

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

SZABÓ LÁSZLÓ

Diszkrét geometriai problémák

Habilitációs dolgozat

Budapest, 2016

Szabó László
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Informatikai Kar,
Algoritmusok és Alkalmazásaik Tanszék,
1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C.
szabolaszlo@inf.elte.hu

Tartalomjegyzék

Bevezetés	2
1. Erdős-Szekeres probléma	4
2. Konvex síkidomok blokkolása	8
3. Konvex síkidomok felhői	11
4. Maximális kígyók	15
5. k -szomszédos véges gömbelhelyezések	19
6. Minkowski elrendezések	22
7. Tammes probléma	26
8. 12-szomszédos gömbelhelyezések	29
Összefoglalás	35
Irodalomjegyzék	37

Bevezetés

A diszkrét geometria, amely a XIX. század végén még a számelmélet, illetve a krisztallográfia egyik jelentéktelen fejezete volt, a XX. században óriási fejlődésen ment keresztül, és ma már a matematika, a számítástudomány és a robotika alapvető részét képezi. E fejlődésben kiemelkedő szerepet játszottak Fejes Tóth László és Erdős Pál, akik azon kívül, hogy számos fontos eredménnyel gazdagították a tudományterületet, létrehoztak egy diszkrét geometriai iskolát is.

A dolgozatban ehhez a diszkrét geometriai iskolához kötődő problémákból mutatunk be egy csokorra valót.

Az első fejezetben azt vizsgáljuk, hogy általános helyzetű pontok egy n elemű halmazának 4 elemű részhalmazai között hány olyan található, amelyek diszjunkt üres konvex négyszögek csúcshalmazai.

A második fejezetben konvex síkidomok blokkolási számával foglalkozunk. Legyen K konvex síkidom, és legyenek K_1, K_2, \dots, K_n olyan, a határpontjaiktól eltekintve diszjunkt, egybevágó példányai K -nak, amelyek mindegyike (kívülről) érinti K -t. Azt mondjuk, hogy a K_1, K_2, \dots, K_n síkidomok blokkolják K -t, ha a K síkidom bármely olyan egybevágó példánya, amely érinti K -t, belemetsz a K_1, K_2, \dots, K_n síkidomok legalább egyikének belsejébe. Egy K síkidom blokkolási száma alatt azt a legkisebb n egész számot értjük, amelyre teljesül, hogy létezik a K síkidom n egybevágó példányából álló, K -t blokkoló rendszer.

A harmadik fejezetben konvex síkidomokból álló sűrű felhőket vizsgálunk. Legyenek K, K_1, \dots, K_n a határpontjaiktól eltekintve páronként diszjunkt, egybevágó konvex síkidomok. Azt mondjuk, hogy a K_1, \dots, K_n síkidomok egy sűrű felhőt alkotnak K körül, ha a K síkidom bármely pontjából kiinduló bármely félegyenes metszi a K_1, \dots, K_n síkidomok legalább egyikének a belsejét.

A negyedik fejezetben egy Heiko Harborth által felvetett problémát oldunk meg. Tekintsük egy d -dimenziós egységkocka eltolt példányainak egy olyan $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ véges sorozatát, amelyben $C_i \cap C_{i+1}$ közös $(d-1)$ -dimenziós lapja C_i -nek és C_{i+1} -nek minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén, továbbá

$\dim(C_i \cap C_j) \leq \max\{-1, d + i - j\}$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén (megállapodás szerint $\dim(C_i \cap C_j) = -1$ pontosan akkor, ha $C_i \cap C_j = \emptyset$). Egy ilyen sorozatot teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyónak nevezünk. Egy teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyót maximálisnak mondunk, ha nem valódi részhalmaza semelyik más, teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyónak. Belátjuk, hogy egy teljes lapok mentén csatlakozó d -dimenziós egységkockákból álló maximális kígyó minimális elemszáma $8d - 1$ tetszőleges $d \geq 3$ esetén.

Az ötödik fejezetben azt vizsgáljuk, hogy mely (n, k) értékpárookra létezik n nem feltétlenül egybevágó gömbből álló, (topológikusan) összefüggő, k -szomszédos elhelyezés a 3-dimenziós térben, vagyis olyan, amelyben minden gömböt pontosan k másik érint.

A hatodik fejezetben körök és gömbök μ -rendű Minkowski elrendezésének sűrűségére adunk korlátokat. Legyen $0 < \mu < 1$, és tekintsük nem feltétlenül egybevágó gömbök egy \mathcal{S} elrendezését a d -dimenziós térben. Az \mathcal{S} elrendezés minden egyes S gömbjéhez rendeljük hozzá azt a vele koncentrikus gömböt, amelynek sugara $\mu r(S)$, ahol $r(S)$ jelöli az S gömb sugarát. Ezt a $\mu r(S)$ sugarú gömböt az S gömb μ -magjának nevezzük. Egy \mathcal{S} elrendezést μ -rendű Minkowski elrendezésnek mondunk, ha \mathcal{S} egyik gömbje se lóg bele más \mathcal{S} -beli gömb μ -magjának belsejébe.

A hetedik fejezetben azt vizsgáljuk, hogyan kell egy 3-dimenziós egység-gömb felszínén $13 \leq k \leq 17$ pontot úgy elhelyezni, hogy a köztük fellépő minimális távolság a lehető legnagyobb legyen.

A nyolcadik fejezetben igazoljuk Fejes Tóth László azon sejtését, hogy egység-gömbök bármely 12-szomszédos elhelyezése a 3-dimenziós térben párhuzamos hexagonális rétegekből áll, vagyis olyanokból, amelyekben a gömbök középpontjai egy síkban vannak, és minden gömböt hat másik érint.

Minden fejezet elején röviden áttekintjük a kapcsolódó legfontosabb fogalmakat és eredményeket, a megfelelő irodalmi hivatkozásokkal (teljesebb kép kapható Fejes Tóth Gábor és Włodzimierz Kuperberg [31] összefoglaló cikkéből), majd ismertetjük a saját eredményeinket, itt-ott részleteket felvillantva a bizonyításokból is. Az elmondottakat számos ábrával illusztráljuk.

1. fejezet

Erdős-Szekeres probléma

Azt mondjuk hogy egy síkbeli ponthalmaz általános helyzetű, ha semelyik három pont nem esik egy egyenesre. Közel egy évszázaddal ezelőtt Erdős Pál, Klein Eszter és Szekeres György vetette fel a következő problémát. Minden $k \geq 3$ egész számhoz határozzuk meg azt a legkisebb $f(k)$ egész számot, ami eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább $f(k)$ általános helyzetű pontot a síkon, mindig kiválasztható közülük k , amelyek konvex helyzetben vannak, azaz egy konvex sokszög csúcsai. Erdős és Szekeres igazolták [29]-ben, hogy

$$2^{k-2} + 1 \leq f(k) \leq \binom{2k-4}{k-2} + 1,$$

azt sejtve, hogy $f(k)$ megegyezik az alsó korláttal. Meglepő módon a sejtést eddig csak $k = 3, 4, 5$ esetén sikerült belátni: $f(3) = 3$, $f(4) = 4$ és $f(5) = 9$. A felső korlátot kis mértékben többször javították, a jelenleg ismert legjobb eredmény

$$f(k) \leq \binom{2k-5}{k-2} + 2,$$

ezt Tóth Géza és Pavel Valtr bizonyította [72]-ben.

Később Erdős Pál a probléma alábbi változatával állt elő. Minden $k \geq 3$ egész számhoz határozzuk meg azt a legkisebb $g(k)$ egész számot, ami eleget tesz a következő feltételnek: akárhogyan is veszünk fel legalább $g(k)$ általános helyzetű pontot a síkon, mindig kiválasztható közülük k , amelyek egy üres konvex sokszög csúcsaiban helyezkednek el. Itt üres konvex sokszög alatt azt értjük, hogy a sokszög a belsejében a ponthalmaz egyetlen pontját sem tartalmazza. Egyszerűen látható, hogy $g(3) = 3$ és $g(4) = 5$. Heiko Harborth igazolta [46]-ban, hogy $g(5) = 10$, míg $g(6)$ végességét hosszú idő után, egymástól függetlenül Tobias Gerken és Carlos Nicolás bizonyították [44]-ben,

illetve [64]-ben. Meglepő módon $g(k) = \infty$ minden $k \geq 7$ esetén, ezt Joseph Horton mutatta meg [51]-ben.

Minden $3 \leq k \leq 6$ egész számra jelölje $g_k(n)$ azt a legkisebb egész számot, ami eleget tesz a következő feltételnek: akárhogya is veszünk fel n általános helyzetű pontok a síkon, mindig kiválasztható közülük $g_k(n)$ olyan k elemű részhalmaz, amelyek üres konvex k -szögek csúcshalmazai. Bárány Imre és Pavel Valtr bizonyították [18]-ban, hogy elég nagy n esetén $g_3(n) \leq 1.6196n^2$, $g_4(n) \leq 1.9397n^2$, $g_5(n) \leq 1.0206n^2$ és $g_6(n) \leq 0.2006n^2$.

Mi történik, ha az üres konvex k -szögekre azt is előírjuk, hogy diszjunktak legyenek? Nyilvánvaló, hogy általános helyzetű pontok egy n elemű halmazának k elemű részhalmazai között mindig található $\lfloor n/(g(k) + 1) \rfloor$ darab olyan, amelyek diszjunkt üres konvex k -szögek csúcshalmazai és ez a korlát éles, ha $k = 3$. A [6] dolgozatban a $k = 4$ esetet vizsgáltuk és megmutattuk a következőt.

1.1. Tétel. *Általános helyzetű pontok egy n elemű halmazának 4 elemű részhalmazai között mindig található $\lfloor 2n/9 \rfloor$ darab olyan, amelyek diszjunkt üres konvex négyszögek csúcshalmazai.*

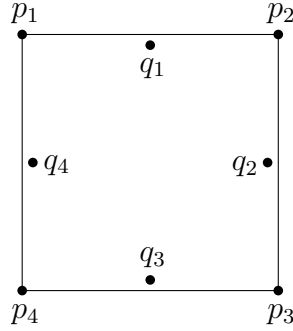
A bizonyításhoz a kulcsot a következő állítás adja. A dolgozatunk megjelenése után értesültünk róla, hogy ezt tőlünk függetlenül John Francis, illetve Kiyoshi Hosono és Masatsugu Urabe is belátták [43]-ban, illetve [52]-ben.

1.2. Állítás. *A síkon tetszőleges felvett 9 általános helyzetű pontból mindig kiválasztható két olyan négyes, amelyek diszjunkt üres konvex négyszögek csúcshalmazai.*

Az állítás felhasználásával a tétel teljes indukcióval már egyszerűen bizonyítható. Ha $n \leq 9$, akkor a becslés helyessége a fenti állításból adódik vagy triviális. Legyen $n \geq 10$ és tekintsük általános helyzetű pontok egy n elemű \mathcal{P} halmazát. Nyilvánvaló módon létezik olyan egyenes, amely \mathcal{P} egyetlen pontját sem tartalmazza, és \mathcal{P} -t kettévágja egy 9 pontból álló \mathcal{P}_1 és egy $n - 9$ pontból álló \mathcal{P}_2 halmazra. Az indukciós feltevés szerint a \mathcal{P}_1 halmazban található 2, a \mathcal{P}_2 halmazban pedig $\lfloor 2(n - 9)/9 \rfloor = \lfloor 2n/9 \rfloor - 2$ diszjunkt üres konvex négyszög. Ennélfogva a \mathcal{P} halmazban található $\lfloor 2n/9 \rfloor$ diszjunkt üres konvex négyszög.

A [6] dolgozatban azt is megmutattuk, hogy a $\lfloor 2n/9 \rfloor$ korlát éles minden $n \leq 21$ esetén. Nem nehéz 8 olyan általános helyzetű pontot találni, amelyek közül nem választható ki két diszjunkt üres konvex négyszög csúcshalmaza. Legyenek p_1, p_2, p_3, p_4 egy négyzet csúcsai az óramutató járása szerint felsorolva, és legyen q_1 a négyzetnek a p_1p_2 oldal középpontjához, q_2 a p_2p_3 oldal

középpontjához, q_3 a p_3p_4 oldal középpontjához és q_4 a p_4p_1 oldal középpontjához elég közel eső belső pontja (ld. 1.1. ábra).



1.1. ábra

Ekkor $\{p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ nyilván megfelel a kívánalmaknak.

Ezután minden $m \geq 3$ egész számra megadunk egy olyan, $n = 4m + 1$ általános helyzetű pontból álló \mathcal{P} halmazt, amelyből nem választható ki m diszjunkt üres konvex négyszög csúcshalmaza.

Legyenek p_1, p_2, \dots, p_{2m} egy C szabályos $2m$ -szög csúcsai az óramutató járása szerint felsorolva, és legyen q_1 a négyszetnek a p_1p_2 oldal középpontjához, q_2 a p_2p_3 oldal középpontjához, \dots , q_{2m-1} a $p_{2m-1}p_{2m}$ oldal középpontjához és q_{2m} a $p_{2m}p_1$ oldal középpontjához elég közel eső belső pontja. Legyen továbbá r a sokszög középpontjához elég közel eső olyan pont, hogy $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_{2m}, q_1, \dots, q_{2m}, r\}$ általános helyzetű pontrendszer. Indirekt tegyük fel, hogy \mathcal{P} -ből kiválasztható m diszjunkt üres konvex négyszög csúcshalmaza. Legyenek ezek a négyszögek Q_1, Q_2, \dots, Q_m .

Legyen p_{i_1} és p_{i_2} a C sokszög két olyan csúcsa, amelyek egyazon Q_i négyszöghöz tartoznak valamely $1 \leq i \leq m$ esetén, és amelyekre a C sokszög határán a p_{i_1} és p_{i_2} által határolt kisebbik ív l csúcsszáma a lehető legkisebb. Egyszerű számolással adódik, hogy $l \leq 4$. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i_1 = 1$ és $i_2 \in \{2, 3, 4\}$. Ha $i_2 = 2$, akkor q_1 nem lehet csúcsa egyik négyszögnek sem. Ha $i_2 = 3$, akkor p_2 nem lehet csúcsa egyik négyszögnek sem. Ha pedig $i_2 = 4$, akkor vagy p_2 vagy p_3 nem lehet csúcsa egyik négyszögnek sem.

Ezek után legyen p_{j_1} és p_{j_2} két olyan csúcs a C sokszög határának p_{i_1} és p_{i_2} által határolta hosszabbik ívén, amelyek szintén egyazon Q_j négyszöghöz tartoznak, és amelyekre a C sokszög határán a p_{j_1} és p_{j_2} által határolt kisebbik ív csúcseinak l' száma a lehető legkisebb. Ismét egyszerű számolással adódik, hogy $l' \leq 4$, és a fentiekhez hasonlóan találhatunk olyan, a q_1, p_2, p_3 pontoktól különböző \mathcal{P} -beli pontot, amely nem csúcsa a Q_1, Q_2, \dots, Q_m négyszögek egyikének sem.

Így \mathcal{P} szükségképpen tartalmaz két olyan pontot, amelyek nem csúcsai egyik Q_1, Q_2, \dots, Q_m négyszögnek sem, ellentmondás.

2. fejezet

Konvex síkidomok blokkolása

Legyen K nem üres belsővel rendelkező, kompakt, konvex halmaz (röviden konvex test) a d -dimenziós Euklideszi térben. A K konvex test $N(K)$ Newton-száma alatt azt a legnagyobb n egész számot értjük, amelyre teljesül, hogy létezik n , a határpontjaiktól eltekintve diszjunkt, egybevágó példánya K -nak úgy, hogy ezek mindegyike (kívülről) érinti K -t.

A d -dimenziós B^d gömb Newton számának meghatározása a diszkrét geometria egyik nevezetes nyitott problémája $d \geq 5$ és $d \neq 8, 24$ esetén. Bár a síkon triviális módon $N(B^2) = 6$, jól ismert, hogy egykor $N(B^3)$ pontos értéke komoly vita tárgyát képezte Sir Isaac Newton és David Gregory között. Newton azt sejtette, hogy $N(B^3) = 12$, míg Gregory elképzelhetőnek tartotta, hogy $N(B^3) = 13$. Meglepő módon csak 1953-ban dőlt el, hogy Newtonnak volt igaza, ezt Kurt Schütte és Bartel Leendert van der Waerden bizonyította be [69]-ben. A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy $N(B^4) = 24$, illetve $N(B^8) = 240$ és $N(B^{24}) = 196560$, ezeket Oleg Musin, illetve Andrew Odlyzko and Neil Sloane igazolta [61]-ben, illetve [65]-ben.

Konvex síkidomokra szorítkozva is csak néhány speciális esetben ismert $N(K)$ pontos értéke, például szabályos sokszögekre, Reuleaux háromszögre, bizonyos egyenlő szárú háromszögekre, illetve bizonyos téglalapokra (ld. [21], [58], [36], [54], [53]).

Ebben a részben a probléma következő változatával foglalkozunk. Legyen K konvex test a d -dimenziós Euklideszi térben, és legyenek K_1, K_2, \dots, K_n olyan, a határpontjaiktól eltekintve diszjunkt, egybevágó példányai K -nak, amelyek mindegyike (kívülről) érinti K -t. Azt mondjuk, hogy a K_1, K_2, \dots, K_n testek blokkolják K -t, ha a K test bármely olyan egybevágó példánya, amely érinti K -t, belemetsz a K_1, K_2, \dots, K_n testek legalább egyikének belsőjébe. Ezek után egy K konvex test $P(K)$ blokkolási száma alatt azt a legkisebb n egész számot értjük, amelyre teljesül, hogy létezik a K test n egybevágó példányából álló, K -t blokkoló rendszer.

Megjegyezzük, hogy ha K egybevágó példányai helyett K eltolt példányaira szorítkozunk, akkor analóg módon értelmezhetjük a K test $P_T(K)$ translációs blokkolási számát. Ezt a fogalmat Chuanming Zong vezette be, és [73]-ban megmutatta, hogy tetszőleges K konvex síkidomra $P_T(K) = 4$.

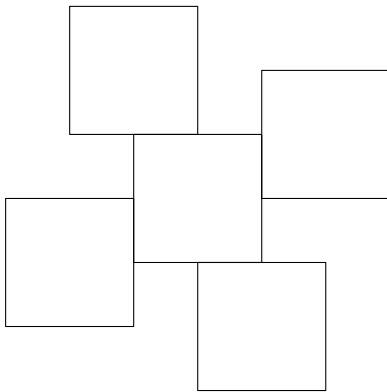
Visszatérve a blokkolási szám meghatározásának problémájához, világos módon $P(B^2) = 4$. Azonban körtől különböző konvex síkidomokra ez a probléma is kevésbé triviális. Könnyen belátható, hogy $P(K) \geq 3$ bármely K konvex síkidomra. Valóban, ha K_1 és K_2 két olyan, a határpontjaiktól eltekintve diszjunkt, egybevágó példány K -nak, amelyek érintik K -t, akkor a K -t K_1 -től, illetve K_2 -től elválasztó egyenesek által határolt konvex kúpba vagy sávba nyilván elhelyezhető egy olyan, harmadik egybevágó példány K -nak, amely érinti K -t, és nem metsz bele a K_1 és K_2 síkidomok egyikének belsejébe se. A [9] dolgozatban szabályos sokszögek blokkolási számát vizsgáltuk, és megmutattuk a következőt.

2.1. Tétel. *Tetszőleges K szabályos sokszögre $P(K) \leq 4$.*

Az előző megjegyzés figyelembe vételével ebből következik, hogy tetszőleges K szabályos sokszögre $P(K) = 3$ vagy $P(K) = 4$. A [9] dolgozatban azt is megmutattuk, hogy mindkét érték valóban előfordul bizonyos szabályos sokszögek blokkolási számaként.

2.2. Tétel. *Egy négyzet blokkolási száma 4.*

A következő ábra mutatja, hogy egy négyzet blokkolható négy egybevágó példányával.



2.1. ábra

2.3. Tétel. *Egy szabályos $6n$ -szög blokkolási száma 3 bármely n pozitív egész szám esetén.*

Felhívjuk a figyelmet a 2.3. Tétel egy első látásra talán meglepő következményére. Létezik konvex síkidomoknak olyan konvergens sorozata (a Hausdorff metrikára nézve), hogy a sorozat bármely tagjának a blokkolási száma 3, míg a határalakzat blokkolási száma 4.

3. fejezet

Konvex síkidomok felhői

A következő problémát Böröczky Károly és Valeriu Soltan fogalmazta meg [23]-ban. Legyen $\{K, K_1, \dots, K_n\}$ konvex testek egy családja a d -dimenziós Euklideszi térben. Azt mondjuk, hogy a K_1, \dots, K_n testek egy sűrű felhőt alkotnak K körül, ha a K, K_1, \dots, K_n testek a határpontjaiktól eltekintve páronként diszjunktak, és a K test bármely pontjából kiinduló bármely félegyenes metszi a K_1, \dots, K_n testek legalább egyikének a belsejét. Adott K konvex testre határozzuk meg azt a legkisebb $C_T(K)$ egész számot, amelyre teljesül, hogy létezik a K konvex testnek $C_T(K)$ olyan eltolt példánya, amelyek K körül sűrű felhőt alkotnak!

Böröczky Károly és Valeriu Soltan megmutatták [23]-ban, hogy $C_T(K)$ véges bármely d -dimenziós K konvex testre. Ifj. Böröczky Károly és Tardos Gábor igazolták [26]-ban, hogy

$$C_T(K) \leq 4^{d^2+o(d^2)}$$

minden d -dimenziós K konvex testre, és

$$C_T(K) \leq 2^{d^2+o(d^2)}$$

minden centrálszimmetrikus d -dimenziós K konvex testre. A d -dimenziós B^d egységgömbre Talata István a

$$2^{0.599d^2-o(d^2)} \leq C_T(B^d) \leq 2^{1.401d^2+o(d^2)}$$

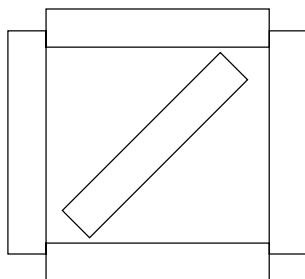
egyenlőtlenségeket bizonyította [70]-ben.

A probléma síkbeli változatát tekintve Valeriu Soltan [59]-ben azt a sejtést fogalmazta meg, hogy $8 \leq C_T(K) \leq 9$ teljesül tetszőleges K konvex síkidomra.

Ebben a részben a fenti probléma következő változatát tekintjük. Adott K konvex testre határozzuk meg azt a legkisebb $C(K)$ egész számot, amelyre

teljesül, hogy létezik a K konvex testnek $C(K)$ olyan egybevágó példánya, amelyek K körül sűrű felhőt alkotnak!

Nem nehéz belátni, hogy $C(K) \geq 4$ bármely K konvex síkidomra. Valóban, az a négy félegyenes, amelyek K egy átmérőjének végpontjaiból indulnak ki, és merőlegesek erre az átmérőre, tetszőleges, a K síkidom egybevágó példányaiból álló, K körüli sűrű felhő legalább négy tagjának a belsejét metszik. A következő ábra mutatja, hogy ez az alsó korlát éles.



3.1. ábra

A másik irányból a [11] dolgozatban a következőt bizonyítottuk be.

3.1. Tétel. *Legyen K tetszőleges konvex síkidom. Ekkor $C(K) \leq 9$, és egyenlőség pontosan akkor fordul elő, ha K kör.*

Vázoljuk a bizonyítást. Először megmutattuk, hogy ha K egy körtől különböző konvex síkidom, akkor $C(K) \leq 8$, majd beláttuk, hogy $C(B^2) = 9$. Az előbbi egyenlőtlenség bizonyításánál a K síkidom bizonyos metrikus jellemzőin alapuló esetszétválasztást alkalmaztunk. A K síkidom egy \overline{uv} átmérőjére jelölje $R(K, \overline{uv}) = pqst$ a K síkidom azon körülírt téglalapját, amelyben pq párhuzamos uv -vel, qs pedig merőleges uv -re.

1. eset. A K síkidom valamely uv átmérőjére az $R(K, \overline{uv})$ körülírt téglalapban $|\overline{pq}| > |\overline{qs}|$. Megmutattuk, hogy ekkor megadható a K konvex testnek nyolc olyan egybevágó példánya, amelyek K körül sűrű felhőt alkotnak.

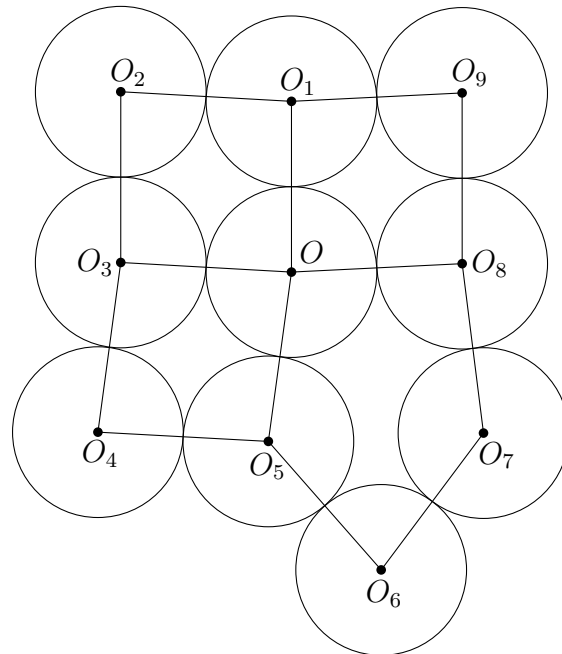
2. eset. A K síkidom tetszőleges uv átmérőjére az $R(K, \overline{uv})$ körülírt téglalapban $|\overline{pq}| = |\overline{qs}|$, de van olyan körülírt téglalapja K -nak, amelyben az oldalak hossza kisebb, mint $|\overline{uv}|$. Megmutattuk, hogy ekkor megadható a K konvex testnek nyolc olyan egybevágó példánya, amelyek K körül sűrű felhőt alkotnak.

3. eset. A K síkidom bármely körülírt téglalapja egy olyan négyzet, amelyben az oldalak hossza $|\overline{uv}|$, továbbá u és v nem felezőpontjai a \overline{qs} és \overline{pt}

oldaloknak az $R(K, \overline{uv})$ körülírt téglalapban a K síkidom valamely uv átmérőjére. Megmutattuk, hogy ekkor megadható a K konvex testnek nyolc olyan egybevágó példánya, amelyek K körül sűrű felhőt alkotnak.

4. eset. A K síkidom bármely körülírt téglalapja egy olyan négyzet, amelyben az oldalak hossza $|\overline{uv}|$, továbbá u és v felezőpontjai a \overline{qs} és \overline{pt} oldalaknak az $R(K, \overline{uv})$ körülírt téglalapban a K síkidom tetszőleges uv átmérőjére. Ifj. Böröczky Károly egy [24]-ben bizonyított eredményének felhasználásával megmutattuk, hogy ekkor K szükségképpen kör.

A kör blokkolási számának meghatározásával kapcsolatban annyit említünk csak meg, hogy következő ábrán látható elrendezés szerint $C(B^2) \leq 9$. Az ábrán két körközpontot akkor köt össze szakasz, ha távolságuk 2, továbbá $\angle OO_1O_2 = \angle OO_1O_9 = \angle OO_3O_4 = \angle OO_8O_7 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, ahol ε alkalmasan kicsi pozitív valós szám.



3.2. ábra

A [11] dolgozatban igazoltuk a 3.1. Tétel egy stabilitás változatát is. Egy B kör sugarát jelölje $r(B)$.

3.2. Tétel. *Legyen K egy körtől különböző konvex síkidom. Tegyük fel, hogy léteznek olyan B és B' koncentrikus körök, amelyekre $r(B)/r(B') = 0.99$ és $B \subseteq K \subseteq B'$. Ekkor $C(K) = 8$.*

Valójában egy kicsit erősebb állítást bizonyítottunk a [11] dolgozatban.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a K_1, \dots, K_n konvex síkidomok egy sűrű felhőt alkotnak egy K konvex síkidom körül. Tegyük fel továbbá, hogy léteznek olyan B és B' koncentrikus körök, amelyekre $r(B)/r(B') = 0.99$ és $B \subseteq K \subseteq B'$, valamint minden $1 \leq i \leq n$ esetén léteznek olyan B_i és B'_i koncentrikus körök, amelyekre $r(B_i)/r(B'_i) = 0.99$ és $B_i \subseteq K_i \subseteq B'_i$. Ekkor $n \geq 8$.*

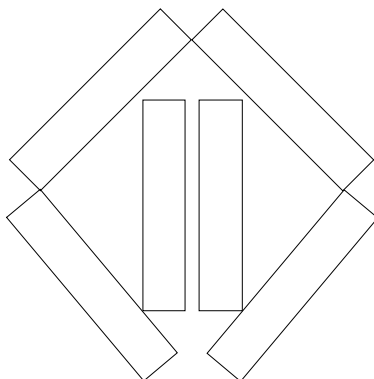
4. fejezet

Maximális kígyók

Legyen C konvex test a d -dimenziós Euklideszi térben. A C konvex test egybevágó példányainak egy $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ véges sorozatát kígyónak nevezzük, ha C_1, C_2, \dots, C_n a határpontjaiktól eltekintve páronként diszjunktak, továbbá $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha $|i - j| \leq 1$. Ha a \mathcal{C} kígyó nem valódi részhalmaza semelyik más, a C konvex test egybevágó példányából álló kígyónak, akkor \mathcal{C} -t maximális kígyónak mondjuk. Határozzuk meg azt a legkisebb n egész számot, amelyre létezik egy adott C konvex test n egybevágó példányából álló maximális kígyó!

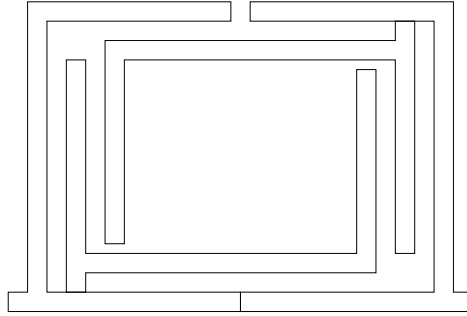
Meglepő módon konvex síkidomokra szorítkozva is csak a kör estén ismert a megoldás. Bisztriczky Tibor, ifj. Böröczky Károly, Heiko Harborth és Lothar Piepmeyer megmutatták [19]-ben, hogy 10 azon egybevágó körök minimális száma, amelyek egy maximális kígyót alkothatnak.

A [12] dolgozatban azt a sejtést fogalmaztuk meg, hogy tetszőleges C konvex síkidomra egy, a C egybevágó példányából álló maximális kígyó elemszáma legalább 6. A következő ábra mutatja, hogy bizonyos téglalapok 6 egybevágó példánya alkothat maximális kígyót.



4.1. ábra

A [12] dolgozatban azt is beláttuk, hogy ha a C síkidomról csak annyit követelünk meg, hogy homeomorf legyen egy zárt egységkörrel (a konvexitást nem), akkor egy, a C egybevágó példányaiból álló maximális kígyó elemszáma legalább 4, és bizonyos síkidomok 4 egybevágó példánya alkothat maximális kígyót, amint azt a következő ábra mutatja.



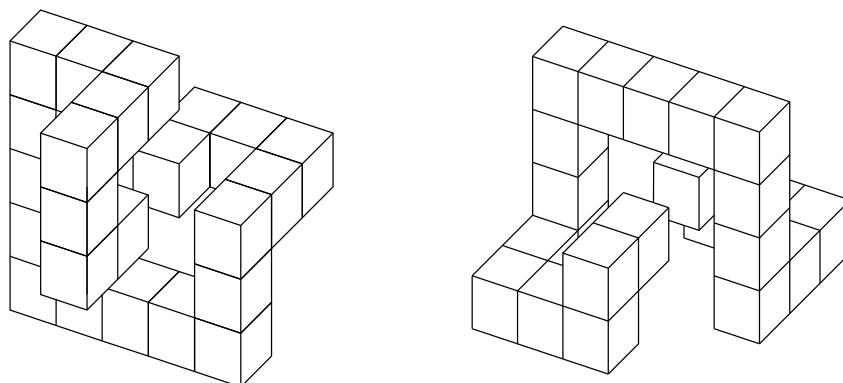
4.2. ábra

Lényegesen többet mondhatunk egy C konvex síkidom eltolt példányaiból álló maximális kígyó elemszámáról: ifj. Böröczky Károly és Valeriu Soltan [25]-ben megmutatták, hogy egy C konvex síkidom eltolt példányaiból álló maximális kígyó minimális elemszáma 11, ha C paralelogramma, és 10 minden más esetben.

Ebben a részben a probléma egy, Heiko Harborth által felvetett változáttal foglalkozunk. Tekintsük a d -dimenziós egységkocka eltolt példányainak egy olyan $\mathcal{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ véges sorozatát, amelyben $C_i \cap C_{i+1}$ közös $(d-1)$ -dimenziós lapja C_i -nek és C_{i+1} -nek minden $1 \leq i \leq n-1$ esetén, továbbá $\dim(C_i \cap C_j) \leq \max\{-1, d+i-j\}$ minden $1 \leq i < j \leq n$ esetén (megállapodás szerint $\dim(C_i \cap C_j) = -1$ pontosan akkor, ha $C_i \cap C_j = \emptyset$). Egy ilyen sorozatot teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyónak fogunk nevezni. Egy teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyót maximálisnak mondunk, ha nem valódi részhalmaza semelyik más, teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyónak.

Heiko Harborth [47]-ben tűzte ki a feladat síkbeli változatát: mutassuk meg hogy egy teljes oldalak mentén csatlakozó négyzetekből álló maximális kígyó minimális elemszáma 19. A feladatot többen is megoldották (ld. [49], [50]).

A probléma 3-dimenziós térbeli változatát tekintve Heiko Harborth és Christian Thürmann két különböző példát is mutatott 23 teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló maximális kígyóra (ld. 4.3. ábra), azt sejtve, hogy ezek minimális elemszámúak.



4.3. ábra

A bal oldalon látható konstrukciót általánosítva a [10] dolgozatban megmutattuk, hogy a d -dimenziós térben létezik $8d - 1$ teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló maximális kígyó tetszőleges $d \geq 3$ esetén. A [10] dolgozatban azt is megmutattuk, hogy ez a példa minimális elemszámú:

4.1. Tétel. *Egy teljes lapok mentén csatlakozó d -dimenziós egységkockákból álló maximális kígyó minimális elemszáma $8d - 1$ tetszőleges $d \geq 3$ esetén.*

Vázoljuk a konstrukciót. Legegyszerűbb lesz a C_i kockák c_i középpontjait ($1 \leq i \leq 8d - 1$) egy olyan derékszögű koordinátarendszerben megadni, amelynek tengelyei párhuzamosak a kockák éleivel. Jelölje e_1, e_2, \dots, e_n a koordináta egység vektorokat. Az első kocka középpontja

$$c_1 = -e_1.$$

Majd minden $1 \leq i \leq d - 1$ esetén

$$\begin{aligned} c_{4i-2} &= -2e_i, \\ c_{4i-1} &= -2e_i - e_{i+1}, \\ c_{4i} &= -2e_i - 2e_{i+1}, \\ c_{4i+1} &= -e_i - 2e_{i+1}. \end{aligned}$$

A következő négy kocka középpontja

$$\begin{aligned} c_{4d-2} &= -2e_d, \\ c_{4d-1} &= e_2 - 2e_d, \\ c_{4d} &= 2e_2 - 2e_d, \\ c_{4d+1} &= 2e_2 - e_d. \end{aligned}$$

Ismét minden $2 \leq i \leq d - 1$ esetén

$$\begin{aligned} c_{4d+4i-6} &= 2e_i, \\ c_{4d+4i-5} &= 2e_i + e_{i+1}, \\ c_{4d+4i-4} &= 2e_i + 2e_{i+1}, \\ c_{4d+4i-3} &= e_i + 2e_{i+1}. \end{aligned}$$

Végül az utolsó hat kocka középpontja

$$\begin{aligned} c_{8d-6} &= 2e_d, \\ c_{8d-5} &= e_1 + 2e_d, \\ c_{8d-4} &= 2e_1 + 2e_d, \\ c_{8d-3} &= 2e_1 + e_d, \\ c_{8d-2} &= 2e_1, \\ c_{8d-1} &= e_1. \end{aligned}$$

Annak belátásához, hogy ilyen módon tényleg egy teljes lapok mentén csatlakozó kockákból álló kígyót kaptunk elég észrevenni a következőket:

- (1) Bármely két szomszédos kocka középpontja pontosan egy koordinátában különbözik. A különbség ebben a koordinátában 1, így a két kocka metszetének a dimenziója $d - 1$.
- (2) Ha két kocka indexe közötti különbség pontosan kettő, akkor középpontjaik vagy pontosan egy vagy pontosan két koordinátában különböznek. Az első esetben a különbség ebben az egy koordinátában 2, így a kockák diszjunktak. A második esetben a különbség mindkét koordinátában 1, így a két kocka metszetének dimenziója $d - 2$.
- (3) Ha két kocka indexe közötti különbség legalább három, akkor középpontjaik valamelyik koordinátában legalább 2-vel különböznek, így a kockák diszjunktak.

A kígyót nem tudjuk a C_1 kockánál folytatni sem az e_1 irányú tengellyel párhuzamosan a C_2 és C_{8d-1} kockák jelenléte miatt, sem a többi e_i irányú tengellyel párhuzamosan a C_{4i-2} és $C_{4d+4i-6}$ kockák jelenléte miatt ($2 \leq i \leq d$). Hasonlóan, a kígyót nem tudjuk a C_{8d-1} kockánál folytatni sem az e_1 irányú tengellyel párhuzamosan a C_1 és C_{8d-2} kockák jelenléte miatt, sem a többi e_i irányú tengellyel párhuzamosan a C_{4i-2} és $C_{4d+4i-6}$ kockák jelenléte miatt ($2 \leq i \leq d$). Ennélfogva a kígyó maximális.

Végül még egy eredményt említünk, amelyet a [7] dolgozatban igazoltunk.

4.2. Tétel. *Egy csúcsokban csatlakozó egybevágó szabályos háromszögekből álló maximális kígyó minimális elemszáma 7.*

5. fejezet

k -szomszédos véges gömbelhelyezések

Nem feltétlenül egybevágó gömbök egy elhelyezését a 3-dimenziós térben k -szomszédosnak nevezzük, ha az elhelyezés minden gömbjét pontosan k másik érinti. Jelölje $T(k)$ azt a legkisebb egész számot, amelyre létezik $T(k)$ egybevágó gömbből álló, k -szomszédos gömbelhelyezés. Világos módon $T(1) = 2$, $T(2) = 3$ és $T(3) = 4$. Egy 2 élű szabályos oktaéder, illetve szabályos ikozaéder csúcsaiban elhelyezett egységgömbök rendszere mutatja, hogy $T(4) \leq 6$ és $T(5) \leq 12$. Nem túl nehéz belátni, hogy $T(4) = 6$, míg a $T(5) = 12$ egyenlőséget Fejes Tóth Gábor és Heiko Harborth igazoták [30]-ban. Wegner egy példán megmutatta, hogy $T(6) \leq 240$ (ld. [30]). A $T(7)$ és $T(8)$ értékek végességének kérdését mai napig nem sikerült tisztázni. Ugyanakkor Kertész Gábor igazolta [55]-ben, hogy $T(k) = \infty$ ha $9 \leq k \leq 12$. Mint már korábban rámutattunk, egységgömbök egy elhelyezésében egy gömböt legfeljebb 12 másik érinthet, amiből következik, hogy nem létezhet egybevágó gömböknek k -szomszédos elhelyezése, ha $k \geq 13$.

Ebben a fejezetben egy hasonló kérdést vizsgálunk. Határozzuk meg azt a legkisebb $B(k)$ egész számot, amelyre létezik $B(k)$ nem feltétlenül egybevágó gömbből álló, k -szomszédos elhelyezés. Általában, mely k és n pozitív egészekre léteznek n gömbből álló, k -szomszédos, (topológikusan) összefüggő elhelyezések? Könnyű látni, hogy véges k -szomszédos elhelyezések nem feltétlenül egybevágó gömbökből sem létezhetnek, ha $k \geq 13$. Ugyanakkor nem egybevágó gömbökből létezik 12-szomszédos véges elhelyezés, ilyen úgy kaphatunk például, hogy S^3 egy szabályos mozaikjának, a 120-cellának a lapjaiba írt gömböket vetítjük a 3-dimenziós térbe egy alkalmas sztereografikus projekcióval (ld. [27]). Ebből többek között azonnal következik, hogy $B(12) \leq 120$.

Gömbök egy elhelyezéséhez természetes módon hozzárendelhetünk egy

gráfot, amelyet az elhelyezés szomszédsági gráfjának fogunk nevezni. A gráf csúcsai feleljenek meg az elhelyezés gömbjeinek és két csúcsot akkor kössön össze egy él, ha az azoknak megfelelő gömbök érintik egymást.

Koebe egy nevezetes tétele szerint minden síkgráf szomszédsági gráfja egy alkalmas körelhelyezésnek a síkon (ld. [56]). Kombinálva ezt az eredményt Kuratowski síkgráfokat karakterizáló klasszikus tételével (ld. [57]) kapjuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor szomszédsági gráfja egy körelhelyezésnek, ha a gráf nem tartalmaz olyan részgráfot, amely a K_5 teljes gráf vagy a $K_{3,3}$ teljes páros gráf éleinek felosztásával jön létre.

Sajnos nem ismert hasonló karakterizációs tétel 3-dimenziós gömbelhelyezések szomszédsági gráfjairól. Először néhány szükséges feltételt fogalmazunk meg 3-dimenziós gömbelhelyezések szomszédsági gráfjaira vonatkozóan. Közismert, hogy a K_6 teljes gráf nem lehet részgráfja egy 3-dimenziós gömbelhelyezés szomszédsági gráfjának. Páros részgráfokról a következőket bizonyítottuk a [8] dolgozatban.

5.1. Állítás. *Ha a $K_{3,6}$ teljes páros gráf részgráfja egy nem feltétlenül egybevágó gömbökből álló elhelyezés szomszédsági gráfjának, akkor $K_{3,6}$ két csúcsosztálya által feszített részgráfok három, illetve hat hosszúságú körök.*

5.2. Következmény. *A $K_{3,7}$ teljes páros gráf nem lehet részgráfja egy nem feltétlenül egybevágó gömbökből álló elhelyezés szomszédsági gráfjának.*

5.3. Állítás. *Ha a $K_{4,4}$ teljes páros gráf részgráfja egy nem feltétlenül egybevágó gömbökből álló elhelyezés szomszédsági gráfjának, akkor a $K_{4,4}$ két csúcsosztálya által feszített részgráfok négy hosszúságú körök.*

5.4. Következmény. *A $K_{4,5}$ teljes páros gráf nem lehet részgráfja egy nem feltétlenül egybevágó gömbökből álló elhelyezés szomszédsági gráfjának.*

A [8] dolgozatban meghatároztuk $k \leq 6$ esetén az összes olyan (n, k) értékpárt, amelyre létezik n gömbből álló, összefüggő, k -szomszédos elhelyezés.

5.5. Tétel. *Legyen $k \leq 6$. Akkor és csak akkor létezik n gömbből álló, összefüggő, k -szomszédos elhelyezés ha*

- $k = 1$ és $n = 2$,
- $k = 2$ és $n \geq 3$,
- $k = 3$ és $n \geq 4$, ahol n páros,
- $k = 4$ és $n \geq 5$,

- $k = 5$ és $n \geq 8$, ahol n páros,
- $k = 6$ és $n \geq 8$, de $n \neq 9$.

Példaként megmutatjuk, hogy nem létezik 9 gömbből álló, 6-szomszédos elhelyezés. Indirekt tegyük fel, hogy van ilyen elhelyezés, jelölje ennek szomszédsági gráfját G . Ekkor a G gráf G' komplementerében minden csúcs foka 2, így G' diszjunkt körök uniója. Ha G' tartalmaz egy 3 hosszúságú kört, akkor $K_{3,6}$ részgráfja G -nek és ennek 3 elemű csúcsosztálya független G -ben, ami lehetetlen az 5.1. Állítás miatt. Ha G' tartalmaz egy 4 hosszúságú kört, akkor $K_{4,5}$ részgráfja G -nek, ami lehetetlen az 5.4. Következmény miatt. Így G' egy 9 hosszúságú kör. Legyen $\{S_1, S_2, \dots, S_9\}$ olyan gömbelhelyezés, amelynek szomszédsági gráfja G . Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_2 \cap S_3 = \emptyset, \dots, S_8 \cap S_9 = \emptyset, S_9 \cap S_1 = \emptyset$. Tekintsük az S_1, S_2, \dots, S_9 gömböknek egy $S_1 \cap S_3$ középpontú inverziónál származó S'_1, S'_2, \dots, S'_9 képeit. Ekkor S'_1 és S'_3 párhuzamos síkok és S'_5, S'_6, S'_7, S'_8 egybevágó gömbök, amelyek érintik S'_1 -t és S'_3 -t is. Mivel S'_2 érinti az S'_5, S'_6, S'_7, S'_8 gömböket, ezért S'_5, S'_6, S'_7, S'_8 középpontjai egy körön helyezkednek el. Eből következik, hogy S'_4 érinti S'_5 -t, hiszen S'_4 érinti S'_6, S'_7, S'_8 mindegyikét, ellentmondás.

Szintén a [8] dolgozatban $7 \leq k \leq 10$ esetén korlátokat adtunk azon gömbök minimális számára, amelyek k -szomszédos elhelyezést alkothatnak.

5.6. Tétel. *A $B(k)$ értékekre $k = 7, 8, 9, 10$ esetén a következők teljesülnek.*

- $B(7) = 12$ vagy 14,
- $B(8) \leq 20$,
- $B(9) \leq 64$,
- $B(10) \leq 76$.

Megjegyezzük, hogy $B(11)$ végeességének kérdése eldöntetlen.

6. fejezet

Minkowski elrendezések

Legyen $0 < \mu < 1$, és tekintsük nem feltétlenül egybevágó gömbök egy \mathcal{S} elrendezését a d -dimenziós térben. Az \mathcal{S} elrendezés minden egyes S gömbjéhez rendeljük hozzá azt a vele koncentrikus gömböt, amelynek sugara $\mu r(S)$, ahol $r(S)$ jelöli az S gömb sugarát. Ezt a $\mu r(S)$ sugarú gömböt az S gömb μ -magjának nevezzük. Egy \mathcal{S} elrendezést μ -rendű Minkowski elrendezésnek nevezünk, ha \mathcal{S} egyik gömbje se lóg bele más \mathcal{S} -beli gömb μ -magjában belsejébe. Határozzuk meg, hogy egy μ -rendű, d -dimenziós Minkowski gömbelrendezés sűrűsége legfeljebb mekkora lehet!

Ismert tény, hogy ha egy elrendezés gömbjeinek sugara felülről nem korlátos, akkor lehetetlen az elrendezés sűrűségét definiálni. Ennek és más technikai nehézségek elkerülése érdekében pozitív homogenitású elrendezésekre fogunk szorítkozni. Idézzük fel, hogy gömbök egy elrendezésének homogenitását a gömbsugarak infimumának, illetve szuprémumának hányadosaként értelmezzük. Jelölje $\delta_d(\mu)$ a pozitív homogenitású, μ -rendű, d -dimenziós Minkowski gömbelrendezések sűrűségének maximumát.

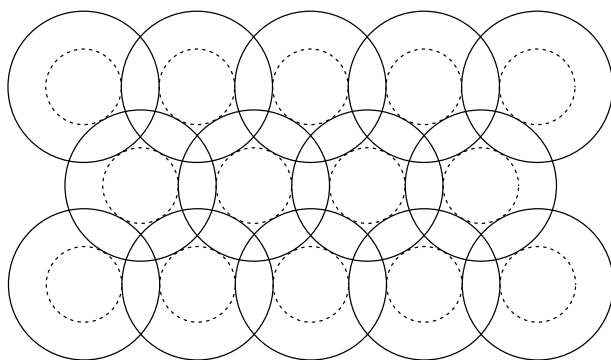
Fejes Tóth László egy [35]-ben megfogalmazott sejtését igazolva az [1] dolgozatban megmutattuk a következőt.

6.1. Tétel.

$$\delta_2(\mu) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}(1+\mu)^2}$$

tetszőleges $\mu \leq \sqrt{3} - 1$ esetén.

Egy optimális elrendezést ad egybevágó körök egy olyan elrendezése, amelyben minden kör hat másikkal a μ -magját érinti (ld. 6.1. ábra).



6.1. ábra

Jegyezzük meg, hogy ebben a speciális elrendezésben $\mu = \sqrt{3} - 1$ a legnagyobb olyan érték, hogy a körök még lefedik az egész síkot. Ha $\mu > \sqrt{3} - 1$, akkor a körök által le nem fedett részekbe elhelyezhetjük új kis körök μ -magját, ezzel növelve a sűrűséget. Ez mutatja, hogy a probléma $\mu > \sqrt{3} - 1$ esetén sokkal komplikáltabb. További részleteket és eredményeket illetően ld. [20], [34], [35], [36], [41], [42], [60].

Ezek után a probléma magasabb dimenziós változatával foglalkozunk. A fő eredmény megfogalmazásához szükségünk van egy jelölésre. Tekintsük a d -dimenziós tér egy 2 oldalú szabályos szimplexét és a csúcsai köré rajzolt $d + 1$ darab egységgömböt. Ezek az egységgömbök a határpontjaiktól eltekintve diszjunktak; jelölje σ_d a szimplexben a gömbök által lefedett rész térfogatának és az egész szimplex térfogatának a hányadosát. A [4] dolgozatban beláttuk a következőt.

6.2. Tétel. *Legyen $d \geq 2$. Ekkor*

$$\delta_d(\mu) \leq \frac{2^d \sigma_d}{(1 + \mu)^d}$$

tetszőleges $\mu \leq \frac{1}{d}$ esetén.

Vázoljuk a bizonyítást. Egy egyszerű észrevétellel kezdünk. Legyenek S_i és S_j olyan gömbök, amelyekre $r(S_i) \leq r(S_j)$, és tegyük fel, hogy S_i és S_j nem nyúlnak bele egymás μ -magjának belsejébe. Most az S_i és S_j gömbök középpontjainak távolsága akkor és csak akkor minimális, ha S_j érinti S_i μ -magját. Ebből következik, hogy ha S_i és S_j olyan gömbök, amelyekre $r(S_i) \leq r(S_j)$, és ha S_j nem nyúlik bele az S_i gömb μ -magjának belsejébe, akkor S_i sem nyúlik bele az S_j gömb μ -magjának belsejébe.

A 6.2. Tételt először $\mu = \bar{\mu} = \frac{1}{d}$ esetén bizonyítjuk. Legyen \mathcal{S} egy pozitív homogenitású, $\bar{\mu}$ -rendű, d -dimenziós Minkowski gömbelrendezés. Az

általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy \mathcal{S} telített, azaz nem valódi részhalmaza egy ugyanolyan homogenitású, $\bar{\mu}$ -rendű, d -dimenziós Minkowski gömbelrendezésnek.

Minden egyes \mathcal{S} -beli S_i gömbhöz rendeljük hozzá két azzal koncentrikus \underline{S}_i és \bar{S}_i gömböt, amelyekre

$$\frac{r(S_i)}{r(\bar{S}_i)} = \frac{r(\bar{S}_i)}{r(\underline{S}_i)} = \sqrt{\frac{2d}{d+1}} = R_d.$$

Jegyezzük meg, hogy R_d a 2 oldalú, d -dimenziós szabályos szimplex körülírt gömbjének sugara. Az \underline{S}_i , illetve az \bar{S}_i gömbökből álló elrendezéseket jelölje $\underline{\mathcal{S}}$, illetve $\bar{\mathcal{S}}$. Vegyük észre, hogy az $\underline{\mathcal{S}}$ -beli gömbök elhelyezést alkotnak. Ennek belátásához elég arra hivatkozni, hogy \mathcal{S} bármely két olyan S_i és S_j gömbjére, ahol $r(S_i) \leq r(S_j)$,

$$\frac{d+1}{2d}r(S_i) + \frac{d+1}{2d}r(S_j) \leq \frac{1}{d}r(S_i) + r(S_j)$$

teljesül.

Az $\underline{\mathcal{S}}$ elhelyezés minden \underline{S}_i gömbjéhez rendeljük hozzá a tér azon pontjainak D_i halmazát, amelyek \bar{S}_i -re vonatkozó hatványa kisebb vagy egyenlő, mint $\bar{\mathcal{S}}$ bármely más gömbjére vonatkozó hatványa. Ilyen módon a tér egy (egyenletesen korlátos) konvex politópokból álló \mathcal{D} cellafelbontását kapjuk.

A \mathcal{D} cellafelbontásra belátható a következő (a bizonyítás elég komplikált).

6.3. Állítás. *Minden \underline{S}_i gömb benne van a hozzá tartozó D_i cellában, továbbá az \underline{S}_i gömb középpontjának a távolsága D_i bármely $(d-k)$ -dimenziós lapja által kifeszített $(d-k)$ -dimenziós síktól legalább*

$$r(\underline{S}_i) \sqrt{\frac{2k}{k+1}},$$

minden $1 \leq k \leq d$ esetén.

Idézzük fel még Claude Ambrose Rogers egy nevezetes, [67]-ben bizonyított eredményét. Ha egy d -dimenziós konvex politóp tartalmaz egy S gömböt és az S gömb középpontjának távolsága a politóp bármely $(d-k)$ -dimenziós lapja által kifeszített $(d-k)$ -dimenziós síktól legalább

$$r(S) \sqrt{\frac{2k}{k+1}},$$

minden $1 \leq k \leq d$ esetén, akkor a gömb térfogatának és a politóp térfogatának hányadosa legfeljebb σ_d .

A fenti két állításból már következik a 6.2. Tételben szereplő egyenlőtlenség $\mu = \bar{\mu}$ esetén.

A bizonyítás teljessé tételéhez meg kell még mutatni, hogy ha a 6.2. Tételben szereplő egyenlőtlenség teljesül $\mu = \bar{\mu}$ esetén, akkor teljesül bármely $\mu < \bar{\mu}$ esetén is. Tekintsünk egy pozitív homogenitású, μ -rendű, d -dimenziós \mathcal{S} Minkowski gömbelrendezést, ahol $\mu < \bar{\mu}$. Cseréljük le \mathcal{S} minden egyes S_i gömbjét egy azzal koncentrikus olyan S_i^* gömbre, amelyre

$$r(S_i^*) = \frac{1 + \mu}{1 + \bar{\mu}} r(S_i).$$

Vegyük észre, hogy az így kapott \mathcal{S}^* gömbelrendezés egy $\bar{\mu}$ -rendű Minkowski gömbelrendezés. Ennek belátásához elég arra hivatkozni, hogy \mathcal{S} bármely két olyan S_i és S_j gömbjére, ahol $r(S_i) \leq r(S_j)$,

$$\frac{1 + \mu}{1 + \bar{\mu}} r(S_j) + \bar{\mu} \frac{1 + \mu}{1 + \bar{\mu}} r(S_i) \leq r(S_j) + \mu r(S_i)$$

teljesül. Így \mathcal{S}^* sűrűsége legfeljebb

$$\frac{2^d \sigma_d}{(1 + \bar{\mu})^d},$$

következésképpen \mathcal{S} sűrűsége legfeljebb

$$\left(\frac{1 + \bar{\mu}}{1 + \mu} \right)^d \frac{2^d \sigma_d}{(1 + \bar{\mu})^d} = \frac{2^d \sigma_d}{(1 + \mu)^d}.$$

Ezzel a 6.2. Tétel bizonyítása teljes.

7. fejezet

Tammes probléma

Hogyan kell egy 3-dimenziós egységgömb felszínén k pontot úgy elhelyezni, hogy a köztük fellépő minimális távolság a lehető legnagyobb legyen? Ezt a kérdést először Tammes holland biológus vetette fel [71]-ben különböző virágok pollenszemcséinek nyílásait vizsgálva.

Jelölje a_k azt a legnagyobb pozitív számot, amelyre teljesül, hogy elhelyezhető k pont egy 3-dimenziós egységgömb felszínén úgy, hogy bármely két pont szférikus távolsága legalább a_k . Talán nem meglepő, hogy a_k pontosan csupán k néhány kis értékére ismert: ezeket $k = 3, 4, 6, 12$ esetén Fejes Tóth László határozta meg [32]-ben, $k = 5, 7, 8, 9$ esetén Kurt Schütte és Bartel Leendert van der Waerden [68]-ban, $k = 10, 11$ esetén Ludwig Danzer [28]-ban (illetve tőle függetlenül $k = 10$ esetén Hárs László [48]-ban, $k = 11$ esetén pedig Böröczky Károly [22]-ben), $k = 13, 14$ esetén Oleg Muszin és Alekszej Taraszov [62]-ben és [63]-ban, valamint $k = 24$ esetén Raphael Mitchel Robinson [66]-ban.

A [2] és [3] dolgozatokban a $k = 13, 14, 15, 16, 17$ eseteket vizsgáltuk és a következőket bizonyítottuk.

7.1. Tétel.

$$a_{13} < 1.02746114,$$

$$a_{14} < 0.99357204,$$

$$a_{15} < 0.96298392,$$

$$a_{16} < 0.93510857,$$

$$a_{17} < 0.90951817.$$

Megjegyezzük, hogy ezek az eredmények jóval korábban születtek, mint hogy Oleg Muszin és Alekszej Taraszov, többek között éppen a [2] és [3] dolgozatokban bizonyított állításokat a modern számítógépek erejével kombinálva meghatározta a_{13} és a_{14} pontos értékét.

Nagyon nagy vonalakban vázoljuk a fő gondolatmenetet, a 7.1. Tétel teljes bizonyítása rendkívül összetett, a [2] és [3] dolgozatok együtt közel 90 oldal terjedelműek.

Idézzük fel mindennek előtt, hogy $a_k < \pi/3$ tetszőleges $k \geq 13$ esetén (ld. [69]). Ezek után legyen $\varphi < \pi/3$. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{S}^2$ pontrendszer φ -telített, ha \mathcal{P} bármely két pontja közötti szférikus távolság legalább φ , és tetszőleges $q \in \mathbb{S}^2$ ponthoz létezik olyan \mathcal{P} -beli pont, amely q -tól mért szférikus távolsága kisebb, mint φ .

Legyen $k \geq 13$ és $\varphi < \pi/3$. Tekintsünk egy olyan $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{S}^2$ pontrendszert, amelyben bármely két pont szférikus távolsága legalább φ . Kössünk össze két \mathcal{P} -beli pontot egy szférikus szakasszal, ha távolságuk pontosan φ . Az ilyen módon kapott gráfot nevezzük a \mathcal{P} pontrendszer gráfjának.

Azon k pontból álló pontrendszerek között, amelyben bármely két különböző pont távolsága legalább φ , tekintsünk egy olyant, amelynek gráfjában az élek száma a lehető legkisebb. Ezt a gráfot egy k csúcsú φ -gráfnak, a megfelelő pontrendszert pedig egy k pontú φ -pontrendszernek fogjuk nevezni. Jegyezzük meg, hogy k csúcsú nem triviális φ -gráfok csak $\varphi = a_k$ esetén léteznek.

Belátható, hogy egy k csúcsú nem triviális φ -gráfban

- az élek nem keresztezik egymást,
- az élek összefüggő rendszert alkotnak,
- az élek \mathbb{S}^2 -t szigorúan konvex szférikus sokszögekre bontják,
- egy csúcs vagy izolált vagy legalább harmadfokú.

Legyen $13 \leq k \leq 17$ és indirekt tegyük fel, hogy $b_k \leq a_k < \pi/3$, ahol

$$b_{13} = 1.02746114,$$

$$b_{14} = 0.99357204,$$

$$b_{15} = 0.96298392,$$

$$b_{16} = 0.93510857,$$

$$b_{17} = 0.90951817.$$

Az indirekt feltevés szerint létezik k csúcsú, nem triviális φ -gráf valamely $b_k \leq \varphi < \pi/3$ esetén. Vegyük észre, hogy az a φ -pontrendszer, amely egy ilyen k csúcsú nem triviális φ -gráfnak felel meg egy φ -telített pontrendszer, mivel $a_{k+1} < b_k$. Ez utóbbi egyenlőtlenségek ismert konstrukciókból következnek (ld. [39]). Vegyük észre azt is, hogy egy ilyen φ -gráf lapjai szabályos háromszögek, rombuszok, ötszögek és hatszögek.

Bizonyítható, hogy egy ilyen φ -gráf háromszögeinek, rombuszainak és ötszögeinek belseje nem tartalmazhat φ -gráfbeli izolált csúcsot. Az is bizonyítható, hogy ha egy ilyen φ -gráfnak egy izolált csúcsa egy φ oldalhosszúságú konvex hatszög belsejében van, akkor ez a konvex hatszög nem tartalmazhatja a belsejében ennek a φ -gráfnak egyetlen további csúcsát sem és egy izolált csúcs fokszáma 5 vagy 6 a megfelelő φ -pontrendszer Delone triangulációjában.

Tegyük fel, hogy egy ilyen φ -gráfnak egy izolált csúcsa benne van a φ -gráf egy hatszögének a belsejében. Annak a tulajdonságnak a megsértése nélkül, hogy egy izolált csúcs távolsága a hatszög csúcsaitól legalább φ , ha lehetséges, akkor helyezzük el az izolált csúcsot a hatszögben úgy, hogy a fokszáma 6 legyen a Delone triangulációban, ha pedig ez nem lehetséges, akkor úgy helyezzük el az izolált csúcsot, hogy a hatszög azon csúcsától mért távolsága, amely nem szomszédos vele a Delone triangulációban, a lehető legkisebb legyen.

Ismételjük meg ezt az eljárást a φ -gráf összes izolált csúcsára. Az ilyen módon kapott pontrendszert nevezzük φ^* -pontrendszernek. Jegyezzük meg, hogy ez a pontrendszer egy φ -telített pontrendszer.

Bizonyítható, hogy a kapott φ^* -pontrendszer Delone triangulációja tartalmaz két nem szomszédos hatodfokú csúcsot. Szintén bizonyítható, hogy ha a kapott φ^* -pontrendszer Delone triangulációjában egy csúcs hatodfokú, akkor az erre a csúcsra illeszkedő 6 háromszög területének az összege legalább $|S(\varphi)| + 2|T(\varphi)| + |R(\varphi)|$, ahol $S(\varphi)$ egy φ oldalú négyzet, $T(\varphi)$ egy φ oldalú szabályos háromszög és $R(\varphi)$ egy olyan φ oldalú rombusz, amelynek egyik szöge $S(\varphi)$ egy és $T(\varphi)$ két szögének összegét 2π -re egészíti ki.

Figyelembe véve azt a tényt (ld. [33]), hogy egy φ -telített pontrendszer Delone triangulációjában egy háromszög területe legalább $|T(\varphi)|$, ebből következik, hogy a kapott φ^* -pontrendszer Delone triangulációjában a háromszögek területének az összege legalább $2|S(\varphi)| + (2k - 12)|T(\varphi)| + 2|R(\varphi)|$. Azonban $13 \leq k \leq 17$ és $b_k \leq a_k < \pi/3$ esetén ez az összeg nagyobb, mint 4π , az egységgömb felszíne, ellentmondás. Így $a_k < b_k$ minden $13 \leq k \leq 17$ esetén.

8. fejezet

12-szomszédos gömbelhelyezések

Tekintsük egységgömbök egy elhelyezését a 3-dimenziós euklideszi térben. Az elhelyezés két gömbjét szomszédosnak nevezzük, ha van közös határpontjuk. Ismert tény (vö. [69]), hogy egységgömbök egy elhelyezésében egy gömbnek legfeljebb 12 szomszédja lehet. Ha egységgömbök egy elhelyezésében minden gömbnek pontosan 12 szomszédja van, akkor azt 12-szomszédos elhelyezésnek nevezzük. Egy ilyen elhelyezés a következőképpen konstruálható.

Tekintsük egységgömböknek egy vízszintes hexagonális rétegét, amelyben a gömbök középpontjai egy síkban vannak és minden gömböt pontosan hat másik érint. Ennek a rétegnek a tetejére helyezzünk el egy ugyanilyen réteget olyan módon, hogy az első réteg minden gömbjét pontosan három gömb érintse a második rétegből. Az az eltolás, amely az első réteget a másodikba viszi, a második réteget egy harmadikba, és az eltolásnak, illetve az inverzének az ismételt alkalmazásával egységgömbök egy 12-szomszédos rácsszerű elhelyezéséhez jutunk, mégpedig a legsűrűbb rácsszerű gömbelhelyezéshez. Ezt az elhelyezést a kristallográfiában lapcentrált köbös elhelyezésnek is nevezik.

Vegyük észre, hogy az az eltolás, amely az első réteget a másodikba viszi, a második réteg gömbjeit az első réteg bemélyedései fölé helyezi. Azonban a harmadik réteg gömbjeit helyezhetjük az első réteg gömbjei fölé is, így az első és a harmadik réteg szimmetrikus lesz a második réteg gömbjeinek középpontjára illeszkedő síkra. Ilyen tükrözések ismételt alkalmazásával egy az előzőtől különböző, nem rácsszerű, 12-szomszédos elhelyezéshez jutunk. Ezt az elhelyezést a kristallográfiában hexagonális szoros illeszkedésű elhelyezésnek is nevezik.

Valójában végtelen sok különböző 12-szomszédos gömbelhelyezés állítható elő a párhuzamos hexagonális rétegek egymáshoz képesti helyzetének a változtatásával.

Fejes Tóth László több, mint 45 évvel ezelőtt [38]-ban, majd [40]-ben

fogalmazta meg azt a sejtést, hogy bármely 12-szomszédos gömbelhelyezés ilyen párhuzamos hexagonális rétegekből áll. 2012 szeptemberében Thomas Hales postázott egy kéziratot az arXiv preprint szerverre a sejtés egy rendkívül komplikált számítógépes bizonyításával (ld. [45]). Az [5] dolgozatban egy ettől független, lényegesen átláthatóbb bizonyítást adtunk Fejes Tóth László sejtésére. Ebben a részben ezt a bizonyítást ismertetjük nagy vonalakban.

Fejes Tóth László maga utalt rá, hogy a sejtés bizonyításának első lépéseként jó alsó korlátot kellene adni egy 12-szomszédos gömbelhelyezésben két nem szomszédos gömb középpontjának távolságára. Ez a probléma kapcsolatba hozható a 13 pontra vonatkozó Tammes problémával, amelyről az előző fejezetben már írtunk. Ugyanott említettük, hogy 2012-ben Oleg Muszinnak és Alekszej Taraszovnak sikerült meghatározni a_{13} pontos értékét, nevezetesen megmutatták, hogy $a_{13} = 57.13670307\dots^\circ$. Ebből az eredményből levezethető a következő alsó korlát egy 12-szomszédos gömbelhelyezésben két nem szomszédos gömb középpontjának távolságára. Legyen $a_0 = 57.13670309^\circ$, ami kicsit nagyobb, mint a_{13} .

8.1. Állítás. *Egy 12-szomszédos gömbelhelyezésben bármely két nem szomszédos gömb középpontjának távolsága legalább*

$$4 \sin \left(180^\circ \left(\frac{60^\circ}{a_0} - \frac{5}{6} \right) \right) = 2.51838585\dots$$

Megjegyezzük, hogy léteznek olyan, a határpontjaiktól eltekintve diszjunkt B_0, B_1, \dots, B_{13} gömbök, hogy a B_1, B_2, \dots, B_{12} gömbök érintik a B_0 gömböt és a B_0 és a B_{13} gömbök középpontjának távolsága

$$14/\sqrt{27} = 2.694301256\dots$$

A 8.1. Állítás bizonyítása a következő gömbi geometriai észrevételen alapul.

8.2. Állítás. *Legyen $C \in \mathbb{S}^2$ tetszőleges pont és $0 < \lambda < 1$. Legyen C^* a C pont antipodálisa \mathbb{S}^2 -n. Legyenek P és Q a C^* -tól különböző pontok \mathbb{S}^2 -n, és jelölje P' , illetve Q' a CP , illetve CQ szakaszok azon pontjait, amelyekre $CP' = \lambda \cdot CP$, illetve $CQ' = \lambda \cdot CQ$. Ekkor $P'Q' \geq \lambda \cdot PQ$.*

Indirekt tegyük fel, hogy két nem szomszédos gömb, legyenek ezek mondjuk B_0 és B_1 , középpontjának távolsága kisebb, mint

$$4 \sin \left(180^\circ \left(\frac{60^\circ}{a_0} - \frac{5}{6} \right) \right).$$

Jelölje \mathcal{P} azon 12 pont halmazát B_0 határán, amelyekben a 12 szomszédja érinti B_0 -t. Jelölje továbbá C^* a B_0 és B_1 gömbök középpontját összekötő szakasz metszéspontját B_0 határával, és legyen C a C^* pont antipodálisa B_0 határán. Végül legyen $\lambda = a_0/60^\circ$. Most alkalmazzuk a 8.2. Állításban definiált leképezést \mathcal{P} -re. Egyszerű számolással adódik, hogy ekkor \mathcal{P} képét kiegészítve a C^* ponttal, a kapott halmaz bármely két pontja közötti szférikus távolság legalább a_0 , ami nagyobb, mint a_{13} , ellentmondás.

Ennek a becslésnek a felhasználásával Fejes Tóth László sejtése már elemi geometriai eszközökkel igazolható. Egyszerű számolással adódik, hogy abban a háromszögben, melynek oldalai 2, 2 és $2.51838585\dots$ hosszúak, a leg-hosszabb oldallal szemközti szög $78.04071344\dots^\circ$. Legyen $b_0 = 78.04071344^\circ$, és legyen $r_0 = 90^\circ - b_0/2 = 50.97964328^\circ$.

8.3. Állítás. *Legyen B_0 egységgömbök egy 12-szomszédos elhelyezésének egy tetszőleges gömbje, és jelölje \mathcal{P} annak a 12 pontnak a halmazát, amelyekben B_0 -t érinti a 12 szomszédja. Ekkor \mathcal{P} -t egy \mathbb{S}^2 -beli pontrendszernek tekintve*

- \mathcal{P} bármely két különböző pontjának távolsága vagy 60° vagy legalább b_0 ,
- egy olyan kör sugara, amely \mathcal{P} egyik pontját sem tartalmazza a belsejében kisebb, mint r_0 .

Jelölje \mathcal{C} egy adott gömbön az érintési pontok konfigurációját a lapcentrált köbös elhelyezés esetén és jelölje \mathcal{C}' egy adott gömbön az érintési pontok konfigurációját a hexagonális szoros illeszkedésű elhelyezés esetén. Jegyezzük meg, hogy \mathcal{C} szimmetrikus az adott gömb középpontjára, míg \mathcal{C}' szimmetrikus az adott gömb középpontján átmenő vízszintes síkra. Azt is jegyezzük meg, hogy \mathcal{C} éppen egy $(3, 4, 3, 4)$ gömbi Archimedeszi mozaik csúcshalmaza.

8.4. Tétel. *Legyen \mathcal{P} olyan 12 pontból álló halmaz \mathbb{S}^2 -n, amelyre teljesül, hogy*

- bármely két különböző pont távolsága vagy 60° vagy legalább b_0 ,
- egy olyan kör sugara, amely \mathcal{P} egyik pontját sem tartalmazza a belsejében kisebb, mint r_0 .

Ekkor \mathcal{P} egybevágó vagy \mathcal{C} -vel vagy \mathcal{C}' -vel.

A 8.4. Tétel bizonyításának gondolatmenete a következő. Jelölje a \mathcal{P} pontrendszer egy Delone triangulációját \mathcal{D} (ez nem feltétlenül egyértelmű). Minden $1 \leq i \leq 3$ esetén \mathcal{D} egy háromszög lapját i -típusúnak fogjuk nevezni, ha i oldala legalább b_0 hosszú és $3 - i$ oldala 60° . Összefoglaljuk a \mathcal{D} gráf legfontosabb tulajdonságait, ezek közül néhány bizonyítása meglehetősen komplikált.

8.5. Állítás. *A \mathcal{D} gráfra a következők teljesülnek.*

- (1) *\mathcal{D} -nek 12 csúcsa, 30 éle és 20 háromszög lapja van.*
- (2) *Minden $1 \leq i \leq 3$ esetén \mathcal{D} egy i -típusú háromszög lapjának területe legalább akkora, mint annak a háromszögnek a területe, amelyben i oldal b_0 hosszú és $3 - i$ oldal 60° .*
- (3) *\mathcal{D} minden csúcsa \mathcal{D} legfeljebb két 0-típusú háromszög lapjának közös csúcsa.*
- (4) *\mathcal{D} -nek legfeljebb nyolc 0-típusú háromszög lapja van.*
- (5) *\mathcal{D} -nek nincs 3-típusú háromszög lapja van.*
- (6) *\mathcal{D} -nek legfeljebb egy 2-típusú háromszög lapja van.*

Jelölje ezek után a \mathcal{D} gráf 60° hosszúságú élekből álló részgráfját \mathcal{A} . Összefoglaljuk az \mathcal{A} gráf legfontosabb tulajdonságait, ezek közül is néhány bizonyítása meglehetősen komplikált.

8.6. Állítás. *Az \mathcal{A} gráfra a következők teljesülnek.*

- (1) *\mathcal{D} minden csúcsa \mathcal{A} -nak is csúcsa, következésképpen \mathcal{A} -nak is 12 csúcsa van.*
- (2) *\mathcal{A} -nak 24 éle van.*
- (3) *\mathcal{A} minden csúcsa negyedfokú.*
- (4) *\mathcal{A} -nak 14 lapja van.*
- (5) *\mathcal{A} nyolc lapja szabályos háromszög, hat lapja pedig négyzet.*
- (6) *\mathcal{A} minden csúcsa \mathcal{A} két szabályos háromszög lapjának és két négyzet lapjának közös csúcsa.*

Ha \mathcal{A} minden éle \mathcal{A} egy szabályos háromszög lapjának és egy négyzet lapjának közös éle, akkor \mathcal{A} egybevágó a $(3, 4, 3, 4)$ gömbi Archimedeszi mozaikkal, így \mathcal{P} egybevágó \mathcal{C} -vel.

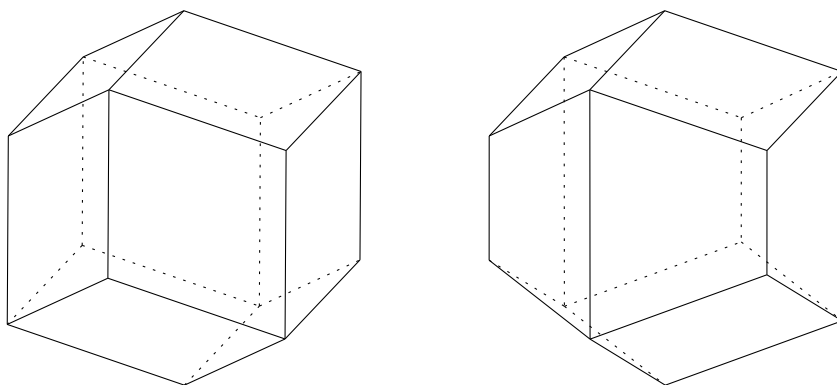
Másrészt ha \mathcal{A} -nak van olyan éle, amely \mathcal{A} két szabályos háromszög lapjának vagy két négyzet lapjának közös éle, akkor az erre az élre illeszkedő főkör hat ilyen élből áll, ezek felváltva \mathcal{A} két szabályos háromszög lapjának, illetve két négyzet lapjának közös élei, így ebben az esetben \mathcal{P} egybevágó \mathcal{C}' -vel.

Ezzel a 8.4. Tétel bizonyítása teljes.

A 8.4. Tétel felhasználásával Fejes Tóth László sejtésének a bizonyítása a következőképpen fejezhető be. Legyen \mathcal{B} egységgömbök egy 12-szomszédos elhelyezése, és tekintsük a tér \mathcal{B} -hez tartozó Dirichlet-Voronoi cellafelbontását. Jegyezzük meg, hogy a Dirichlet-Voronoi cellafelbontás egymáshoz teljes lapok mentén csatlakozó konvex poliéderekből áll.

8.7. Állítás. *Legyen B_0 tetszőleges \mathcal{B} -beli egységgömb. Ekkor B_0 Dirichlet-Voronoi cellája vagy egy B_0 köré írt rombdodekaéder vagy egy B_0 köré írt trapezo-rombdodekaéder.*

A következő ábra bal oldalán egy rombdodekaéder, a jobb oldalán pedig egy trapezo-rombdodekaéder látható.



8.1. ábra

Ha minden Dirichlet-Voronoi cella rombdodekaéder, akkor \mathcal{B} egyértelműen meghatározott, és megegyezik a legsűrűbb rácsszerű gömbelhelyezéssel, amely párhuzamos hexagonális rétegekből áll.

Másrészt, ha van olyan Dirichlet-Voronoi cella, amely trapezo-rombdodekaéder, akkor a Dirichlet-Voronoi cellafelbontásban szükségképpen található trapezo-rombdodekaédereknek egy olyan \mathcal{L} hexagonális rétege, amelyben minden trapezo-rombdodekaéder teljes trapéz lap mentén csatlakozik hat másik trapezo-rombdodekaéderhez. Jegyezzük meg, hogy ha egy rombdodekaédert kettévágunk a rombdodekaéder egy élére merőleges, a rombdodekaéder beírt gömbjének középpontján átmenő síkkal és az egyik részt helyettesítjük a másiknak erre a síkra vonatkozó tükörképével, akkor egy trapezo-rombdodekaéderhez jutunk. Ennélfogva az \mathcal{L} réteghez ugyanarról az oldalról, a közös rombusz lapok mentén csatlakozó Dirichlet-Voronoi cellák vagy rombdodekaéderek egy \mathcal{L} -vel párhuzamos hexagonális réteget, vagy trapezo-rombdodekaéderek egy \mathcal{L} -vel párhuzamos hexagonális réteget alkotják. Ennek a gondolatmenetnek az ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy a

Dirichlet-Voronoi cellafelbontás rombdodekaéderek, illetve trapezo-rombdodekaéderek párhuzamos hexagonális rétegeiből épül fel. Ebből következik, hogy \mathcal{B} egységömbök párhuzamos hexagonális rétegeiből áll ebben az esetben is.

Ezzel Fejes Tóth László sejtését igazoltuk.

8.8. Tétel. *Egységömbök bármely 12-szomszédos elhelyezése a 3-dimenziós térben párhuzamos hexagonális rétegekből áll.*

Összefoglalás

A dolgozatban egyszerű geometriai alakzatok, pontok, körök, szabályos sokszögek, gömbök, kockák elrendezéseivel kapcsolatos eredményeket tárgyaltunk, ezeket a jobb áttekinthetőség kedvéért pontokba szedve is felsoroljuk.

- A [6] dolgozatban megmutattuk, hogy általános helyzetű pontok egy n elemű halmazának 4 elemű részhalmazai között mindig található $\lfloor 2n/9 \rfloor$ darab olyan, amelyek diszjunkt üres konvex négyszögek csúcshalmazai, és ez a korlát éles minden $n \leq 21$ esetén.
- A [9] dolgozatban megmutattuk, hogy bármely szabályos sokszög blokkolási száma vagy 3, vagy 4. Azt is megmutattuk, hogy a négyzet blokkolási száma 4, míg a szabályos $6n$ -szögeké 3 minden n pozitív egész számra.
- A [11] dolgozatban megmutattuk, hogy bármely K konvex síkidomra, a K síkidom olyan egybevágó példányainak minimális száma, amelyek sűrű felhőt alkothatnak K körül, legfeljebb 9, és egyenlőség csak a kör esetén fordul elő. A dolgozatban az állítás egy stabilitás változatát is igazoltuk.
- A [10] dolgozatban megmutattuk, hogy egy teljes lapok mentén csatlakozó d -dimenziós egységkockákból álló maximális kígyó minimális elemszáma $8d - 1$ tetszőleges $d \geq 3$ esetén. Ezzel megoldottunk Heiko Harborth egy problémáját. A [7] dolgozatban igazoltuk, hogy egy csúcsokban csatlakozó egybevágó szabályos háromszögekből álló maximális kígyó minimális elemszáma 7. Végül a [12] dolgozatban beláttuk, hogy egy zárt egységkörrel homeomorf (nem feltétlenül konvex) síkidom egybevágó példányaiból álló maximális kígyó elemszáma legalább 4, és bizonyos síkidomok 4 egybevágó példánya alkothat maximális kígyót.
- A [8] dolgozatban meghatároztuk $k \leq 6$ esetén az összes olyan (n, k) értékpárt, amelyre létezik n gömbből álló, (topológikusan) összefüggő, k -szomszédos elhelyezés. Továbbá $7 \leq k \leq 10$ esetén korlátokat adtunk

azon gömbök minimális számára, amelyek k -szomszédos elhelyezést alkothatnak.

- Az [1] dolgozatban éles felső becslést adtunk pozitív homogenitású, μ -rendű Minkowski körelrendezések sűrűségére tetszőleges $\mu \leq \sqrt{3} - 1$ esetén. Továbbá a [4] dolgozatban felső becslést adtunk pozitív homogenitású, μ -rendű, d -dimenziós Minkowski gömbelrendezések sűrűségére tetszőleges $d \geq 2$ és $\mu \leq \frac{1}{n}$ esetén.
- A [2] és [3] dolgozatokban felső becsléseket adtunk egy 3-dimenziós egységgömb felszínén elhelyezett 13, 14, 15, 16, 17 pont között fellépő távolságok minimumának a maximumára. Ez a nevezetes Tammes probléma.
- Az [5] dolgozatban megmutattuk, hogy egységgömbök bármely 12-szomszédos elhelyezése a 3-dimenziós térben párhuzamos hexagonális rétegekből áll. Ezzel igazoltuk Fejes Tóth Lászlónak egy régi sejtését.

Irodalomjegyzék

Feldolgozott saját publikációk

- [1] K. Böröczky, L. Szabó: Minkowski arrangements of circles in the plane. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II, Suppl.* **70** (2002), 87-92.
- [2] K. Böröczky, L. Szabó: Arrangements of 13 points on a sphere. In: *Discrete geometry - In honor of W. Kuperberg's 60th birthday*, (A. Bezdek, ed.), Marcel Dekker, New York-Basel, 2003, pp. 111-184.
- [3] K. Böröczky, L. Szabó: Arrangements of 14, 15, 16 and 17 points on a sphere. *Studia Sci. Math. Hungar.* **40** (2003), 407-421.
- [4] K. Böröczky, L. Szabó: Minkowski arrangements of spheres. *Monatshefte für Mathematik* **141** (2004), 11-19.
- [5] K. Böröczky, L. Szabó: 12-neighbour packings of unit balls in \mathbb{E}^3 , *Acta Math. Hungar.* **146** (2015), 421-448.
- [6] A. Gulyás, L. Szabó: Disjoint empty convex polygons in planar point sets. *Elem. Math.* **56** (2001), 62-70.
- [7] H. Harborth, L. Szabó, Z. Ujváry-Menyhárt: Smallest limited vertex-to-vertex snakes of unit triangles. *Geometriae Dedicata* **78** (1999), 171-181.
- [8] H. Harborth, L. Szabó, Z. Ujváry-Menyhárt: Regular sphere packings. *Archiv der Mathematik (Basel)* **78** (2002), 81-89.
- [9] A. Kemnitz, L. Szabó, Z. Ujváry-Menyhárt: Protecting regular polygons. *Beiträge Alg. Geom.* **41** (2000), 391-399.
- [10] L. Szabó, Z. Ujváry-Menyhárt: Maximal facet-to-facet snakes of unit cubes. *Beiträge Alg. Geom.* **42** (2001), 203-217.

- [11] L. Szabó, Z. Ujváry-Menyhárt: Clouds of planar convex bodies. *Aequationes Mathematicae* **63** (2002), 292-302.
- [12] L. Szabó, Z. Ujváry-Menyhárt: Smallest limited snakes. *Elem. Math.* **62** (2007), 98-101.

További saját publikációk

- [13] K. Böröczky, L. Szabó: ε -quasi-twelve-neighbour packings of unit balls in \mathbb{E}^3 , *Acta Math. Hungar.* **148** (2016), 509-521.
- [14] H. Harborth, M. Koch, L. Szabó: Newton numbers for overlapping circular discs. *Studia Sci. Math. Hungar.* **37** (2001), 119-130.
- [15] A. Kemnitz, L. Szabó: Relative Newton numbers of regular polygons with equal side lengths. *Studia Sci. Math. Hungar.* **37** (2001), 343-354.
- [16] L. Szabó: A simple proof for the Jordan measurability of convex sets. *Elemente der Mathematik* **52** (1997), 84-86.
- [17] L. Szabó: Recent results on illumination problems. In: *Intuitive geometry, (Budapest, 1995)*, *Bolyai Society Mathematical Studies* **6**, (I. Bárány, K. Böröczky, eds.), János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1997, pp. 207-221.

További hivatkozások

- [18] I. Bárány, P. Valtr: Planar point sets with a small number of empty convex polygons. *Studia Sci. Math. Hungar.* **41** (2004), 243-266.
- [19] T. Bisztriczky, K. Böröczky Jr, H. Harborth, L. Piepmeyer: On the smallest limited snake of unit disks. *Geometriae Dedicata* **40** (1991), 319-324.
- [20] M. N. Bleicher, J. M. Osborn: Minkowskian distribution of convex discs. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 5-17.
- [21] K. Böröczky: Über die Newtonsche Zahl regulärer Vielecke. *Period. Math. Hungar.* **1** (1971), 113-119.
- [22] K. Böröczky: The problem of Tammes for $n = 11$. *Studia Sci. Math. Hungar.* **18** (1983), 165-171.

- [23] K. Böröczky, V. Soltan: Translational and homothetic clouds for convex bodies. *Studia Sci. Math. Hungar.* **32** (1996), 93-102.
- [24] K. Böröczky Jr.: Rectangular convexity of convex domains of constant width. *Geom. Dedicata* **34** (1990), 13-18.
- [25] K. Böröczky Jr, V. Soltan: Smallest maximal snakes of translates of convex domains. *Geometriae Dedicata* **54** (1995), 31-44.
- [26] K. Böröczky Jr., G. Tardos: The longest segment in the complement of a packing. *Mathematika* **49** (2002), 45-49.
- [27] H. S. M. Coxeter: *Regular Polytopes*. Dover, New York, 1973.
- [28] L. Danzer: Endliche Punktmengen auf der 2-Sphäre mit möglichst großem Minimalabstand. Habilitationsschrift, Universität Göttingen, 1963. (English translation: Finite point-sets on S^2 with minimum distance as large as possible. *Discrete Math.* **60** (1986), 3-66.)
- [29] P. Erdős, Gy. Szekeres: A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.* **2** (1935), 463-470.
- [30] G. Fejes Tóth, H. Harborth: Kugelpackungen mit vorgegebenen Nachbarnzahlen, *Studia Sci. Math. Hungar.* **22** (1987), 79-82.
- [31] G. Fejes Tóth, W. Kuperberg: Packing and covering with convex sets. In: *Handbook of convex geometry*, (P. M. Gruber, J. M. Wills, eds.), North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1993, pp. 799-860.
- [32] L. Fejes Tóth: Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems. *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **53** (1943), 66-68.
- [33] L. Fejes Tóth: On the densest packing of spherical caps. *Amer. Math. Monthly* **56** (1949), 330-331.
- [34] L. Fejes Tóth: Minkowskian distribution of discs. *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 999-1004.
- [35] L. Fejes Tóth: Packings and coverings in the plane. In: *Proc. Coll. Convexity (Copenhagen, 1965)*, Københavns Univ. Mat. Inst., 1967, pp. 78-87.

- [36] L. Fejes Tóth: On the number of equal discs that can touch another of the same kind. *Studia Sci. Math. Hungar.* **2** (1967), 363-367.
- [37] L. Fejes Tóth: Minkowskian circle-aggregates. *Math. Ann.* **171** (1967), 97-103.
- [38] L. Fejes Tóth: Remarks on a theorem of R. M. Robinson. *Studia Sci. Math. Hungar.* **4** (1969), 441-445.
- [39] L. Fejes Tóth: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Zweite Auflage. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [40] L. Fejes Tóth: Research problem no. 44. *Period. Math. Hungar.* **20** (1989), 89-91.
- [41] L. Fejes Tóth: Minkowski circle packings on the sphere. *Discrete Comput. Geom.* **22** (1999), 161-166.
- [42] A. Florian: Zur Geometrie der Kreislagerungen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **18** (1967), 341-358.
- [43] J. Francis: Some combinatorial geometry for convex quadrilaterals. *Period. Math. Hungar.* **39** (1999), 145-152.
- [44] T. Gerken: Empty convex hexagons in planar point sets. *Discrete Comput. Geom.* **39** (2008), 239-272.
- [45] T. C. Hales: A proof of Fejes Tóth's conjecture on sphere packings with kissing number twelve. eprint arXiv:1209.6043.
- [46] H. Harborth: Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen. *Elem. Math.* **33** (1978), 116-118.
- [47] H. Harborth: Problem 45: Kleinste endliche Schlange. *Math. Semesterber.* **36** (1989), 269-270.
- [48] L. Hárs: The Tammes problem for $n = 10$. *Studia Sci. Math. Hungar.* **21** (1986), 439-451.
- [49] R. Heidelberg, L. Stege, H. Weiß: Lösung zu Problem 45, *Math. Semesterber.* **38** (1991), 137-138.
- [50] F. Hering: Beweis einer Vermutung von Heiko Harborth über Polyominos aus Quadraten. *Math. Semesterber.* **38** (1991), 223-237.

- [51] J. D. Horton: Sets with no empty convex 7-gons. *Canad. Math. Bull.* **26** (1983), 482-484.
- [52] K. Hosono, M. Urabe: On the number of disjoint convex quadrilaterals for a planar point set. *Comp. Geom. Theory Appl.* **20** (2001), 97-104.
- [53] A. Kemnitz, M. Möller: On the Newton number of rectangles. In: *Intuitive geometry, (Budapest, 1995)*, *Bolyai Society Mathematical Studies* **6**, (I. Bárány, K. Böröczky, eds.), János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1997, pp. 373-381.
- [54] A. Kemnitz, M. Möller, D. Wojzischke: Bounds for the Newton number in the plane. *Results Math.* **41** (2002), 128-139.
- [55] G. Kertész: Nine points on the hemisphere. In: *Intuitive geometry (Szeged, 1991)*, *Colloquia Math. Soc. János Bolyai* **63**, (K. Böröczky, G. Fejes Tóth eds.) North-Holland, Amsterdam, 1994, pp. 189-196.
- [56] P. Koebe: Kontaktprobleme der konformen Abbildung, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math-Phys. Klasse* **88** (1936), 141-164.
- [57] K. Kuratowski: Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930), 271-283.
- [58] J. Linhart: Die Newtonsche Zahl von regelmäßigen Fünfecken. *Period. Math. Hungar.* **4** (1973), 315-328.
- [59] H. Martini, V. Soltan: Combinatorial problems on the illumination of convex bodies. *Aequationes Math.* **57** (1999), 121-152.
- [60] J. Molnár: Aggregati di cerchi di Minkowski. *Ann. Mat. Pura Appl.* **71** (1966), 101-107.
- [61] O. R. Musin: The kissing number in four dimensions. *Annals Math.* **168** (2008), 1-32.
- [62] O. R. Musin, A. S. Tarasov: The strong thirteen spheres problem. *Discrete Comput. Geom.* **48** (2012), 128-141.
- [63] O. R. Musin, A. S. Tarasov: The Tammes problem for $N = 14$. *Experimental Math.* **24** (2015), 460-468.
- [64] C. M. Nicolás: The empty hexagon theorem. *Discrete Comput. Geom.* **38** (2007), 389-397.

- [65] A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane: New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions. *J. Comb. Theory, Ser. A* **26** (1979), 210-214.
- [66] R. M. Robinson: Arrangement of 24 points on a sphere. *Math. Ann.* **144** (1961), 17-48.
- [67] C. A. Rogers: The packing of equal spheres. *Proc. London Math. Soc.* **8** (1958), 609-620.
- [68] K. Schütte, B. L. van der Waerden: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz? *Math. Ann.* **123** (1951), 96-124.
- [69] K. Schütte, B. L. van der Waerden: Das Problem der dreizehn Kugeln. *Math. Ann.* **125** (1953), 325-334.
- [70] I. Talata: On translational clouds for a convex body. *Geom. Dedicata* **80** (2000), 319-329.
- [71] P. M. L. Tammes: On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen grains. *Rec. Trav. Bot. Neerl.* **27** (1930), 1-84.
- [72] G. Tóth, P. Valtr: Note on the Erdős-Szekeres theorem. *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998), 457-459.
- [73] C. Zong: Packing and covering. Ph.D. Thesis. TU Wien, 1993.