METODI DI ALGEBRA LINEARE IN COMBINATORIA E GEOMETRIA

LÁSZLÓ SZABÓ
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "EÖTVÖS LORÁND"
BUDAPEST

Indice

1. Comitati di calcolo della Città dei Pari

Nella Città dei Pari ci sono 32 abitanti. Essi hanno l'abitudine di formare comitati con le seguenti regole:
1. In ogni comitato c'è un numero pari di membri.
2. I membri che sono in comune a due comitati distinti sono in numero pari.
3. Non ci sono due comitati uguali.

Qual'è il massimo numero di comitati nella Città dei Pari?
(Ci può essere anche il comitato vuoto tra i comitati, una sola volta.)
Il prossimo esempio mostra che ce ne sono moltissimi.
Per semplicità supponiamo che i 32 abitanti di questa città siano

formati da 16 coppie sposate e che due coniugi appartengano agli stessi comitati. Allora ogni comitato si può rappresentare come una 16-upla a coefficienti in $\{0,1\}$ (il cosidetto "vettore d'incidenza" avente 1 nella j-esima posizione se e soltanto se la j-esima coppia appartiene al comitato). Il numero di tali vettori è 2^{16}. In questa maniera possiamo formare 2^{16} comitati nella Città dei Pari soddisfacenti alle richieste 1.,2.,3.

Nella Città dei Dispari ci sono anche 32 abitanti, e si formano i comitati con le seguenti modalità:

1. Ogni comitato ha un numero dispari di membri.
2. I membri che sono in comune a due comitati distinti sono in numero pari.

In tal caso, la modifica è drammatica: a differenza della Città dei Pari, qui si possono formare solo 32 comitati.

<u>ESEMPI</u>

per il sistema dei comitati nella Città dei Dispari:

1. Ogni comitato ha solo un membro.
2. Ogni comitato ha 31 membri.
3. Ricordiamo PG(2,5) (geometria proiettiva su $GF(5)\cong\mathbb{Z}_5$).
   Abbiamo l'insieme $GF(5)^3\setminus\{(0,0,0)\}$.
   Introduciamo in esso la relazione di equivalenza:
   $(x_1,x_2,x_3)\sim(x'_1,x'_2,x'_3) \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\lambda x'_1,\lambda x'_2,\lambda x'_3)$ per un certo $\lambda\in GF(5)\setminus\{0\}$.
   Chiamiamo punti le classi di equivalenza di $(GF(5)^3\setminus\{(0,0,0)\})/\sim$.
   Chiamiamo rette le classi di equivalenza di $(GF(5)^3\setminus\{(0,0,0)\})/\sim$.
   (Dunque, rette e punti hanno la stessa rappresentazione.)
   Allora il punto (x_1,x_2,x_3) appartiene alla retta (u_1,u_2,u_3) se e soltanto se $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$. (Condizione di incidenza)
   Quanti punti distinti abbiamo?
   È subito visto che ci sono $(5^3-1)/(5-1)=5^2+5+1=31$ punti, e quindi anche 31 rette.
   Ora se (u_1,u_2,u_3) è una retta, allora ci sono 5+1=6 punti distinti (x_1,x_2,x_3) che soddisfano la condizione d'incidenza con la retta (u_1,u_2,u_3), cioè $x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=0$.

Aggiungiamo a PG(2,5) un punto immaginario Q, e postuliamo che tutte le rette di PG(2,5) passino per Q.

Allora i membri della Città dei Dispari siano i 31 punti di PG(2,5) più il punto Q.

I comitati invece siano tutte le rette di PG(2,5) considerate come passanti anche per Q e PG(2,5) stesso.

<u>TEOREMA</u> (E. R. Berlekamp, 1969):

Nella Città dei Dispari con n abitanti si possono formare al più n comitati.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

Supponiamo che siano $C_1, C_2, \ldots, C_m$ m comitati. Consideriamo i vettori di incidenza $v_i \in \{0,1\}^n$ dei comitati C_i definiti così:

La j-esima coordinata di v_i è 1 se il j-esimo abitante appartiene a C_i e 0 se il j-esimo abitante non appartiene a C_i.

Allora $v_i \cdot v_j^T = |C_i \cap C_j|$.

A causa delle regole della Città dei Dispari risulta

$$v_i \cdot v_j^T = \begin{cases} \text{pari} & \text{se } i \neq j \\ \text{dispari} & \text{se } i = j. \end{cases}$$

In GF(2), ciò si scrive

$$v_i \cdot v_j^T = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Facciamo ora vedere che $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti su GF(2). Una volta provato ciò, ne conseguirà che $m \leq n$; infatti in $GF(2)^n$ il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è n.

Sia $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ una combinazione lineare dei v_i su GF(2).

Moltiplichiamo tutto per v_1^T; $\lambda_1 v_1 \cdot v_1^T = 0$ poichè $v_i \cdot v_1^T = 0$ se $i \neq 1$.

Allo stesso modo, $\lambda_i = 0$ per tutti gli altri i. Dunque, i v_i sono linearmente indipendenti.

<u>2ª DIMOSTRAZIONE</u>:

Abbiamo bisogno un risultato dall'algebra lineare:

Siano A,B matrici su un campo arbitrario (moltiplicabili tra loro).

Allora $\mathrm{rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}$.

Ora vediamo la dimostrazione. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ le righe della matrice mxn M d'incidenza. Mostriamo che le righe di M sono linearmente indipendenti su $GF(2)$, cioè $\mathrm{rang}(M)=m$.

Consideriamo la matrice $m\times m$ $A=MM^T$ (a coefficienti in $GF(2)\cong\mathbb{Z}_2$). Risulta $A=I_m$ perchè

$$a_{ij}=v_i\cdot v_j^T=\begin{cases} 0 & \text{se } i\neq j \\ 1 & \text{se } i=j. \end{cases}$$

Chiaro che $\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(I_m)=m$.

Dunque applicando la disuguaglianza di rang

$m=\mathrm{rang}(A)=\mathrm{rang}(MM^T)\leq\min\{\mathrm{rang}(M),\mathrm{rang}(M^T)\}=\mathrm{rang}(M)\leq m$,

quindi $\mathrm{rang}(M)=m$.

TEOREMA (M. Szegedy, 1988):

Sia $n=2k$. Allora esistono almeno $2^{n(n+2)/8}/(n!)^2$ soluzioni estremali (con n comitati) non isomorfe del problema dei comitati della Città dei Dispari. D'altro canto il numero di soluzioni estremali è al più $2^{n^2}/n!$.

DIMOSTRAZIONE:

Sia $A\in GF(2)^{k\times k}$. Associamo ad A la matrice $n\times n$

$$B=\begin{bmatrix} A+I_k & A \\ A & A+I_k \end{bmatrix}$$

su $GF(2)$.

Se A è simmetrica, cioè $A=A^T$ allora $BB^T=I_n$, quindi B è una matrice di incidenza della Città dei Dispari. Il numero di matrici simmetriche $k\times k$ su $GF(2)$ è

$$2^{\binom{k+1}{2}}=2^{n(n+2)/8}.$$

Permutare le righe di B equivale a ribattezzare i comitati, mentre permutare le colonne equivale a ribattezzare gli abitanti. Allora le soluzioni non isomorfe sono in numero almeno $2^{n(n+2)/8}/(n!)^2$.

Per la limitazione superiore, poi è sufficiente notare che il numero di comitati con n membri è al più

$$\binom{2^n}{n}<2^{n^2}/n!.$$

2. Famiglie di insiemi con intersezione prescritta

<u>TEOREMA</u> (disuguaglianza di R. A. Fischer):

Siano $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sottoinsiemi distinti dell'insieme $\{1,2,\ldots,n\}$. Supponiamo che per ogni $i\neq j$ $|C_i \cap C_j|=\lambda$ per un certo $1\leq\lambda<n$.

Allora $m\leq n$.

<u>DIMOSTRAZIONE</u> (K. N. Majumdar, 1953 - J. R. Isbell, 1959):

Prima supponiamo che esista un insieme C_i tale che $|C_i|=\lambda$ per un certo i. Allora $C_i \subseteq C_j$ per ogni $i\neq j$, inoltre

$C_1\setminus C_i, \ldots, C_{i-1}\setminus C_i, C_{i+1}\setminus C_i, \ldots, C_m\setminus C_i$

sono a due a due disgiunti. Quindi $m\leq 1+n-\lambda\leq n$.

Altrimenti, siano $\gamma_i=|C_i|-\lambda$. Ora $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ sono interi positivi.

Siano le righe della matrice $m\times n$ M i vettori d'incidenza degli insiemi C_i. Allora $A=MM^T=\lambda J_m+C$ ove $C=\mathrm{diag}\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ matrice diagonale. Facciamo ora vedere che $\mathrm{rang}(A)=m$, poichè in tal caso

$m=\mathrm{rang}(A)\leq\min\{\mathrm{rang}(M), \mathrm{rang}(M^T)\}=\mathrm{rang}(M)\leq n$.

Notiamo che λJ_m è una matrice semidefinita positiva e C è definita positiva. Infatti

$x(\lambda J_m)x^T=\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_m)^2$,

$x(C)x^T=\gamma_1 x_1^2+\gamma_2 x_2^2+\ldots+\gamma_m x_m^2$.

Allora anche $A=\lambda J_m+C$ è una matrice definita positiva. Ora $\mathrm{rang}(A)=m$, inoltre c'è una soluzione non banale x_0 dell'equazione lineare $Ax^T=0$. Con questo x_0, $x_0 A x_0^T=0$ contraddizione.

<u>2ª DIMOSTRAZIONE</u>:

Supponiamo che $\gamma_i>0$, altrimenti la dimostrazione è la stessa del primo caso della precedente.

Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i vettori d'incidenza di $C_1, C_2, \ldots, C_m$ rispettivamente. Facciamo ora vedere che $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti. Ovviamente risulta

$$v_i \cdot v_j^T=\begin{cases} \lambda & \text{se } i\neq j \\ \lambda+\gamma_i & \text{se } i=j. \end{cases}$$

Sia $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_m v_m=0$ una combinazione lineare dei vettori v_i. Moltiplichiamo per v_j

$\lambda\beta+\alpha_j\gamma_j=0$ ove $\beta=\sum_{i=1}^m \alpha_i$, cioè $\alpha_j=-\beta\lambda/\gamma_j$.

Se $\beta=0$, allora tutti gli α_j sono 0.

Se $\beta\neq 0$, allora $\beta=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j=-\beta\lambda\sum_{j=1}^{m}1/\gamma_j$ contraddizione, perchè i segni dei due membri sono diversi.

Siano X un insieme di n elementi e $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Sia, poi L un insieme di s interi non negativi. Chiamiamo $\mathcal{F}$ una famiglia L-intersecante se $|A\cap B|\in L$ per ogni coppia di elementi distinti A, B di $\mathcal{F}$.

TEOREMA (P. Frankl - R. M. Wilson, 1981):
Siano L un insieme di s interi non negativi e $\mathcal{F}$ una famiglia L-intersecante di sottoinsiemi di un insieme di n elementi. Allora
$$|\mathcal{F}|\le\binom{n}{s}+\binom{n}{s-1}+\ldots+\binom{n}{0}.$$
DIMOSTRAZIONE (N. Alon - L. Babai, 1988):
Questo risultato è il migliore possibile in termini dei parametri n e s come mostrato dalla famiglia di tutti i sottoinsiemi di cardinalità $\le$s di un insieme di n elementi.
Per semplicità supponiamo che $L=\{l_1,l_2,\ldots,l_s\}$, $X=\{1,2,\ldots,n\}$ e $\mathcal{F}=\{A_1, A_2,\ldots,A_m\}$ ove $A_i\subseteq X$ e $|A_1|\le|A_2|\le\ldots\le|A_m|$.
Consideriamo i vettori d'incidenza $v_i\in\{0,1\}^n$ degli insiemi A_i.
Allora $v_i\cdot v_j^T=|A_i\cap A_j|$.
Ora consideriamo le funzioni polinomiali
$f_i:\{0,1\}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_i(x)=\prod_{l_k<|A_i|}(v_ix^T-l_k)$.
Osserviamo che
$$f_i(v_j)\begin{cases}\neq 0 & \text{se } i=j\\ =0 & \text{se } i>j.\end{cases}$$
Facciamo ora vedere che i polinomi $f_1,f_2,\ldots,f_m$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo la combinazione lineare
$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2+\ldots+\lambda_mf_m=0$.
Prima valutiamo la combinazione nel punto v_1:
$\lambda_1f_1(v_1)+\lambda_2f_2(v_1)+\ldots+\lambda_mf_m(v_1)=\lambda_1f_1(v_1)=0$, quindi $\lambda_1=0$.
In secondo luogo valutiamo la combinazione nel punto v_2:
$\lambda_1f_1(v_2)+\lambda_2f_2(v_2)+\ldots+\lambda_mf_m(v_2)=\lambda_1f_1(v_2)+\lambda_2f_2(v_2)=0$.
Poichè $\lambda_1=0$, quindi $\lambda_1f_1(v_2)=0$. Ora $\lambda_2f_2(v_2)=0$, cioè $\lambda_2=0$.
...
Infine valutiamo la combinazione nel punto v_m:

$\lambda_1 f_1(v_m)+\lambda_2 f_2(v_m)+\ldots+\lambda_m f_m(v_m)=0$.

Poichè $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_{m-1}=0$ quindi $\lambda_m f_m(v_m)=0$, otteniamo anche $\lambda_m=0$.

D'altro canto $x_i^2=x_i$ per ogni $1\le i\le n$, quindi il numero dei polinomi f_i non è maggiore della dimensione dello spazio dei polinomi multilineari di grado $\le s$, tale spazio è generato dai prodotti di un numero $\le s$ di variabili distinti, cioè

$$m\le\sum_{k=0}^{s}\binom{n}{k}.$$

<u>TEOREMA</u> (B. Bollobás, 1965):

Siano $A_1,A_2,\ldots,A_m$ insiemi di cardinalità r e $B_1,B_2,\ldots,B_m$ insiemi di cardinalità s. Supponiamo che

1. $A_i\cap B_i=\emptyset$ per ogni $1\le i\le m$.
2. $A_i\cap B_j\ne\emptyset$ per ogni $1\le i,j\le m$, $i\ne j$.

Allora

$$m\le\binom{r+s}{s}.$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

Per semplicità supponiamo che $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m\cup B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_m=\{1,2,\ldots,n\}$ per un certo n intero positivo.

Associamo a ciascun $v\in\{1,\ldots,n\}$ il vettore $p(v)=(p_0(v),p_1(v),\ldots,p_r(v))\in\mathbb{R}^{r+1}$ in modo tale che l'insieme dei vettori ottenuti sia in posizione generica, cioè $r+1$ di essi siano sempre linearmente indipendenti (cfr. 7).

Ora ad ogni insieme $W\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ associamo un polinomio $f_W(x)$ nelle $r+1$ variabili $(x_0,x_1,\ldots,x_r)$ nel modo seguente

$f_W(x)=\prod_{v\in W}(p_0(v)x_0+p_1(v)x_1+\ldots+p_r(v)x_r)$.

È subito visto che

$$f_W(x)\begin{cases}\ne 0 & \text{se } x \text{ non è ortogonale a nessuno dei } p(v) \text{ per } v\in W\\ =0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Sia $f_i(x)=f_{B_i}(x)$.

Allora $f_i(x)$ è un polinomio omogeneo di grado s in $r+1$ variabili.

I vettori corrispondenti agli elementi di A_j generano un sottospazio di dimensione r; sia a_j un vettore non nullo, ortogonale a questo sottospazio. Poichè i vettori $p(v)$ sono in posizione generica, $a_j\perp p(v)$ se e soltanto se $v\in A_j$. Quindi $f_i(a_j)=0$ se e solo se $A_j\cap B_i\ne\emptyset$, cioè

$$f_i(a_j)\begin{cases}\neq 0 & \text{se } i=j\\ =0 & \text{se } i\neq j.\end{cases}$$

Ora i polinomi f_i sono linearmente indipendenti. Infatti, consideriamo la combinazione lineare

$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\ldots+\lambda_m f_m=0.$

Valutiamo la combinazione nel punto a_j:

$\lambda_1 f_1(a_j)+\lambda_2 f_2(a_j)+\ldots+\lambda_m f_m(a_j)=\lambda_j f_j(a_j)=0$, cioè $\lambda_j=0$ per ogni $1\leq j\leq m$.

Quindi il numero di questi polinomi non è maggiore della dimensione dello spazio dei polinomi omogenei di grado s in r+1 variabili, cioè

$$m\leq\binom{(r+1)+s-1}{s}=\binom{r+s}{s}.$$

3. La colorazione di un grafo

Un grafo G è costituito da una coppia ordinata (V,E) dove V è un insieme finito di elementi chiamati vertici e E è un insieme finito di spigoli. Uno spigolo è una coppia non ordinata di due vertici.
Un grafo si dice completo se due qualsiasi vertici sono collegati da uno spigolo.

TEOREMA (P. Erdös - Gy. Szekeres, 1935):
Comunque coloriamo gli spigoli di un grafo completo su $\binom{s+t-2}{s-1}$ vertici con i colori rosso e blu, esisterà un sottografo completo su s vertici con tutti gli spigoli di colore rosso, oppure esisterà un sottografo completo su t vertici con tutti gli spigoli di colore blu.

TEOREMA (Zs. Nagy, 1972):
Sia $v=\binom{t}{3}$.
Allora si possono colorare gli spigoli di un grafo G completo su v vertici con due colori in modo tale che G non contenga un grafo completo monocromatico su t vertici.
DIMOSTRAZIONE:
Associamo ai vertici di G i sottoinsiemi di cardinalità 3 di $\{1,\ldots,t\}$.
Coloriamo uno spigolo di rosso se le due terne che rappresentano i suoi

vertici hanno un unico elemento comune, e di blu altrimenti.
Supponiamo di avere un grafo completo monocromatico su m vertici.
Se questo grafo è rosso, allora applicando la disuguaglianza di Fischer risulta $m \le t$.
Se questo grafo è blu, allora applicando il teorema della Città dei Dispari risulta $m \le t$ di nuovo.

4. Quanti grafi bipartiti completi si devono mettere assieme per ottenere un grafo completo?

Un grafo $H=(V,E)$ dicesi bipartito se esiste una partizione dei vertici in due insiemi disgiunti X e Y tale che i vertici in ciascuno dei due insiemi non sono collegati fra loro da spigoli.
Se $|X|=n$ e $|Y|=m$ allora il massimo numero di spigoli di H è nm. Se il numero di spigoli di H è massimo, cioè nm allora H dicesi grafo bipartito completo.

TEOREMA (R. L. Graham - H. O. Pollak, 1972):
Sia l'insieme degli spigoli di un grafo completo su n vertici l'unione disgiunta degli insiemi degli spigoli di m grafi bipartiti completi.
Allora $m \ge n-1$.
DIMOSTRAZIONE:
Sia $\{1,2,\dots,n\}$ l'insieme dei vertici del grafo completo. Supponiamo che questo grafo sia l'unione disgiunta dei grafi bipartiti completi $B_1, B_2, \dots, B_m$. Sia $V(B_k)=(X_k, Y_k)$ ove X_k e Y_k sono le due parti dell'insieme dei vertici del grafo bipartito B_k. Ovviamente X_k e Y_k sono sottoinsiemi disgiunti di $\{1,2,\dots,n\}$.
Consideriamo le matrici nxn $A_1, A_2, \dots, A_m$ associate ai grafi $B_1, B_2, \dots, B_m$ ove

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in X_k \text{ e } j \in Y_k \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Chiaro che $\operatorname{rang}(A_k)=1$ per ogni $k=1,2,\dots,m$.
Sia $S=\sum_{k=1}^{m} A_k$.
Allora per ogni $i \ne j$ $s_{ij}=1$ e $s_{ji}=0$ oppure $s_{ij}=0$ e $s_{ji}=1$.
Qundi $S+S^T=J_n-I_n$.

Facciamo ora vedere che rang(S)$\geq$n-1. Se per assurdo fosse rang(S)$\leq$n-2, allora esisterebbe una soluzione non banale $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ del sistema di equazioni lineari

$Sx^T=0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i=0$.

Poichè $J_n x^T=0$, segue $S^T x^T=-x^T$.

Allora $-\|x\|^2=xS^Tx^T=(xS^Tx^T)^T=xSx^T=0$ contraddizione.

D'altro canto, dalla subadditività della funzione di rango

$n-1\leq \text{rang}(S)\leq \text{rang}(A_1)+\text{rang}(A_2)+\dots+\text{rang}(A_m)=m$.

Notiamo che n-1 grafi bipartiti completi sono sufficienti. Infatti siano $X_i=\{i\}$ e $Y_i=\{i+1,i+2,\dots,n\}$ $(i=1,2,\dots,n-1)$.

5. La bellezza è rara

Un cammino C in un grafo G è una sequenza di spigoli $(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n)$ con $v_i\neq v_j$ per $0\leq i,j\leq n$, $i\neq j$. Diremo che C connette il vertice iniziale v_0 con il vertice finale v_n e passa attraverso i vertici $v_1,\dots,v_{n-1}$.

Un ciclo è un cammino chiuso, cioè un cammino in cui il vertice iniziale e quello finale coincidono. Un ciclo si dice hamiltoniano se passa attraverso ogni vertice del grafo G esattamente una volta.

Il grado di un vertice v è il numero di spigoli che incidono v. Denoteremo con deg(v) il grado di un vertice v.

Un grafo G è regolare se ogni vertice ha lo stesso grado.

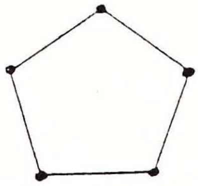
Cinque è un numero magico, così consideriamo grafi regolari in cui la lunghezza del ciclo minimo è cinque. Qual'è il minimo numero possibile di vertici che un tale grafo può avere se il grado di ciascun vertice è r?

Prendiamo un vertice u. Esso ha r vertici vicini. Ciascuno di questi ha altri r-1 vertici vicini. Così fino ad ora ci sono $1+r+r(r-1)=r^2+1$ vertici. Devono essere tutti distinti perchè altrimenti ci sarebbe un ciclo di lunghezza ≤ 4.

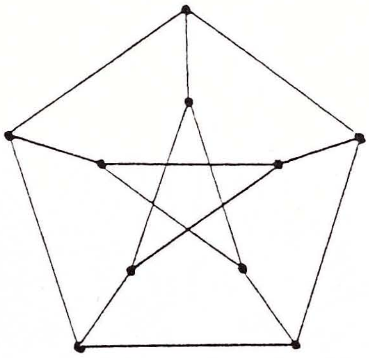
È naturale chiedere: Abbiamo bisogno di altri vertici?

ESEMPI:

1. $r=2$, $r^2+1=5$.



2. $r=3$, $r^2+1=10$.



Grafo di Petersen.

3. $r=7$, $r^2+1=50$.

   Situazione complicata.

Non conosciamo altri esempi!

TEOREMA (A. J. Hoffman - R. R. Singleton, 1960):

Sia G un grafo r-regolare con r^2+1 vertici. Supponiamo che la lunghezza del ciclo minimo di G sia cinque. Allora $r \in \{2,3,7,57\}$.

DIMOSTRAZIONE:

Siano u, v vertici distinti di G. Prima calcoliamo il numero di vicini comuni di u e v.

Se u e v sono adiacenti questo numero è 0.

Se u e v non sono adiacenti, allora dal fatto che abbiamo provato che G deve avere almeno r^2+1 vertici, constatiamo anche che u e v devono avere precisamente un vertice vicino in comune.

Ora sia $n=r^2+1$ e consideriamo la matrice nxn A di adiacenza di G;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se i e j sono adiacenti} \\ 0 & \text{se i e j non sono adiacenti.} \end{cases}$$

È subito visto che $A=A^T$ e $\mathrm{diag}(A)=(0,0,\ldots,0)$.

Consideriamo la matrice $B=A^2$. Allora b_{ij} è uguale al numero di vicini comuni ai vertici i,j. Inoltre $b_{ii}=\deg(i)$.

Sia $\bar{A}$ la matrice di adiacenza del grafo complementare di G (il grafo complementare $G'=(V',E')$ di $G=(V,E)$ è così definito: $V'=V$ e $E'=\{(u,v): u,v\in V, (u,v)\notin E\}$).

Abbiamo $J_n=I_n+A+\bar{A}$.

Il numero di vicini comuni di due vertici è 0 se sono adiacenti e 1 altrimenti, quindi $A^2=rI_n+\bar{A}$.

Allora $A^2+A-(r-1)I_n=J_n$.

La matrice A è simmetrica, quindi dall'algebra lineare sappiamo che esiste una base ortogonale formata da autovettori di A.

Sia $f=(1,1,...,1)$.

Il grafo G è r-regolare, quindi $Af^T=rf^T$ cioè f è un autovettore con autovalore r. Avendo fissato f, noi possiamo ora considerare i vettori e ortogonali a f, cioè $fe^T=0$. Allora sarà anche $J_ne^T=0$.

Sia e un autovettore, cioè $Ae^T=\lambda e^T$ per un certo $\lambda\in\mathbb{R}$. Allora

$A^2e^T+Ae^T-(r-1)I_ne^T=0$.

$\lambda^2e^T+\lambda e^T-(r-1)e^T=0$.

$(\lambda^2+\lambda-(r-1))e^T=0$.

$\lambda^2+\lambda-(r-1)=0$.

$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{4r-3})$.

Siano m_1 e m_2 le molteplicità di λ_1 e λ_2 rispettivamente. La somma delle molteplicità è n, quindi non dimenticando l'autovettore f, si ha

$1+m_1+m_2=n=r^2+1$.

D'altro canto la somma degli autovalori è uguale alla traccia di A cioè

$r+m_1\lambda_1+m_2\lambda_2=0$.

Quindi, sostituendo $2r-(m_1+m_2)+(m_1-m_2)s=0$ ove $s=\sqrt{4r-3}$.

$2r-r^2+(m_1-m_2)s=0$.

$4r-3$ è intero positivo, quindi s è intero positivo oppure s è irrazionale.

Se s è irrazionale, allora $m_1-m_2=0$ e $2r-r^2=0$, quindi $r=2$ perchè $r\neq0$.

Altrimenti s è intero positivo e $r=(s^2+3)/4$. Ora

$s^4-2s^2-16(m_1-m_2)s-15=0$.

Se s è una radice di questo polinomio, allora è subito visto che $s|15$.

Quindi $s=1,3,5,15$.

Allora si ha $r=(s^2+3)/4=1,3,7,57$.

Poichè $r\geq2$, i possibili valori per r sono 2,3,7,57.

6. Insieme di punti in $\mathbb{R}^n$ con due sole distanze

Siano $a_1, a_2, \dots, a_m$ punti distinti dello spazio euclideo di dimensione n. Se le distanze di una qualsiasi coppia degli a_i sono tutte uguali, allora chiaramente $m \le n+1$, essendo il caso estremo l'insieme di vertici di un simplesso regolare.

Assumiamo ora che le distanze a coppia tra gli a_i prendano solo due valori. Un tale insieme si chiama un insieme a due distanze.

Qual'è il massimo numero di punti in un insieme a due distanze in $\mathbb{R}^n$?

Denotiamo con m(n) questo massimo.

<u>TEOREMA</u> (D. G. Larman - C. A. Rogers - J. J. Seidel, 1977):

$n(n+1)/2 \le m(n) \le (n+1)(n+4)/2$.

(Notiamo che queste due limitazioni sono asintoticamente uguali ($n \to \infty$).)

<u>DIMOSTRAZIONE</u>:

Siano δ_1 e δ_2 le due distanze distinte.

Usando la notazione

$\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{1/2}$

per la norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$, la distanza tra due punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ è $\|x-y\|$.

È naturale considerare il polinomio

$F(x,y) = (\|x-y\|^2 - \delta_1^2)(\|x-y\|^2 - \delta_2^2)$

in 2n variabili reali. Risulta

$$F(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \ne j \\ \delta_1^2 \delta_2^2 \ne 0 & \text{se } i \ne j. \end{cases}$$

Consideriamo ora i polinomi $f_i(x) = F(x, a_i)$ di n variabili $x \in \mathbb{R}^n$.

Prima facciamo vedere che i polinomi $f_1, \dots, f_m$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Sia

$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_m f_m = 0$ una combinazione lineare dei polinomi f_i su $\mathbb{R}$.

Valutiamo la combinazione nel punto a_j:

$\lambda_1 f_1(a_j) + \lambda_2 f_2(a_j) + \dots + \lambda_m f_m(a_j) = \lambda_j f_j(a_j) = 0$, cioè $\lambda_j = 0$ per ogni $1 \le j \le m$.

D'altro canto ogni polinomio f_i appartiene al sottospazio vettoriale generato dai polinomi

$(\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^2$, $(\sum_{k=1}^{n} x_k^2) x_j$, $x_i x_j$, x_i , 1 $(1 \le i, j \le n)$.

Il numero di questi polinomi è

$1 + n + n(n+1)/2 + n + 1 = (n+1)(n+4)/2$,

quindi il numero di polinomi $f_1,\dots,f_m$ è al più $(n+1)(n+4)/2$.
Ora vediamo la dimostrazione della limitazione inferiore.
Consideriamo i vettori d'incidenza di tutti i 2-sottoinsiemi di un insieme di $n+1$ elementi. Essi formano un insieme a due distanze di cardinalità $\binom{n+1}{2}=n(n+1)/2$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. (Le due distanze sono $\sqrt{2}$ e 2.)
Ora questo insieme è sull'iperpiano definito dall'equazione $\sum_{i=1}^{n+1}x_i=2$ e perciò può essere riguardato come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

La sfera unitaria di dimensione $n-1$ è definità come l'insieme $S^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \|x\|=1\}$.
Un insieme a due distanze sferico è un sottoinsieme a due distanze di S^{n-1}. Denotiamo con $m_s(n)$ il massimo numero di punti di un tale insieme.

<u>TEOREMA</u> (P. Delsarte - J. M. Goethals - J. J. Seidel, 1977):
$n(n+1)/2\le m_s(n)\le n(n+3)/2$.
<u>DIMOSTRAZIONE</u>:
Consideriamo ancora i polinomi $f_i:S^{n-1}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f_i(x)=F(x,a_i)$.
Questi polinomi rimarranno linearmente indipendenti. Ora
$\sum_{k=1}^{n}x_k^2=1$ e $x_n^2=1-\sum_{k=1}^{n-1}x_k^2$,
quindi ogni polinomio f_i appartiene al sottospazio vettoriale generato dai polinomi
x_ix_j $(1\le i<j\le n)$, x_i^2 $(1\le i\le n-1)$, x_i $(1\le i\le n)$, 1.
Il numero di questi polinomi è
$n(n-1)/2+(n-1)+n+1=n(n+3)/2$.
Ora vediamo la limitazione inferiore.
Chiaramente non importa il raggio della sfera. Procediamo come nel teorema precedente notando che l'intersezione di una sfera con un iperpiano è una sfera di dimensione più bassa.

<u>COROLLARIO</u>:
Siano $A_1,A_2,\dots,A_m$ sottoinsiemi distinti di $\{1,2,\dots,n\}$. Assumiamo che le loro differenze simmetriche a coppie $A_i\Delta A_j=(A_i\setminus A_j)\cup(A_j\setminus A_i)$ abbiano soltanto due possibili distinti valori per la cardinalità.
Allora $m\le n(n+3)/2$.

DIMOSTRAZIONE:

Rappresentiamo ogni insieme A_i per mezzo del suo $(-1,1)$ vettore d'incidenza v_i (mettere al posto degli zeri dei -1 nella definizione usuale di vettori d'incidenza).

Tutti questi vettori appartengono ora alla sfera di raggio $\sqrt{n}$ in $\mathbb{R}^n$.

D'altro canto $4|A_i \Delta A_j| = \|v_i - v_j\|^2$, quindi $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ è un insieme a due distanze sferico, cioè

$m \le n(n+3)/2$.

PROPOSIZIONE:

$m \le 1 + n(n+1)/2$.

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo ancora i polinomi $f_i : \{-1,1\}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Questi polinomi di nuovo sono linearmente indipendenti e appartengono al sottospazio vettoriale generato dai polinomi

$x_i x_j$ $(1 \le i < j \le n)$, x_i $(1 \le i \le n)$, 1

perchè ora $x_i^2 = 1$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$.

Il numero di questi polinomi è

$n(n-1)/2 + n + 1 = 1 + n(n+1)/2$,

quindi $m \le 1 + n(n+1)/2$.

7. Punti in posizione generica. La curva dei momenti

Sia W uno spazio vettoriale di dimensione n. Si dice che $S \subseteq W$ è in posizione generica se, comunque presi n elementi di S, questi risultano linearmente indipendenti.

Sia F un campo arbitrario. Allora l'insieme

$M_n = \{m_n(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}) : \alpha \in F\}$

si dice la curva dei momenti.

LEMMA:

I punti della curva dei momenti sono in posizione generica.

DIMOSTRAZIONE:

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ a due a due distinti. Ora consideriamo il determinante

$\det(m_n(\alpha_1)^T, m_n(\alpha_2)^T, \ldots, m_n(\alpha_n)^T)$.

Questo determinante è un determinante di Vandermonde, il cui valore è $\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)\neq 0$.

Quindi le colonne sono linearmente indipendenti.

TEOREMA:

Siano $d\ge 1$, $0\le k\le d/2$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ numeri distinti. Allora esiste un iperpiano $P\subseteq\mathbb{R}^{d+1}$ tale che tutti i punti della curva dei momenti $M_{d+1}\subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ sono nello stesso semispazio chiuso delimitato da P e inoltre soltanto i punti $m_{d+1}(\alpha_1), \ldots, m_{d+1}(\alpha_k)$ appartengono a P.

DIMOSTRAZIONE:

L'iperpiano P sarà definito dall'equazione lineare omogenea $cx^T=0$ per un certo $c\in\mathbb{R}^{d+1}\setminus\{0\}$. Vogliamo scegliere il vettore c in modo tale che valgano le relazioni

1. $cm(\xi)^T>0$ se $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$,
2. $cm(\xi)^T=0$ se $\xi\in\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$.

Consideriamo il polinomio

$f(\xi)=\prod_{i=1}^{k}(\xi-\alpha_i)$.

Siano γ_i i coefficienti del polinomio $f^2(\xi)$, cioè

$f^2(\xi)=\gamma_0+\gamma_1\xi+\ldots+\gamma_d\xi^d$ $(2k\le d)$.

Posto $c=(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_d)$ abbiamo $cm(\xi)^T=f^2(\xi)$ per ogni $\xi\in\mathbb{R}$ e quindi 1. e 2. seguono banalmente.

COROLLARIO:

Siano $1\le d\le n-1$ e $0\le k\le d/2$. Allora esiste una matrice $A\in\mathbb{R}^{n\times(d+1)}$ con la proprietà seguente.

Le righe di A sono in posizione generica (cioè comunque prese d+1 righe di A queste sono linearmente indipendenti) e inoltre per ogni $I\subseteq\{1, \ldots, n\}$ con $|I|=k$ esiste un vettore c appartenente a $\mathbb{R}^{d+1}$ tale che $cA^T=(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ ove $\beta_i=0$ se $i\in I$ e $\beta_i>0$ se $i\notin I$.

DIMOSTRAZIONE:

Siano le righe di A $m_{d+1}(\alpha_1), \ldots, m_{d+1}(\alpha_n)$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ numeri reali distinti, e sia c il vettore normale dell'iperpiano corrispondente all'insieme $\{m_{d+1}(\alpha_i)\colon i\in I\}$ secondo il teorema precedente.

8. Distribuzione di punti sulla sfera

L'insieme $S^r=\{x\in\mathbb{R}^{r+1}:\ \|x\|=1\}$ si dice una r-sfera. Possiamo definire una semisfera aperta di S^r come l'insieme $\{x\in S^r:\ ax^T>0\}$ per un certo $a\in\mathbb{R}^{r+1}\setminus\{0\}$.

<u>TEOREMA</u> (D. Gale, 1956):
Per ogni $m,r\geq 1$ possiamo distribuire $2m+r$ punti sulla sfera S^r in modo tale che ogni semisfera aperta ne contenga almeno m.
<u>DIMOSTRAZIONE</u>:
Se m=1 allora consideriamo i vertici di un simplesso regolare di dimensione r+1 inscritto in S^r.
Ora supponiamo che $m\geq 2$.
Per semplicità siano $n=2m+r$ e $d=2m-2$.
Consideriamo la matrice $n\times(d+1)$ A ottenuta dal corollario precedente. Allora il rango per colonne di A è massimo.
Sia U il sottospazio generato dalle colonne di A.
Sia B una matrice $n\times(n-d-1)$ le cui colonne formino una base per lo spazio ortogonale $U^\perp$. Siano $v_1,v_2,\dots,v_n$ i vettori riga di B. Ora $n-d-1=r+1$, cioè ciascun vettore v_i ha r+1 componenti.
Poichè il rango per colonne di B è massimo, risulta $Bx^T\neq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}^{r+1}\setminus\{0\}$. Dimostriamo che ciascun vettore Bx^T $(x\in\mathbb{R}^{r+1}\setminus\{0\})$ ha almeno m componenti positive. Quindi i vettori $v_1/\|v_1\|,v_2/\|v_2\|,\dots,v_n/\|v_n\|$ sodisfano l'enunciato del teorema.
Supponiamo per assurdo che $Bx^T=z^T=(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n)^T$ abbia al più m-1 coefficienti positivi. Sia $I\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ l'insieme degli indici corrispondenti alle posizioni di questi coefficienti. Allora $k:=|I|\leq m-1=d/2$ e inoltre

1. $\zeta_i>0$ se $i\in I$,
2. $\zeta_i\leq 0$ se $i\notin I$.

Sia $c\in\mathbb{R}^{d+1}$ il vettore costruito come nel corollario precedente a partire da I. Ora sia $b=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)=cA^T$. Allora

1. $\beta_i=0$ se $i\in I$,
2. $\beta_i>0$ se $i\notin I$.

Poichè le colonne di A sono ortogonali alle colonne di B risulta $A^TB=0$. Pertanto $bz^T=cA^TBx^T=0$.

D'altro canto $bz^T=\sum_{i\in I}\beta_i\zeta_i+\sum_{i\notin I}\beta_i\zeta_i$.
Tutti gli addendi della prima somma sono zero poichè $\beta_i=0$; nella seconda ciascun addendo è il prodotto di $\beta_i>0$ per $\zeta_i\le0$, quindi ne segue necessariamente $\zeta_i=0$ per $i\notin I$.
$A^Tz^T=A^TBx^T=0$, cioè la combinazione lineare delle k righe di A con coefficienti ζ_i $(i\in I)$ è zero. Ma le righe di A sono in posizione generica e $k\le m-1=d/2<d+1$, quindi $z=0$, contraddizione.

9. Convessità

Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Una combinazione affine dei vettori $v_1,v_2,\dots,v_m\in W$ è una combinazione lineare $\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i$ $(\lambda_i\in\mathbb{R})$ in cui $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$.
Sia $\mathrm{aff}\{v_1,v_2,\dots,v_m\}=\{\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i:\ \lambda_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^m\lambda_i=1\}$.
I vettori $v_1,v_2,\dots,v_m$ si dicono affinemente indipendenti se per ogni scelta di scalari $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i=0$ e $\sum_{i=1}^m\lambda_i=0$ risulta necessariamente $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=0$.
È subito visto che

1. I vettori $v_1,v_2,\dots,v_m\in W$ sono linearmente indipendenti se e solo se i vettori $0,v_1,v_2,\dots,v_m$ sono affinemente indipendenti.
2. I vettori $v_1,v_2,\dots,v_m\in W$ sono affinemente indipendenti se e solo se i vettori $v_2-v_1,\dots,v_m-v_1\in W$ sono linearmente indipendenti.

Un sistema di riferimento affine di un sottospazio affine U è un insieme affinemente indipendente S tale che $\mathrm{aff}(S)=U$.
Allora ogni sistema di riferimento affine del sottospazio affine U è costituita da $1+\dim(U)$ elementi.

Una combinazione convessa dei vettori $v_1,v_2,\dots,v_m\in W$ è una combinazione lineare $\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i$ $(\lambda_i\in\mathbb{R})$ in cui $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ e $\lambda_i\ge0$ per ogni $i=1,2,\dots,m$.
Se S è un sottoinsieme di W si dice chiusura convessa di S l'intersezione di tutti i sottoinsiemi convessi di W contenenti S.
Sia $\mathrm{conv}\{v_1,v_2,\dots,v_m\}=\{\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i:\ \lambda_i\in\mathbb{R}_0^+$ e $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1\}$.
Allora $\mathrm{conv}\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ è la chiusura convessa di $\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$.

TEOREMA (J. Radon, 1921):
Sia S un insieme di $m \geq n+2$ punti di $\mathbb{R}^n$. Allora S ammette due sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 le cui chiusure convesse hanno intersezione non vuota.

DIMOSTRAZIONE:
Poichè $|S|>n+1$ l'insieme S è affinemente dipendente. Ciò significa che esiste una relazione non banale tra gli elementi di S in cui la somma dei coefficienti sia zero. Definiamo S_1 e S_2 come i sottoinsiemi costituiti rispettivamente da quegli elementi che nella combinazione lineare hanno coefficiente positivo e negativo. Allora
$\sum_{u \in S_1} \lambda_u u = \sum_{v \in S_2} \mu_v v$ ove $\sum_{u \in S_1} \lambda_u = \sum_{v \in S_2} \mu_v$, $\lambda_u, \mu_v > 0$ e $S_1, S_2 \neq \emptyset$.
Pertanto dividendo entrambi i membri dell'equazione per la somma dei rispettivi coefficienti otteniamo un punto appartenente a $\mathrm{conv}(S_1) \cap \mathrm{conv}(S_2)$.

TEOREMA (E. Helly, 1923):
Se $C_1, C_2, \ldots, C_m \subseteq \mathbb{R}^n$ sono insiemi convessi tali che $n+1$ qualunque di essi hanno intersezione non vuota, allora l'intersezione di tutti questi insiemi è non vuota.

DIMOSTRAZIONE:
Supponiamo in primo luogo $m=n+2$.
Sia a_i un punto di $\cap_{j \neq i} C_j$ $(i=1,\ldots,m)$ e sia $S=\{a_1,\ldots,a_m\}$.
Ora S ha due sottoinsiemi disgiunti S_1 e S_2 le cui chiusure convesse hanno intersezione non vuota, sia $w \in \mathrm{conv}(S_1) \cap \mathrm{conv}(S_2)$.
Dico che w appartiene a ciascun insieme C_i.
Infatti, selezioniamo uno degli elementi i; l'elemento a_i appartiene ad al più uno degli insiemi S_1, S_2.
Supponiamo che, per esempio, $a_i \notin S_1$. Ora $S_1 \subseteq C_i$ poichè $a_j \in C_i$ per ogni $i \neq j$ quindi $\mathrm{conv}(S_1) \subseteq C_i$ e $w \in C_i$.
Il caso generale segue ora per induzione su m.
Per $m \leq n+1$ non c'è nulla da dimostrare.
Ora assumiamo che $m \geq n+3$. Per il caso particolare appena dimostrato, $n+2$ qualunque degli insiemi C_i hanno intersezione non vuota. Ne segue che comunque presi $n+1$ degli insiemi $C_1,\ldots,C_{m-2}, C_{m-1} \cap C_m$ essi hanno intersezione non vuota. Ma allora per l'ipotesi induttiva l'intersezione di tutti questi insiemi è non vuota.

Desidero ringraziare Arrigo Bonisoli e Vincenzo Nardozza per le utili discussioni durante la preparazione del materiale.

Bibliografia

Alon, N. and Babai, L.: A nonuniform version of the Frankl-Wilson inequality, in press.

Berlekamp, E.R.: On subsets with intersections of even cardinality, *Canad. Math. Bull.* 32 (1969), 363-366.

Bollobás, B.: On generalized graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 16 (1965), 447-452.

Delsarte, P. and Goethals, J.M. and Seidel, J.J.: Spherical codes and designs, *Geometriae Dedicata* 6 (1977), 363-388.

Erdös, P. and Szekeres, Gy.: A combinatorial problem in geometry, *Compositio Math.* 2 (1935), 464-470.

Gale, D.: Neighboring vertices on a convex polyhedron, in: *Linear inequalities and related systems* (ed. H.W. Kuhn and A.W. Tucker), Princeton University Press, Princeton (1956), 255-263.

Frankl, P. and Wilson, R.M.: Intersection theorems with geometric consequences, *Combinatorica* 1 (1981), 357-368.

Graham, R.L. and Pollak, H.O.: On embedding graphs in squashed cubes, in: *Graph Theory and Appl., Proc. Conf. Western Mich. Univ.*, Kalamazoo, Springer Lecture Notes in Math. 303 (1972), 99-110.

Helly, E.: Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, *Jahrb. Deut. Math. Verein* 32 (1923), 175-176.

Hoffman, A.J. and Singleton, R.R.: On Moore graphs with diameters 2 and 3, *IBM J. Res. Devel.* 4 (1960), 497-504.

Isbell, J.R.: An inequality for incidence matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959), 216-218.

Larman, D.G. and Rogers, C.A. and Seidel, J.J.: On two-distance sets in Euclidean space, *Bull. London Math. Soc.* 9 (1977), 261-267.

Majumdar, K.N.: On some theorems in combinatorics relating to incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.* 24 (1953), 377-389.

Nagy, Zs.: A certain constructive estimate of Ramsey number (Hungarian), *Matematikai Lapok* 23 (1972), 301-302.

Radon, J.: Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt erhalten, *Math. Ann.* 83 (1921), 113-115.

Szegedy, M.: Two remarks on set intersections, in press.