Feladatok

1. Halmazok

1.1. Legalább, illetve legfeljebb hány eleme van egy m elemű és egy n elemű halmaz

– metszetének	– egyesítésének
– Descartes szorzatának	– különbségének?

1.2. Írjuk fel az $A \times B$, $A \times C$, $C \times B$, $(A \times B) \times C$, és $A \times B \times C$ halmazok elemeit, ha $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{p, q\}$!

1.3. Bizonyítsd be, hogy $H \subseteq A \times B$ esetén

– $(\forall (a, b), (c, d) \in H : \ (a, d) \in H) \Leftrightarrow (\exists K \subseteq A : \ \exists L \subseteq B : \ H = K \times L)$

– ha H nem üres, akkor K és L egyértelmű!

2. Relációk

2.1. Az $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$. $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}$.

a) Mi a reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?

b) Determinisztikus-e, ill. függvény-e a reláció?

c) Mi R $0., 2., (-1).$ hatványa?

d) Mi a $\{4, 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

e) Hány eleme van R értékkészlete hatványhalmazának?

2.2. Milyen összefüggés van egy H halmaz R relációra vonatkozó inverz képe és ősképe között? És ha R függvény?

2.3. a) $R \subseteq A \times A$. Mivel egyenlő $R^{-1}(A)$?

b) Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz inverz képének képe, és a H halmaz között?

c) Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz ősképe képe és a H halmaz között?

2.4. a) $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

b) $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), (x - y, y)) | x, y \in \mathbb{N}\}$.
Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

2.5. $R = \{((x, y), (f(x, y), y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$, ahol $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz ősképe ill. inverz képe?

2.6. $R \subseteq A \times B, Q \subseteq B$. Van-e valamilyen összefüggés az $R^{-1}(B \setminus Q)$ halmaz és az $A \setminus (R^{-1}(Q))$ halmaz között?

2.7. Készíts olyan nem üres relációt, amelyre igaz, hogy értékkészlete minden valódi részhalmazának ősképe üres halmaz!

2.8. $R \subseteq A \times B, P, Q \subseteq B$. Hogyan lehetne jellemezni az $R^{-1}(P \cup Q)$ és az $R^{-1}(P \cap Q)$ halmazt az $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ halmaz segítségével?

2.9. Legyen $F, G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, Y = \{1, 2\}$. $F = \{(a, b) \mid \ b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$.
$G = \{(a, b) \mid 2|a \wedge a = 2 * b\}$.

$G \circ F = ?$	$G \odot F = ?$
$F^{(-1)} \circ G^{(-1)} = ?$	$F^{-1} \circ G^{-1}(Y) = ?$
$(G \circ F)^{-1}(Y) = ?$	$(G \circ F)^{(-1)} = ?$

2.10. $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

a) $(G \circ F)^{(-1)} = F^{(-1)} \circ G^{(-1)}$

b) $\forall Y \subseteq C: \ (G \circ F)^{-1}(Y) = F^{-1} \circ G^{-1}(Y)$

c) $(G \odot F)^{(-1)} = F^{(-1)} \odot G^{(-1)}$

d) $\forall Y \subseteq C: \ (G \odot F)^{-1}(Y) = F^{-1} \odot G^{-1}(Y)$

Igazak-e az a)–d) állítások, ha G vagy F függvény?

2.11. Mi az összefüggés két reláció kompozíciójának értelmezési tartománya és ugyanezen két reláció szigorú értelemben vett kompozíciójának értelmezési tartománya között?

2.12. Legyen R a 2.1. feladatban adott reláció. $f \subseteq A \times \mathcal{L}$. $f = \{(1, i), (2, i), (3, i), (4, h), (5, i)\}$. Mi f, ill. $(f \circ R)$ igazsághalmaza?

2.13. Készíts olyan nem üres R relációt és f logikai függvényt, hogy $f \circ R$ igazsághalmaza üres legyen!

2.14. $R, Q \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R \odot Q)^{(-1)} = Q^{(-1)} \circ R^{(-1)}$?

2.15. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$?

2.16. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $\forall H \subseteq A: \ R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$?

2.17. $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $Q = \{(a, b) \mid 2|a \wedge b|a \wedge \ prim(b)\}$.

a) $P = \{(a, b) \mid b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$

b) $P = \{(a, b) \mid b|a\}$

Add meg a $Q^{(-1)}, Q \circ P$ és $Q \odot P$-t relációt!

2.18. $H \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C, F \subseteq C \times D$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $a \in \mathcal{D}_{(G \circ H)} \cap \mathcal{D}_{(G \odot H)}$, akkor $G \circ H(a) = G \odot H(a)$.

b) $\mathcal{D}_{(G \odot H)} \subseteq \mathcal{D}_{(G \circ H)}$.

c) $(\forall a \in \mathcal{D}_H \mid |H(a)| = 1) \Rightarrow G \circ H = G \odot H$.

d) $\mathcal{D}_G = B \Rightarrow G \circ H = G \odot H$.

e) Asszociativitás:

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$$
$$(F \odot G) \odot H = F \odot (G \odot H)$$

f) $Q, R, S \subseteq A \times A$. $Q \circ R \subseteq S \Longleftrightarrow Q^{(-1)} \circ \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R}$

g) $Q, R, S \subseteq A \times A$. $Q \odot R \subseteq S \Longleftrightarrow Q^{(-1)} \odot \widetilde{S} \subseteq \widetilde{R}$

h) $R \neq \emptyset \Rightarrow L \odot R \odot L = L$, ahol $L = A \times A$

i) Monotonitás:

$$R \subseteq S \Rightarrow R \odot Q \subseteq S \odot Q$$
$$R \subseteq S \Rightarrow Q \odot R \subseteq Q \odot S$$

2.19. Legyen R és Q két reláció a természetes számok halmazán! R egy természetes számhoz rendeli önmagát és a kétszeresét, Q egy páros természetes számhoz a felét.

a) Írd fel a két relációt, és add meg az értelmezési tartományukat!

b) Írd fel az R reláció k. hatványát ($k \geq 1$) és ennek az értelmezési tartományát!

c) Írd fel a $Q \circ R$ relációt és az értelmezési tartományát!

d) $F = Q \odot R$! Írd fel az F relációt és az értelmezési tartományát!

2.20. $F \subseteq A \times B$, $G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy:

a) $\mathcal{D}_{(G \odot F)} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$

b) $\mathcal{D}_{(G \circ F)} = F^{-1}(\mathcal{D}_G)$

3. Reláció lezártja

3.1. $R \subseteq \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$. $R = \{(1,2),(1,4),(2,1),(3,4),(3,3),(3,5),(4,5)\}$. Mi lesz R lezártja és korlátos lezártja?

3.2. $P \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. $P = \{(a,b) \mid \; b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$. Mi lesz P lezártja?

3.3. Mutassunk példát olyan relációra, aminek lezártja és korlátos lezártja különböző!

3.4. $P \subseteq \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$.

$$P(a) = \begin{cases} \{a-1\}, & \text{ha } a > 0 \\ \{b | b \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$$

Mi P lezártja és korlátos lezártja?

3.5. $A = \{1,2,3,4,5\}, R \subseteq A \times A$. $R = \{(1,2),(1,5),(2,5),(3,2),(3,4),(5,2)\}$. $[\pi] = \{1,2,3,4\}$. Írjuk fel a reláció feltételre vonatkozó lezártját!

3.6. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $R = \{(a,b) \mid \; b|a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$. $[\pi] = \{x \mid x \text{ kettőhatvány }\}$. Írjuk fel az $R|_\pi$ relációt, lezártját és korlátos lezártját!

3.7. Adjunk példát olyan nem üres relációra, amelynek lezártja üres halmaz és van olyan π feltétel, hogy a reláció feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya megegyezik az eredeti reláció értelmezési tartományával!

3.8. $R \subseteq A \times A$. Tegyük fel, hogy az R értelmezési tartománya egyenlő az R értelmezési tartományának R-re vonatkozó ősképével. Mit mondhatunk R lezártjáról?

3.9. Van-e olyan nem üres reláció és π feltétel, hogy a reláció lezártja üres halmaz, és a π feltételre vonatkozó lezártja azonos a relációval?

3.10. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-2\}, & \text{ha } a > 1 \\ \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

3.11. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(a) = \begin{cases} \{a-3\}, & \text{ha } a > 2 \\ \{3 * k \mid k \in \mathbb{N}\}, & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

Mi az R reláció lezártja és korlátos lezártja?

3.12. $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Az R reláció minden összetett számhoz a legnagyobb valódi osztóját rendeli. Legyen q

a) egy rögzített összetett természetes szám!

b) egy rögzített prímszám!

Legyen $P_q(a) = (\exists k \in \mathbb{N} \mid a = q^k)$! Mi lesz az R reláció P_q feltételre vonatkozó lezártjának értelmezési tartománya?

3.13. $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$.

$$R(x) = \begin{cases} \{b \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : \ b = 2 * k + 1\}, & \text{ha } x \neq 0 \wedge x \text{ páros} \\ \{x - 7\}, & \text{ha } x \geq 7 \wedge x \text{ páratlan} \\ \{0\}, & \text{ha } x = 1 \\ \{7\}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Mi lesz R lezártja és korlátos lezártja?

3.14. R legyen a 3.11. feladatban adott reláció. $\pi(k) = (k \text{ páratlan szám})$. Add meg az $R|_\pi$ relációt, lezártját és korlátos lezártját!

3.15. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $a \in \mathcal{D}_{\overline{R}} \cap \mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}}$, akkor $\overline{R}(a) = \overline{\overline{R}}(a)$.

b) $\mathcal{D}_{\overline{\overline{R}}} \subseteq \mathcal{D}_{\overline{R}}$.

* c) Ha az A halmaz véges és $R \subseteq A \times A$, akkor $\overline{R} = \overline{\overline{R}}$.

** d) Ha A megszámlálhatóan végtelen, $R \subseteq A \times A$, és

$\forall a \in A : \ (\exists n(a) \in \mathbb{N}_0 : \ |R(a)| \leq n(a)) \Rightarrow \overline{R} = \overline{\overline{R}}$.

3.16. Legyen $R \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, R$ értelmezési tartománya $\mathbb{N}$!

$$R(x) = \begin{cases} \{b | b > 0 \wedge b < x \wedge 2 | b\}, & \text{ha } x \text{ páratlan} \\ \{x - 1\}, & \text{ha } x \text{ páros} \end{cases}$$

$\pi(x) = (x \text{ páros természetes szám})$. Mi az R reláció π feltételre vonatkozó lezártja és korlátos lezártja?

4. Projekció, redukált

4.1. $W = N_1 \times N_2 \times N_3$. $\alpha \in W^{**}$, ahol $N_i = \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, 3)$. $\alpha_1 = (1, 1, 1)$. Az α sorozat további elemeit úgy kapjuk meg, hogy a pontok koordinátáit az első koordinátával kezdve ciklikusan 1-gyel növeljük. $\text{pr}_{N_1 \times N_3}(\text{red}(\alpha)) =$?

4.2. Legfeljebb ill. legalább milyen hosszú egy m és egy n hosszúságú sorozat redukáltjának konkatenációja, ill. konkatenációjának redukáltja?

4.3. Igaz-e, hogy egy α sorozat redukáltjának projekciója ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

4.4. Igaz-e, hogy egy α sorozat projekciójának redukáltja ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

4.5. Legyen $A = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$, $B = N_4 \times N_1$, ahol $\forall i \in [1,4]: \ N_i = \mathbb{N}$.
$\alpha =< (1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,2,3,1),(1,2,3,4),(5,2,3,4),(5,7,3,4),(5,7,10,4),\ldots >$.

a) $\mathrm{pr}_B(\alpha) =?$

b) $\mathrm{red}(\mathrm{pr}_B(\alpha)) =?$

5. Feladat, program, programfüggvény, megoldás

5.1. $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $A_3 = \{1,2,3,4,5\}$. $A = A_1 \times A_2 \times A_3$.
$F = \{(a,b,c) \mid c = a+b\}$. Miért hibás az F feladat leírása?

5.2. $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $A_3 = \{1,2,3,4,5\}$, $A = A_1 \times A_2 \times A_3$.
$F = \{((a,b,c),(d,e,f)) \mid f = a+b\}$. $F(1,1,1) =?$ Hány olyan pontja van az állapottérnek, amelyekhez a feladat ugyanazokat a pontokat rendeli, mint $(1,1,1)$-hez?

5.3. Helyes-e a következő meghatározás? Az $S \subseteq A \times A^{**}$ reláció program, ha

1. ha $\alpha \in \mathcal{R}_S$, akkor α egyenlő a redukáltjával,
2. S értelmezési tartománya A,
3. ha α az állapottér egy a pontjához rendelt sorozat, akkor α első eleme a.

5.4. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}, S \subseteq A \times A^{**}$.

$$S = \{ \begin{array}{llll} 1 \to 1251 & 1 \to 14352 & 1 \to 132\ldots & 2 \to 21 \\ 2 \to 24 & 3 \to 333333\ldots & 4 \to 41514 & 4 \to 431251 \\ 4 \to 41542 & 5 \to 524 & 5 \to 534 & 5 \to 5234\} \end{array}$$

$F = \{(2,1)\,(4,4)\,(4,1)\,(4,2)\,(4,5)\}$.

a) Adjuk meg $p(S)$-t!

b) Megoldja-e S a feladatot?

5.5. Legyen S program, F olyan feladat, hogy S megoldása F-nek. Igaz-e, hogy

a) ha F nem determinisztikus, akkor S sem az?

b) ha F determinisztikus, akkor S is az?

c) ha F nem determinisztikus, akkor $p(S)$ sem az?

d) ha $p(S)$ determinisztikus, akkor F is az?

e) ha F determinisztikus, akkor $p(S)$ is az?

f) ha S nem determinisztikus, akkor $p(S)$ sem az?

5.6. Igaz-e, hogy programok uniójának programfüggvénye megegyezik a programfüggvények uniójával?

5.7. Fejezzük ki a programok uniójának programfüggvényét a programok programfüggvényeivel!

5.8. $S \subseteq A \times A^{**}$. Igaz-e, hogy $p(S) = \{(a,b) \in A \times A \mid \exists \alpha \in A^* : \ (a, \alpha) \in S \wedge b = \tau(\alpha)\}$?

5.9. Legyen F_1 és F_2 egy–egy feladat ugyanazon az állapottéren! Igaz-e, ha minden program, ami megoldása F_1-nek, az megoldása F_2-nek is, és minden program, ami megoldása F_2-nek, az megoldása F_1-nek is, akkor F_1 és F_2 megegyeznek?

5.10. Igaz-e, hogy $p(S)$ értelmezési tartománya éppen A^* ősképe S-re nézve?

5.11. Mondhatjuk-e, hogy az S program megoldja az F feladatot, ha igaz a következő állítás: $q \in \mathcal{D}_F \Rightarrow S(q) \subseteq A^* \wedge p(S)(q) \subseteq F(q)$.

5.12. $F_1 \subseteq F_2$. Az S program megoldja F_2-t. Igaz-e, hogy S megoldja F_1-et is?

5.13. $S_1 \subseteq S_2$. S_2 megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy S_1 megoldja F-et?

5.14. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, F_1 = \{((u,v),(x,y)) \mid \ \ y|u\}$, $F_2 = \{((u,v),(x,y)) \mid x = u \wedge y|u\}$. Ekvivalens-e a két feladat? (Van-e valamilyen összefüggés közöttük?)

5.15. $F \subseteq A \times A$. S_1, S_2 programok A-n. Az S_1 és az S_2 is megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy az $S = (S_1 \cup S_2)$ program is megoldja az F feladatot?

5.16. Legyen F a 2.19.-es feladat d) pontjának relációja! $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{**}$.

$$\begin{aligned} S = &\{(a, < aaa \dots >) \mid a \equiv 1 \bmod(4)\} \cup \{(b, < b >), (b, < b, b/2 >) \mid b \equiv 2 \bmod(4)\} \\ &\cup \{(c, < c, 2*c >) \mid c \equiv 3 \bmod(4)\} \cup \{(d, < d, d/2 >) \mid d \equiv 0 \bmod(4)\} \end{aligned}$$

Add meg $p(S)$ értelmezési tartományát! Megoldja-e S az F feladatot?

5.17. Tekintsük a következő szövegesen megadott feladatot: Adott egy sakktábla, és két rajta lévő bástya helyzete. Helyezzünk el a táblán egy harmadik bástyát úgy, hogy az mindkettőnek az ütésében álljon! Készítsük el a modellt: írjuk fel az állapotteret és az F relációt!

5.18. Tudjuk, hogy S megoldja F-et (az A állapottéren).
Igaz-e, hogy $(a \in A \wedge (S(a) \not\subseteq A^* \vee p(S)(a) \not\subseteq F(a))) \Rightarrow a \notin \mathcal{D}_F$?

5.19. Legyen $F \subseteq A \times A$ egy feladat és $S \subseteq A \times A^{**}$ egy program. Jelöljük FP-vel azt a relációt, amely F és $p(S)$ metszeteként áll elő. Igaz-e, hogy

a) ha $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$, akkor S megoldja F-et?

b) ha S megoldja F-et, akkor $\mathcal{D}_{FP} = \mathcal{D}_F$?

6. Feladat és program kiterjesztése

6.1. a) $B = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}, A = \{1,2,3\}$. $F \subseteq A \times A$. $F = \{(1,2),(1,3)\}$. Mi az F kiterjesztettje $B \times B$-re?

b) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $F \subseteq A \times A . F = \{(q, q+1) \mid q \in \mathbb{N}\}$.
Mi az F kiterjesztettje B-re?

c) Adott az $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ állapottéren az $F = \{((l,k),(l',k')) \mid k' = (l \wedge k)\}$ feladat, és az $A' = \mathcal{L} \times \mathcal{L} \times V$ állapottéren ($V = \{1,2\}$) a következő program:

$$
\begin{array}{lll}
S = \{ & ii1 \to ii1, ih2, hi2 & ii2 \to ii2, hh1, ii1 \\
& ii2 \to ii2, ih2, hi1, hi2 & ih1 \to ih1 \\
& ih2 \to ih2, ii1, hh1 & hi1 \to hi1, hh2 \\
& hi2 \to hi2, hi1, ih1 & hi2 \to hi2, hh1, hh2 \\
& hh1 \to hh1, ih1 & hh2 \to hh2\}
\end{array}
$$

Megoldja-e S az F A'-re való kiterjesztettjét?

6.2. $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Mondjunk példát olyan programra, amelynek egyetlen valódi altérre vett projekciója sem program. ($A_k = \mathbb{N}, k = 1, \ldots, n$).

6.3. Igaz-e?

a) ha $F = \mathrm{pr}_{A\times A}(F'')$, akkor F'' az F kiterjesztettje?

b) $F' = \mathrm{pr}^{(-1)}_{A\times A}(F)$? ill. $F' = \mathrm{pr}^{-1}_{A\times A}(F)$?

6.4. Legyen $F \subseteq A \times A$, $F' \subseteq B \times B$, $F'' \subseteq C \times C$, $F''' \subseteq D \times D$, ahol $B = A \times A_1$, $C = A \times A_2, D = A \times A_1 \times A_2$, és legyen F', F'', F''' az F kiterjesztése rendre $B \times B, C \times C, D \times D$-re. Igaz-e, hogy F''' az F'' kiterjesztése $D \times D$-re? Add meg az F' és az F'' közötti kapcsolatot a projekció és a kiterjesztés fogalmának segítségével!

6.5. Igaz-e, ha $S \subseteq B \times B, A$ altere B-nek, akkor

a) $\mathcal{D}_{\mathrm{pr}_{A\times A}(p(S))} = \mathrm{pr}_A(\mathcal{D}_{p(S)})$?

b) S $A \times A$-ra történő projekciójának kiterjesztése $B \times B$-re azonos S-sel?

6.6. Megfordíthatóak-e a kiterjesztési tételek? Azaz, igaz-e, hogy

a) ha S megoldja az F feladatot, akkor S_1 megoldja F'-t? (ahol $S_1 \subseteq A \times A^{**}$ ekvivalens $S \subseteq B \times B^{**}$-gal A alterén, B-n, és F' az $F \subseteq B \times B$ kiterjesztése $A \times A$-ra)

b) ha S megoldja a G feladat $B \times B$-re vett projekcióját, G_1-et, akkor S' megoldja G-t? (ahol S' az S kiterjesztése)

6.7. B és C altere A-nak. $F \subseteq A \times A, F_1 \subseteq B \times B, F_2 \subseteq C \times C$. F_1 az F projekciója B-re. F az F_2 kiterjesztése A-ra. Igaz-e, hogy az F_1 feladat A-ra való kiterjesztettjének C-re vett projekciója megegyezik F_2-vel?

7. Vegyes feladatok

7.1. Keressük meg egy természetes szám egy osztóját!

$A = \mathbb{N}, F = \{(u, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid v \text{ osztója } u\text{-nak}\}$.

$S_1 = \{(a, < a, 1 >) \in A \times a^{**} \mid a > 1\} \cup \{(1, < 1 >)\}$

$S_2 = \{(1, < 1 >), (2, < 2, 1, 2 >)\} \cup \{(a, \alpha) \in A \times A^{**} \mid \alpha_1 = a \wedge \tau(\alpha) = (a$ legkisebb 1-nél nagyobb osztója $)\}$.

a) Megoldja-e S_1 ill. S_2 a feladatot?

b) Ekvivalens-e S_1 és S_2?

7.2. Számítsuk ki a $(-1)^i$ függvény értékeinek összegét az $[m, n]$ intervallumon ($m, n \in \mathbb{N}$)!

$A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathcal{Z}, A_1 = A \times \mathcal{L}, F \subseteq A \times A, F'$ az F kiterjesztése $A_1 \times A_1$-re.
$S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}, S_3 \subseteq A_1 \times A_1^{**}$.
$F = \{((m,n,b),(m_1,n_1,b_1)) \mid b_1 = \sum\limits_m^n (-1)^i \wedge m \leq n\}$.

$$\begin{aligned} S_1 =& \{(m,n,x) \to ((m,n,x),(m,n,(-1)^m),(m,n,(-1)^m + (-1)^{m+1}),\ldots \\ & \ldots,(m,n,(-1)^m + \ldots + (-1)^n))\} \\ S_2 =& \{(m,n,x) \to ((m,n,x),(m,n,((-1)^m + (-1)^n)/2) \\ S_3 =& \{(m,n,x,l) \to ((m,n,x,l),(m,n,f(m,p(m) = p(n)),p(m) = p(n))) \end{aligned}$$

$$p(m) = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \text{ páros} \\ 1, & \text{különben} \end{cases} \qquad f(m,l) = \begin{cases} (-1)^m, & \text{ha } l \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

a) Megoldja-e S_1 és S_2 F-et?
b) Megoldja-e S_3 F'-t?
c) Mely programok ekvivalensek A-n?

7.3. $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $S \subseteq A \times A^{**}$.$S$ az (1,1,2) pontból kiindulva előállítja a 10. Fibonacci számot az $u(n) = u(n-1) + u(n-2)$ rekurzív összefüggés alapján. A koordináták rendre $u(n-2)$-nek, $u(n-1)$-nek, $u(n)$-nek felelnek meg. Írd fel azt a sorozatot, amelyet S az (1,1,2) ponthoz rendel! Mit rendel $p(S)$ az (1,1,2) ponthoz?

7.4. Számítsuk ki egy valós szám természetes kitevőjű hatványát!
$A = R \times \mathbb{N}_0 \times R$, $F \subseteq A \times A$. $F = \{((x,n,k),(y,z,x^n)) \mid k = 1\}$.
$S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$

$$\begin{aligned} S_1((x,n,h)) =& \{<(x,n,h),(x,n-1,h*x),\ldots,(x,0,h*x^n)>\} \\ S_2((x,n,h)) =& \{<(a_1),\ldots,(a_m)> \mid (a_1) = (x,n,h) \wedge Legendre(a_m) = \emptyset \wedge \\ & \forall i \in (1,n] : \ (Legendre(a_{i-1}) \neq \emptyset \wedge (a_i) \in Legendre(a_{i-1}))\} \end{aligned}$$

ahol $Legendre \subseteq A \times A$

$$Legendre(x,n,h) = \begin{cases} (x^2, n/2, h), & \text{ha } 2|n \wedge n \neq 0 \\ (x, n-1, x*h), & \text{ha } \neg(2|n) \wedge n \neq 0 \end{cases}$$

.

Megoldja-e S_1 ill. S_2 az F feladatot? Ekvivalensek-e A-n?
Van-e olyan altere A-nak, ahol S_1 és S_2 ekvivalens?

8. Leggyengébb előfeltétel

8.1. Tekintsük az 5.4. feladatban adott programot! $[R] = \{1,2,5\}$. Írd fel az $[\mathrm{lf}(S,R)]$ halmazt!

8.2. Mivel egyenlő $\mathrm{lf}(S, \text{igaz})$ ill. $\mathrm{lf}(S, \text{hamis})$?

8.3. Igaz-e, ha $\forall i \in \mathbb{N}$: $Q(i) \Rightarrow Q(i+1)$, akkor

* $(\exists n \in \mathbb{N} : \ \mathrm{lf}(S, Q(n))) = \mathrm{lf}(S, (\exists n \in \mathbb{N} : \ Q(n)))$?

8.4. Igaz-e, hogy $\mathrm{lf}(S_1, R) = \mathrm{lf}(S_2, R) \Longleftrightarrow \mathrm{lf}(S_1 \cup S_2, R) = \mathrm{lf}(S_1, R) \vee \mathrm{lf}(S_2, R)$?

8.5. Igaz-e, ha $\forall y, x \in A : \ x \in [\mathrm{lf}(S_1, P(\{y\}))] \Leftrightarrow x \in [\mathrm{lf}(S_2, P(\{y\}))]$, akkor $\mathcal{D}_{p(S_1)} = \mathcal{D}_{p(S_2)}$? ($P(\{y\})$ az az állítás, amelynek igazsághalmaza $\{y\}$)

8.6. $[H_1], [H_2] \subseteq A$. Igaz-e, ha minden $S \subseteq A \times A^{**}$ programra $[\mathrm{lf}(S, H_1)] = [\mathrm{lf}(S, H_2)]$, akkor $[H_1] = [H_2]$?

8.7. $S_1, S_2 \subseteq A \times A^{**}$ programok. Igaz-e, ha $\forall [H] \subseteq A : \ [\mathrm{lf}(S_1, H)] = [\mathrm{lf}(S_2, H)]$, akkor S_1 ekvivalens S_2-vel?

8.8. Milyen összefüggés van $\mathrm{lf}(S, \text{igaz} \wedge (\neg R))$ és $(\text{igaz} \wedge (\neg \mathrm{lf}(S, R)))$ között?

8.9. Igaz-e, hogy $[\mathrm{lf}(S, R)] = p(S)^{-1}([R])$?

8.10. $A = \mathbb{N}$. Legyen S az 5.16. feladat programja! $H(x) = (x$ páros szám). $[\mathrm{lf}(S, H)] =$?

9. Típus

9.1. Adjunk típusspecifikációt, reprezentációs függvényt, típust (ami megfelel a specifikációnak) a következő típusra: a lehetséges értékek: $[0, 99999]$. A műveletek a következő és az előző 100000 szerinti maradékkal. Az elemi értékek a decimális számjegyek $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Mutasd meg, hogy a típus megfelel a típusspecifikációnak!

9.2. A típusértékek halmaza legyen a magyar abc magánhangzói! { a, á, e, é, i, í, o, ó, ö, ő, u, ú, ü, ű }. Szeretnénk tudni, hogy egy adott magánhangzónak melyik a (rövid ill. hosszú) párja. Legyen egy olyan típusműveletünk, amely erre a kérdésre választ tud adni. Az elemi típusértékek halmaza legyen a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ halmaz! Add meg a típusspecifikációt és készíts el egy olyan típust, ami megfelel a specifikációnak!

9.3. $E = \{0, 1, 2\}, T_S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}, \mathbb{F} = \{F\}$.
$F = \{((a, b, c), (d, e, f)) \mid f + k * 10 = a + b$ és k egész $\}$. Készíts el egy olyan típust, ami megfelel a specifikációnak!

9.4. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció. $\mathbb{F} = \{F\}$.
$\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1)$ és $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$.
$\mathbb{S}_1 = \{S_1\}, \mathbb{S}_2 = \{S_2\}, \varrho_1 = \varrho_2, [I_1] = [I_2]$, és $S_2 \subseteq S_1$.
Igaz-e, ha $\mathcal{T}_1$ megfelel $\mathcal{T}_S$-nek, akkor $\mathcal{T}_2$ is?

9.5. Legyen $\mathcal{T}_{S_1} = (T_1, I_{S_1}, \mathbb{F}_1), \mathcal{T}_{S_2} = (T_2, I_{S_2}, \mathbb{F}_2)$ két típusspecifikáció!
1. állítás: Minden $\mathcal{T}$ típusra: $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{S_1}$-nek $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}$ megfelel $\mathcal{T}_{S_2}$-nek .
2. állítás: $[I_{S_1}] = [I_{S_2}]$ és $\mathbb{F}_1 = \mathbb{F}_2$.
Ekvivalens-e a két állítás?

9.6. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ egy típusspecifikáció. $\mathcal{T}_1 = (\varrho_1, I_1, \mathbb{S}_1)$ és $\mathcal{T}_2 = (\varrho_2, I_2, \mathbb{S}_2)$.

a) Legyen $[I_1] = [I_2], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$ és $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$ és $\forall \alpha \in E^* : \ \varrho_2(\alpha) \subseteq \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_S$-nek!

b) Legyen $[I_2] \subseteq [I_1], \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$ és $\varrho_1([I_1]) = \varrho_2([I_2])$, és $\forall \alpha \in E^* : \ \varrho_2(\alpha) = \varrho_1(\alpha)$, valamint $\mathcal{T}_1$ feleljen meg $\mathcal{T}_S$-nek!

Igaz-e, hogy $\mathcal{T}_2$ is megfelel $\mathcal{T}_S$-nek?

9.7. Legyen $\mathcal{T}_S = (T, I_S, \mathbb{F})$ a következő típusspecifikáció:
$I_S \equiv \text{igaz}, T = \mathbb{N}_0, \mathbb{F} = \{F_1, F_2\}$.

F_1 specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{N}_0} \qquad B = \underset{x'}{\mathbb{N}_0} \qquad Q_{x'} = (x = x')$$

$$R_{x'} = (\exists z \in \mathbb{Z} : \ x' = 8 * z + x \wedge 0 \leq x < 8)$$

F_2 specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{N}_0} \times \underset{y}{\mathbb{N}_0} \times \underset{l}{\mathbb{L}} \qquad B = \underset{x'}{\mathbb{N}_0} \times \underset{y'}{\mathbb{N}_0}$$

$$Q_{x',y'} = (x = x' \wedge y = y')$$

$$R_{x',y'} = (l = (x' = y') \wedge x = x' \wedge y = y')$$

$$\mathcal{T} = (\varrho, I, \mathbb{S}), E = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \forall e \in E^* : \ \varrho(e) = \sum_{i=1}^{|e|} (e_i * 8^{|e|})$$

a) $I(e) = (|e| \geq 1 \wedge (e_1 = 0 \rightarrow |e| = 1))$

b) $I(e) = (|e| \geq 1)$

$S_1 \subseteq (E^*) \times (E^*)^{**}$

$$\begin{aligned} \forall e \in E^* : \ S_1(e) = &\{\alpha \in (E^*)^* \mid \ |\alpha| = |e| \wedge \forall i \in [1, |\alpha|] : \ |\alpha_i| = |\alpha| - i + 1 \wedge \\ &\forall i \in [2, |\alpha|] : \ \forall j \in [1, |\alpha_i|] \alpha_{i_j} = \alpha_{i-1_{j+1}})\} \end{aligned}$$

$S_2 \subseteq (E^* \times E^* \times \mathbb{L}) \times (E^* \times E^* \times \mathbb{L})^{**}$
$\forall e, d \in E^* : \ \forall l \in \mathbb{L}$

$$\begin{aligned} S_2(e,d,l) = &\{\beta \in (E^*)^* \mid \ |\beta| = \min(|e|, |d|) + 1 \wedge \forall i \in [2, |\beta|] : \ \beta_i = (ee, dd, ll) \wedge \\ &ll = (\forall j \in [1, i-1] : \ ee_j = dd_j) \wedge |ee| = i - 1 \wedge |dd| = i - 1) \wedge \\ &\forall j \in [1, i-1] : \ (ee_{i-j} = e_{|e|-j+1} \wedge dd_{i-j} = d_{|d|-j+1}))\} \end{aligned}$$

Írd le szavakkal az F_1, F_2 feladatot, a ϱ relációt, és az S_1, S_2 programfüggvényét! Megfelel-e a típus a specifikációnak az a) ill. a b) esetben?

9.8. Specifikáld azt a típust, melynek értékei egy 128 elemű halmaz részhalmazai, típusműveletei pedig két rész halmaz metszetének ill. uniójának képzése, ill. annak megállapítása, hogy egy elem eleme-e egy részhalmaznak. Adj meg egy típust, amely megfelel a specifikációnak! (Az elemi típus a bit típus.)

10. Paramétertér, specifikáció

10.1. Adott az $A = V \times V \times \mathbb{L}$ állapottér ($V = \{1,2,3\}$) és a $B = V \times V$ paramétertér, továbbá az F_1 és F_2 feladatok.

$F_1 = \{((a_1, a_2, l), (b_1, b_2, k)) \mid k = (a_1 > a_2)\}$

F_2 specifikációja:

$$A = \underset{a_1}{V} \times \underset{a_2}{V} \times \underset{l}{\mathbb{L}} \qquad B = \underset{a_1'}{V} \times \underset{a_2'}{V}$$

$$Q_{a_1',a_2'} = (a_1 = a_1' \wedge a_2 = a_2')$$

$$R_{a_1',a_2'} = (Q_{a_1',a_2'} \wedge l = (a_1' > a_2'))$$

Azonosak-e az F_1 és F_2 feladatok!

10.2. $A = \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{Z}} \qquad B = \underset{x'}{\mathbb{Z}}$

$F_1, F_2 \subseteq A \times A$

$F_1 : Q_{x'} = (x = x')$

$\quad R_{x'} = (Q_{x'} \wedge x = |y * y|)$.

$F_2 = \{((a,b),(c,d)) \mid c = a \wedge |d| * d = c\}$.

Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

10.3. Írd le szövegesen az alábbi feladatot:

$A = \underset{x}{V} \times \underset{l}{\mathbb{N}} \qquad B = \underset{x}{V} \qquad V = \text{vekt}([1,n],\mathbb{Z})$

$Q_{x'} = (x = x')$

$R_{x'} = (x = x' \wedge l = \sum\limits_{i=1}^{n}(g(x',i)))$

$\quad$ ahol $g : V \times [1,n] \to \{0,1\}$

$$g(x',i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \exists m \in \mathbb{Z} :\ (x'(i) = m \wedge \forall j \in [1,n] :\ a(j) \leq m) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

10.4. Specifikáljuk a következő feladatot:

$A = \mathbb{L} \times \mathbb{L}, \quad F \subseteq A \times A,\ F = \{((l,k),(l',k')) \mid k' = k \wedge l' = (l \wedge k)\}$

10.5. Igaz-e a specifikáció tételének megfordítása?
(Ha S megoldja F-et, akkor $\forall b \in B :\ Q_b \Rightarrow \text{lf}(S, R_b)$)

10.6. $A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{p}{\mathbb{Z}} \qquad B = \underset{k'}{\mathbb{Z}}$

$Q_{k'} = (k = k' \wedge 0 < k)$

$R_{k'} = (k = k' \wedge prim(p) \wedge \forall i > 1 :\ prim(i) \Rightarrow |k - i| \geq |k - p|)$

$\quad$ ahol $prim(x) = (x \text{ prímszám})$.

Mit rendel a fent specifikált feladat az $a = (10,1)$ és a $b = (9,5)$ pontokhoz? Fogalmazd meg szavakban a feladatot!

10.7. $A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}} \times \underset{z}{\mathbb{N}} \quad B = \underset{x'}{\mathbb{N}} \times \underset{y'}{\mathbb{N}}$

$F_1, F_2 \subseteq A \times A$

F_1 specifikációja:

$Q_{x',y'} = (x = x' \wedge y = y')$

$R_{x',y'} = (x = x' \wedge y = y' \wedge x'|z \wedge y'|z \wedge \forall j \in \mathbb{N} : \ (x'|j \wedge y'|j) \Rightarrow z|j)$

$F_2 = \{((a,b,c),(d,e,f)) \mid a = d \wedge b = e \wedge f|a*b \wedge a|f \wedge b|f\}$

Megadható-e valamilyen összefüggés F_1 és F_2 között?

10.8. Adott egy $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvény.

$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \quad B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$

$F_1, F_2 \subseteq A \times A$

F_1 specifikációja:

$$\begin{aligned} Q_{m',n'} =& (m = m' \wedge n = n') \\ R_{m',n'} =& (m = m' \wedge n = n' \wedge i \in [m,n] \wedge \forall j \in [m,i) : \ f(j) < f(i) \wedge \\ & \forall j \in [i,n] : \ f(j) \leq f(i)) \end{aligned}$$

F_2 specifikációja:

$Q_{m',n'} = (m = m' \wedge n = n')$

$R_{m',n'} = (i \in [m',n'] \wedge \forall j \in [m',n'] : \ f(j) \leq f(i))$.

Azonos-e a két feladat?

10.9. Specifikáljuk a következő feladatot: $A = V \times \mathbb{N} \qquad V = \text{vekt}([1,n] : \{0,1\})$.

$F \subseteq A \times A, \ F = \{((v,s),(v',s')) \mid v' = v \wedge s' = \sum_{k=1}^{n} v(k)\}$

10.10. Írd le szövegesen az alábbi feladatot:

$A = \underset{x}{V} \quad B = \underset{x'}{V} \qquad V = \text{vekt}([1,n] : \mathbb{Z})$

$Q_{x'} = (x = x')$

$R_{x'} = (\forall i,j \in [1,n] : \ (i < j \Rightarrow x(i) \leq x(j)) \wedge x \in \text{perm}(x'))$

ahol $\text{perm}(x')$ az x' vektor permutációinak a halmaza.

11. Elemi programok

11.1. $A = \{1,2,3\}, B = \{a,b\}, C = A \times B$.

Legyen S program A-n, $S = \{1 \to <1>, 2 \to <2222\ldots>, 3 \to <31>\}$.

Legyen S_1 az S kiterjesztése C-re, M pedig olyan program C-n, hogy M ekvivalens S-sel A-n.

a) elemi program-e S?

b) elemi program-e S_1 és biztosan elemi program-e M?

11.2. $A = \underset{x}{\mathbb{N}} \times \underset{y}{\mathbb{N}}$

Mi az $(x,y) := F(x,y)$, $F = (F_1, F_2)$, $F_1(x,y) = y$, $F_2(x,y) = x$, azaz az $F(p,q) = \{b \in A \mid x(b) = q \wedge y(b) = p\}$ értékadás és az $R = (x < y)$ utófeltétel leggyengébb előfeltétele?

12. Programkonstrukciók, levezetési szabályok

12.1. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. $[\pi_1] = \{1,2,3,4\}$. $[\pi_2] = \{1,3,4,5\}$.

$$\begin{array}{llllll} S_1 = \{ & 1 \to 14 & 1 \to 12222\ldots & 2 \to 2132 & 3 \to 36 & \\ & 4 \to 463 & 4 \to 451 & 5 \to 563 & 6 \to 612 & \} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} S_2 = \{ & 1 \to 134 & 1 \to 121 & 2 \to 213222\ldots & 3 \to 36 & \\ & 4 \to 463 & 4 \to 45111\ldots & 5 \to 5632 & 6 \to 61222\ldots & \} \end{array}$$

Add meg az $(S_1; S_2)$, $IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$, $DO(\pi_1, S_1)$ programokat és a programfüggvényeiket!

12.2. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $[\pi_1] = \{1,2,3,4\}$, $[\pi_2] = \{2,3,4\}$, $[\pi_3] = \{1,4,6\}$.

$$\begin{array}{lllll} S_1 = \{ & 1 \to 1222\ldots & 2 \to 23 & 3 \to 3456 & \\ & 4 \to 463 & 5 \to 53 & 6 \to 62 & \} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} S_2 = \{ & 1 \to 12 & 2 \to 24 & 3 \to 333\ldots & \\ & 4 \to 43 & 5 \to 5 & 6 \to 61 & \} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} S_3 = \{ & 1 \to 12 & 2 \to 222\ldots & 3 \to 31 & \\ & 4 \to 432 & 5 \to 555\ldots & 6 \to 6333\ldots & \} \end{array}$$

$IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2, \pi_3 : S_3) =?$ $\mathcal{D}_{p(IF)} =?$ $p(IF) =?$

12.3. Fejezzük ki a SKIP ill. az ABORT programot egy tetszőleges S program és a programkonstrukciók segítségével!

12.4. Legyen S_1 és S_2 egy-egy program az A állapottéren. Igaz-e, hogy $S_2 \circ \tau \circ S_1$ megegyezik $(S_1; S_2)$-vel?

12.5. $S = (S_1; S_2)$. Igaz-e, hogy

a) $\mathcal{D}_{p(S)} = [\mathrm{lf}(S_1, P(\mathcal{D}_{p(S_2)})]$

b) tetszőleges R utófeltételre: $\mathrm{lf}((S_1; S_2), R) = \mathrm{lf}(S_1, \mathrm{lf}(S_2, R))$?

12.6. Van-e olyan program, ami felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

12.7. Igaz-e, hogy minden program felírható szekvenciaként is, elágazásként is, és felírható ciklusként is?

12.8. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. Igaz-e, hogy $\mathcal{D}_{p(IF)} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} ([\pi_k] \cap \mathcal{D}_{p(S_k)})$?

12.9. Legyen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ program A-n! $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$. Keressünk olyan π_k feltételeket és S_k programokat, hogy $\mathcal{D}_{p(IF)} = A$ és $\mathcal{D}_{p(S)} = \emptyset$!

12.10. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$. Igaz-e, hogy $p(IF)$ része $p(S)$-nek?

12.11. Igaz-e? Ha $IF = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$, akkor $\mathcal{D}_{p(IF)} = ([\pi_1] \cap [\pi_2] \cap \mathcal{D}_{p(S_1)} \cap \mathcal{D}_{p(S_2)}) \cup (\mathcal{D}_{p(S_1)} \cap ([\pi_1] \setminus [\pi_2])) \cup (\mathcal{D}_{p(S_2)} \cap ([\pi_2] \setminus [\pi_1]))$?

12.12. $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

6truecm : 3truecm : $i = 1$; =¿ $i := 2 * i$; $i \leq 2$; =¿ SKIP; .

Milyen sorozatokat rendel S_1, S_2, IF az állapottér egyes pontjaihoz?

12.13. $S = (S_1; S_2)$. S_1 megoldja F_1-et és S_2 megoldja F_2-t. Megoldja-e S az

a) $F = F_2 \circ F_1$

b) $F = F_2 \odot F_1$ feladatot?

12.14. $S = (S_1; S_2)$. S megoldása az $(F_2 \odot F_1)$ feladatnak.
Megoldja-e S_1 az F_1-et ill. S_2 az F_2-t?

12.15. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1, n]$: S_k megoldja az $F|_{[\pi_k]}$ feladatot.

a) IF megoldja-e az F feladatot?

b) IF megoldja-e az F feladatot, ha $\pi_1 \vee \pi_2 \vee \ldots \vee \pi_n =$ igaz?

c) IF megoldja-e az F feladatot, ha $\mathcal{D}_F \subseteq [\pi_1 \vee \pi_2 \vee \ldots \vee \pi_n]$?

12.16. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. IF megoldja az F feladatot. Igaz-e, hogy $\forall k \in [1, n]$: S_k megoldja az $F|_{[\pi_k]}$ feladatot?

12.17. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F_1, \ldots, F_k \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1, n]$: S_k megoldja az F_k feladatot. Megoldja-e IF az $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ feladatot?

12.18. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F \subseteq A \times A$ feladat. IF megoldja az F feladatot és $[\pi_1] \cup \ldots \cup [\pi_n] \subseteq \mathcal{D}_F$. Igaz-e, hogy $\forall k \in [1, n]$: S_k megoldja az $F|_{[\pi_k]}$ feladatot.

12.19. $IF = (\pi_1 : S_1, \ldots, \pi_n : S_n)$. $F_1, \ldots, F_n \subseteq A \times A$ feladat. $\forall k \in [1, n]$: $\mathcal{D}_{F_k} \subseteq [\pi_k]$ és S_k megoldja az F_k feladatot. $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Megoldja-e IF az F feladatot?

12.20. Igaz-e, hogy $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$ és $IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_1 \wedge \pi_2 : S_1 \cup S_2, \pi_2 : S_2)$

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

12.21. Legyen $IF_{34} = (\pi_3 : S_3, \pi_4 : S_4)$, $IF_1 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 : IF_{34})$,
$IF_2 = (\pi_1 : S_1, \pi_2 \wedge \pi_3 : S_3, \pi_2 \wedge \pi_4 : S_4)$! Igaz-e, hogy IF_1 és IF_2

a) egyenlő?

b) ekvivalens?

12.22. $F \subseteq A \times A$ feladat. S_0 program A-n. S_0 megoldja F-et. Megoldja-e a $DO(\pi, S_0)$ program az F feladat π-re vonatkozó lezártját?

12.23. Legyen $DO = (\pi, S)$! Igaz-e, hogy

a) $p(DO) \subseteq p(S)$?

b) $p(S) \subseteq p(DO)$?

12.24. $A = \underset{i}{\mathbb{N}_0} \times \underset{n}{\mathbb{N}_0}$

$S = ((i := 0; DO(i \neq n, IF(\ 2|i :\ i := i+1,\ \ 2 \not| i\ :\ \ i := i+2))))$

7truecm : $i := 0$; $i \neq n$; DO 3.2truecm : $2|i$; =¿ $i := i+1$; $2 \not| i$; =¿ $i := i+2$; .

Milyen sorozatokat rendel S a $(2,4)$ ill. a $(3,7)$ ponthoz?

12.25. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és Q igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres a

a) $[P \wedge R]$

b) $[P \wedge \neg\pi \wedge R]$ halmaz?

12.26. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele, és $(Q \wedge \pi)$ igazsághalmaza nem üres. Lehet-e üres a $\mathrm{lf}(S_0, P)$ és $\mathrm{lf}(DO, R)$ igazsághalmazának metszete?

12.27. Tegyük fel, hogy teljesül a ciklus levezetési szabályának mind az öt feltétele. Legyen $g = p(S_0) \cap ([\pi] \times A)$ és $q \in [P] \cap [\pi]$. Igaz-e, hogy

a) $\forall k \in \mathbb{N}_0 :\ g^k(q) \subseteq [P]$

b) $b \in g^k(q) \cap [\pi] \cap [P] \Rightarrow t(b) \leq t(q) - k$?

c) $g|_\pi = p(S_0)|_\pi$?

d) $\exists k \in \mathbb{N}_0 :\ k \leq t(q) \wedge g^k(q) \subseteq [\neg\pi]$?

12.28. Legyen $S = (S_1; S_2)$ és Q, Q' és R olyan állítások, amelyekre

$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(S, R), Q' \Rightarrow \mathrm{lf}(S_2, R), Q \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, Q')$.

Lehetséges-e, hogy $[Q] \cap [R] = \emptyset \wedge [Q] \cap [Q'] \neq \emptyset \wedge [Q'] \cap [R] \neq \emptyset$? Indokd, ha nem, és írj rá példát, ha igen!

12.29. $A = \underset{z}{\mathbb{Z}} \times \underset{y}{\mathbb{N}_0} \quad B = \underset{z'}{\mathbb{Z}} \times \underset{y'}{\mathbb{N}_0}$

$Q_{x',y'} = (x = x' \wedge y = y')$

$R_{x',y'} = (x = x' - y' \wedge y = 0)$

$$\begin{aligned} S_0 = &\{((x,y), <(x,y),(x-1,y),(x-1,y-1)>) \mid x \in \mathbb{Z} y \in \mathbb{N}\} \cup \\ &\{((x,0), <(x,0)>) \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ DO = &\{((x,y), <(x,y),(x-1,y),(x-1,y-1),(x-2,y-1), \\ &(x-2,y-2),\ldots,(x-y+1,1),(x-y,1)(x-y,0)>) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in N_0\} \end{aligned}$$

Megjegyzés: Az $(x,0)$ párhoz 1 hosszúságú, az $(x,1)$ párhoz 3 hosszúságú, az $(x,2)$ párhoz 5 hosszúságú sorozatot rendel a program.

Tudjuk, hogy $DO = (\pi; S_0)$ valamilyen π-re. Igaz-e, hogy található olyan P állítás és $t : A \to \mathbb{Z}$ függvény, hogy a ciklus levezetési szabályának feltételei teljesülnek, és ha igen, adj meg egy megfelelő π-t, P-t és t-t!

12.30. $A = \underset{k}{\mathbb{Z}} \times \underset{x}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{a}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \quad B = \underset{a'}{\mathbb{Z}} \times \underset{b'}{\mathbb{Z}}$

$S = (k := 5; ((a > b : x := a - b, a \leq b : x := b - a); i := i + 1))$
$Q_{a',b'} = (a = a' \wedge b = b' \wedge i \in [0,1] \wedge |a - b| > 10)$
$R_{a',b'} = (a = a' \wedge b = b' \wedge k * i \leq x)$
Bizonyítsuk be, hogy $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(S, R)$!

13. Típuskonstrukciók

13.1. $T = \mathrm{it}(T_0)$, $q \in T$, $e \in T_0$.

1. def.: $e \in q \Leftrightarrow \exists \alpha \in T_0^* : \ (q \in \psi_I(\alpha) \wedge \exists i \in [1, |\alpha|] : \ \alpha_i = e)$.
2. def.: $e \in q \Leftrightarrow \forall \alpha \in T_0^* : \ (q \in \psi_I(\alpha) \wedge \exists i \in [1, |\alpha|] : \ \alpha_i = e)$.

Ekvivalens-e a két definíció, ha az iterált kombináció, halmaz, sorozat, ill. általában?

13.2. $T = \mathrm{it}(T_0), t \in T$. Ekvivalens-e a következő két definició, ha az iterált halmaz, sorozat, ill. általában? Mit ad meg $f_1(t), f_2(t)$?

1. def.: $f_1(t) = \max\limits_{(\alpha,t)\in\psi_I} (\bigcup\limits_{i=1}^{|\alpha|} \alpha_k)$
2. def.: $f_2(t) = \left| \bigcup\limits_{(\alpha,t)\in\psi_I} \left(\bigcup\limits_{i=1}^{|\alpha|} \alpha_k \right) \right|$

13.3. Specifikáljunk egy olyan típust, ahol a típusértékhalmaz egy bolt vásárlóinak számláit tartalmazza! Egy számla a vásárolt cikkek (megnevezés, mennyiség, egységár) felsorolásából és egy végösszegből áll. Adjunk meg egy olyan specifikációs invariánst, ami csak a helyesen kitöltött számlákra igaz!