as.numeric(n))

    plot(x,
      main = paste("r", input$dist, "(", "n=", n, ")", sep = ""),
      xlab = "", ylab = "")
    abline(h = mean(x), col = 4)
    abline(h = median(x), col = 2)
    legend("topright", lty = c(1, 1), col = c(4, 2), c("Átlag", "Medián"))
  })
})
```

11.26 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
####
#Kvantilis
####

shinyUI(pageWithSidebar(

  # Application title
  headerPanel("Pareto kvantilisek"),

    sidebarPanel(
```

```
      sliderInput("param", "Válassza ki a paramétert:",
                  value = 3, min = 0.5, max = 10),

      sliderInput("megf", "Megfigyelések száma:",
                  value = 10, min = 1, max = 1000),

      sliderInput("kvant", "Kvantilis:",
                  value = 0.95, min = 0.001, max = 0.9999)
    ),

    mainPanel(plotOutput("eloPlot"))
))


shinyServer(function(input, output) {

  output$eloPlot <- renderPlot({

    x <- 1/(1 - runif(as.numeric(input$megf)))^(1/as.numeric(input$param))

    plot(x, main = paste("Pareto (", input$param, ") eloszlás (",
      "n=", input$megf, ")", sep = ""), xlab = "", ylab = "")
    abline(h = quantile(x, as.numeric(input$kvant)), col = 4)
    legend("topright", lty = c(1), col = c(4),
      c(paste(round(as.numeric(input$kvant), 3), "kvantilis")))
  })
})
```

11.27 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
#######
###2 momentum
#######
shinyServer(function(input, output) {

  output$sfv_comPlot <- renderPlot({

    m <- input$mu
    s <- input$sig

    x <- c(0:1000)/100
```

```
    b <- sqrt(log(s^2/m^2 + 1))
    a <- log(m) - b^2/2
    r <- m^2/s^2
    l <- m/s^2
    if (s^2 > m^2) {
      aa <- 2 * s^2/(s^2 - m^2)
      bb <- (aa - 1) * m
    }
    plot(x, dgamma(x, r, l), col = 4, type = "l",
      main = "Azonos várható értékű és szórású sűrűségfüggvények",
      xlab = "", ylab = "", lwd = 2)
    lines(x, dlnorm(x, a, b), lwd = 2)
    if (s^2 > m^2)
      lines(x, ((x + bb)/bb)^(-aa - 1) * aa/bb, col = 2, lwd = 2)
    legend("topright", c("gamma", "lognormális", "Pareto"),
      lty = c(1, 1, 1), col = c(1, 4, 2))
  })
})
```

11.28 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
######
#bizt
######

shinyServer(function(input, output) {

  output$karPlot <- renderPlot({
    beta <- 1
    alpha <- 2
    n <- input$megf
    xf <- beta * (1/runif(n))^(1/alpha) - beta

    beta <- 2
    alpha <- 1
    n <- input$megf
    xt <- beta * (1/runif(n))^(1/alpha) - beta
    nt <- rbinom(1, n, input$aran/100)
    par(mfrow = c(1, 2))
    hist(xt[1:nt], main = paste("Tűzkárok"), xlab = "Millió Ft",
```

```
      ylab = "", col = "red")
    hist(xf[1:(n - nt)],
      breaks = c(0:(trunc(max(xf[1:(n -
      nt)])) + 1)), main = paste("Felelősségi károk"),
      xlab = "Millió Ft", ylab = "", col = "blue")
    abline(v = 1, lwd = 2)
  })
})
```

11.29 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
###### elore
shinyServer(function(input, output) {

  output$eloszl <- reactivePrint(function() {
    p <- matrix(0, 2, 3)
    p[1, 1] <- input$p11/100
    p[2, 1] <- input$p21/100
    p[1, 3] <- input$p13/100
    p[1, 2] <- input$p12/100
    p[2, 2] <- input$p22/100
    p[2, 3] <- 1 - sum(p)
    if (p[2, 3] < 0)
      print("Túl nagyok a valószínűségek")
    if (p[2, 3] >= 0) {
      kszi <- c(input$e1, input$e2)  #1. változó lehetséges értékei
      eta <- c(input$f1, input$f2, input$f3)  #2. változó lehetséges értékei
      # közös valószínűségeloszlás
      val <- p

      # 1. változó eloszlása
      pkszi <- kszi
      pkszi[1] <- sum(val[1, ])
      pkszi[2] <- sum(val[2, ])
      # 2. változó eloszlása
      peta <- eta
      peta[1] <- sum(val[, 1])
      peta[2] <- sum(val[, 2])
      peta[3] <- sum(val[, 3])

      # változók várható értékei
```

```
Ekszi <- sum(kszi * pkszi)
Eeta <- sum(eta * peta)

# változók második momentumai
Ekszinegyzet <- sum(kszi^2 * pkszi)
Eetanegyzet <- sum(eta^2 * peta)

# változók szórásnégyzetei
D2kszi <- Ekszinegyzet - Ekszi^2
D2eta <- Eetanegyzet - (Eeta)^2

# kovariancia
Ekszieta <- 0
for (i in 1:2) {
  for (j in 1:3) {
    Ekszieta <- Ekszieta + kszi[i] * eta[j] *
    val[i, j]
  }
}
kovariancia <- Ekszieta - Ekszi * Eeta
print(paste("Kovariancia=", round(kovariancia, 3)), sep = "")

# korreláció
correl <- (Ekszieta - Ekszi * Eeta)/(D2kszi * D2eta)^0.5
print(paste("Korreláció=", round(correl, 3)), sep = "")
# lineáris előrejelzés
konstans <- Ekszi - correl * (D2kszi/D2eta)^0.5 * Eeta  #konstans tag
beh <- correl * (D2kszi/D2eta)^0.5  #eta szorzója
nhibalin <- (1 - correl^2) * D2kszi  #negyzetes hiba
print(paste("A lineáris előrejelzés:",
  round(beh, 3), "*X+", round(konstans), sep = ""))

# előrejelzés várható értékkel
Ekszifelt <- rep(0, 3)
for (j in 1:3) {
  Ekszifelt[j] <- sum(kszi * val[, j])/peta[j]
}
print(paste("Előrejelzés a várható érték alapján X első értéke esetén:",
  round(Ekszifelt[1], 3)), sep = "")
print(paste("Előrejelzés a várható érték alapján X második értéke esetén:",
  round(Ekszifelt[2], 3)), sep = "")
```

```
    print(paste("Előrejelzés a várható érték alapján X harmadik értéke esetén:",
      round(Ekszifelt[3], 3)), sep = "")


    D2kszifelt <- sum(Ekszifelt^2 * peta) - Ekszi^2  #feltételes
    # várható érték szórásnégyzete
    nhiba <- D2kszi - D2kszifelt
  }
  xx <- matrix(0, 1, 2)
  colnames(xx) <- c("Lineáris", "Várható értékes")
  xx[1, 2] <- round(D2kszifelt, 3)
  xx[1, 1] <- round(nhibalin, 3)
  print(paste("A lineáris előrejelzés négyzetes hibája:", xx[1, 1]))
  print(paste("A várható értékes előrejelzés négyzetes hibája:", xx[1, 2]))

 })
})
```

11.30 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
######
#gamma
######

shinyServer(function(input, output) {

  output$gelofvPlot <- renderPlot({
    s <- input$sig
    r <- input$r

    x <- c(0:200)/10

    plot(x, pgamma(x/s, r, 1), type = "l", ylim = c(0, 1),
      main = paste("Gamma eloszlásfv. (r=", r,
        ", lambda=", round(1/s, 3), ")", sep = ""),
      xlab = "", ylab = "")
  })

  output$gsfvPlot <- renderPlot({

    s <- input$sig
```

```
    r <- input$r
    x <- c(1:2000)/100

    plot(x, dgamma(x/s, r, 1), type = "l", ylim = c(0, max(1, dgamma(x/s, r, 1))),
      main = paste("Gamma sűrűségfv. (r=", r,
        ", lambda=", round(1/s, 3), ")", sep = ""),
      xlab = "", ylab = "")
  })
})
```

11.31 Kód (4.6 ábra 4.2 példa)

```
######
#kolcson
######

shinyServer(function(input, output) {

  output$vszg <- reactivePrint(function() {
    n <- c(input$n1, input$n2, input$n3)  #nemesek, polgárok és parasztok száma
    B <- c(input$b1, input$b2, input$b3)
    B <- B/500  #békekölcsönök nagysága
    K <- sum(n * B) + 2  #kincstárban lévõ pénz

    C <- rep(0, 9)  #nyeremények nagysága

    dim(C) <- c(3, 3)  #valószínûségek
    P <- C
    C[1, 1] <- input$c11
    C[1, 2] <- input$c12
    C[2, 1] <- input$c2
    C[3, 1] <- input$c3
    C <- C/500
    P[1, 1] <- as.numeric(input$p1)/100
    P[1, 2] <- as.numeric(input$p2)/100
    P[2, 1] <- input$p1/100
    P[2, 2] <- 1 - input$p1/100
    P[3, 1] <- input$p1/100
    P[3, 2] <- 1 - input$p1/100
    P[1, 3] <- 1 - P[1, 1] - P[1, 2]
    P[2, 3] <- 1 - P[2, 1] - P[2, 2]
```

```
    P[3, 3] <- 1 - P[3, 1] - P[3, 2]
    m <- rep(0, 3)  #nemesek, polgárok és parasztok várható nyereménye
    for (i in 1:3) {
      m[i] <- sum(P[i, ] * C[i, ])
    }
    m2 <- m  #második momentum
    for (i in 1:3) {
      m2[i] <- sum(P[i, ] * C[i, ]^2)
    }
    d2 <- m2 - m^2  #szórásnégyzet
    u <- m  #3. centrális momentum
    for (i in 1:3) {
      u[i] <- sum(P[i, ] * (abs(C[i, ] - m[i]))^3)
    }
    osszm <- sum(n * m)  #várható össznyeremény
    if (K > osszm)
      cc <- sum(n * d2)/(K - osszm)^2  #csõd valószínûségének becslése: Csebisev
    if (K <= osszm)
      cc <- 1
    cn <- 1 - pnorm((K - osszm)/(sum(n * d2))^0.5)  #normális közelítés
    ce <- 0.56 * sum(n * u)/(sum(n * d2))^1.5  #normális közelítés Esséen szerinti hi
    cs <- ce + cn
    cs <- min(cs, 1)
    cc <- min(cc, 1)
    print(paste("csőd valószínűségének becslése Csebisev-egyenlőtlenséggel:",
      round(cc, 6), sep = ""))
    print(paste("csőd valószínűségének becslése normális közelítéssel:",
      round(cn, 6), sep = ""))

    print(paste("csőd valószínűségének Esséen szerinti közelítése:",
      round(cs, 6), sep = ""))

  })

})
```

11.32 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
#######
#Meghalad
#######
```

```
shinyServer(function(input, output) {

  output$meghalad_valPlot <- renderPlot({

    c <- c(10:100)/10
    s <- input$sig

    m <- 1

    r <- 1/s^2
    l <- m/s^2
    if (s^2 > 1) {
      aa <- 2 * s^2/(s^2 - 1)
      bb <- (aa - 1) * m
    }
    plot(c, 1 - pgamma(c * m, r, rate = r/m),
      ylim = c(0, max(1 - plnorm(c * m, log(m/(1 + s^2))),
        1 - pgamma(c * m, r, rate = r/m), ((c * m + bb)/bb)^(-aa))),
      col = 4, type = "l",
      main = paste("c meghaladásának valószínűsége (m=1)", sep = ""),
      xlab = "c", ylab = "valószínűség", lwd = 2)
    lines(c, 1 - plnorm(c * m, log(m/(1 + s^2)), sqrt(log(1 + s^2))),
      lwd = 2)
    if (s > 1)
      lines(c, ((c * m + bb)/bb)^(-aa), col = 2, lwd = 2)
    legend("topright", c("gamma", "Pareto", "lognormális"),
      lty = c(1, 1, 1), col = c(4, 2, 1))
  })
})
```

11.33 Kód (4.6 ábra 4.2 alfejezet)

```
#######
#Szimelore
#######

shinyServer(function(input, output) {

  output$regr <- renderPlot({
```

```
p <- matrix(0, 2, 3)
p[1, 1] <- input$p11/100
p[2, 1] <- input$p21/100
p[1, 3] <- input$p13/100
p[1, 2] <- input$p12/100
p[2, 2] <- input$p22/100
p[2, 3] <- 1 - sum(p)
if (p[2, 3] < 0)
  print("Túl nagyok a valószínűségek")
if (p[2, 3] >= 0) {
  pvec <- c(p[1, ], p[2, ])
  nn <- 0
  while (nn < 6) {
    x <- rmultinom(n = 1, size = input$simu,
      prob = pvec)
    nn <- sum(x > 0)
  }
  obs <- matrix(0, input$simu, 2)
  obs[, 1] <- c(rep(input$e1, times = sum(x[1:3])),
    rep(input$e2, times = sum(x[4:6])))  #1. változó értékei
  obs[, 2] <- c(rep(input$f1, times = x[1]), rep(input$f2,
    times = x[2]), rep(input$f3, times = x[3]),
    rep(input$f1, times = x[4]), rep(input$f2,
      times = x[5]), rep(input$f3, times = x[6]))  #2. változó értékei

  lme <- lm(obs[, 1] ~ obs[, 2])$coef
  nemlin <- rep(0, times = 3)
  dl <- sum((obs[, 2] * lme[2] + lme[1] - obs[,1])^2)
  dnl <- nemlin
  for (i in 1:3) nemlin[i] <- mean(obs[obs[, 2] ==
    unique(obs[, 2])[i], 1])
  for (i in 1:3) dnl <- dnl + sum((nemlin[i] -
    obs[obs[, 2] == unique(obs[, 2])[i], 1])^2)
  plot(obs[, 2], obs[, 1], main = "Y közelítése X segítségével",
    xlab = "x", ylab = "y",
    sub = paste("A körök területe arányos az adott pont gyakoriságával.",
      paste(" Négyzetes veszteség:", "lineáris:",
      round(dl, 2), "nemlineáris:", round(dnl, 2))))
  t <- table(obs[, 1], obs[, 2])
  for (i in 1:3) {
    for (j in 1:2) {
```

```
          points(unique(obs[, 2])[i], unique(obs[, 1])[j],
            cex = sqrt(t[j, i]), pch = 21,
            bg = "red")
        }
      }
      lines(c(min(obs):max(obs)),
            lme[1] + c(min(obs):max(obs)) * lme[2], lwd = 2)

      lines(unique(obs[, 2]), nemlin, col = 4, lwd = 2)
      legend(x = (3 * (obs[1, 2] + obs[2, 2])/4),
        y = max(obs[, 1]), c("lineáris", "várható értékes"),
        lty = c(1, 1), col = c(1, 4))
    }

  })

})
```

11.1.3. Nem interaktív animációk

```
#####
#buszok
#####

library(graphics)
library(animation)
library(plotrix)

#6-kor indulnak a buszok, átlagosan 1 órás intervallumokkal,
12-ig beérkezõ buszok számát nézzük
saveGIF({
  ani.options(nmax = 200)
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    x <- c(1:40)
    y <- c(6:6)
    for (i in 1:100) {
      if (y[length(y)] < 12) {
        a <- rep(0, (length(y) + 1))
        a[1:length(y)] <- y[1:length(y)]
        a[length(y) + 1] <- y[length(y)] + rgamma(1, 1, 1)
```

```
        y <- a
      }
    }
    plot(x[1:length(y)], y, pch = 8,
      main = "6 és 12 óra között beérkező buszok",
      xlab = "busz sorszáma", ylab = "busz érkezési ideje")
    z <- rep(12, length(y))
    lines(x[1:length(y)], z, type = "l", col = 4)
    legend("bottomright", paste("12 óra előtt beérkező buszok száma: ",
      (length(y) - 1)))
    legend("topleft", paste("kísérlet sorszáma: ", n))
    ani.pause()
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "busz.gif", ani.width = 600,
  ani.height = 600)

#6-kor indulnak a buszok, átlagosan 1 órás intervallumokkal, 12-kor
#érkezünk a megállóba, mennyit kell várnunk a buszra
saveGIF({
  ani.options(nmax = 200)
  pr <- rep(0, ani.options("nmax"))
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    par(mfrow = c(1, 2))
    x <- c(1:40)
    y <- c(6:6)
    for (i in 1:100) {
      if (y[length(y)] < 12) {
        a <- rep(0, (length(y) + 1))
        a[1:length(y)] <- y[1:length(y)]
        a[length(y) + 1] <- y[length(y)] + rgamma(1, 1, 1)
        y <- a
      }
    }
    plot(x[1:length(y)], y, pch = 8,
      main = "6 és 12 óra között beérkezõ buszok\nés a 12 utáni elsõ busz",
      xlab = "busz sorszáma", ylab = "busz érkezési ideje")
    z <- rep(12, length(y))
    lines(x[1:length(y)], z, type = "l", col = 4)
    legend("bottomright", paste("Várakozási idõ a 12 óra utáni elsõ buszra: ",
      (y[length(y)] - 12)))
    legend("topleft", paste("kísérlet sorszáma: ", n))
```

```
    pr[n] <- y[length(y)] - 12
    barp(pr[1:n], main = "várakozási idõk")
    legend("top", paste("kísérletek száma: ", n))
    ani.pause()
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "busz2.gif", ani.width = 1200,
  ani.height = 600)

###########
#galtonwatson
###########

library(animation)

## 100-ból induló Galton-Watson folyamat szimulálása

saveGIF({
  ani.options(nmax = 100)
  e <- rep(0, ani.options("nmax"))
  e[1] <- 100
  x <- c(1:ani.options("nmax"))
  for (n in 2:ani.options("nmax")) {
    if (e[n - 1] > 0) {
      e[n] <- sum(sample(c(0, 1, 2, 3), e[n - 1],
        replace = TRUE, prob = c(0.3, 0.5, 1/10, 1/10)))
    }
    plot(x[1:n], e[1:n], type = "l", col = 2, main = "Elágazó folyamat",
      xlab = "Generáció", ylab = "egyedek száma")
    ani.pause()
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "galtonwatson.gif", ani.width = 600,
  ani.height = 600)

########
#gyorfipelda
########

library(animation)
##eredeti befektetés szerint a tőke eloszlása n év után
n <- 10
x <- c(0:n)
```

```
a <- 1.9^x * 0.5^(n - x)
plot(a, dbinom(x, n, 0.5), main = "Tőke eloszlása 10 év után",
  ylab = "valószínűség", xlab = "tőke")

##óvatosabb befektetés szerint a tőke eloszlása n év után
n <- 10
x <- c(0:n)
a <- 1.45^x * 0.75^(n - x)
plot(a, dbinom(x, n, 0.5),
  main = "Tőke eloszlása 10 év után (óvatosabb befektetési politikával)",
  ylab = "valószínűség", xlab = "tőke")


##Tõkehelyzet bemutatása
saveGIF({
  oopt <- ani.options(interval = 0.5, nmax = 100)
  aelozo <- c(0:0)
  aelozo[1] <- 1
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    x <- c(0:100)
    a <- c(0:n)
    a[1:n] <- aelozo[1:n]
    c <- rbinom(1, 1, 0.5)
    a[n + 1] <- a[n] * 1.9^c * 0.5^(1 - c)
    aelozo <- a
    plot(x[1:(n + 1)], a, type = "l", col = 2,
      main = "Részvény értéke", xlab = "", ylab = "")
    legend("topright", paste("eltelt évek száma: ", n))
    ani.pause()  ## pause for a while ('interval')
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "reszveny.gif", ani.width = 600,
  ani.height = 600)

##Tõkehelyzet bemutatása óvatosabb befektetéssel
saveGIF({
  oopt <- ani.options(interval = 0.5, nmax = 100)
  aelozo <- c(0:0)
  aelozo[1] <- 1
  belozo <- aelozo
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    x <- c(0:100)
```

```
    a <- c(0:n)
    b <- a
    a[1:n] <- aelozo[1:n]
    b[1:n] <- belozo[1:n]
    c <- rbinom(1, 1, 0.5)
    a[n + 1] <- a[n] * 1.9^c * 0.5^(1 - c)
    b[n + 1] <- b[n] * 1.45^c * 0.75^(1 - c)
    aelozo <- a
    belozo <- b
    plot(x[1:(n + 1)], a, type = "l", col = 2,
      main = "Részvény és tőke értéke",
      xlab = "", ylab = "")
    lines(x[1:(n + 1)], b, lty = 4, cex = 0.2, col = 4)
    legend("topright", paste("eltelt évek száma: ", n))
    legend("topleft", c("eredeti", "óvatosabb"), lty = c(1, 4),
      col = c(2, 4))
    ani.pause()  ## pause for a while ('interval')
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "toke.gif", ani.width = 1000,
  ani.height = 1000)

############
#normkozelites
############

#n indikátor és exponenciális normális közelítése
n <- 40
p <- 0.1
x <- c(0:400)/40 - 5
plot(x, pnorm(x), type = "l", col = 2,
  main = "Függetlenek összege standartizáltjánakeloszlásfüggvénye",
  xlab = "", ylab = "")
lines(x, pbinom((n * p * (1 - p))^0.5 * x + n * p, n, p),
  lty = 4, cex = 0.2, col = 4)
lines(x, pgamma((n^0.5 * x + n), scale = 1, shape = n),
  lty = 2, cex = 0.2, col = 1)
legend("bottomright", paste("n=", n))
legend("topleft", c("Normális", "1-exponenciális", "0,1-indikátor"),
  lty = c(1, 4, 2), col = c(2, 4, 1))

library(animation)
```

```
saveGIF({
  ani.options(nmax = 200)
  p <- 0.1
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    x <- c(0:400)/40 - 5
    plot(x, pnorm(x), type = "l", col = 2,
      main = "Függetlenek összege standartizáltjának eloszlásfüggvénye",
      xlab = "", ylab = "")
    lines(x, pbinom((n * p * (1 - p))^0.5 * x + n * p, n, p),
      lty = 4, cex = 0.2, col = 4)
    lines(x, pgamma((n^0.5 * x + n), scale = 1, shape = n),
      lty = 2, cex = 0.2, col = 1)
    legend("bottomright", paste("n=", n))
    legend("topleft", c("Normális", "1-exponenciális",
      "0,1-indikátor"), lty = c(1, 4, 2), col = c(2, 4, 1))
    ani.pause()  ## pause for a while ('interval')
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "normkoz.gif", ani.width = 600,
  ani.height = 600)

########
#nszt
########

library(graphics)
library(animation)
library(plotrix)

saveGIF({
  ani.options(nmax = 100)
  x <- c(1:ani.options("nmax"))
  pr <- rep(0.25, ani.options("nmax"))
  pr2 <- pr
  npr <- pr
  npr2 <- pr
  pr3 <- pr
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    par(mfrow = c(1, 2))
    pr[n] <- rbinom(1, 1, 0.25)
    pr2[n] <- mean(pr[1:n])
```

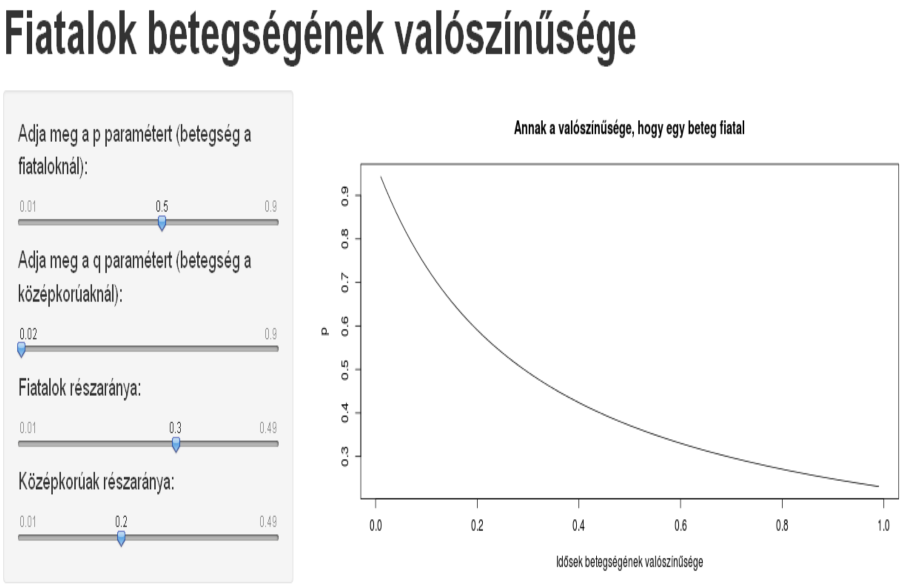
```
    npr[n] <- rnorm(1, 0.25, 1)
    npr2[n] <- mean(npr[1:n])
    barp(pr[1:n], main = "0,25-indikátorok szimulálása és átlagaik")
    lines(x[1:n], pr2[1:n], type = "l", col = 4)
    lines(x[1:n], pr3[1:n], type = "l", col = 2)
    barp(npr[1:n], main = "N(0,25,1)szimulálása és átlagaik")
    lines(x[1:n], npr2[1:n], type = "l", col = 4)
    lines(x[1:n], pr3[1:n], type = "l", col = 2)
    ani.pause()
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "nszt.gif", ani.width = 1200,
  ani.height = 600)

##########
#szimboly
#########

library(animation)

## szimmetrikus bolyongás
saveGIF({
  ani.options(nmax = 200)
  p <- 0.5
  aelozo <- c(0:0)
  aelozo[1] <- 0
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    x <- c(0:ani.options("nmax"))
    a <- c(0:n)
    a[1:n] <- aelozo[1:n]
    c <- rbinom(1, 1, p)
    a[n + 1] <- a[n] + (1^c * (-1)^(1 - c))
    aelozo <- a
    plot(x[1:(n + 1)], a, type = "l", col = 2,
      main = "Véletlen bolyongás a számegyenesen",
      xlab = "", ylab = "")
    legend("topright", paste("jobbra lépés valószínűsége: ", p))
    legend("bottomright", paste("lépések száma: ", n))
    ani.pause()
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "szimboly.gif", ani.width = 600,
  ani.height = 600)
```

```
saveGIF({
  ani.options(nmax = 200)
  p <- 0.55
  aelozo <- c(0:0)
  aelozo[1] <- 0
  for (n in 1:ani.options("nmax")) {
    x <- c(0:ani.options("nmax"))
    a <- c(0:n)
    a[1:n] <- aelozo[1:n]
    c <- rbinom(1, 1, p)
    a[n + 1] <- a[n] + (1^c * (-1)^(1 - c))
    aelozo <- a
    plot(x[1:(n + 1)], a, type = "l", col = 2,
         main = "Véletlen bolyongás a számegyenesen",
         xlab = "", ylab = "")
    legend("topright", paste("jobbra lépés valószínűsége: ", p))
    legend("bottomright", paste("lépések száma: ", n))
    ani.pause()
  }
}, interval = 0.5, movie.name = "nemszimboly.gif", ani.width = 600,
  ani.height = 600)
```

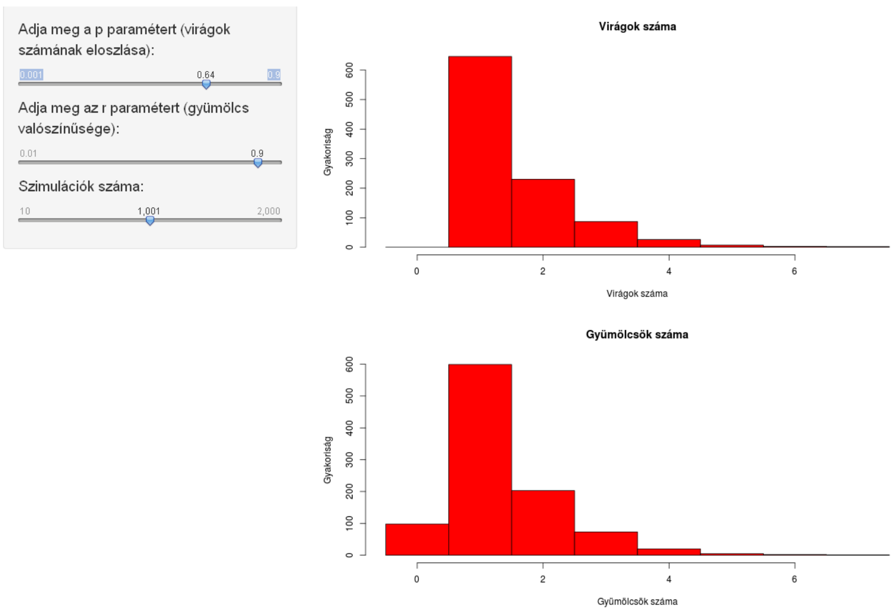


11.1. ábra. A (3.12) példa valószínűségének függése az idősek megbetegedési valószínű-ségétől, az ábra baloldalán látható paraméterbeállítás mellett, 11.22 kód

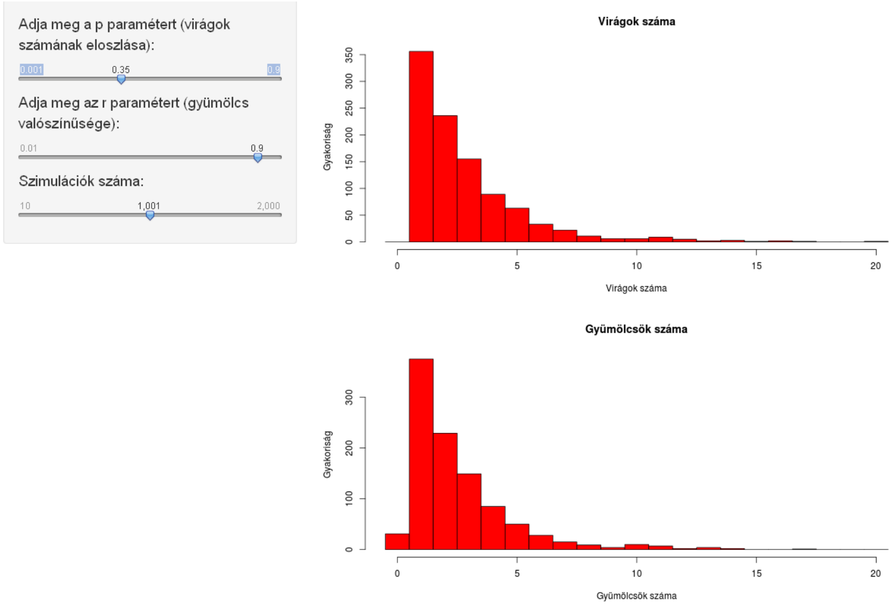
11.2. További ábrák

Az alábbiakban az interaktív szimulációk legérdekesebb eredményeiből válogatunk, azzal a célzattal, hogy ezzel is segítsük használatukat, illetve hogy a jegyzet segítségével adott esetben offline (papír) alapon is meg lehessen érteni például a különböző paraméterezések lényegét. Az ábráknál megadjuk, hogy melyik feladathoz is tartoznak, így könnyen utána lehet nézni a részleteknek.

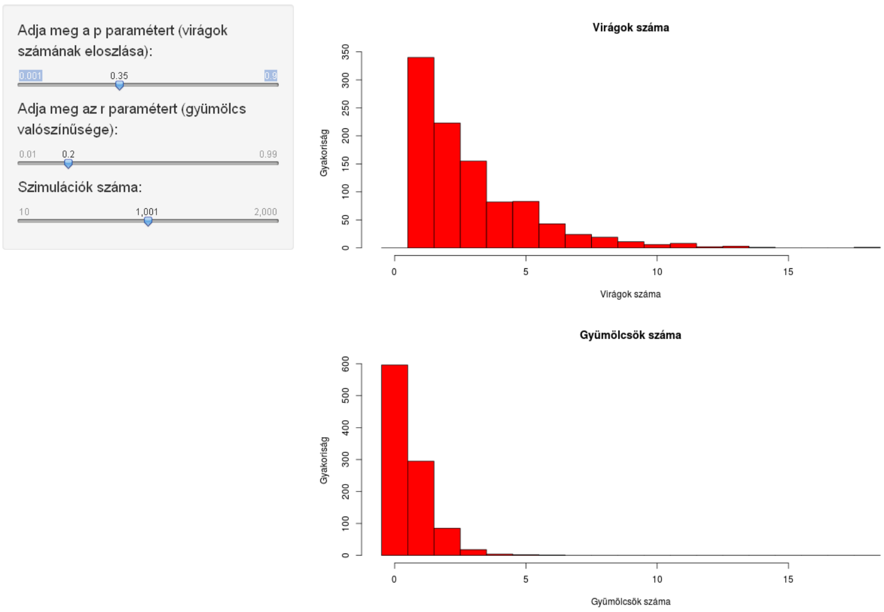
11.2. ábra. A (3.12) példa valószínűségének függése az idősek megbetegedési valószínűségétől, az ábra baloldalán látható paraméterbeállítás mellett, 11.22 kód



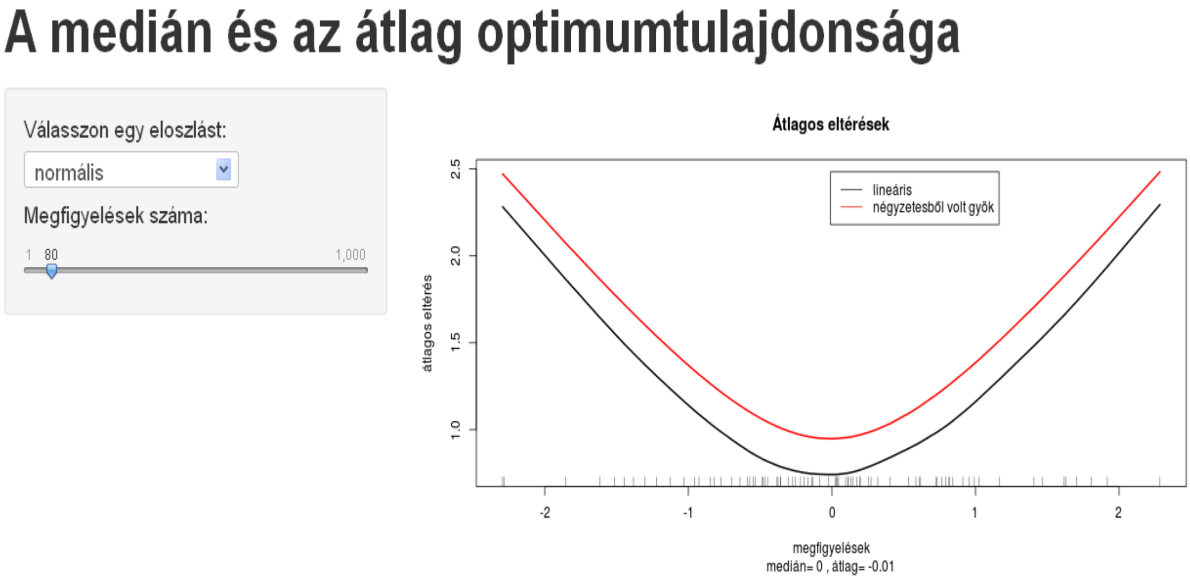
11.3. ábra. A virágok és a gyümölcsök számának szimulált eloszlása a (3.20) példánál, az ábra baloldalán látható paraméterek és szimulációszám esetén,11.23 kód



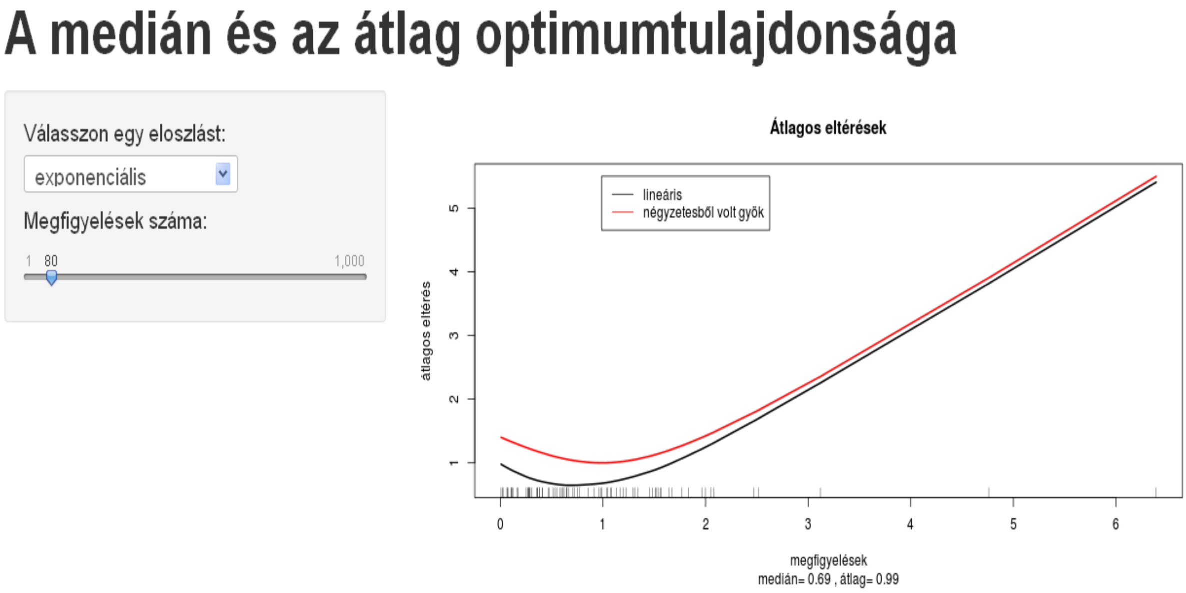
11.4. ábra. A virágok és a gyümölcsök számának szimulált eloszlása a (3.20) példánál, az ábra baloldalán látható paraméterek és szimulációszám esetén,11.23 kód



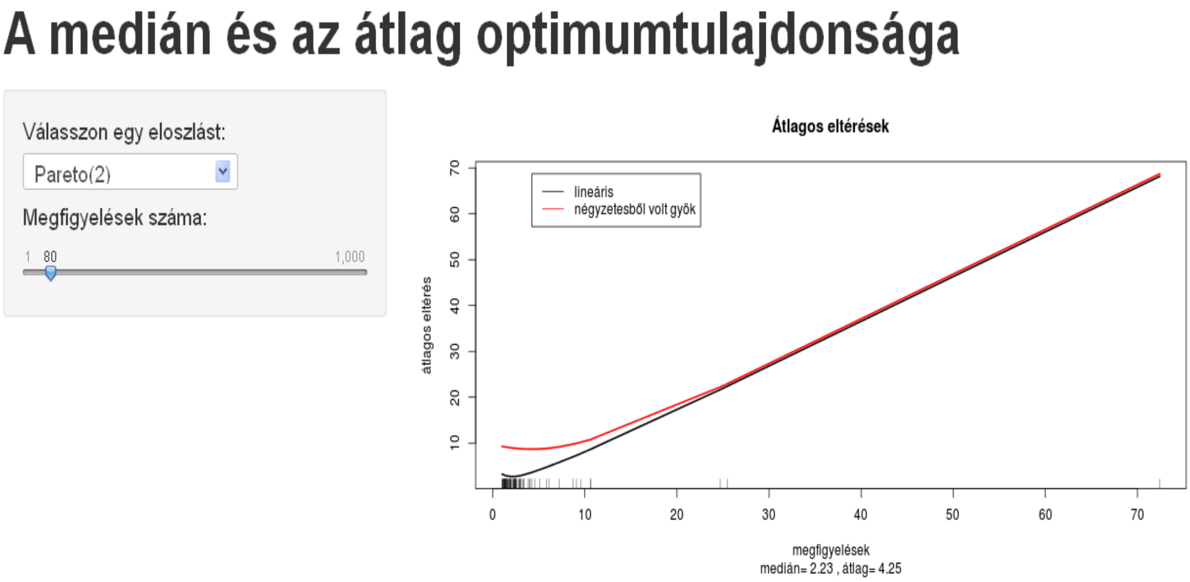
11.5. ábra. A virágok és a gyümölcsök számának szimulált eloszlása a (3.20) példánál, az ábra baloldalán látható paraméterek és szimulációszám esetén,11.23 kód



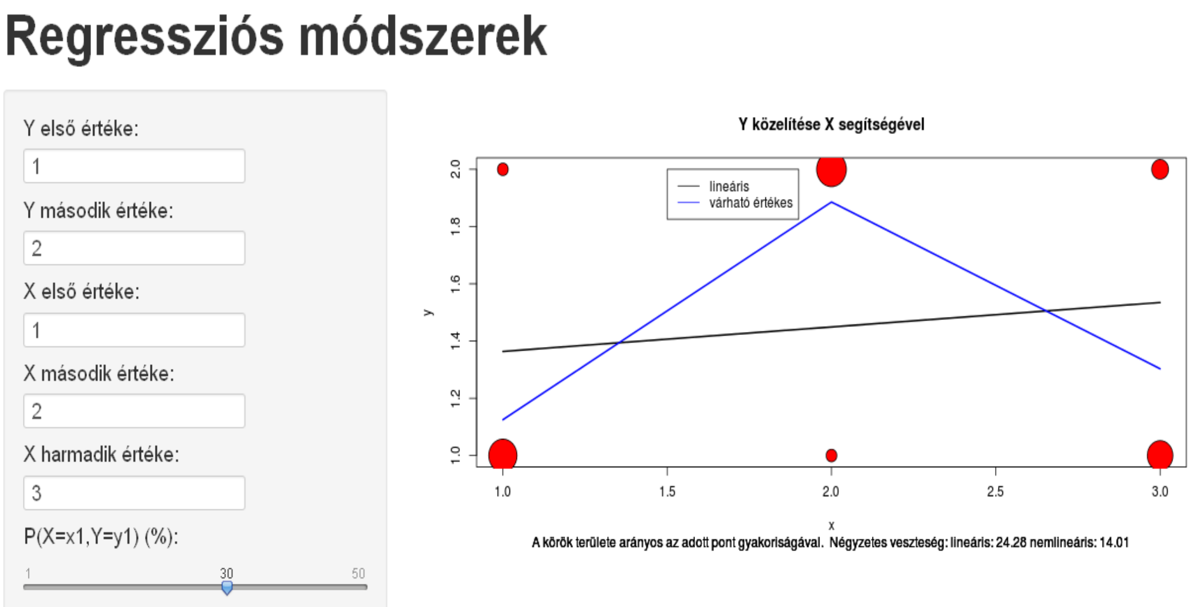
11.6. ábra. Az átlag és a medián optimumtulajdonsága a normális eloszlásra 80 elemű mintára



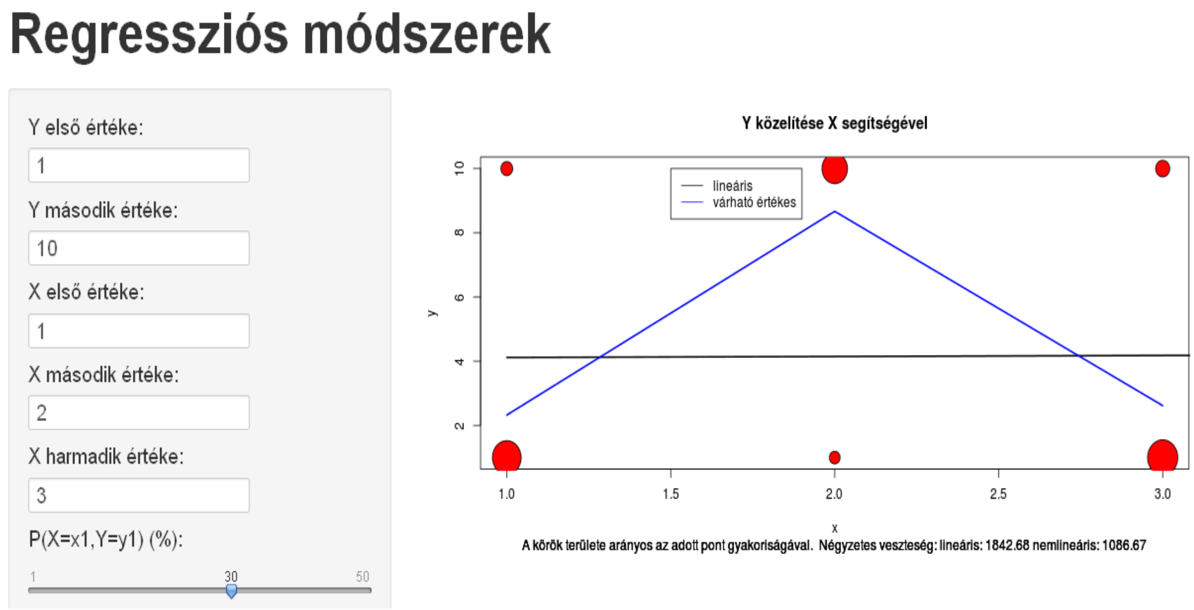
11.7. ábra. Az átlag és a medián optimumtulajdonsága az exponenciális eloszlásra 80 elemű mintára



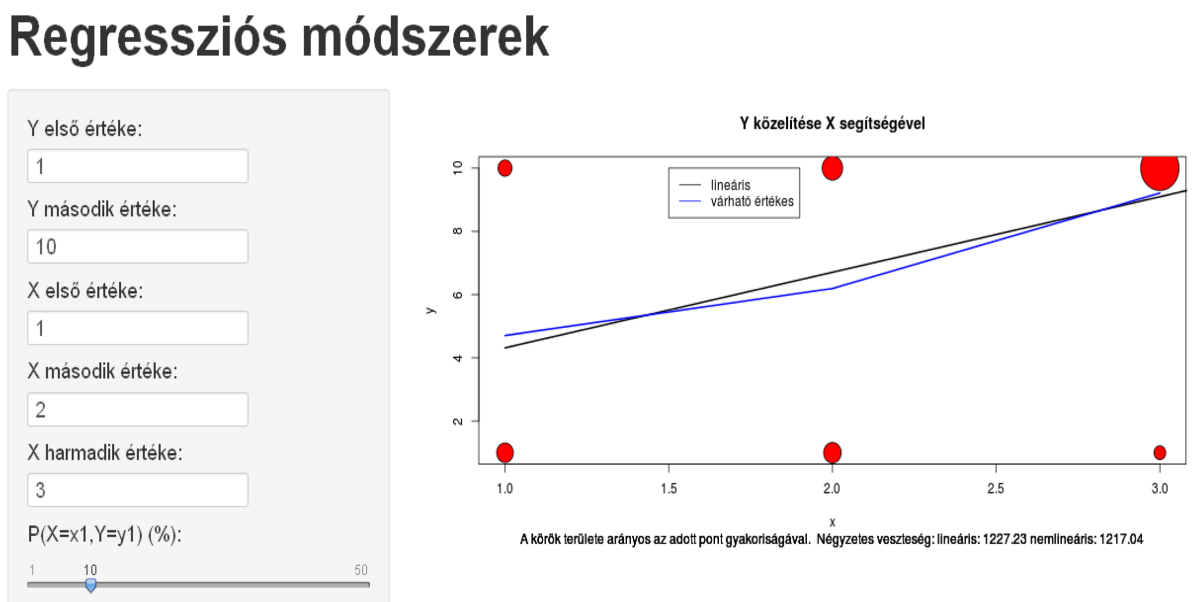
11.8. ábra. Az átlag és a medián optimumtulajdonsága a Pareto(2) eloszlásra 80 elemű mintára



11.9. ábra. A lineáris és a nemlineáris előrejelzés összehasonlítása: jelentős eltérés



11.10. ábra. A lineáris és a nemlineáris előrejelzés összehasonlítása: y szórásának növelése növelte a hibát



11.11. ábra. A lineáris és a nemlineáris előrejelzés összehasonlítása: kicsi az eltérés

Irodalomjegyzék

[1] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I.* Third edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[2] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[3] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete mathematics.* Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 1989. A foundation for computer science.

[4] Geoffrey R. Grimmett and David R. Stirzaker. *One Thousand Exercises in Probability.* Oxford University Press, 2001.

[5] Samuel Karlin and Howard M. Taylor. *A first course in stochastic processes.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, second edition, 1975.

[6] Sheldon M. Ross *A First Course In Probability.* Pearson Education, 6th edition, 2002.