# $F_2$: primitív rekurzív függvények

**Definíció.** ***Primitív rekurzió***

*Legyen $k$ : Nat egy konstans és $h$ : Nat → Nat → Nat függvény. Legyen az $f$ : Nat → Nat függvény primitív rekurzióval való megadása a következő:*

$$\begin{array}{lcl} f\ 0 & = & k \\ f\ (\mathtt{succ}\ n) & = & h\ n\ (f\ n) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} f\ 0 & = & k \\ f\ 1 & = & h\ 0\ k \\ f\ 2 & = & h\ 1\ (h\ 0\ k) \\ f\ 3 & = & h\ 2\ (h\ 1\ (h\ 0\ k)) \\ & \dots & \end{array}$$

Az $F_2$ típusrendszerben lehetőség van primitív rekurzív függvények leírására.

# $F_2$: primitív rekurzió a *Pair* típussal

Primitív rekurzió megadása a *Pair* típus segítségével:

$$
\begin{aligned}
& f : \alpha \to (Nat \to \alpha \to \alpha) \to Nat \to \alpha \\
& f = \lambda : \alpha : \lambda n : Nat.\mathtt{second}_{Nat\times\alpha}\ (n\ [Pair_{Nat\times\alpha}] \\
& \quad (\lambda v : Pair_{Nat\times\alpha}.\mathtt{pair}_{Nat\times\alpha} \\
& \qquad (\mathtt{succ}\ (\mathtt{first}_{Nat\times\alpha}\ v)) \\
& \qquad (h\ (\mathtt{first}_{Nat\times\alpha}\ v)\ (\mathtt{second}_{Nat\times\alpha}\ v))) \\
& \quad (\mathtt{pair}_{Nat\times\alpha}\ 0\ k))
\end{aligned}
$$

ahol $h : Nat \to \alpha \to \alpha$

$$\ulcorner n \urcorner\ E\ F = \underbrace{E\ (E\ (\ldots (E}_{n}\ F) \ldots))$$

$$
\begin{array}{ll}
n = 0 & \mathtt{pair}_{Nat\times Nat}\ 0\ k \\
n = 1 & \mathtt{pair}_{Nat\times Nat}\ 1\ (h\ 0\ k) \\
n = 2 & \mathtt{pair}_{Nat\times Nat}\ 2\ (h\ 1\ (h\ 0\ k)) \\
n = 3 & \mathtt{pair}_{Nat\times Nat}\ 3\ (h\ 2\ (h\ 1\ (h\ 0\ k)))
\end{array}
$$

# $F_2$: primitív rekurzió, Ackermann-függvény

Az Ackermann-függvény egy olyan totális függvény, amely rekurzív, de nem primitív rekurzív:

$$
\begin{array}{lcl}
Ack(0,n) & = & n+1 \\
Ack(m+1,0) & = & Ack(m,1) \\
Ack(m+1,n+1) & = & Ack(m, Ack(m+1,n))
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\texttt{Ack} \equiv \lambda m : Nat.m\,[Nat \to Nat] \\
\quad (\lambda f : Nat \to Nat.\lambda n : Nat.n\,[Nat]\ f\ (f\ 1))\ \texttt{succ}
\end{array}
$$

$\texttt{Ack}\ 2\ 2 \twoheadrightarrow^{+} 7$

| $m$ | $n=0$ | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 3 | 5 | 13 | 29 | 61 |
| 4 | 13 | $2^{16}-3$ | $2^{2^{16}}-3$ | $2^{2^{2^{16}}}-3$ |

# Az $F^2_{<:}$ típusrendszer

# $F^2_{<:}$: bevezetés

$F^1_{<:}$ típusrendszer: minden típus a *Top* altípusa

$F_2$ típusrendszerben:

$$\begin{array}{lcl} Bool & \equiv & \forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha \\ \texttt{true} & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.x \\ \texttt{false} & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : \alpha.y \end{array}$$

$F^2_{<:}$ típusrendszerben:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{true}' & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : \alpha.\lambda y : Top.x \\ \texttt{false}' & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x : Top.\lambda y : \alpha.y \end{array}$$

$\texttt{true}' : Bool$ ?

$\texttt{true}' \sim \texttt{true}$ ?

# $F^2_{<:}$: szintaktika

**Definíció.** ***Az $F^2_{<:}$ típusrendszer szintaktikája***

| | | |
|---|---|---|
| *<típus>* | ::= | *Top* |
| | \| | *<típusváltozó>* |
| | \| | *(<típus> → <típus>)* |
| | \| | *( ∀ <típusváltozó> <: <típus> . <típus>)* |
| | | |
| *<λ-kifejezés>* | ::= | *<változó>* |
| | \| | *(λ <változó> : <típus> . <λ-kifejezés> )* |
| | \| | *(<λ-kifejezés> <λ-kifejezés>)* |
| | \| | *(Λ <típusváltozó> <: <típus> . <λ-kifejezés>)* |
| | \| | *(<λ-kifejezés> [ <típus> ])* |

$$
\begin{array}{lcllcl}
\forall\alpha.(\alpha \to \alpha) & \equiv & \forall\alpha.\alpha \to \alpha & \Lambda\alpha.(E[\tau]) & \equiv & \Lambda\alpha.E[\tau] \\
\Lambda\alpha.(\Lambda\beta.F) & \equiv & \Lambda\alpha.\Lambda\beta.F & \alpha <: Top & \equiv & \alpha \\
(E[\tau'])[\tau''] & \equiv & E[\tau'][\tau''] & x : Top & \equiv & x
\end{array}
$$

# $F^2_{<:}$: típuskörnyezet, következtetések

**Definíció.** ***A típuskörnyezet szintaktikája***

*<típuskörnyezet>* ::= $\varnothing$
| *<típuskörnyezet>, <változó> : <típus>*
| *<típuskörnyezet>, <típusváltozó> <: <típus>*

*valamint a következő tulajdonságokat követeljük meg:*

- *ha* $x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2 \in \Gamma$, *akkor* $x_1 \neq x_2$
- *ha* $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$, *akkor* $\alpha_1 \neq \alpha_2$

**Definíció.** ***Az $F^2_{<:}$ típusrendszer következtetései***

| | |
|---|---|
| $\Gamma \vdash wf$ | *a $\Gamma$ jól formált típuskörnyezet* |
| $\Gamma \vdash \tau <: \tau'$ | *a $\Gamma$ környezetben $\tau$ a $\tau'$ altípusa* |
| $\Gamma \vdash \tau$ | *a $\Gamma$ környezetben $\tau$ egy jól formált típus* |
| $\Gamma \vdash E : \tau$ | *a $\Gamma$ környezetben az $E$ kifejezés típusa $\tau$* |
| $\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \tau$ | *az $E$ és $F$ ekvivalens $\tau$ típusú kifejezések* |

# $F^2_{<:}$: a típusrendszer szabályai (1/3)

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{wf}} \ (\textsc{Env}\ \varnothing) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau, x \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, x : \tau \vdash \mathsf{wf}} \ (\textsc{Env}\ x)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau, \alpha \notin dom(\Gamma)}{\Gamma, \alpha <: \tau \vdash \mathsf{wf}} \ (\textsc{Env}\ \alpha_{<:}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma \vdash Top} \ (\textsc{Type}\ Top)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau''}{\Gamma \vdash \tau' \to \tau''} \ (\textsc{Type} \to) \qquad \frac{\Gamma', \alpha <: \tau, \Gamma'' \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma', \alpha <: \tau, \Gamma'' \vdash \alpha <: \tau} \ (\textsc{Type}\ \alpha_{<:})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \tau \vdash \tau'}{\Gamma \vdash \forall \alpha <: \tau . \tau'} \ (\textsc{Type}\ \forall_{<:})$$

# $F^2_{<:}$: a típusrendszer szabályai (2/3)

$$\frac{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash \mathsf{wf}}{\Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash x : \tau}\ (\text{VAL } x) \qquad \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash E : \tau''}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau'.E : \tau' \to \tau''}\ (\text{VAL } \lambda)$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau' \to \tau'' \qquad \Gamma \vdash F : \tau'}{\Gamma \vdash E\ F : \tau''}\ (\text{VAL APPL})$$

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \tau \vdash E : \tau'}{\Gamma \vdash \Lambda\alpha <: \tau.E : \forall\alpha <: \tau.\tau'}\ (\text{VAL } \Lambda_{<:})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \forall\alpha <: \tau.\tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' <: \tau}{\Gamma \vdash E[\tau''] : \tau'[\alpha := \tau'']}\ (\text{VAL } []_{<:})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau \qquad \Gamma \vdash \tau <: \tau'}{\Gamma \vdash E : \tau'}\ (\text{VAL SUB}_{<:})$$

# $F^2_{<:}$: a típusrendszer szabályai (3/3)

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau <: \mathit{Top}}\ (\text{SUB } \mathit{Top}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau <: \tau}\ (\text{SUB REFL})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau <: \tau' \qquad \Gamma \vdash \tau' <: \tau''}{\Gamma \vdash \tau <: \tau''}\ (\text{SUB TRANS})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' <: \tau \qquad \Gamma \vdash \tau'' <: \tau'''}{\Gamma \vdash \tau \to \tau'' <: \tau' \to \tau'''}\ (\text{SUB} \to)$$

$\tau' <: \tau$: kontravariancia, $\tau'' <: \tau'''$ : kovariancia

$$\frac{\Gamma \vdash \tau' <: \tau \qquad \Gamma, \alpha <: \tau' \vdash \tau'' <: \tau'''}{\Gamma \vdash \forall \alpha <: \tau . \tau'' <: \forall \alpha <: \tau' . \tau'''}\ (\text{SUB } \forall)$$

# $F^2_{<:}$: típusok ekvivalenciája (1/3)

$$\frac{\Gamma \vdash E : \mathit{Top} \qquad \Gamma \vdash F : \mathit{Top}}{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \mathit{Top}} \ (\text{EQ } \mathit{Top})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E : \tau}{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow E : \tau} \ (\text{EQ REFL}) \qquad \frac{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \tau}{\Gamma \vdash F \Leftrightarrow E : \tau} \ (\text{EQ SYMM})$$

$$\frac{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \tau \qquad \Gamma \vdash F \Leftrightarrow G : \tau}{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow G : \tau} \ (\text{EQ TRANS})$$

Minden *Top* típusú kifejezés ekvivalens: nincsenek műveletek, ezért ezeket nem lehet megkülönböztetni.

# $F^2_{<:}$: típusok ekvivalenciája (2/3)

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash E \Leftrightarrow F : \tau'}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau . E \Leftrightarrow \lambda x : \tau . F : \tau \to \tau'} \text{ (VAL } \lambda \text{ EQ)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow E' : \tau \to \tau' \qquad \Gamma \vdash F \Leftrightarrow F' : \tau}{\Gamma \vdash E\ F \Leftrightarrow E'\ F' : \tau'} \text{ (VAL APPL EQ)}$$

$$\frac{\Gamma, \alpha <: \tau \vdash E \Leftrightarrow F : \tau'}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha <: \tau . E \Leftrightarrow \Lambda \alpha <: \tau . F : \forall \alpha <: \tau . \tau'} \text{ (VAL } \Lambda \text{ EQ)}$$

# $F^2_{<:}$: típusok ekvivalenciája (3/3)

Polimorfikus típusapplikáció:

$$\frac{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \forall\alpha <: \tau.\tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' <: \tau \qquad \Gamma \vdash \tau''' <: \tau \qquad \Gamma \vdash \tau'[\alpha := \tau''] <: \tau^{iv} \qquad \Gamma \vdash \tau'[\alpha := \tau'''] <: \tau^{iv}}{\Gamma \vdash E[\tau''] \Leftrightarrow F[\tau'''] : \tau^{iv}} \;(\text{VAL } [] \text{ EQ})$$

ha viszont csak $E[\tau''] \Leftrightarrow F[\tau'']$ a célunk:

$$\frac{\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \forall\alpha <: \tau.\tau' \qquad \Gamma \vdash \tau'' <: \tau}{\Gamma \vdash E[\tau''] \Leftrightarrow F[\tau''] : \tau'[\alpha := \tau'']} \;(\text{VAL } []_{\leq} \text{ EQ})$$

Az így keletkező típusrendszer az $F^2_{\leq}$

# $F^2_{<:}$: tulajdonságok

**Tétel.** ***Típuskörnyezet gyengítése***

*Ha* $\Gamma \vdash \tau <: \tau'$, *akkor*

$$\begin{array}{lcl} \Gamma', x : \tau', \Gamma'' \vdash wf & \Rightarrow & \Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash wf \\ \Gamma', x : \tau', \Gamma'' \vdash J & \Rightarrow & \Gamma', x : \tau, \Gamma'' \vdash J \end{array}$$

*és*

$$\begin{array}{lcl} \Gamma', \alpha <: \tau', \Gamma'' \vdash wf & \Rightarrow & \Gamma', \alpha <: \tau, \Gamma'' \vdash wf \\ \Gamma', \alpha <: \tau', \Gamma'' \vdash J & \Rightarrow & \Gamma', \alpha <: \tau, \Gamma'' \vdash J \end{array}$$

**Tétel.** ***Típus helyettesítése***

*Ha* $\Gamma \vdash \tau <: \tau'$, *akkor*

$$\Gamma', \alpha <: \tau', \Gamma'' \vdash wf \quad \Rightarrow \quad \Gamma'[\alpha := \tau], \Gamma''[\alpha := \tau] \vdash wf$$

# $F^2_{<:}$: tulajdonságok

**Tétel.** ***Az alárendelés tétele ekvivalens kifejezésekre***

*Ha* $\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \tau$ *és* $\Gamma \vdash \tau <: \tau'$*, akkor* $\Gamma \vdash E \Leftrightarrow F : \tau'$*.*

**Tétel.** ***Absztrakciók egyenlősége***

*Ha* $\Gamma \vdash \tau' <: \tau, \Gamma \vdash \tau'' <: \tau'''$ *és* $\Gamma, x : \tau \vdash E \Leftrightarrow F : \tau''$*, akkor*

$$\Gamma \vdash \lambda x : \tau.E \quad \Leftrightarrow \quad \lambda x : \tau'.F : \tau' \to \tau'''$$

*és ha* $\Gamma \vdash \tau' <: \tau, \Gamma, \alpha <: \tau' \vdash \tau'' <: \tau''', \Gamma, x : \tau \vdash E \Leftrightarrow F : \tau''$*, akkor*

$$\Gamma \vdash \Lambda\alpha <: \tau.E \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda\alpha <: \tau'.F : \forall\alpha <: \tau'.\tau'''$$

# $F^2_{<:}$: tulajdonságok

**Tétel.** ***Ekvivalens kifejezések $\beta$-redukciója***

*Ha* $\Gamma, x : \tau \vdash E \Leftrightarrow E' : \tau'$ *és* $\Gamma \vdash F \Leftrightarrow F' : \tau$, *akkor*

$$\Gamma \vdash (\lambda x : \tau . E)\ F \quad \Leftrightarrow \quad E'\ [x := F'] : \tau'$$

*és ha*

$$\Gamma, x : \tau \vdash E \quad \Leftrightarrow \quad E' : \tau' \text{ és } \Gamma \vdash \tau'' <: \tau$$

*akkor*

$$\Gamma \vdash (\Lambda\alpha <: \tau . E)\ [\tau''] \quad \Leftrightarrow \quad E'\ [\alpha := \tau''] : \tau[\alpha := \tau'']$$

**Tétel.** ***A tárgyredukció tétele***

*Ha* $\Gamma \vdash E : \tau$ *és* $E \twoheadrightarrow F$, *akkor* $\Gamma \vdash F : \tau$.

# Típusok az $F^2_{<:}$ típusrendszerben

# $F^2_{<:}$: A *Bool* típus

Az $F_2$ típusai elérhetőek $F^2_{<:}$ esetén is:

$$\begin{array}{lcl} \mathit{Bool} & \equiv & \forall\alpha.\alpha \to \alpha \to \alpha \\ \texttt{true} & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x:\alpha.\lambda y:\alpha.x \\ \texttt{false} & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x:\alpha.\lambda y:\alpha.y \end{array}$$

A *Top* alkalmazásával azonban az $F_2$ típusainak az $F^2_{<:}$ esetén több elemük van:

$$\begin{array}{lcl} \texttt{true}' & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x:\alpha.\lambda y:\mathit{Top}.x : \forall\alpha.\alpha \to \mathit{Top} \to \alpha \\ \texttt{false}' & \equiv & \Lambda\alpha.\lambda x:\mathit{Top}.\lambda y:\alpha.y : \forall\alpha.\mathit{Top} \to \alpha \to \alpha \end{array}$$

és a *SUB Top* és *VAL SUB*$_{<:}$ szabályok mentén:

$$\begin{array}{lcll} \forall\alpha.\alpha \to \mathit{Top} \to \alpha & <: & \mathit{Bool}, & \texttt{true}' : \mathit{Bool} \\ \forall\alpha.\mathit{Top} \to \alpha \to \alpha & <: & \mathit{Bool}, & \texttt{false}' : \mathit{Bool} \end{array}$$

# $F^2_{<:}$: A *Nat* típus

$$Nat \equiv \forall\alpha.\forall\alpha_s <: \alpha.\forall\alpha_z <: \alpha.(\alpha \to \alpha_s) \to \alpha_z \to \alpha$$

$$\begin{aligned} c_0 &: Nat_z \\ c_i &: Nat_s,\ (i \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0 &\equiv \Lambda\alpha.\Lambda\alpha_s <: \alpha.\Lambda\alpha_z <: \alpha.\lambda f : \alpha \to \alpha_s.\lambda x : \alpha_z.x \\ Nat_z &\equiv \forall\alpha.\forall\alpha_s <: \alpha.\forall\alpha_z <: \alpha.(\alpha \to \alpha_s) \to \alpha_z \to \alpha_z \end{aligned}$$

$$\texttt{succ} : Nat \to Nat_s$$

$$\begin{aligned} c_1 &\equiv \Lambda\alpha.\Lambda\alpha_s <: \alpha.\Lambda\alpha_z <: \alpha.\lambda f : \alpha \to \alpha_s.\lambda x : \alpha_z.f\ x \\ Nat_s &\equiv \forall\alpha.\forall\alpha_s <: \alpha.\forall\alpha_z <: \alpha.(\alpha \to \alpha_s) \to \alpha_z \to \alpha_s \end{aligned}$$

$$(\alpha_z <: \alpha) \Rightarrow Nat_z <: Nat,\ (\alpha_s <: \alpha) \Rightarrow Nat_s <: Nat$$

# $F^2_{<:}$: A *List* típus

$F_2$ esetében:

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{nil} & : & \forall\alpha.List_\alpha \\ \mathtt{nil} & \equiv & \Lambda\alpha.(\Lambda\beta.\lambda c:\alpha\to\beta\to\beta.\lambda n:\beta.n) \\ List & \equiv & \forall\alpha.\forall\beta.(\alpha\to\beta\to\beta)\to\beta\to\beta \end{array}$$

A $\mathtt{nil}_{\tau'}$ és $\mathtt{nil}_{\tau''}$ kifejezések a $List[Top]$ típusra nézve ekvivalensek:

$$\frac{\begin{array}{ccc} \varnothing\vdash\mathtt{nil}\Leftrightarrow\mathtt{nil}:\forall\alpha<:Top.List & \varnothing\vdash\tau'<:Top & \varnothing\vdash\tau''<:Top \\ \varnothing\vdash List[\tau']<:List[Top] & & \Gamma\vdash List[\tau'']<:List[Top] \end{array}}{\mathtt{nil}[\tau']\Leftrightarrow\mathtt{nil}[\tau'']:List[Top]}$$

hasonlóan $List[\tau'']<:List[Top]$ is belátható:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\tau'<:Top \qquad \beta\to\beta<:\beta\to\beta}{Top\to\beta\to\beta<:\tau'\to\beta\to\beta} \qquad \beta\to\beta<:\beta\to\beta}{(\tau'\to\beta\to\beta)\to(\beta\to\beta)<:(Top\to\beta\to\beta)\to(\beta\to\beta)}}{List[\tau']<:List[Top]}$$