Az alaptípusok hagyományos definiálása az F_1 típusrendszerben

F^1_{ind}: induktív típusdefiníció (ismétlés)

Definíció. ***Induktív típusdefiníció***

Az <alaptípus> típust definiáló kifejezés a következő:

indtype *<alaptípus>* with

$E_1 : T_{11} \to T_{12} \to \ldots \to T_{1m_1} \to$ *<alaptípus>*
$E_2 : T_{21} \to T_{22} \to \ldots \to T_{2m_2} \to$ *<alaptípus>*
$\ldots$
$E_n : T_{n1} \to T_{n2} \to \ldots \to T_{nm_n} \to$ *<alaptípus>*

ahol

- $n \geq 0$ *és* $m_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$
- $E_i (1 \leq i \leq n)$ *az <alaptípus> típuskonstruktora, speciálisan lehet a típus értékhalmazának egy eleme, azaz a típus konstansa is*
- $T_{ij} (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m_i)$ *az ezzel a típusdefinícióval megadott <alaptípus> típusból és a típusrendszerben már ismert típusokból készített jól formált típus.*

F^1_{ind}: iter_A_B (ismétlés)

Definíció. ***Az iter_A_B függvény***

Legyen B egy tetszőleges típus. Ha az A típust megadó induktív típusdefinícióban n konstruktor van, és az i. $(1 \leq i \leq n)$ *konstruktor*

$$E_i : T_{i1} \to T_{i2} \to \ldots \to T_{im_i} \to A \qquad (m_i \geq 0)$$

alakú, akkor

$$\text{iter\_A\_B}\ (E_i\ G_1\ G_2\ \ldots\ G_{m_i})\ F_1\ F_2\ \ldots\ F_n \rightarrowtriangle F_i\ G'_1\ G'_2\ \ldots\ G'_{m_i}$$

ahol

- $F_i : T'_{i1} \to T'_{i2} \to \ldots \to T'_{im_i} \to B$
- G'_j *azt jelöli, hogy* G_j*-ben minden A típusú* G''_j *részkifejezést az* $(\mathit{iter\_A\_B}\ G''_j\ F_1\ F_2\ \ldots\ F_n)$ *kifejezéssel helyettesítünk* $(1 \leq j \leq m_i)$
- *és* T'_{ik} *pedig azt jelöli, hogy* T_{ik}*-ban az A minden előfordulását B-re helyettesítjük* $(1 \leq k \leq m_i)$

F^1_{ind}: az iter_Pair$_{\mathrm{Nat}\times\mathrm{Nat}}$_Nat függvény

indtype $Pair_{Nat\times Nat}$ with pair : $Nat \to Nat \to Pair_{Nat\times Nat}$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{first} & \equiv & \lambda x : Pair_{Nat\times Nat}.\mathrm{iter\_Pair}_{Nat\times Nat}\mathrm{\_Nat}\; x\; (\lambda f : Nat.\lambda s : Nat.f) \\
\text{second} & \equiv & \lambda x : Pair_{Nat\times Nat}.\mathrm{iter\_Pair}_{Nat\times Nat}\mathrm{\_Nat}\; x\; (\lambda f : Nat.\lambda s : Nat.s)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{first } (\text{pair } u\; v) \equiv \\
\quad (\lambda x : Pair_{Nat\times Nat}.\mathrm{iter\_Pair}_{Nat\times Nat}\mathrm{\_Nat}\; x\; (\lambda f : Nat.\lambda s : Nat.f))\; (\text{pair } u\; v) \twoheadrightarrow_\beta \\
\quad \mathrm{iter\_Pair}_{Nat\times Nat}\_Nat\; (\text{pair } u\; v)\; (\lambda f : Nat.\lambda s : Nat.f) \twoheadrightarrow \\
\quad (\lambda f : Nat.\lambda s : Nat.f)\; u\; v \twoheadrightarrow_\beta \\
\quad (\lambda s : Nat.u)\; v \twoheadrightarrow_\beta \\
\quad u
\end{array}
$$

F^1_{ind}: az iter_List_Nat függvény (1/2)

$$\begin{array}{lll} \text{indtype } List_{Nat} \text{ with} & \text{nil} & : List_{Nat} \\ & \text{cons} & : Nat \to List_{Nat} \to List_{Nat} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{iter\_List\_Nat nil } F_1\ F_2 & \rightarrowtriangle & F_1 \\ \text{iter\_List\_Nat } (\text{cons } G_1\ G_2)\ F_1\ F_2 & \rightarrowtriangle & F_2\ G_1'\ G_2' \end{array}$$

head $\equiv$

$$\lambda x : List_{Nat}.\lambda d : Nat.\text{iter\_List\_Nat } x\ d\ (\lambda y : Nat.\lambda z : List_{Nat}.\lambda u : Nat.y)$$

ahol d a hibajelzés kódja, például 999.

$$[1,\ 2,\ 3,\ 4]\ \equiv\ \text{cons } 1\ (\text{cons } 2\ (\text{cons } 3\ (\text{cons } 4 \text{ nil})))$$

F^1_{ind}: az iter_List_Nat függvény (2/2)

$$\text{head}\ [1,\ 2,\ 3,\ 4]\ 999\ \equiv$$
$$\text{head}\ (\text{cons}\ 1\ (\text{cons}\ 2\ (\text{cons}\ 3\ (\text{cons}\ 4\ \text{nil}))))\ 999\ \equiv$$

$$(\lambda x : List_{Nat}.\lambda d : Nat.\text{iter\_List\_Nat}\ x\ d\ (\lambda y : Nat.\lambda z : List_{Nat}.\lambda u : Nat.y))$$
$$(\text{cons}\ 1\ (\text{cons}\ 2\ (\text{cons}\ 3\ (\text{cons}\ 4\ \text{nil}))))\ 999\ \overset{+}{\rightarrow}_\beta$$

$$\text{iter\_List\_Nat}\ \underbrace{(\text{cons}\ 1\ (\text{cons}\ 2\ (\text{cons}\ 3\ (\text{cons}\ 4\ \text{nil}))))}_{\text{cons}\ G_1\ \ G_2}\ \underbrace{999}_{F_1}$$
$$\underbrace{(\lambda y : Nat.\lambda z : List_{Nat}.\lambda u : Nat.y)}_{F_2}\ \rightarrow$$

$$(\lambda y : Nat.\lambda z : List_{Nat}.\lambda u : Nat.y)\ 1'\ (\text{cons}\ 2\ (\text{cons}\ 3\ (\text{cons}\ 4\ \text{nil})))'\ F_2\ \rightarrow$$

$$1'\ \equiv\ 1$$

Az altípus, az $F^1_{<:}$ típusrendszer

Az altípus

Definíció. *Az altípus*
Az A és B típusokra $A <: B$, ha $INH(A) \subseteq INH(B)$.

Új típus: *Top*
$<:$: reflexív, tranzitív, a *Top* a típusok maximuma

Az A elemeinek több feltételt kell kielégíteniük: B az A gyengítése, avagy A a B erősítése

Például:

$$INH(Nat) \subseteq INH(Int) \subseteq INH(Real) \sim Nat <: Int <: Real <: Top$$

$F_1 + altípusok \leadsto F^1_{<:}$

$F^1_{<:}$: szintaktika és következtetések

Definíció. ***Az $F^1_{<:}$ típusrendszer szintaktikája***

<típus>	::=	*Top*
	|	*<alaptípus>*
	|	*(<típus> $\rightarrow$ <típus>)*
<λ-kifejezés>	::=	*<változó>*
	|	*(λ <változó> : <típus> . <λ-kifejezés>)*
	|	*(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)*

Definíció. ***Az $F^1_{<:}$ típusrendszer következtetései***

$\Gamma \vdash wf$	*A Γ jól formált környezet*
$\Gamma \vdash A <: B$	*Az A típus a B típus altípusa*
$\Gamma \vdash E : A$	*A Γ környezetben az E típusa A*

$F^1_{<:}$: A típusrendszer szabályai (1/3)

Definíció. ***Az $F^1_{<:}$ típusrendszer szabályai***

$$\frac{}{\varnothing \vdash wf}\ (\textsc{Env}\ \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash A, x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : A \vdash wf}\ (\textsc{Env}\ x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash wf}{\Gamma \vdash Top}\ (\textsc{Type}\ Top) \qquad \frac{\Gamma \vdash wf, A \in alaptípus}{\Gamma \vdash A}\ (\textsc{Type Const})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\textsc{Type Arrow})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B, INH(A) \subseteq INH(B)}{\Gamma \vdash A <: B}\ (\textsc{Type Sub})$$

$F^1_{<:}$: A típusrendszer szabályai (2/3)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A <: Top} \text{ (SUB } Top\text{)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A <: A} \text{ (SUB REFL)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A <: B, \Gamma \vdash B <: C}{\Gamma \vdash A <: C} \text{ (SUB TRANS)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A' <: A, \Gamma \vdash B <: B'}{\Gamma \vdash A \to B <: A' \to B'} \text{ (SUB ARROW)}$$

SUB ARROW: a függvények *kontravariáns*ak a paraméterek típusában és *kovariáns*ak a visszatérési értékek típusában

$F^1_{<:}$: A típusrendszer szabályai (3/3)

$$\frac{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash \mathrm{wf}}{\Gamma', x : A, \Gamma'' \vdash x : A} \ (\textsc{Val } x) \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash E : B}{\Gamma \vdash \lambda x : A.E : A \to B} \ (\textsc{Val Abs})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : A \to B, \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E\ F : B} \ (\textsc{Val Appl})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : A, \Gamma \vdash A <: B}{\Gamma \vdash E : B} \ (\textsc{Val Subsumption})$$

VAL SUBSUMPTION: biztonságos helyettesítés elve

$F^1_{<:}$: Példák: számok

Az alárendelés szabálya:

$Nat <: Top, Int <: Top, Real <: Top$
$Nat <: Int, Int <: Real, Nat <: Real$

Ha $Nat <: Int$ és $E : Nat$, akkor $E : Int$ is teljesül.

A biztonságos helyettesítés elve:

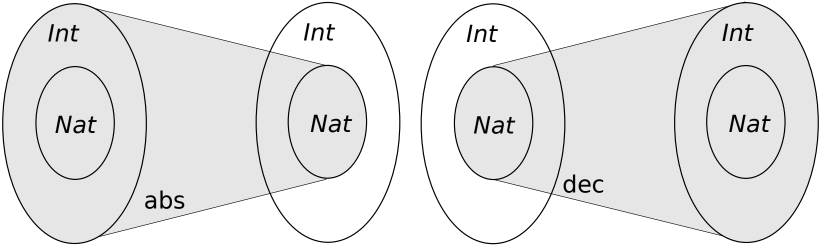
$(\lambda x : Int.x)\ (-2)$
$(\lambda x : Int.x)\ 2$
$2 : Nat, Nat <: Int, 2 : Int$

A típus gyengítése:

$$\dfrac{\dfrac{\ldots}{\lambda x : Int.x : Int \to Int} \qquad \dfrac{\dfrac{\ldots}{3 : Nat \qquad Nat <: Int}}{3 : Int}}{((\lambda x : Int.x)\ 3) : Int}$$

$F^1_{<:}$: Példák: függvények közti altípus relációt

$\text{abs} : \mathit{Int} \to \mathit{Nat}$
$\text{dec} : \mathit{Nat} \to \mathit{Int}$
$\mathit{Int} \to \mathit{Nat} <: \mathit{Nat} \to \mathit{Int}$



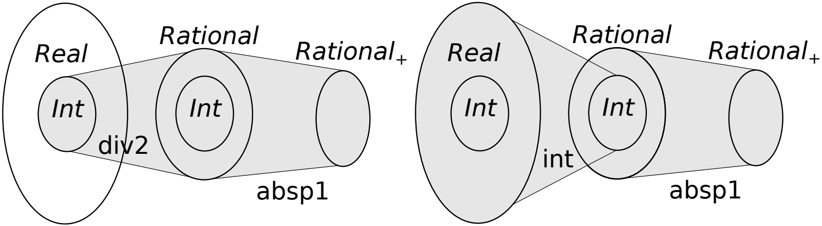
$F^1_{<:}$: Példák: összetett függvények típusa

absp1 : $Rational \rightarrow Rational_+$
div2 : $Int \rightarrow Rational$

$f \equiv \text{absp1} \circ \text{div2} \equiv \lambda x : Int.\text{absp1}\ (\text{div2}\ x)$
$f : Int \rightarrow Rational_+$

int : $Real \rightarrow Int$
$Real \rightarrow Int <: Int \rightarrow Rational$

$f' \equiv \text{absp1} \circ \text{int} \equiv \lambda x : Real.\text{absp1}\ (\text{int}\ x)$
$f' : Real \rightarrow Rational_+$



$F^1_{<:}$: Tulajdonságok

Lemma. ***Függvények típusa***
Ha $C <: A' \to B'$, akkor a C típus $A \to B$ alakú, ahol $A' <: A$ és $B <: B'$.

Lemma. ***Az absztrakció típusa***
Ha $\Gamma \vdash \lambda x : C.E : A \to B$, akkor $\Gamma, x : C \vdash E : B$ és $A <: C$.

Lemma. ***Helyettesítési lemma***

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash E : B, \Gamma \vdash F : A}{\Gamma \vdash E[x := F] : B} \ (\text{SUBST})$$

Valamint továbbra is érvényes a típusmegmaradás és a haladás tétele.

$F^1_{<:}$: A *Pair*, *Union* és *Record* altípusa

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 <: B_1, \Gamma \vdash A_2 <: B_2}{\Gamma \vdash Pair_{A_1 \times A_2} <: Pair_{B_1 \times B_2}} \quad \text{(SUB PAIR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 <: B_1, \Gamma \vdash A_2 <: B_2}{\Gamma \vdash Union_{A_1 + A_2} <: Union_{B_1 + B_2}} \quad \text{(SUB UNION)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A_1 <: B_1, \ldots, \Gamma \vdash A_m <: B_m, \Gamma \vdash A_{m+1}, \ldots, \Gamma \vdash A_n \; (m \leq n)}{\Gamma \vdash \{\!| \, l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \, |\!\} <: \{\!| \, l_1 : B_1, \ldots, l_m : B_m \, |\!\}} \quad \text{(SUB RECO}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{\!| \, l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \, |\!\}}{\Gamma \vdash \mathrm{perm} \; \{\!| \, l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \, |\!\} <: \{\!| \, l_1 : A_1, \ldots, l_n : A_n \, |\!\}} \quad \text{(SUB RECORD PER}$$

$F^1_{<:}$: Végtelen típussorozat

$$A_{i+1} <: A_i \ (1 \leq i)$$

$$A_1 \equiv \{\!| \ l_1 : Nat \ |\!\}$$
$$A_2 \equiv \{\!| \ l_1 : Nat, l_2 : Nat \ |\!\}$$
$$A_3 \equiv \{\!| \ l_1 : Nat, l_2 : Nat, l_3 : Nat \ |\!\}$$
$$\ldots$$
$$A_n \equiv \{\!| \ l_1 : Nat, l_2 : Nat, l_3 : Nat, \ldots, l_i : Nat \ |\!\}$$
$$\ldots$$

$$B_i <: B_{i+1} \ (1 \leq i)$$

$$B_1 \equiv A_1 \to Nat$$
$$B_2 \equiv A_2 \to Nat$$
$$B_3 \equiv A_3 \to Nat$$
$$\ldots$$
$$B_i \equiv A_i \to Nat$$
$$\ldots$$

Az F_1 típuskikövetkeztetés

Bevezetés

- Típusellenőrzés, a típus levezetése:

  Adott A és E esetén $\emptyset \vdash E : A$ teljesül-e?

- Típusreprezentáció:

  Adott A esetén, létezik-e E, hogy $\emptyset \vdash E : A$?

- Típuskikövetkeztetés, a típus rekonstrukciója:

  Adott E esetén létezik-e A, hogy $\emptyset \vdash E : A$?

F_1: A típus kikövetkeztetése

Definíció. ***A típus meghatározása***
Adott az E kifejezés és a Γ környezet: $\mathcal{D}(\Gamma, E)$

$$\mathcal{D} : \Gamma \times E \sim \begin{cases} A, \\ \mathtt{fail} \end{cases}$$

1. $\mathcal{D}(\Gamma, x) \quad \rightsquigarrow \quad A$, *ha* $x : A \in \Gamma$,
   $\mathtt{fail}$ *egyébként.*

2. $\mathcal{D}(\Gamma, \lambda x : A.E) \quad \rightsquigarrow \quad A \to \mathcal{D}(\{\Gamma, x : A\}, E)$, *ha* $x \notin dom(\Gamma)$,
   $\mathtt{fail}$ *egyébként.*

3. $\mathcal{D}(\Gamma, E\ F) \quad \rightsquigarrow \quad A$, *ha* $\exists A, \mathcal{D}(\Gamma, E) \equiv \mathcal{D}(\Gamma, F) \to A$,
   $\mathtt{fail}$ *egyébként.*

F_1: A típus kikövetkeztetése bővítéssel

Definíció. ***A típus meghatározása, bővítés***

4.	$\mathcal{D}(\Gamma, \texttt{true})$	$\rightsquigarrow$	*Bool*
5.	$\mathcal{D}(\Gamma, \texttt{false})$	$\rightsquigarrow$	*Bool*
6.	$\mathcal{D}(\Gamma, \texttt{if}\ E\ F\ G)$	$\rightsquigarrow$	A, ha $\mathcal{D}(\Gamma, E) = Bool$, $\mathcal{D}(\Gamma, F) = A$, $\mathcal{D}(\Gamma, G) = A$
7.	$\mathcal{D}(\Gamma, c_0)$	$\rightsquigarrow$	*Nat*
8.	$\mathcal{D}(\Gamma, \texttt{succ}\ E)$	$\rightsquigarrow$	*Nat*, ha $\mathcal{D}(\Gamma, E) = Nat$
9.	$\mathcal{D}(\Gamma, \texttt{pred}\ E)$	$\rightsquigarrow$	*Nat*, ha $\mathcal{D}(\Gamma, E) = Nat$
10.	$\mathcal{D}(\Gamma, \texttt{zero}\ E)$	$\rightsquigarrow$	*Bool*, ha $\mathcal{D}(\Gamma, E) = Nat$

Tétel. ***A $\mathcal{D}$-algoritmus helyessége***

Ha $\mathcal{D}(\Gamma, E) = A$, *akkor* $\Gamma \vdash E : A$.

Tétel. ***A $\mathcal{D}$-algoritmus teljessége***

Ha $\Gamma \vdash E$, *akkor* $\mathcal{D}(\Gamma, E) = A$.

F_1: Példák típuskikövetkeztetésre

$\lambda x : Nat.x$:
$\mathcal{D}(\varnothing, \lambda x : Nat.x) \rightsquigarrow Nat \to \mathcal{D}(\{x : Nat\}, x) \rightsquigarrow Nat \to Nat$

$\lambda x : Nat.\lambda y : Bool.x$:
$\mathcal{D}(\varnothing, \lambda x : Nat.\lambda y : Bool.x) \rightsquigarrow$
$Nat \to \mathcal{D}(\{x : Nat\}, \lambda y : Bool.x) \rightsquigarrow$
$Nat \to (Bool \to \mathcal{D}(\{x : Nat, y : Bool\}, x)) \rightsquigarrow$
$Nat \to (Bool \to Nat) \equiv Nat \to Bool \to Nat$

$\lambda x : Nat.x\ x$:
$\mathcal{D}(\varnothing, \lambda x : Nat.x\ x) \rightsquigarrow Nat \to \mathcal{D}(\{x : Nat\}, x\ x)$
$\mathcal{D}(\{x : Nat\}, x) \rightsquigarrow Nat$
$Nat \equiv \mathcal{D}(\{x : Nat\}, x) \to Nat \rightsquigarrow Nat \equiv Nat \to Nat$
`fail`

A Curry-típusrendszer

Curry-típusrendszer: szintaktika

Definíció. ***A Curry-típusrendszer szintaktikája***

<típus>	::=	*<típusváltozó>*
	|	*(<típus> → <típus>)*
<λ-kifejezés>	::=	*<változó>*
	|	*(λ <változó> . <λ-kifejezés>)*
	|	*(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)*

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha, \beta, \ldots & \text{típusváltozók} \\ \tau & \text{típuskifejezés} \end{array}\right\} E : \tau : \text{Az } E \text{ kifejezés típusa } \tau$$

F_1: $\lambda x : Nat.x : Nat \to Nat$ $\qquad$ $\alpha \equiv \alpha$

Curry: $\lambda x.x : \alpha \to \alpha$ $\qquad$ $\alpha \not\equiv \beta$

Curry: $\lambda x.x : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$ $\qquad$ $\alpha \to \alpha \not\equiv \beta \to \beta$

F_1: $\{\, y : Bool \,\} \vdash \lambda x : Bool \to Nat.x\ y : (Bool \to Nat) \to Nat$

Curry: $\{\, y : \beta \,\} \vdash \lambda x.x\ y : (\beta \to \alpha) \to \alpha$