Definíciók és tételek

1. Felhasznált matematikai fogalmak

Jelölés

1. $\mathbb{N}$: a természetes számok halmaza
2. $\mathbb{L}$: a logikai értékek halmaza, $\mathbb{L} \overset{\text{def}}{=} \{$ igaz, hamis $\}$
3. véges sorozat: $\alpha = < \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$, értelmezési tartománya: $\mathcal{D}_\alpha = \{1, \ldots, n\}$
4. az $\alpha =< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >$ sorozat hossza: $|\alpha| = n$
5. végtelen sorozat: $\alpha = < \alpha_1, \ldots >$, értelmezési tartománya: $\mathcal{D}_\alpha = \mathbb{N}$
6. az A halmaz elemeiből képzett véges sorozatok halmaza: A^*
7. az A halmaz elemeiből képzett végtelen sorozatok halmaza: A^∞
8. az A halmaz elemeiből képzett véges és végtelen sorozatok halmaza: A^{**}

Definíció

1. az $\alpha \in A^*$ és a $\beta \in A^{**}$ sorozatok *konkatenáltja*: $\text{kon}(\alpha, \beta) \overset{\text{def}}{=} < \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1 \ldots >$, ahol $n = |\alpha|$
2. Az $\alpha \in A^{**}$ *redukáltjának* nevezzük, és $\text{red}(\alpha)$-val jelöljük azt a sorozatot, amit úgy kapunk, hogy az α minden azonos elemekből álló véges részsorozatát a részsorozat egyetlen elemével helyettesítjük.
3. Legyen $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1} \in A^*,\ \alpha^n \in A^{**}$.
   $\chi_n(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n) \overset{\text{def}}{=} \text{red}(\text{kon}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n))$
4. Legyen $\alpha^i \in A^*\ \ (i \in \mathbb{N})$. $\chi_\infty(\alpha^1, \alpha^2, \ldots) \overset{\text{def}}{=} \text{red}(\text{kon}(\alpha^1, \alpha^2, \ldots)$
5. Ha $\alpha =< \alpha_1, \ldots, \alpha_n >\in A^*$, akkor $\tau(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \alpha_n$
6. Legyen A_i tetszőleges halmaz $(i = 1, \ldots, n)$ $(n \in \mathbb{N})$.
   $\overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i \overset{\text{def}}{=} A_1 \times \ldots \times A_n \overset{\text{def}}{=} \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\ \ (i = 1, \ldots, n)\}$
7. Legyen $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \mathbb{N}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subset \mathbb{N} \quad (m, n \in \mathbb{N},\ \ m < n)$.
   $A = \overset{n}{\underset{k=1}{\times}} A_{i_k}$, $B = \overset{m}{\underset{k=1}{\times}} A_{j_k}$. A B halmaz az A halmaz *altere*, ha $J \subseteq I$.
8. Legyen $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset \mathbb{N}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_m\} \subset \mathbb{N} \quad (m, n \in \mathbb{N},\ \ m < n)$.
   $A = \overset{n}{\underset{k=1}{\times}} A_{i_k}$, $B = \overset{m}{\underset{k=1}{\times}} A_{j_k}$. A B altér *kiegészítő altere* az A-ra: $B' \overset{\text{def}}{=} \underset{k \in (I \setminus J)}{\times} A_k$.
9. Legyen $a \in A$ és B altere A-nak. Ekkor a-nak a B-re vett *projekciója*
   $\text{pr}_B(a) \overset{\text{def}}{=} (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_m})$
10. Legyen $\alpha \in A^*$. $\text{pr}_B(\alpha) \overset{\text{def}}{=} \text{pr}_{B^*}(\alpha) \overset{\text{def}}{=} < \text{pr}_B(\alpha_1), \ldots, \text{pr}_B(\alpha_n) >$
11. Az $R \subseteq A \times B$ halmazt *bináris relációnak* nevezzük.

12. Az $R \subseteq A \times B$ reláció képe $a \in A$ pontban: $R(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B \mid (a,b) \in R\}$.

13. Az $R \subseteq A \times B$ reláció *értelmezési tartománya*: $\mathcal{D}_R \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists b \in B : \ (a,b) \in R\}$.

14. Az $R \subseteq A \times B$ reláció *értékkészlete*: $\mathcal{R}_R \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B \mid \exists a \in A : \ (a,b) \in R\}$.

15. Az $R \subseteq A \times B$ reláció *determinisztikus reláció* (parciális függvény), ha $\forall a \in \mathcal{D}_R |R(a)| = 1$.

16. Az $R \subseteq A \times B$ reláció *függvény*, ha R parciális függvény és $\mathcal{D}_R = A$.

17. Az $R \subseteq A \times B$ reláció *inverze*: $R^{(-1)} \stackrel{\text{def}}{=} \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in R\}$.

18. Az $R \subseteq A \times B$ reláció *komplemense*: $\widetilde{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,b) \in A \times B \mid (a,b) \notin R\}$.

19. Az $R_1 \subseteq A \times B$ és az $R_2 \subseteq B \times C$ relációk *kompozíciója*:
$R_2 \circ R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : \ (a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2\}$.

20. Az $R_1 \subseteq A \times B$ és az $R_2 \subseteq B \times C$ relációk *szigorú kompozíciója*:
$R_2 \odot R_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(a,c) \in A \times C \mid R_1(a) \subseteq \mathcal{D}_{R_2} \wedge \exists b \in B : \ (a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2\}$.

21. $R \subseteq A \times A$. $\mathrm{id}_A \stackrel{\text{def}}{=} R^0 \stackrel{\text{def}}{=} A \times A$.

22. Az $R \subseteq A \times A$ reláció *n. hatványa*: $R^n \stackrel{\text{def}}{=} R \circ R^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

23. A $H \subseteq B$ halmaz $R \subseteq A \times B$ reláció szerinti *inverz képe*:
$R^{(-1)}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists h \in H : \ (a,h) \in R\}$.

24. A $H \subseteq B$ halmaz $R \subseteq A \times B$ reláció szerinti *ősképe*:
$R^{-1}(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid R(a) \subseteq H \wedge R(a) \neq \emptyset\}$.

25. Az $R \subseteq A \times A$ reláció $\alpha_0 \in A$ kezdőpontú, *véges pontláncainak* halmaza:
$L_R(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{< \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q > \in A^* \mid q \in \mathbb{N}_0 \wedge \forall i \in [1,q] : \ \alpha_i \in R(\alpha_{i-1}) \wedge \alpha_q \notin \mathcal{D}_R\}$.

26. Az $R \subseteq A \times A$ reláció $\alpha_0 \in A$ kezdőpontú *végtelen pontláncainak* halmaza:
$L_R^\infty(\alpha_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{< \alpha_0, \alpha_1, \ldots > \in A^\infty \mid \forall i \in \mathbb{N} : \ \alpha_i \in R(\alpha_{i-1})\}$.

27. Az $R \subseteq A \times A$ reláció *lezártja*:
$\mathcal{D}_{\overline{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid L_R^\infty(a) = \emptyset\}$ és $\forall a \in \mathcal{D}_{\overline{R}} : \ \overline{R}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau(\alpha) \mid \alpha \in L_R(a_0)\}$.

28. Az $R \subseteq A \times A$ reláció *korlátos lezártja*:
$\mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid L_R^\infty(a) = \emptyset \wedge \exists n_a \in \mathbb{N} : \ \forall \alpha \in L_R(a) : |\alpha| \leq n_a\}$ és
$\forall a \in \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} : \ \overline{\overline{R(a)}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\tau(\alpha) \mid \alpha \in L_R(a_0)\}$.

29. Az $f \subseteq A \times \mathbb{L}$ reláció *logikai függvény (állítás)*, ha függvény.

30. Az f logikai függvény *igazsághalmaza*: $[f] \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid f(a) = \text{igaz}\}$.

31. Az $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ reláció *igazsághalmaza* $[R] \stackrel{\text{def}}{=} R^{-1}(\{ \text{ igaz } \})$.

32. Legyen $R \subseteq A \times B$, $H \subseteq A$. Az R reláció leszűkítése a H halmazra:
$R|_H \stackrel{\text{def}}{=} (R \cap (H \times B))$.

33. Legyen $R \subseteq A \times A$ és $\pi : A \to \mathbb{L}$. Az R reláció megszorítása a π feltételre:
$R|_\pi \stackrel{\text{def}}{=} (R \cap ([\pi] \times A)) \cup \{(a,a) \in A \times A \mid [\pi] \setminus \mathcal{D}_R\}$.

Megjegyzés: $R|_{\pi} \neq R|_{[\pi]}$!

34. $\overline{R|_{\pi}}$ az R reláció π feltételre vonatkozó lezártja, $\overline{\overline{R|_{\pi}}}$ az R reláció π feltételre vonatkozó korlátos lezártja.

Állítás

1. $[f] \ = \ f^{-1}(\{\text{ igaz }\})$.

2. Ha $\forall n \in \mathbb{N}: \ |A| > n$, akkor $\exists R \subseteq A \times A: \ \overline{R} \neq \overline{\overline{R}}$.

2. Alapvető definíciók és tételek

Definíció

1. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges véges vagy megszámlálható halmaz. Az $A \stackrel{\text{def}}{=} A_1 \times \ldots \times A_n$ halmazt *állapottér*nek, az A_i halmazokat *típusértékhalmazok*nak nevezzük.

2. Az állapottér elemeit (az $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ pontokat) *állapotok*nak nevezzük.

3. Az $a_i : A \to A_i$ projekciókat *változók*nak nevezzük ($i = 1, \ldots, n$).

4. Az $F \subseteq A \times A$ relációt *feladat*nak nevezzük.

5. Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt *program*nak nevezzük, ha

1. $\mathcal{D}_S = A$
2. $\forall a \in A: \ \forall \alpha \in S(a): \ \alpha_1 = a$
3. $\forall \alpha \in \mathcal{R}_S: \ \alpha = \text{red}(\alpha)$

6. A $p(S) \subseteq A \times A$ reláció az $S \subseteq A \times A^{**}$ program *programfüggvénye*, ha

1. $\mathcal{D}_{p(S)} = \{a \in A \mid S(a) \subseteq A^*\}$
2. $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S)}: \ p(S)(a) = \{b \in A \mid \exists \alpha \in S(a): \ \tau(\alpha) = b\}$.

7. Az $S \subseteq A \times A^{**}$ program *megoldja* az $F \subseteq A \times A$ feladatot, ha

1. $\mathcal{D}_F \subseteq \mathcal{D}_{p(S)}$
2. $\forall a \in \mathcal{D}_F: \ p(S)(a) \subseteq F(a)$.

8. $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. S_1 és S_2 *ekvivalensek*, ha $p(S_1) \ = \ p(S_2)$.

9. Legyen B altere az A állapottérnek. Az $F \subseteq B \times B$ *feladat kiterjesztése* az A térre: $F' \ = \ \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid (\text{pr}_B(a_1), \text{pr}_B(a_2)) \in F\}$.

10. Legyen B altere az A állapottérnek, B' a B altér kiegészítő altere az A-ra. Az $S \subseteq B \times B^{**}$ *program kiterjesztése* A-ra:
$S' = \{(a, \alpha) \in A \times A^{**} \mid (\text{pr}_B(a), \text{pr}_B(\alpha)) \in S \land \forall i \in \mathcal{D}_\alpha \text{pr}_{B'}(\alpha_i) = \text{pr}_{B'}(a)\}$.

11. Legyen B közös altere A_1-nek és A_2-nek. S_1 program A_1-en, S_2 program A_2-n. S_1 és S_2 *ekvivalensek*, ha $\text{pr}_{B \times B}(p(S_1)) \ = \ \text{pr}_{B \times B}(p(S_2))$.

12. Legyen B altere A-nak. A $G \subseteq A \times A$ feladat *vetítéstartó* a B altér felett, ha $\forall a_1, a_2 \in \mathcal{D}_G: \ (\text{pr}_B(a_1) \ = \ \text{pr}_B(a_2) \Rightarrow \text{pr}_B(G(a_1)) \ = \ \text{pr}_B(G(a_2)))$.

13. Legyen B' altere A-nak. A $G \subseteq A \times A$ feladat *bővített identitás* a B' altér felett, ha $\forall (a_1, a_3) \in G: \ \exists (a_1, a_4) \in G: \ (\mathrm{pr}_{B'}(a_4) = \mathrm{pr}_{B'}(a_1) \wedge \mathrm{pr}_B(a_3) = \mathrm{pr}_B(a_4))$.

Állítás

Legyen B altere A-nak, B' B kiegészítő altere A-ra, S program B-n, $F \subseteq B \times B$ feladat, S' illetve F' S-nek, illetve F-nek kiterjesztése A-ra, S_1 program A-n, $G \subseteq A \times A$ feladat, $G_1 = \mathrm{pr}_{B \times B}(G)$, és legyen S_1 és S ekvivalens B-n.

1. S' megoldja G-t $\Rightarrow$ S megoldja G_1-et

2. S_1 megoldja F'-t $\Rightarrow$ S megoldja F-et

3. S' megoldja F'-t $\Leftrightarrow$ S megoldja F-et

4. S megoldja G_1-et, G vetítéstartó B felett, és bővített identitás B' felett $\Rightarrow$ S' megoldja G-t.

3. A típus

Definíció

1. Legyen

T tetszőleges nem üres, véges vagy megszámlálható halmaz

$I_S : A \to \mathbb{L}$ *specifikációs invariáns*, $T_S = [I_S]$

$\mathbb{F} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ feladatok halmaza:

$$\forall i \in [1,n] : F_i \subseteq A_i \times A_i \ \ (A_i = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_{n_i}}) \quad \exists j \in [1, n_i] : A_{i_j} = T_S$$

A $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathcal{F})$ hármast *típusspecifikációnak* nevezzük.

2. Legyen

E tetszőleges nem üres, véges vagy megszámlálható halmaz, az elemi típusértékek halmaza

$\varrho \subseteq E^* \times T'$ *reprezentációs függvény*

$I : E^* \to \mathbb{L}$ *típusinvariáns*

$\mathbb{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ programok halmaza:

$$\forall i \in [1,m] : S_i \subseteq A_i \times A_i^{**} \ \ (A_i = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_{m_i}}) \quad \exists j \in [1, m_i] : A_{i_j} = E^*$$

A $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathcal{S})$ hármast *típusnak* nevezzük.

3. A $\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathcal{S})$ típus *megfelel* a $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathcal{F})$ típusspecifikációnak, ha

1. $T \subseteq T' \wedge \varrho([I]) = T_S$
2. $\forall F \in \mathcal{F} : \ \exists S \in \mathcal{S}S$ a *ϱ-n keresztül megoldja* F-et.

4. $A^S = A_1^S \times \ldots \times A_m^S$, $S \subseteq A^S \times (A^S)^{**}$ program, $A^F = A_1^F \times \ldots \times A_n^F$, $F \subseteq A^F \times A^F$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Legyen $A^{F'} = A_1^{F'} \times \ldots \times A_m^{F'}$, ahol

$$A_i^{F'} := \begin{cases} T_S & \text{ha } A_i^S \neq E^* \\ A_i^S & \text{ha } A_i^S \neq E^* \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$\gamma \subseteq A^S \times A^{F'}$, ahol

$$\mathrm{pr}_{A_i^S \times A_i^{F'}}(\gamma) = \begin{cases} \varrho_{|[I]} & \text{ha } A_i^S = E^* \\ \mathrm{id}_{A_k^S} & \text{ha } A_i^S \neq E^* \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$S \subseteq A^S \times (A^S)^{**}$ *a ϱ-n keresztül megoldja* $F \subseteq A^F \times A^F$-et, ha

1. A^F altere $A^{F'}$-nek
2. $\mathcal{D}_{F'} \subseteq \mathcal{D}_{\gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}}$
3. $\forall a \in \mathcal{D}'_F: \ \gamma \odot p(S) \odot \gamma^{(-1)}(a) \subseteq F'(a)$

ahol F' az F kiterjesztettje $A^{F'}$-re.

4. Specifikáció

Definíció

1. Az $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ *utófeltétel* $S \subseteq A \times A^{**}$ programra vonatkozó *leggyengébb előfeltételének* nevezzük azt az $\mathrm{lf}(S, R)$ állítást, amelyre $[\mathrm{lf}(S, R)] = \{a \in \mathcal{D}_{p(S)} \mid p(S)(a) \subseteq [R]\}$.

2. B az $F \subseteq A \times A$ feladat *paramétertere*, ha $\exists F_1 \subseteq A \times B: \ \exists F_2 \subseteq B \times A \ F = F_2 \circ F_1$.

Állítás

1. $[\mathrm{lf}(S, R)] = p(S)^{-1}([R])$

2. $\mathrm{lf}(S, \text{hamis}) = \text{hamis}$ (A *csoda kizárásának elve*.)

3. $\mathrm{lf}(S, P \wedge Q) = \mathrm{lf}(S, P) \wedge \mathrm{lf}(S, Q)$

4. $\mathrm{lf}(S, P \vee Q) \Leftarrow \mathrm{lf}(S, P) \vee \mathrm{lf}(S, Q)$

5. Ha $Q \Rightarrow R$, akkor $\mathrm{lf}(S, Q) \Rightarrow \mathrm{lf}(S, R)$ (*monotonitás*)

6. S megoldja F-et $\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{D}_F: \ a \in [\mathrm{lf}(S, P(F(a)))]$

7. S megoldja F-et $\Leftrightarrow \forall H \subseteq \mathcal{D}_{F^{-1}}: \ F^{-1}(H) \subseteq [\mathrm{lf}(S, P(H))]$

8. *A specifikáció tétele:*
Legyen $F \subseteq A \times A$, B az F egy paramétertere. Legyen $b \in B$ és $[Q_b] = F_1^{(-1)}(b)$ és $[R_b] = F_2(b)$. Ha $\forall b \in B: \ Q_b \Rightarrow \mathrm{lf}(S, R_b)$, akkor S megoldja F-et.

9. A specifikáció tétele nem megfordítható, azaz $\exists F \subseteq A \times A: \ \exists S \subseteq A \times A^{**}$ program amely megoldja F-t, és $\exists b \in B: \ Q_b \not\Leftarrow \mathrm{lf}(S, R_b)$.

5. Elemi programok

Definíció

1. *Elem*inek nevezünk egy A állapottéren egy S programot, ha
$\forall a \in A: \ S(a) \subseteq \{< a >, < a, a, a, \dots >, < a, b > \ | \ b \neq a\}$.
2. *Üres*nek nevezzük, és SKIP-pel jelöljük azt a programot, amire
$\forall a \in A: \ \mathrm{SKIP}(a) = \{< a >\}$.
3. *Törlődés*nek nevezzük, és ABORT-tal jelöljük azt a programot, amire
$\forall a \in A: \ \mathrm{ABORT}(a) = \{< a, a, a, \dots >\}$.
4. Legyen $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$, ahol $F_i \subseteq A \times A_i$. Az S program *általános értékadás*, ha

$$\begin{aligned} S = &\{(a, \mathrm{red}(a, b)) \mid a, b \in A \wedge a \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{F_i} \wedge b \in F(a)\} \cup \\ &\{(a, \mathrm{ABORT}(a)) \mid a \in A \wedge a \notin \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{F_i}\} \end{aligned}$$

Megjegyzés:
$\mathcal{D}_F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{F_i}, \quad F(a) = F_1(a) \times F_2(a) \times \ldots \times F_n(a)$

a) Ha $\mathcal{D}_F = A$, akkor az S programot *értékkiválasztás*nak nevezzük és $a :\in F(a)$-val jelöljük.

b) Ha az F reláció függvény. akkor az S programot *értékadás*nak nevezzük és $a := F(a)$-val jelöljük.

c) Ha $\mathcal{D}_F \subset A$, akkor S *parciális értékkiválasztás.*

d) Ha $\mathcal{D}_F \subset A$ és F determinisztikus, akkor S *parciális értékadás.*

e) Ha

$$\begin{aligned} &\exists i \in [1, n] : F_i(a_1, .., a_i, .., a_n) \neq a_i \wedge \\ &\forall j \in [1, n] : i \neq j \Rightarrow F_j(a_1, \dots, a_j, \dots, a_n) = a_j \end{aligned}$$

akkor S *egyszerű* (általános) értékadás (egyébként *szimultán*).

Állítás

1. $\mathrm{lf}(\mathrm{SKIP}, R) = R$
2. $\mathrm{lf}(\mathrm{ABORT}, R) = \text{hamis}$
3. Ha S az F reláció által meghatározott értékadás, akkor $\mathrm{lf}(S, R) = F^{-1}([R])$

6. Programkonstrukciók

Definíció

1. Legyenek $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Az $S \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_1 és S_2 *szekvenciájának* nevezzük, és $(S_1; S_2)$-vel jelöljük, ha

$$\forall a \in A: \; S(a) = \{\alpha \in A^{\infty} \mid \alpha \in S_1(a)\} \cup \{\chi_2(\alpha, \beta) \in A^{**} \mid \alpha \in S_1(a) \cap A^* \wedge \beta \in S_2(\tau(\alpha))\}$$

2. Legyenek $\pi_1, \ldots, \pi_n$ feltételek, $S_1, \ldots, S_n$ programok A-n. Az $IF \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_i-kből képzett *elágazásnak* nevezzük és $(\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$-nel jelöljük, ha

$\forall a \in A: \; IF(a) = \bigcup_{i=1}^{n} w_i(a) \; \cup w_0(a)$, ahol

$$w_i(a) = \begin{cases} S_i(a) & \text{, ha } a \in [\pi_i] \\ \emptyset & \text{, különben} \end{cases}$$

$$w(a) = \begin{cases} \text{ABORT}(a) & \text{, ha } a \notin \bigcup_{i=1}^{n} [\pi_i] \\ \emptyset & \text{, különben} \end{cases}$$

3. Legyen π feltétel és S_0 program A-n. A $DO \subseteq A \times A^{**}$ relációt az S_0-ból és π-ből képezett *ciklusnak* nevezzük, és (π, S_0)-lal jelöljük, ha

$\forall a \notin [\pi]: \; DO(a) = \text{SKIP}(a)$

$\forall a \in [\pi]: \; DO(a) = \{\alpha \in A^{**} \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A^{**}$
$(\alpha = \chi_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \wedge \alpha_1 \in S_0(a) \wedge \forall i \in [1, n-1]: \; \alpha_i \in A^* \wedge$
$\alpha_{i+1} \in S_0(\tau(\alpha_i)) \wedge \tau(\alpha_i) \in [\pi]) \wedge ((\alpha_n \in A^* \wedge \tau(\alpha_n) \notin [\pi]) \vee (\alpha_n \in A^{\infty}))\} \cup$
$\{\alpha \in A^{\infty} \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots \in A^* \; (\alpha = \chi_{\infty}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots) \wedge \alpha_1 \in S_0(a) \wedge$
$\forall i \in \mathbb{N}: \; \alpha_i \in A^* \wedge \alpha_{i+1} \in S_0(\tau(\alpha_i)) \wedge \tau(\alpha_i) \in [\pi])\}$

Állítás

1. A szekvencia, az elágazás és a ciklus program.

2. $p((S_1; S_2)) = p(S_2) \odot p(S_1)$

3. $\mathcal{D}_{p(IF)} = \{a \in A \mid a \in \bigcup_{i=1}^{n} [\pi_i] \wedge \forall i \in [1, n]: \; a \in [\pi_i] \Rightarrow a \in \mathcal{D}_{p(S_i)}\}$

$\forall a \in \mathcal{D}_{p(IF)}: \; p(IF)(a) = \bigcup_{i=1}^{n} pw_i(a)$, ahol

$$pw_i(a) = \begin{cases} p(S_i)(a) & \text{, ha } a \in [\pi_i] \\ \emptyset & \text{, különben} \end{cases}$$

4. $p(DO(\pi; S_0)) = \overline{p(S_0)|_{\pi}}$

5. Legyen $S = (S_1; S_2)$, és Q, R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \Rightarrow \text{lf}(S, R)$. Ekkor létezik olyan Q' állítás, amire $Q \Rightarrow \text{lf}(S_1, Q') \wedge Q' \Rightarrow \text{lf}(S_2, R)$.

6. Legyen $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$, és Q, R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \pi_i\right) \Rightarrow \text{lf}(IF, R)$. Ekkor $\forall i \in [1, n]: \; Q \wedge \pi_i \Rightarrow \text{lf}(S_i, R)$.

7. Legyen $DO = (\pi, S_0)$, és Q, R olyan állítások A-n, amelyekre $Q \Rightarrow \text{lf}(DO, R)$, és tegyük fel, hogy $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S_0)} \cap [\pi]: \; \exists k \in \mathbb{N}: \; p(S_0)^k(a) = \emptyset$. Ekkor létezik P állítás és $t : A \to Z$ függvény, amelyekre

1. $Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
4. $P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)$
5. $P \wedge \pi \wedge \forall t_0 \in \mathcal{Z}: \; t \le t_0 + 1 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t \le t_0)$

7. Levezetési szabályok

Állítás

1. *A szekvencia levezetési szabálya:*
Legyen $S = (S_1; S_2)$, és adott Q, R és Q' állítás A-n. Ha

1. $Q \Rightarrow \text{lf}(S_1, Q')$
2. $Q' \Rightarrow \text{lf}(S_2, R)$

akkor $Q \Rightarrow \text{lf}(S, R)$.

2. *Az elágazás levezetési szabálya:*
Legyen $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$, és adott Q, R állítás A-n.
Ha $\forall i \in [1, n]: \; Q \wedge \pi_i \Rightarrow \text{lf}(S, R)$, akkor $Q \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{n} \pi_i\right) \Rightarrow \text{lf}(IF, R)$.

3. *A ciklus levezetési szabálya:*
Adott P, Q, R állítás A-n, $t : A \to Z$ függvény és legyen $DO = (\pi, S_0)$. Ha

1. $Q \Rightarrow P$
2. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
4. $P \wedge \pi \Rightarrow \text{lf}(S_0, P)$
5. $P \wedge \pi \wedge \forall t_0 \in \mathcal{Z}: \; t \le t_0 + 1 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t \le t_0)$

akkor $Q \Rightarrow \text{lf}(DO, R)$.

8. Típuskonstrukciók

Legyenek $T_0, T_1, \ldots, T_n$ típusértékhalmazok, $E_1, \ldots, E_n$ nem üres, véges vagy megszámlálható halmazok, $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $\varrho_i \subset E^* \times T_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ reprezentációs függvények, $\mathcal{T}_i = (\varrho_i, I_i, \mathcal{S}_i)(i = 0, \ldots, n)$ típusok.

Definíció

1. *Direktszorzat*
$\varrho = \psi_D \circ \varphi_D$, ahol $\psi_D \subset B \times T, B = T_1 \times \ldots \times T_n$,
$\varphi_D = \{(\varepsilon, b) \in E^* \times B \mid \exists \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in E^* \ \forall i \in [1,n] : \ (\varepsilon_i, b_i) \in \varrho_i \wedge \varepsilon = \text{kon}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\}$

Jelölés: $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n)$.

Ha ψ_D kölcsönösen egyértelmű, akkor $\mathcal{T}$ rekord típus.

2. *Unió*
$\varrho = \psi_U \circ \varphi_U$, ahol $\psi_U \subset B \times T, B = T_1 \cup \ldots \cup T_n$,
$\varphi_U = \{(\varepsilon, b) \in E^* \times B \mid \exists i \in [1,n] : \ (\varepsilon, b) \in \varrho_i\}$

Jelölés: $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1; \ldots; \mathcal{T}_n)$.

Ha ψ_U kölcsönösen egyértelmű, akkor $\mathcal{T}$ egyesítés.

3. *Iterált*
$\varrho = \psi_I \circ \varphi_I$, ahol $\psi_I \subset T_0^* \times T$, $\varphi_I = \{(\varepsilon, \beta) \in E^* \times T_0^* \mid \exists \alpha \in (E^*)^* : \ |\alpha| = |\beta| \wedge \forall i \in [1, |\alpha|] : \ (\alpha_i, \beta_i) \in \varrho_0 \wedge \varepsilon = \text{kon}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{|\alpha|}\}$

Jelölés: $\mathcal{T} = it(\mathcal{T}_0)$.

Ha ψ_I kölcsönösen egyértelmű, akkor $\mathcal{T}$ sorozat típus.

Jelölés: $\mathcal{T} = seq(\mathcal{T}_0)$.

Ha $\mathcal{D}_{\psi_I} = T_0^*$ és $(\alpha, t), (\beta, t) \in \psi_I \Leftrightarrow \alpha \in \text{perm}(\beta)$, akkor $\mathcal{T}$ kombináció típus.

Jelölés: $\mathcal{T} = com(\mathcal{T}_0)$.

Ha $\mathcal{D}_{\psi_I} = T_0^*$ és $(\alpha, t), (\beta, t) \in \psi_I \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{|\alpha|} \{\alpha_i\} = \bigcup_{i=1}^{|\beta|} \{\beta_i\}$, akkor $\mathcal{T}$ halmaz típus.

Jelölés: $\mathcal{T} = set(\mathcal{T}_0)$.