Egész arithmetika

Összeadás

Az x egész számokból álló vektor egy decimális szám számjegyeit tartalmazza helyiérték szerint csökkenő sorrendben. Állítsuk elő x-ben az eredetinél eggyel nagyobb szám ugyanilyen ábrázolását és mondjuk meg, hogy volt-e túlcsordulás.

A feladat specifikációja:

Legyen $\mathbb{X}: \; vekt(\mathbb{Z}, \{0, 1, ..., 9\})$.

$$A = \underset{x}{\mathbb{X}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{x'}{\mathbb{X}}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \Big(\Big(\sum_{j=x'.lob}^{x'.hib} x'[j] \cdot 10^{(x'.hib-j)}\Big) + 1 = \Big(\sum_{j=x.lob}^{x.hib} x[j] \cdot 10^{(x.hib-j)}\Big) + \chi(l) \cdot 10^{(x.hib-x.lob+1)}\Big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(i \in [x.lob..x.hib+1] \wedge$$
$$\wedge\Big(\sum_{j=i}^{x'.hib} x'[j] \cdot 10^{(x'.hib-j)}\Big) + 1 = \Big(\sum_{j=i}^{x.hib} x[j] \cdot 10^{(x.hib-j)}\Big) + \chi(l) \cdot 10^{(x.hib-i+1)} \wedge$$
$$\wedge \forall j \in [x.lob..i-1] : x'[j] = x[j]\big)$$

1. $Q \not\Rightarrow P$, de $Q \Rightarrow P^{l,i \leftarrow \uparrow, x.hib+1}$.
   Innen adódik, hogy
   $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(l, i := \uparrow, x.hib+1, \;\; P)$
2. A ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi : \;\; (i \leq x.lob)$.
   Ezért $\pi : \;\; (i > x.lob)$ alkalmas választás.
3. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t : \;\; i - x.lob$
   a π választása miatt.
4. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol

$S_2 = (i := i - 1)$
abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön.
Ebből adódik, hogy az S_1 programra $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i-1})$
kell teljesüljön ahhoz, hogy a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüljön.

$$P \wedge \pi \Rightarrow$$
$$\big(i - 1 \in [x.lob..x.hib + 1] \wedge$$
$$\wedge\Big(\sum_{j=i-1}^{x'.hib} x'[j] \cdot 10^{(x'.hib-j)}\Big) + 1 = \Big(\sum_{j=i}^{x.hib} x[j] \cdot 10^{(x.hib-j)}\Big) +$$
$$+x'[i-1] \cdot 10^{(x'.hib-i+1)} + \chi(l) \cdot 10^{(x.hib-i+1)} \wedge$$
$$\wedge \forall j \in [x.lob..i-1] : x'[j] = x[j]\big).$$

Ezért

$$P \wedge \pi \wedge x[i-1] + \chi(l) \leq 9 \Rightarrow$$
$$\big(i - 1 \in [x.lob..x.hib + 1] \wedge$$
$$\wedge\Big(\sum_{j=i-1}^{x'.hib} x'[j] \cdot 10^{(x'.hib-j)}\Big) + 1 = \Big(\sum_{j=i}^{x.hib} x[j] \cdot 10^{(x.hib-j)}\Big) +$$
$$+(x[i-1] + \chi(l)) \cdot 10^{(x.hib-i+1)} \wedge$$
$$\wedge \forall j \in [x.lob..i-2] : x'[j] = x[j]\big).$$

Ahonnan $P \wedge \pi \wedge x[i-1] + \chi(l) \leq 9 \Rightarrow$
${P^{i \leftarrow i-1}}^{x[i-1], l \leftarrow x[i-1]+\chi(l), \downarrow}$.

Hasonlóan
$P \wedge \pi \wedge x[i-1] + \chi(l) > 9 \Rightarrow$
${P^{i \leftarrow i-1}}^{x[i-1], l \leftarrow 0, \uparrow}$.

5. Könnyen ellenőrízhető, hogy a ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele is teljesül.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$i, l := x.hib + 1, \uparrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$i > x.lob$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2" align="center">\ $x[i-1] + \chi(l) \leq 9$ /</td></tr>
<tr><td align="center">$x[i-1], l := x[i-1] + \chi(l), \downarrow$</td><td align="center">$x[i-1], l := 0, \uparrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$i := i - 1$</td></tr>
</table>

Kivonás

Az x egész számokból álló vektor egy decimális szám számjegyeit tartalmazza helyiérték szerint csökkenő sorrendben. Állítsuk elő x-ben az eredetinél eggyel kisebb szám ugyanilyen ábrázolását és mondjuk meg, hogy volt-e túlcsordulás.

A feladat specifikációja:

Legyen $\mathbb{X}: \ vekt(\mathbb{Z}, \{0, 1, ..., 9\})$.

$$A = \underset{x}{\mathbb{X}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{x'}{\mathbb{X}}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(\chi(l) \cdot 10^{(x.hib - x.lob + 1)} + (\sum_{j=x'.lob}^{x'.hib} x'[j] \cdot 10^{(x'.hib - j)}) - 1 = \sum_{j=x.lob}^{x.hib} x[j] \cdot 10^{(x.hib - j)}\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(i \in [x.lob..x.hib + 1] \wedge$$
$$\wedge (\sum_{j=i}^{x'.hib} x'[j] \cdot 10^{(x'.hib - j)}) - 1 = (\sum_{j=i}^{x.hib} x[j] \cdot 10^{(x.hib - j)}) - \chi(l) \cdot 10^{(x.hib - i + 1)} \wedge$$
$$\wedge \forall j \in [x.lob..i - 1] : x'[j] = x[j]\big)$$

A levezetés az előzőekhez hasonlóan történhet.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$i, l := x.hib + 1, \uparrow$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$i > x.lob$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2" align="center">$0 \leq x[i-1] - \chi(l)$</td></tr>
<tr><td align="center">$x[i-1], l := x[i-1] - \chi(l), \downarrow$</td><td align="center">$x[i-1], l := 9, \uparrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$i := i - 1$</td></tr>
</table>