$\binom{n}{k}$ kiszámítása

$$\mathbf{A}: \quad \underset{n}{\mathbf{N}_0} \times \underset{k}{\mathbf{N}_0} \big(\times \underset{v_1}{\mathbf{N}} \times \underset{v_2}{\mathbf{N}} \times \ldots \big) \times \underset{v_{n-k+1}}{\mathbf{N}}$$

$$\mathbf{B}: \quad \underset{n'}{\mathbf{N}_0} \times \underset{k'}{\mathbf{N}_0}$$

$$Q: \big(n = n' \wedge k = k' \wedge k \leq n\big)$$

$$R: \left(Q \wedge v_{n-k+1} = \binom{n'}{k'}\right)$$

A feladat megoldásához ciklust használunk a következő invariánssal:

$$P: \left(Q \wedge i \in [0,k] \wedge \forall j \in [1, n-k+1]: v_j = \binom{j+i-1}{i}\right)$$

Könnyen látható, hogy

$$Q \Rightarrow P^{i,v_1,v_2,\ldots,v_{n-k+1} \leftarrow 0,1,1,\ldots,1} = lf\big(i, v_1, v_2, \ldots, v_{n-k+1} := 0,1,1,\ldots,1; P\big)$$

Emiatt a keresett program a következő szekvencia lesz:

$$\big(i, v_1, v_2, \ldots, v_{n-k+1} := 0,1,1,\ldots,1; DO\big)$$

ahol a DO ciklust kell alkalmasan megválasztani.

1. $P \Rightarrow P$ nyilván teljesül.

2. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$ feltétel teljesíthető, ha $\neg\pi : i = k$, hiszen $v_{n-k+1} = \binom{n-k+1+k-1}{k} = \binom{n}{k}$. Ennek megfelően

$$\pi : i \neq k$$

3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$ feltétel kielégíthető, ha

$$t : k - i$$

A t termináló függvény választása miatt keressük a ciklusmagot

$$S : \big(S_1; i := i + 1\big)$$

alakban.

5. $\forall t_0 \in \mathbf{Z} : P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow lf\big(S; t \leq t_0\big)$ feltétel teljesül, ha az i projekció az S_1 programra nézve konstans függvény.

4. $P \wedge \pi \Rightarrow lf\big(S; P\big)$ feltétel kielégítéséhez elegendő, ha olyan S_1 programot keresünk, amelyre

$$P \wedge \pi \Rightarrow lf\big(S_1; P^{i \leftarrow i+1}\big)$$

Keressük az S_1 programot ciklus formában, amely invariánsa:

$$\begin{aligned}\overline{P} : \big(Q \wedge i + 1 \in [0, k] \wedge l \in [1, n - k + 1] \wedge \forall j \in [1, l] : v_j = \binom{j + (i+1) - 1}{i + 1} \wedge \\ \wedge \forall j \in [l + 1, n - k + 1] : v_j = \binom{j + i - 1}{i}\big)\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy

$$P \wedge \pi \Rightarrow \overline{P}^{l \leftarrow 1} = lf\big(l := 1; \overline{P}\big)$$

teljesül. Ezért S_1-et

$$S_1 : \big(l := 1; \overline{DO}\big)$$

alakban kell keresnünk.

1.a $\overline{P} \Rightarrow \overline{P}$ nyilván teljesül.

2.a $\overline{P} \wedge \neg\overline{\pi} \Rightarrow P^{i \leftarrow i+1}$ feltétel teljesül, ahol $P^{i \leftarrow i+1}$ $\overline{R}$-nek felel meg, ha $\neg\overline{\pi} : l = n - k + 1$ tehát, ha

$$\overline{\pi} : l \neq n - k + 1$$

3.a $\overline{P} \wedge \overline{\pi} \rightarrow \overline{t} > 0$ teljesül,ha

$$\overline{t} : (n - k + 1) - l$$

A $\overline{t}$ termináló függvény választása miatt keressük a ciklusmagot

$$\overline{S} : \big(\overline{S}_1; l := l + 1\big)$$

alakban.

5.a $\forall \overline{t}_0 \in \mathbf{Z} : \overline{P} \wedge \overline{\pi} \wedge \overline{t} \leq \overline{t}_0 + 1 \Rightarrow lf\big(\overline{S}; \overline{t} \leq \overline{t}_0\big)$ feltétel teljesül, ha az l projekció az $\overline{S}_1$ programra nézve konstans függvény.

4.a $\overline{P} \wedge \overline{\pi} \Rightarrow lf\big(\overline{S}; \overline{P}\big)$ feltétel kielégítéséhez elegendő, ha olyan $\overline{S}_1$ programot keresünk, amelyre

$$\overline{P} \wedge \overline{\pi} \Rightarrow lf\big(\overline{S}_1; \overline{P}^{l \leftarrow l+1}\big)$$

$$\begin{aligned}\overline{P} \wedge \overline{\pi} : \big(Q \wedge i+1 \in [0,k] \wedge l \in [1, n-k+1] \wedge l \neq n-k+1 \wedge \\ \wedge\, \forall j \in [1,l] : v_j = \binom{j+(i+1)-1}{i+1} \wedge \\ \wedge\, \forall j \in [l+1, n-k+1] : v_j = \binom{j+i-1}{i}\big)\end{aligned}$$

alapján könnyen látható:

$$\begin{aligned}\overline{P} \wedge \overline{\pi} = \big(Q \wedge i+1 \in [0,k] \wedge l \in [1, n-k+1] \wedge l \neq n-k+1 \wedge \\ \wedge\, \forall j \in [1,l] : v_j = \binom{j+(i+1)-1}{i+1} \wedge \\ \wedge \binom{l+1+(i+1)-1}{i+1} = v_l + v_{l+1} \wedge \\ \wedge\, \forall j \in [l+2, n-k+1] : v_j = \binom{j+i-1}{i}\big)\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\overline{P} \wedge \overline{\pi} = \big(\overline{P}^{l \leftarrow l+1}\big)^{v_{l+1} \leftarrow v_{l+1}+v_l} = lf\big(v_{l+1} := v_{l+1} + v_l; \overline{P}^{l \leftarrow l+1}\big)$$

Könnyen belátható, hogy az l projekció az $\overline{S}_1$ programra nézve konstans függvény, ugyanúgy az i projekció az S_1 programra nézve konstans függvény.

Összegezve a kapott eredményeket, a következő program megoldja a feladatot:

<table>
<tr><td colspan="3">$i, v_1, v_2, ..., v_{n-k+1} := 0, 1, 1, ..., 1$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$i \neq k$</td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="2">$l := 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$l \neq n-k+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$v_{l+1} := v_{l+1} + v_l$</td></tr>
<tr><td>$l := l+1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i := i+1$</td></tr>
</table>