Programinverzió

(példákkal kiegészítve)

Legyen E és U tetszőleges halmazok, legyen $X \subseteq 2^E$.
Legyen $f_1 : U \to X$.
Tekintsük az alábbi specifikációval definiált F_1 feladatot:

$$A = \underset{u}{\mathbb{U}} \times \underset{x}{\mathbb{X}}$$

$$B = \underset{u'}{\mathbb{U}}$$

$$Q : \big(u = u'\big)$$

$$R : \big(x = f_1(u')\big)$$

Tegyük fel, hogy az alábbi S_1 program megoldja a fenti feladatot.

<table>
<tr><td colspan="2">$S_{11}(u)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x := \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="2">π_1</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$S_{12}(u, e)$</td></tr>
<tr><td>$x := x \tilde{\cup} \{e\}$</td></tr>
</table>

Az S_1 programot **elemenként előállító** programnak nevezzük.

Legyen F és V tetszőleges halmazok, legyen $Y \subseteq 2^F$.
Legyen $f_3 : Y \to V$.
Tekintsük az alábbi specifikációval definiált F_3 feladatot:

$$A = \underset{y}{\mathbb{Y}} \times \underset{v}{\mathbb{V}}$$

$$B = \underset{y'}{\mathbb{Y}}$$

$$Q : \big(y = y'\big)$$

$$R : \big(v = f_3(y')\big)$$

Tegyük fel, hogy az alábbi S_3 program megoldja a fenti feladatot.

$S_{31}(v)$
$y \neq \emptyset$
$d :\in \ y$
$y := \ y \simeq \{d\}$
$S_{32}(v, d)$
$S_{33}(v)$

Az S_3 programot **elemenként felhasználó** programnak nevezzük.

Legyen $f_2 : \ X \to Y$ elemenként feldolgozható függvény.
Jelöle S_2 az f_2 értékét meghatározó programot.
Tekintsük a következő feladatot:

$$A = \underset{u}{\mathbb{U}} \times \underset{v}{\mathbb{V}}$$

$$B = \underset{u'}{\mathbb{U}}$$

$$Q : \big(u = u'\big)$$

$$R : \big(v = f(u')\big)$$

Ahol $f : \ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.
Könnyen belátható, hogy a következő program megoldja a fenti faladatot:

S_1
S_2
S_3

Programinverzió tétele

Az alábbi program megoldja az f függvény kiszámításával kapcsolatos feladatot.

$S_{11}(u)$
$S_{31}(v)$
π_1
$S_{12}(u, e)$
$d := f_2(\{e\})$
$S_{32}(v, d)$
$S_{33}(v)$

Általános eset

Jelölések:

A továbbiakban legyen $i = 1, ..., n$ és $j = 1, ..., m$. Legyenek U_i, V_j tetszőleges típusértékhalmazok, H tetszőleges rendezett halmaz.

$$X ::= X_1 \times ... \times X_n, X_i \subseteq 2^H (i = 1, ..., n),$$
$$Y ::= Y_1 \times ... \times Y_m, Y_j \subseteq 2^H (j = 1, ..., m).$$

Legyenek $f_{1i} : U_i \to X_i$, $f_2 : X \to Y$, $f_{3j} : Y_j \to V_j$ függvények. Legyen f_2 elemenként feldolgozható és

$\forall e \in X :$

$(\forall e_0 \in H : (\forall i \in [1, n] : e_i = \emptyset \vee e_i = \{e_0\}) \to \forall j \in [1, m] : (|f_2(e)_j| \leq 1))$

Definicíciók:

Elemenként előállító program

Az $S_{1i} \subseteq A_{1i} \times A_{1i}^{**}$, $S_{1i} ::= (S_{11i}(u); x_i := \emptyset; DO(\pi_{1i}; S_{130i}))$ programot elemenként előállító programnak nevezzük, ha

i) megoldása az alábbi $Q_{u_i'}$ és $R_{u_i'}$ elő-, ill. utófeltétel párral specifikált feladatnak,

ii) $P_{u_i'}$ az S_{13i} program ciklusinvariánsa, valamint

iii) $S_{11i}(u_i)$ és $S_{1301i}(u_i, e_i)$-ben x_i konstans függvény, ahol

$A_{1i} = U_i \times X_i, \quad u_i : U_i, \quad x_i : X_i$

$B_{1i} = U_i, \quad u_i' : U_i$

$Q_{u_i'} = (u_i = u_i'),$

$R_{u_i'} = (x_i = f_{1i}(u_i')).$

$P_{u_i'} = (x_i \cup f_{1i}(u_i) = f_{1i}(u_i') \wedge \forall p, q \in H : (p \in x_i \wedge q \in f_{1i}(u_i) \to p < q).$

<table>
<tr><td colspan="2">$S_{11i}(u_i)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_i := \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="2">π_{1i}</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$S_{1301i}(u_i, e_i)$</td></tr>
<tr><td>$x_i := x_i \tilde{\cup} e_i$</td></tr>
</table>

Elemenként felhasználó program

Az $S_{3j} \subseteq A_{3j} \times A_{3j}{}^{**}$, $\quad S_{3j} ::= (S_{31j}(v_j); DO(y_j \neq \emptyset; S_{320j}); S_{33j}(v_j))$ programot elemenként felhasználó programnak nevezzük, ha

i) megoldása az alábbi $Q_{y_j{}'}$ és $R_{y_j{}'}$ elő-, ill. utófeltétel párral specifikált feldatnak,

ii) $P_{y_j{}'}$ az S_{32j} program ciklusinvariánsa, valamint

iii) $S_{31j}(v_j), S_{3203j}(v_j, g_j)$ és $S_{33j}(v_j)$-ban y_j konstans függvény.

$$
\begin{aligned}
&A_{3j} = Y_j \times V_j, \quad y_j : Y_j, \quad v_j : V_j \\
&B_{3j} = Y_j \quad y_j{}' : Y_j \\
&Q_{y_j{}'} = (y_j = y_j{}'), \\
&R_{y_j{}'} = (v_j = f_{3j}(y_j{}')) \\
&P_{y_j{}'} = ...
\end{aligned}
$$

$S_{31}(v_j)$	
$y_j \neq \emptyset$	
	$g_j := mem(y_j)$
	$y_j := y_j \tilde{-} \{g_j\}$
	$S_{3203j}(v_j, g_j)$
$S_{33j}(v_j)$	

Tétel:

Legyen $f ::= f_3 \ o \ f_2 \ o \ f_1$, ahol $f_1 ::= (f_{11}, ..., f_{1n})$,$f_3 ::= (f_{31}, ..., f_{3m})$. Az alábbi S program megoldása az

$$
\begin{aligned}
&A = U_1 \times ... \times U_n \times V_1 \times ... \times V_m, \quad u_i : U_i, \quad v_i : V_i \\
&B = U_1 \times ... \times U_n \quad u_i{}' : U_i \\
&Q_{u_1{}', ..., u_n{}'} = (u_1 = u_1{}' \wedge ... \wedge u_n = u_n{}'), \\
&R_{u_1{}', ..., u_n{}'} = ((v_1, ...v_m) = f(u_1{}', ..., u_n{}'))
\end{aligned}
$$

specifikációval definiált feladatnak.

$S_{11\,1}(u_1)$
$IF(\pi_{1\,1} : S_{1301\,1}(u_1, e_1),\ \neg\pi_{1\,1} :\ e_1 = \emptyset)$
$\ldots$
$S_{11\,n}(u_n)$
$IF(\pi_{1\,n} : S_{1301\,n}(u_n, e_n),\ \neg\pi_{1\,n} :\ e_n = \emptyset)$
$S_{31\,1}(v_1)$
$\ldots$
$S_{31\,m}(v_m)$
$\bigcup_{i=1}^{n} e_i \neq \emptyset$
$e : min(\bigcup_{i=1}^{n} e_i)$
$\backslash \ldots$ $\ldots$ | $\backslash$ $\{e\} = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \{e\} = e_{i_k} \wedge \{e\} \neq e_{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \{e\} \neq e_{i_n}$ | $\backslash \ldots$ $\ldots$
$(g_1, ..., g_m) := f(sl(\{i_1 \ldots i_k\}, e))$
$IF(\pi_{1\,i_1} : S_{1301\,i_1}(u_{i_1}, e_{i_1}), \neg\pi_{1\,i_1} :\ e_{i_1} = \emptyset)$
$\ldots$
$IF(\pi_{1\,i_k} : S_{1301\,i_k}(u_{i_k}, e_{i_k}), \neg\pi_{1\,i_k} :\ e_{i_k} = \emptyset)$
$IF(g_1 \neq \emptyset : S_{2302\,1}(v_1, \overline{g_1}), g_1 = \emptyset : SKIP)$
$\ldots$
$IF(g_m \neq \emptyset : S_{2302\,m}(v_m, \overline{g_m}), g_m = \emptyset : SKIP)$
$S_{33\,1}(v_1)$
$\ldots$
$S_{33\,m}(v_m)$

ahol $\overline{g_j}$ a g_j egyetlen eleme, ha $g_j \neq \emptyset,\ j = 1, ..., m$,
$i_1, ..., i_n$ az $1, ..., n$ permutációja, $sl : 2^{\{1,\cdots,n\}} \times H \to X$,

$$sl(\{i_1, .., i_k\}, e)_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{ha } i \in i_1, ..., i_k \\ \emptyset, & \text{ha } i \notin i_1, ..., i_k \end{cases}$$

és az $\{i_1, ..., i_k\}$ indexhalmazt az $\{1, ..., n\}$ indexhalmaz minden lehetséges részhalmazára képezzük. Tehát az elágazás "ágainak" száma $2^n - 1$ és mindíg pontosan egy feltétel teljesül. Továbbá

$e_i : H$, $g_j : Y_j$,

$\pi_{1\,i}$, $S_{11\,i}(u_i)$, $S_{1301\,i}(u_i, e_i)$ az $S_{1\,i}$ program, $S_{31\,j}(u_j)$, $S_{3203\,j}(v_j, g_j)$, $S_{33\,j}(v_j)$ az $S_{3\,j}$ program megfelelő részei.

1. Példa

Tekintsünk egy input file-t, amely 0 és 1-eseket tartalmaz. Hány k-nál hosszabb maximális összefüggő egyes sorozat van a file-ban?

A feladat specifikációja:

$$A = \underset{f}{\mathbb{F}} \times \underset{s}{\mathbb{N}_0}$$

$$B = \underset{f'}{\mathbb{F}}$$

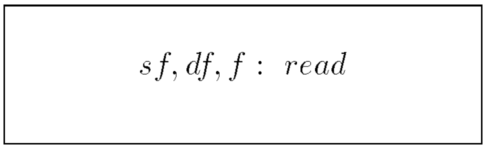
$$Q : \big(f = f'\big)$$

$$R : \Big(Q \wedge s = \sum_{i=f'.lob}^{f'.hib} \chi(\beta(i))\Big)$$

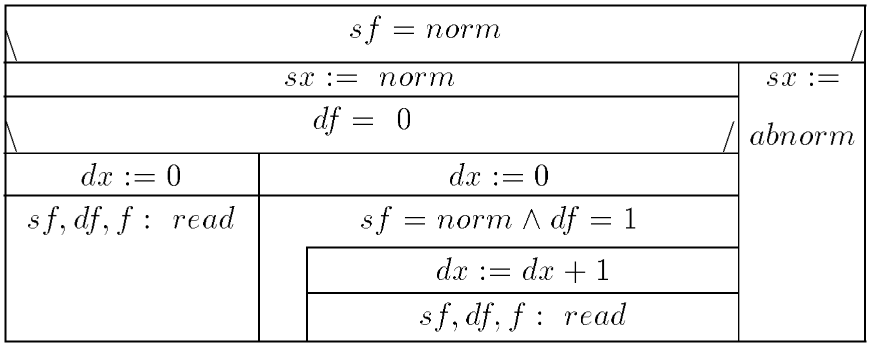
Ahol $\mathbb{F} = Infile(E)$ és $E = \{0,1\}$. $\beta(i)$ jeleti, hogy az i-edik pozíciótól a file-ban k-nál hosszabb maximális összefüggő egyes sorozat kezdődik.

Legyen $\mathbb{X} = Infile(N_0)$. Definiáljuk $\mathbb{F}$ és $\mathbb{X}$ között a következő ρ reprezentációt: $f \in \mathbb{F}$ reprezentálja azt az $x \in \mathbb{X}$ elemet, amelyet f-ből úgy kapunk, hogy a maximális összefüggő egyes sorozatokat az illető sorozat hosszával helyettesítjük. Tekintettel a ρ reprezentációra, hozzunk létre egy olyan típust az $\mathbb{F}$ és a $read$ művelete segítségével, amely megfelel az $(\mathbb{X}, read)$ specfikációnak. A megoldás a következő:

Absztrak open

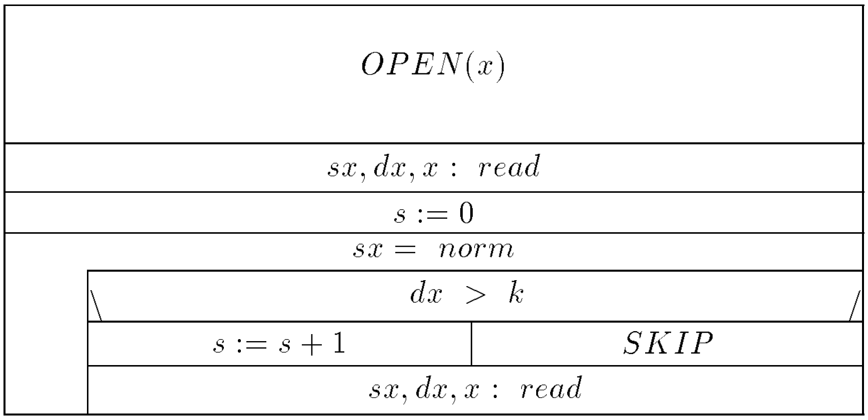


Absztrak read



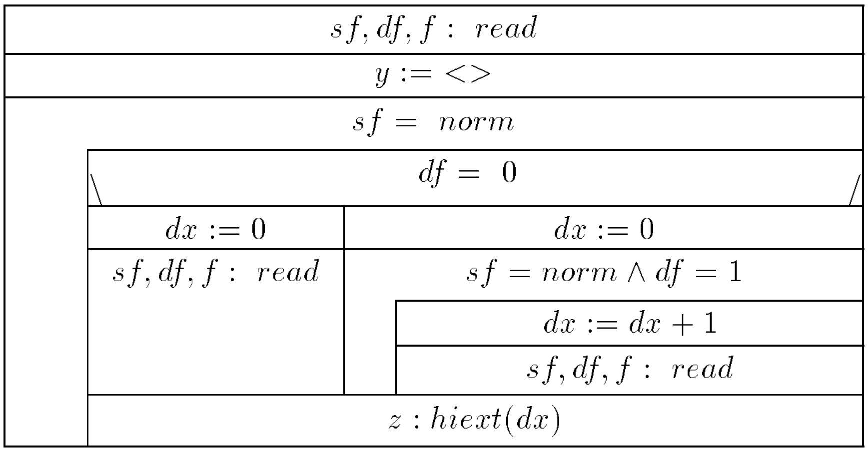
A kitűzött feladatot a bevezetett állapottér-transzformáció szerint az $Infile(N_0)$ típusú szekvenciális input file-ra vonatkozó feltételes számlálás tétele alkalmazásával oldhatjuk meg.

Így a megoldás:



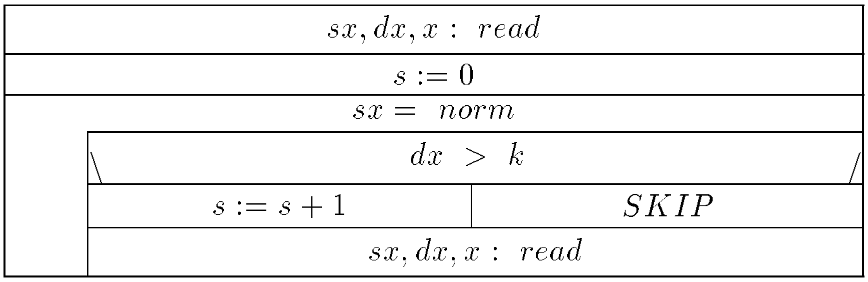
Legyen $\mathbb{Y} = \ Outfile(N_0)$.

Képezzük az absztrakt file elemeit az$\mathbb{Y}$ típusú output file-ban!

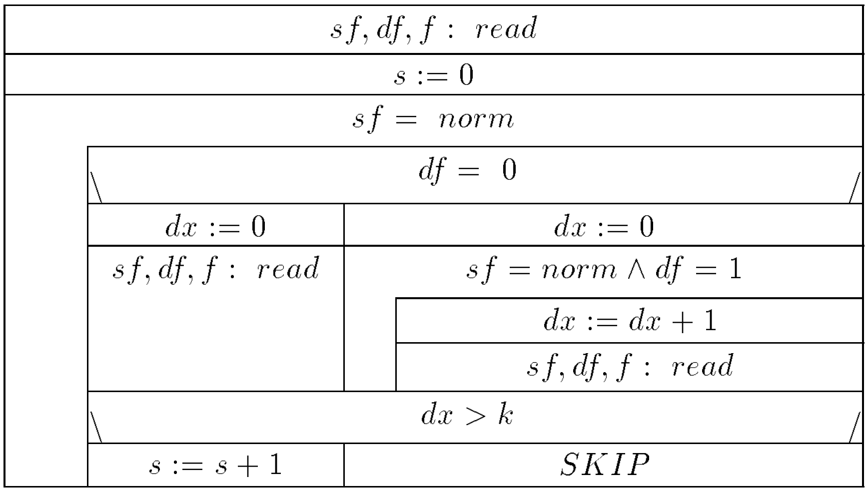


Ezt a programot **elemenként előállító** programnak nevezhetjük.

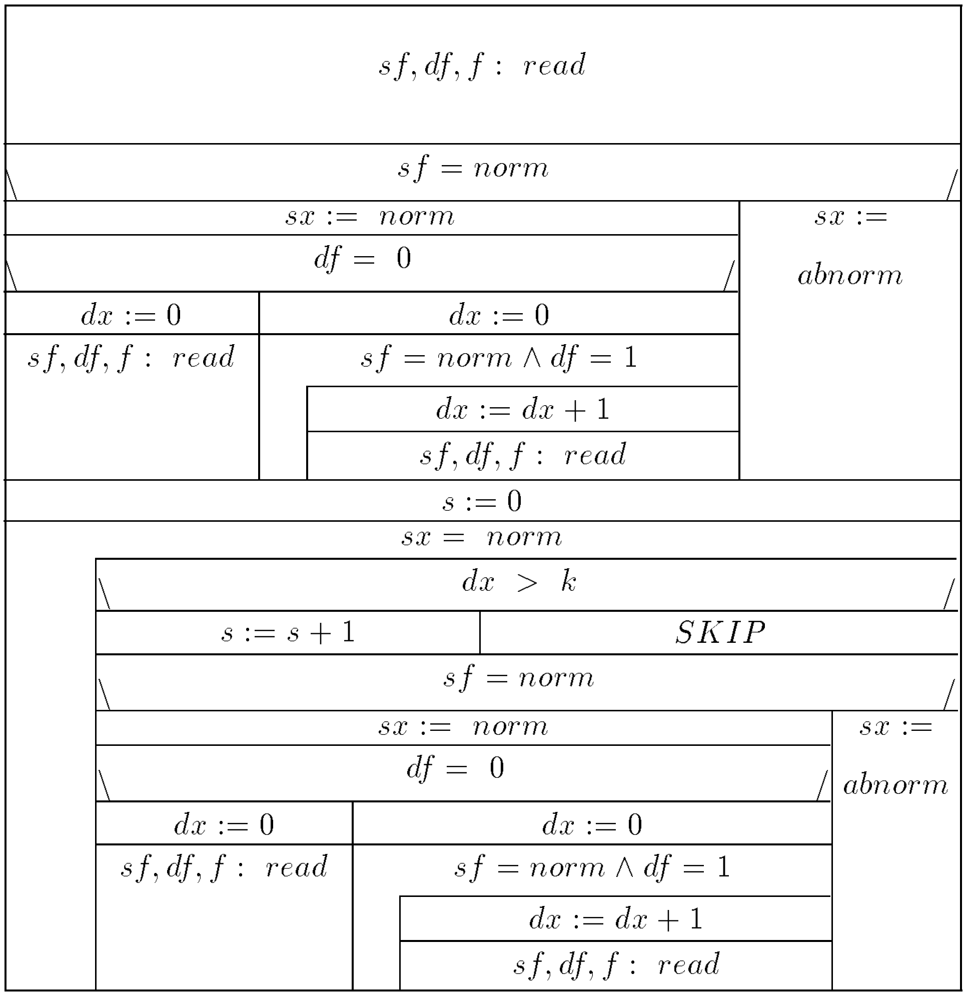
Az alábbi programot **elemenként felhasználó** programnak nevezhetjük.



Alkalmazva **Programinverzió** tételét $n = 1$ és $m = 1$ esetén, a következő megoldást kapjuk:



Az absztrak műveletek megvalósításának figyelembe vételével a következő megoldáshoz juthatunk:



Belátható, hogy a fenti program és a **programinverzióval** kapott program az $\mathbb{F} \times \mathbb{N}_0$ altéren ekvivalensek.

2. Példa

Adottak az x szekvenciális file-ban (megengedett művelet: $sx, dx, x : read$) egy évfolyam hallgatóinak adatai. Egy elem a hallgató nevét, csoportszámát és tíz db. osztályzatot tartalmaz. A file csoportszámok szerint növekvően rendezett. Állítsuk elő az y sorozatot, amely a hallgatók nevét, csoportszámát és átlagát, valamint a z sorozatot, amely a csoportátlagokat tartalmazza!

Legyen $T = (nev : seq(CH), cs : \mathbb{N}, jegy : seq([1..10], \{1, 2, 3, 4, 5\}),$
$T' = (nev : seq(CH), cs : \mathbb{N}, atl : \mathbb{R})$ és $T'' = (cs : \mathbb{N}, atl : \mathbb{R})$ rekord típusok. Legyenek $\mathbb{X} = Infile(T)$, valamint $Y = seq(T')$ és $Z = seq(T'')$.

A z sorozat előállítása

A feladat specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{X}} \times \underset{z}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{x'}{\mathbb{X}}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(z = trf_2(x')\big)$$

Állítsuk elő az x_{cs} $Outfile(T)$ típusú szekvenciális output file-t, amely a cs-ben tárolt csoportkódnak megfelelő csoport adatait tartalmazza. Ezt a feladatot a következő **elemenként előállító** programmal tehetjük meg.

$x_{cs} := <>$	
$sx = norm \wedge dx.cs = cs$	
	$dx_{cs} := dx$
	$sx, dx, x : read$
	$x_{cs} : hiext((cs, dx_{cs}))$

Az x_{cs} file ismeretében számoljuk ki a csoportátlagot az atl változóba. Ez a feladat a szekvenciális input file típusra transzformált összegzés tételével oldható meg a következő módon:

$sx_{cs}, dx_{cs}, x_{cs} : \ read$
$atl, sz := \ 0, 0$
$sx_{cs} = \ norm$
$\quad atl, sz := \ s = \sum_{i=1}^{10} dx_{cs}.jegy[i], \ sz + 1$
$\quad sx_{cs}, dx_{cs}, x_{cs} : \ read$
$atl := \ atl/sz$

Ezt a programot elemenként felgolgozó programnak tekinthetjük.

Alkalmazva a **Programinverzió** tételét $n = 1$ és $m = 1$ és az f_2 identitás, igy triviálisan elemenként feldolgozható függvény esetén, a következő megoldáshoz juthatunk:

$atl, sz := \ 0, 0$
$sx = \ norm \wedge dx.cs = \ cs$
$\quad dx_{cs} := \ dx$
$\quad sx, dx, x : \ read$
$\quad atl, sz := \ \sum_{i=1}^{10} dx_{cs}.jegy[i], \ sz + 1$
$atl := \ atl/sz$

Tekintettel arra, hogy az x file a csoportkódókra rendezett, az eredeti feladat megoldását a következő program adja:

- $sx, dx, x : read$
- $z := <>$
- $sx = norm$
  - $atl, sz := 0, 0$
  - $cs := dx.cs$
  - $sx = norm \wedge dx.cs = cs$
    - $dx_{cs} := dx$
    - $sx, dx, x : read$
    - $atl, sz := \sum_{i=1}^{10} dx_{cs}.jegy[i],\ sz + 1$
  - $atl := atl/sz$
  - $z : hiext((cs, atl))$

A dx_{cs} változót kiküszöbölhetjük, ha a következő transzformációt végezzük:

- $sx, dx, x : read$
- $z := <>$
- $sx = norm$
  - $atl, sz := 0, 0$
  - $cs := dx.cs$
  - $sx = norm \wedge dx.cs = cs$
    - $atl, sz := (\sum_{i=1}^{10} dx.jegy[i])/10,\ sz + 1$
    - $sx, dx, x : read$
  - $atl := atl/sz$
  - $z : hiext((cs, atl))$

Az y sorozat előállítása

A feladat specifikációja:

$$A = \underset{x}{\mathbb{X}} \times \underset{y}{\mathbb{Y}}$$

$$B = \underset{x'}{\mathbb{X}}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(y = trf_1(x')\big)$$

Könnyen látható, hogy a megoldást egyváltozós egyértékű elemenként feldolgozható függvény értékének kiszámítása adja az $\mathbb{X} = Infile(T)$, valamint a $Z = seq(T')$ típusokkal kapcsolatban.

Az egyes feladatok megoldásai egyetlen programba fésülhetők össze a következő módon:

- $sx, dx, x : read$
- $y := <>$
- $z := <>$
- $sx = \ norm$
  - $atl, sz := \ 0, 0$
  - $cs := \ dx.cs$
  - $sx = \ norm \wedge dx.cs = \ cs$
    - $atl, sz := \ (\sum_{i=1}^{10} dx.jegy[i])/10, \ sz + 1$
    - $y : hiext((dx.nev, dx.cs, (\sum_{i=1}^{10} dx.jegy[i])/10))$
    - $sx, dx, x : \ read$
  - $atl := \ atl/sz$
  - $z : hiext((cs, atl))$

Természetesen a $(\sum_{i=1}^{10} dx.jegy[i])/10$ függvényt ki kell transzformálni. Ehhez a megfelelő programtranszfomációt kell alkalmazni.

Megjegyzés:

Az alábbi formátumú

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$S_{11i}(u_i)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$x_i := \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">π_{1i}</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td align="center">$S_{1301i}(u_i, e_i)$</td></tr>
<tr><td align="center">$x_i := x_i \tilde{\cup} e_i$</td></tr>
</table>

elemenként előállító programot általában valamely összetett tipus, pl. file, sorozat, halmaz, stb., "kibontására" alkalmazhatjuk, ahol az $S_{1301i}(u_i, e_i)$ program lehetővé teszi valamely absztrak read művelet megvalósítását is.

Ezekben az esetekben a programinverzió tételéhez eljuthatunk úgy is, hogy az f_1 leképezést elhagyjuk az alábbi módon, majd a kapott tétel alapján típustranszfomáció alkalmazásával jutunk el a programinverzió megfelelő tételéhez.

Legyen $f ::= f_3 \ o \ f_2$, ahol $f_3 ::= (f_{3\,1}, ..., f_{3\,m})$. Az alábbi S program megoldása az

$$
\begin{aligned}
&A = X_1 \times ... \times X_n \times V_1 \times ... \times V_m, \quad x_i : X_i, \quad v_i : V_i \\
&B = X_1 \times ... \times X_n \quad\ x_i{}' : X_i \\
&Q_{x_1{}', ..., x_n{}'} = (x_1 = x_1{}' \wedge ... \wedge x_n = x_n{}'), \\
&R_{x_1{}', ..., x_n{}'} = ((v_1, ... v_m) = f(x_1{}', ..., x_n{}'))
\end{aligned}
$$

specifikációval definiált feladatnak.

$S_{31_1}(v_1)$

$\dots$

$S_{31_m}(v_m)$

$\vee_{i=1}^{n} x_i \neq \emptyset$

$e :\in (\bigcup_{i=1}^{n} x_i)$

$\backslash \dots \backslash$ $e \in x_{i_1} \wedge \dots e \in x_{i_k} \wedge e \notin x_{i_{k+1}} \wedge e \notin x_{i_n}$ $\backslash \dots$

$\dots$

$(g_1, ..., g_m) := f(sl(\{i_1 \dots i_k\}, e))$

$x_{i_1}, \dots, x_{i_k} := x_{i_1} \simeq \{e\}, \dots, x_{i_k} \simeq \{e\}$

$IF(g_1 \neq \emptyset : S_{23021}(v_1, \overline{g_1}), g_1 = \emptyset : SKIP)$

$\dots$

$IF(g_m \neq \emptyset : S_{2302m}(v_m, \overline{g_m}), g_m = \emptyset : SKIP)$

$\dots$

$S_{33_1}(v_1)$

$\dots$

$S_{33_m}(v_m)$

ahol $\overline{g_j}$ a g_j egyetlen eleme, ha $g_j \neq \emptyset$, $j = 1, ..., m$,
$i_1, ..., i_n$ az $1, ..., n$ permutációja, $sl : 2^{\{1,\dots,n\}} \times H \to X$,

$$sl(\{i_1, .., i_k\}, e)_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{ha } i \in i_1, ..., i_k \\ \emptyset, & \text{ha } i \notin i_1, ..., i_k \end{cases}$$

és az $\{i_1, ..., i_k\}$ indexhalmazt az $\{1, ..., n\}$ indexhalmaz minden lehetséges részhalmazára képezzük. Tehát az elágazás "ágainak" száma $2^n - 1$ és mindíg pontosan egy feltétel teljesül. Továbbá

$S_{31_j}(u_j)$, $S_{3203_j}(v_j, g_j)$, $S_{33_j}(v_j)$ az S_{3_j} program megfelelő részei.