MAXIMÁLIS PÁROSÍTÁS PÁROS GRÁFBAN

Előadás összefoglaló, 2012. február 13.

Kovács Péter
kpeter@inf.elte.hu

1. Feladat

Adott egy $G = (A \cup B, E)$ irányítatlan páros gráf. Keressünk benne egy maximális méretű $F \subseteq E$ párosítást, vagyis egy maximális méretű F élhalmazt úgy, hogy minden csúcsra legfeljebb egy F-beli él illeszkedjen.

2. Algoritmus

A feladatot az ún. *alternáló utas* algoritmussal oldhatjuk meg. A G gráf egy irányított G' változatával dolgozunk oly módon, hogy az aktuális F párosítás éleit B-ből A-ba („felfelé"), míg a többi élt A-ból B-be („lefelé") irányítjuk. Egy javítóút (alternáló út) egy irányított út G'-ben egy, az aktuális F párosítás által fedetlen $s \in A$ pontból egy fedetlen $t \in B$ pontba. Könnyen látható, hogy ha egy ilyen P út F-beli éleit elhagyjuk F-ből, $(E \setminus F)$-beli éleit pedig hozzávesszük F-hez, akkor az így kapott F' élhalmaz is párosítás lesz, és $|F'| = |F| + 1$.

INPUT: $G = (A \cup B, E)$ irányítatlan páros gráf.

procedure ALTERNÁLÓ UTAS ALGORITMUS
  $G' := (A \cup B, E')$ irányított gráf, ahol
    $E' := \{(a, b) : a \in A, b \in B, \{a, b\} \in E\}$ ▷ *kezdetben minden él „lefelé" irányítva* $(F = \emptyset)$
  $A' := A$; $B' := B$ ▷ *A' a „felső", B' az „alsó" fedetlen pontok halmaza*
  while G'-ben létezik irányított út A'-beli pontból B'-beli pontba **do**
    P irányított út (ún. *alternáló út*) keresése G'-ben $s \in A'$ pontból $t \in B'$ pontba
    P minden élének megfordítása
    $A' := A' \setminus \{s\}$; $B' := B' \setminus \{t\}$ ▷ *$s \in A$ és $t \in B$ fedett pontok lettek*
  end while
end procedure

OUTPUT: A G'-ben a B-ből A-ba mutató („felfelé" irányított) élek irányítatlan megfelelői G egy maximális párosítását adják.

3. Helyesség

A *maximális párosítás* és *minimális lefogás* feladatok *primál–duál* kapcsolatát, valamint az algoritmus helyességét a Kőnig-tétel fogalmazza meg. Egy $X \subseteq A \cup B$ halmazt *lefogásnak* nevezünk, ha minden élnek legalább az egyik végpontját tartalmazza.

Kőnig-tétel. *Egy G páros gráfban a maximális párosítás $\nu(G)$ elemszáma megegyezik az éleket lefogó pontok minimális $\tau(G)$ elemszámával.*

Bizonyítás (vázlat). Egyrészt nyilvánvaló, hogy bármely F párosítás és bármely X lefogás esetén $|X| \geq |F|$, ui. minden F-beli élhez kell egy-egy csúcs egy lefogásba. Vagyis $\nu(G) \leq \tau(G)$. Másrészt belátható, hogy a fenti algoritmus megad egy $F \subseteq E$ párosítást és egy $X \subseteq A \cup B$ lefogó ponthalmazt, amelyekre $|F| = |X|$. Ekkor az előző megfigyelés miatt F szükségszerűen maximális párosítás, X pedig szükségszerűen minimális lefogás, és egyúttal a Kőnig-tétel helyességét is igazoltuk.

Tekintsük az algoritmus végső állapotát, vagyis amikor már nem találtunk javító utat. Jelölje W a fedetlen A-beli pontokból (vagyis A'-ből) irányított úton elérhető $(A \cup B)$-beli pontok halmazát. W definíciójából könnyű meggondolással adódik, hogy $A \cap W$ és $B \setminus W$ között nem vezet él. (G'-ben „felfelé” és „lefelé” vezető él sem lehet.) Következésképpen $X := (A \setminus W) \cup (B \cap W)$ halmaz egy lefogás, és így $|X| \geq |F|$. Azt kell még belátnunk, hogy $|X|$ nem lehet nagyobb, mint $|F|$. Indirekt tegyük fel, hogy $\{a, b\} \in F$ élnek mindkét végpontját tartalmazza X. Ekkor $a \in A \setminus W$, vagyis nem elérhető, de $b \in B \cap W$, vagyis elérhető pont. G'-ben viszont a párosítás élek B-ből A-ba vannak irányítva, tehát ha b elérhető, akkor a-nak is elérhetőnek kellene lennie. Vagyis $|F| = |X|$, ezzel a Kőnig-tételt és az algoritmus helyességét beláttuk. •

Az alternáló utas algoritmus tehát egyszerre szolgáltat egy párosítást (primál megoldás) és egy lefogást (duál megoldás), amelyek mérete megegyezik, így mindkettő szükségszerűen optimális.

Megjegyzés. A Kőnig-tétel a lineáris programozásban ismert *erős dualitás tétel* speciális esete, a tétel egyszerűbben belátható része ($\nu(G) \leq \tau(G)$) pedig a *gyenge dualitás tételnek* felel meg.

4. Műveletigény

Egy alternáló utat kereshetünk egy szélességi kereséssel, amelyben minden A'-beli pontot kezdőcsúcsnak tekintünk. Minden alternáló út mentén történő javítás eggyel növeli a párosítás méretét (amely kezdetben 0). Tehát legfeljebb $\min\{|A|, |B|\} \leq n/2$ javítás lehet, és egy javítás megvalósítható $O(n + e)$ időben. Így az algoritmus teljes műveletigénye $O(n(n + e))$.

Hivatkozások

[1] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein. *Új algoritmusok.* Scolar, 2003.

[2] Rónyai Lajos, Ivanyos Gábor, Szabó Réka. *Algoritmusok.* TypoTeX, 1998.

[3] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.* Prentice-Hall, Inc., February 1993.