$\binom{n}{k}$ kiszámítása

Legyen $\mathbf{X} : vekt(\mathbf{N}, \mathbf{N})$.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A}: & \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 \times \mathbf{X} & \\ & n \quad k \quad x & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{B}: & \mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0 & \\ & n' \quad k' & \end{array}$$

$$Q : \big(n = n' \wedge k = k' \wedge k \leq n\big)$$

$$R : \left(Q \wedge x.hiv = \binom{n'}{k'}\right)$$

A feladat megoldásához ciklust használunk a következő invariánssal:

$$P : \left(Q \wedge x.dom = n - k + 1 \wedge i \in [0..k] \wedge \forall j \in [x.lob..x.hib] : x[j] = \binom{j - x.lob + i}{i}\right)$$

Könnyen látható, hogy

$$Q \Rightarrow P^{i,x \leftarrow 0,(1,<1_1,1_2,\ldots,1_{n-k+1}>)} \Leftrightarrow lf\big(i, x := 0, (1, < 1_1, 1_2, ..., 1_{n-k+1} >); P\big)$$

Emiatt a keresett program a következő szekvencia lesz:

$$\big(i, x := 0, (1, < 1_1, 1_2, ..., 1_{n-k+1} >); DO\big)$$

ahol a DO ciklust kell alkalmasan megválasztani.

1. $P \Rightarrow P$ nyilván teljesül.

2. $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$ feltétel teljesíthető, ha $\neg\pi : i \geq k$, hiszen $x.hiv = \binom{x.hib - x.lob + k}{k} = \binom{n}{k}$. Ennek megfelően

$$\pi : i < k$$

3. $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$ feltétel kielégíthető, ha

$$t : k - i$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

A t terminál függvény választása miatt keressük a ciklusmagot

$$S : \big(S_1; i := i + 1\big)$$

alakban.

5. $\forall t_0 \in \mathbf{Z} : P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow lf\big(S; t \leq t_0\big)$ feltétel teljesül, ha az i projekció az S_1 programra nézve konstans függvény.

4. $P \wedge \pi \Rightarrow lf\big(S; P\big)$ feltétel kielégítéséhez elegendő, ha olyan S_1 programot keresünk, amelyre

$$P \wedge \pi \Rightarrow lf\big(S_1; P^{i \leftarrow i+1}\big)$$

Keressük az S_1 programot ciklus formában, amely invariánsa:

$$\begin{aligned}\overline{P} : \big(&Q \wedge x.dom = n - k + 1 \wedge i + 1 \in [0..k] \wedge l \in [x.lob..x.hib] \wedge \\ &\wedge \forall j \in [x.lob..l] : x[j] = \binom{j - x.lob + (i+1)}{i+1} \wedge \\ &\wedge \forall j \in [l+1..x.hib] : x[j] = \binom{j - x.lob + i}{i}\big)\end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy

$$P \wedge \pi \Rightarrow \overline{P}^{l \leftarrow 1} \Leftrightarrow lf\big(l := 1; \overline{P}\big)$$

teljesül. Ezért S_1-et

$$S_1 : \big(l := 1; \overline{DO}\big)$$

alakban kell keresnünk.

1.a $\overline{P} \Rightarrow \overline{P}$ nyilván teljesül.

2.a $\overline{P} \wedge \neg\overline{\pi} \Rightarrow P^{i \leftarrow i+1}$ feltétel teljesül, ahol $P^{i \leftarrow i+1}$ $\overline{R}$-nek felel meg, ha $\neg\overline{\pi} : l \geq x.hib$ tehát, ha

$$\overline{\pi} : l < x.hib$$

3.a $\overline{P} \wedge \overline{\pi} \rightarrow \overline{t} > 0$ teljesül,ha

$$\overline{t} : x.hib - l$$

A $\overline{t}$ terminál függvény választása miatt keressük a ciklusmagot

$$\overline{S} : \big(\overline{S_1}; l := l + 1\big)$$

alakban.

5.a $\forall \overline{t}_0 \in \mathbf{Z} : \overline{P} \wedge \overline{\pi} \wedge \overline{t} \leq \overline{t}_0 + 1 \Rightarrow lf\big(\overline{S}; \overline{t} \leq \overline{t}_0\big)$ feltétel teljesül, ha az l projekció az $\overline{S}_1$ programra nézve konstans függvény.

4.a $\overline{P} \wedge \overline{\pi} \Rightarrow lf\big(\overline{S}; \overline{P}\big)$ feltétel kielégítéséhez elegendő, ha olyan $\overline{S}_1$ programot keresünk, amelyre

$$\overline{P} \wedge \overline{\pi} \Rightarrow lf\big(\overline{S}_1; \overline{P}^{l \leftarrow l+1}\big)$$

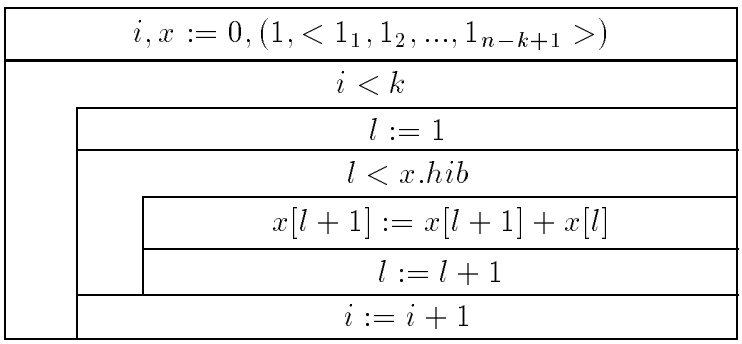
$$\begin{aligned}\overline{P} \wedge \overline{\pi} : \big(Q \wedge x.dom = n-k+1 \wedge i+1 \in [0..k] \wedge l \in [x.lob..x.hib] \wedge l < x.hib \wedge \\ \wedge \forall j \in [x.lob..l] : x[j] = \binom{j - x.lob + (i+1)}{i+1} \wedge \\ \wedge \forall j \in [l+1..x.hib] : x[j] = \binom{j - x.lob + i}{i}\big)\end{aligned}$$

alapján könnyen látható:

$$\begin{aligned}\overline{P} \wedge \overline{\pi} \Rightarrow \big(Q \wedge x.dom = n-k+1 \wedge i+1 \in [0..k] \wedge l+1 \in [x.lob..x.hib] \wedge \\ \wedge \forall j \in [x.lob..l] : x[j] = \binom{j - x.lob + (i+1)}{i+1} \wedge \\ \wedge \binom{(l+1) - x.lob + (i+1)}{i+1} = x[l] + x[l+1] \wedge \\ \wedge \forall j \in [l+2..x.hib] : x[j] = \binom{j - x.hib + i}{i}\big)\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$\overline{P} \wedge \overline{\pi} = \big(\overline{P}^{l \leftarrow l+1}\big)^{x[l+1] \leftarrow x[l+1] + x[l]} = lf\big(x[l+1] := x[l+1] + x[l]; \overline{P}^{l \leftarrow l+1}\big)$$

Könnyen belátható, hogy az l projekció az $\overline{S}_1$ programra nézve konstans függvény, ugyanúgy az i projekció az S_1 programra nézve konstans függvény.

Összegezve a kapott eredményeket, a következő program megoldja a feladatot: