Programozási tételek

1. Összegzés

Legyen H egy tetszőleges halmaz, amelyen értelmezett az összeadás művelete. Tegyük fel, hogy létezik neutrális eleme a H-nak az összeadásra nézve (jelölje ezt 0), valamint adott az $f : \mathbb{Z} \to H$ függvény. Adott $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumon összegezzük az f függvény értékeit! Legyen $\sum\limits_{i=m}^{n} f(i) = 0$, ha $n < m$.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathrm{H}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n'\big)$$

$$R : \big(Q \wedge s = \sum_{i=m'}^{n'} f(i)\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum_{i=m}^{k} f(i)\big)$$

1. A ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi : \ (k \geq n)$. Ha ugyanis $n < m$ akkor, ha $P \wedge \neg\pi$, akkor $k = m - 1$ és ezért
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$ teljesül, mivel $n < m$ esetén $\sum\limits_{i=m}^{n} f(i) = \sum\limits_{i=m}^{m-1} f(i) = 0.$
   Ha viszont $n \geq m$, akkor, ha $P \wedge \neg\pi$, akkor $k = n$ és ezért
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$ nyilván teljesül.
   Tehát $\pi : \ k < n$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = n - k$
   a π választása miatt.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   $S_2 = (k := k + 1)$
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$

teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{k \leftarrow k+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(k := k+1,\ P) \Leftrightarrow P^{k \leftarrow k+1}$.
$P^{k \leftarrow k+1} : \big(Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum\limits_{i=m}^{k+1} f(i)\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s + f(k+1) = \sum\limits_{i=m}^{k+1} f(i)$,
ahonnan
$P \wedge \pi \Rightarrow {P^{k \leftarrow k+1}}^{s \leftarrow s+f(k+1)}$.
Ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(s := s + f(k+1), P^{k \leftarrow k+1})$.
Tehát
$S_0 = (s := s + f(k+1); k := k+1)$
alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \le t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \le t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Mivel
$\mathrm{lf}(S_0, t \le t_0) \Leftrightarrow {(t \le t_0)^{k \leftarrow k+1}}^{s \leftarrow s+f(k+1)} \Leftrightarrow n-k \le t_0+1 \Leftrightarrow t \le t_0+1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{k,s \leftarrow m-1,0}$
fennáll, mivel
$P^{k,s \leftarrow m-1,0} : \big(Q \wedge m-1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge 0 = \sum\limits_{i=m}^{m-1} f(i)\big)$,
és
$\big(m-1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge 0 = \sum\limits_{i=m}^{m-1} f(i)\big) \Leftrightarrow true.$
Tehát
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(k, s := m-1, 0,\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (k < n, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((k, s := m-1, 0; DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$k, s := m-1, 0$
$k < n$
$s := s + f(k+1)$
$k := k+1$

2. Számlálás

Legyen $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Számoljuk meg, hány helyen igaz β az $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban. Legyen $\sum\limits_{i=m}^{n} \chi(\beta(i)) = 0$, ha $n < m$.

$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathbb{N}_0}$

$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(m = m' \wedge n = n'\big)$

$R : \big(Q \wedge s = \sum\limits_{i=m'}^{n'} \chi(\beta(i))\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum\limits_{i=m}^{k} \chi(\beta(i))\big)$

ahol $\chi : \mathbb{L} \to \mathbb{N}_0, \chi(a) = \begin{cases} 1 & , a = \uparrow \\ 0 & , a = \downarrow \end{cases}.$

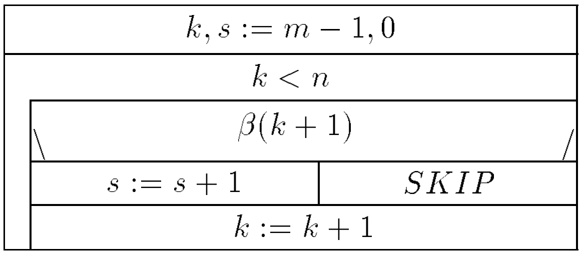
A levezetés lépései megegyeznek az **Összegzés** tétele levezetésénél alkalmazott lépésekkel, kivéve a 3. és a 4. pontokat, amelyek az alábbiak szerint módosulnak:

3'. Célszerű a ciklusmagot
$S_0 : (S_1; S_2)$
szekvencia fomában keresni, ahol
$S_2 = (k := k+1)$
abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{k \leftarrow k+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(k := k+1,\ P) \Leftrightarrow P^{k \leftarrow k+1}$.
$P^{k \leftarrow k+1} : \big(Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum\limits_{i=m}^{k+1} \chi(\beta(i))\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s+1 = \sum\limits_{i=m}^{k+1} \chi(\beta(i)) \Leftrightarrow$

$P^{k\leftarrow k+1}{}^{s\leftarrow s+1}$.
Ezért
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \Rightarrow \mathrm{lf}(s := s+1,\ P^{k\leftarrow k+1})$.
Hasonlóan
$P \wedge \pi \wedge \neg\beta(k+1) \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum\limits_{i=m}^{k+1} \chi(\beta(i))$,
tehát
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \Rightarrow \mathrm{lf}(SKIP,\ P^{k\leftarrow k+1})$.
Felhasználva az elágazásra érvényes levezetési szabályt, kapjuk:
$P \wedge \pi \wedge (\beta(k+1) \vee (\neg\beta(k+1))) \Rightarrow \mathrm{lf}(IF,\ P^{k\leftarrow k+1})$,
ahol $IF : (\beta(k+1) : s := s+1, \neg\beta(k+1) : SKIP)$.
$(\beta(k+1) \vee (\neg\beta(k+1))) \Leftrightarrow true$ miatt adódik:
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(IF,\ P^{k\leftarrow k+1})$.
Tehát
$S_0 = (IF; k := k+1)$
alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4'. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Mivel
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(IF,\ (t \leq t_0)^{k\leftarrow k+1}) \Leftrightarrow n - k \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:



Második megoldás

.

.

.

3". Legyen
$P' :\ (P \wedge \pi \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [k+1..n] : \beta(j)) \wedge$
$(u \rightarrow i \in [k+1..n] \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [k+1..i) : \neg\beta(j)))$.
Keressünk olyan $\overline{S}$ programot, amelyre
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(\overline{S}, P')$.
A feltételnek eleget tesz a $lin.ker.2.8$ $(k+1, n)$ program. Ennek bizonyításához

ld. a **Lineáris keresés 2.8** tétel levezetését.
Keressünk olyan programot, amelyre
$P' \Rightarrow \mathrm{lf}(\overline{\overline{S}}, P)$.
Könnyen látható, hogy
$P' \wedge u \Rightarrow P^{k,s \leftarrow i,s+1} \Leftrightarrow \mathrm{lf}(k,s := i, s+1, P)$
és $P' \wedge \neg u \Rightarrow P^{k \leftarrow n} \Leftrightarrow \mathrm{lf}(k := n, P)$
Tehát a keresett program:
$\overline{\overline{S}}: \ IF(u: \ k,s := i, s+1, \ \neg u: \ k := n)$
alkalmazva a szekvencia levezetési szabályának megfordítását, kapjuk hogy
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}((lin.ker.2.8 \ (k+1,n); IF(u: \ k,s := i, s+1, \ \neg u: \ k := n)), P)$
.
.
.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$k, s := m-1, 0$	
$k < n$	
$lin.ker.2.8 \ (k+1, n)$	
u	
$k, s := i, s+1$	$k := n$

3. Feltételes összegzés

Legyen $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}, \ f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ m, n \in \mathbb{Z}$. Összegezzük az f függvény értékeit az $[m..n]$ intervallum azon pontjaiban, amelyekben β feltétel igaz. Legyen $\sum\limits_{i=m}^{n} \chi(\beta(i)) * f(i) = 0$, ha $n < m$.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathbb{N}_0}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n\big)$$

$$R : \big(Q \wedge s = \sum_{i=m'}^{n'} \chi(\beta(i)) * f(i)\big)$$

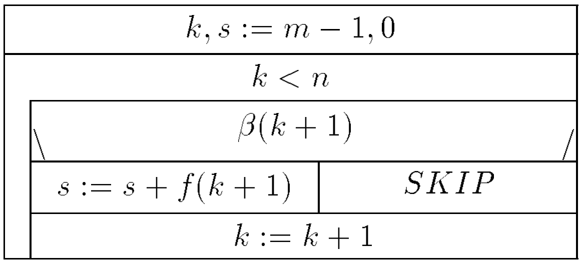
Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum_{i=m}^{k} \chi(\beta(i)) * f(i)\big)$$

Vegyük észre, ha az f speciálisan $f : \mathbb{Z} \to \{1\}$, akkor a **Számlálás** tételéhez jutunk. A levezetés logikája megegyezik a **Számlálás** tételénél alkalmazottakkal. Az értelemszerű módosításokat az olvasó könnyen elvégezheti.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

ahol $\chi : \mathbb{L} \to \mathbb{N}_0, \chi(a) = \begin{cases} 1 & , a = \uparrow \\ 0 & , a = \downarrow \end{cases}$.



4. Maximumkeresés

Legyen $(H, \leq)$ egy tetszőleges halmaz és $f : \mathbb{Z} \to H$ egy függvény. Keressük meg az f függvény maximumát és egy olyan helyet, ahol ezt a maximumértéket felveszi egy adott $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban.

$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathrm{H}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$

$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(m = m' \land n = n' \land m \leq n\big)$

$R : \big(Q \land i \in [m..n] \land f(i) = h \land \forall j \in [m..n] : f(j) \leq f(i)\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \land k \in [m..n] \land i \in [m, k] \land f(i) = h \land \forall j \in [m, k] : f(j) \leq f(i)\big)$

1. A ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \land \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi :\ (k = n)$.
   Tehát $\pi :\ k \neq n$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \land \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = n - k$
   a π választása miatt.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol

$S_2 = (k := k+1)$
abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{k \leftarrow k+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(k := k+1,\ P) \Leftrightarrow P^{k \leftarrow k+1}$.
$P^{k \leftarrow k+1}$:
$\big(Q \wedge k+1 \in [m..n] \wedge i \in [m, k+1] \wedge f(i) = h \wedge \forall j \in [m, k+1] : f(j) \leq f(i)\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \wedge h < f(k+1) \Rightarrow$
$Q \wedge k+1 \in [m..n] \wedge k+1 \in [m, k+1] \wedge f(k+1) = f(k+1) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, k+1] : f(j) \leq f(k+1)) \Leftrightarrow$
${P^{k \leftarrow k+1}}^{i,h \leftarrow k+1, f(k+1)}$,
ahonnan
$P \wedge \pi \wedge h < f(k+1) \Rightarrow {P^{k \leftarrow k+1}}^{i,h \leftarrow k+1, f(k+1)}$.
Ezért
$P \wedge \pi \wedge h < f(k+1) \Rightarrow \mathrm{lf}(i, h := k+1, f(k+1), P^{k \leftarrow k+1})$.
Ugyanakkor
$P \wedge \pi \wedge h \geq f(k+1) \Rightarrow$
$Q \wedge k+1 \in [m..n] \wedge i \in [m, k+1] \wedge f(i) = h \wedge \forall j \in [m, k+1] : f(j) \leq f(i)) \Leftrightarrow$
$P^{k \leftarrow k+1}$,
ahonnan
$P \wedge \pi \wedge h \geq f(k+1) \Rightarrow P^{k \leftarrow k+1}$,
ezért
$P \wedge \pi \wedge h \geq f(k+1) \Rightarrow \mathrm{lf}(SKIP,\ P^{k \leftarrow k+1})$.
Alkalmazva az elágazásra vonatkozó levezetési szabályt, kapjuk:
$P \wedge \pi \Leftrightarrow P \wedge \pi \wedge (h < f(k+1) \vee h \geq f(k+1)) \Rightarrow$
$\mathrm{lf}(IF,\ P^{k \leftarrow k+1})$,
ahol
$IF:\ (h < f(k+1):\ i, h := k+1, f(k+1),\ h \geq f(k+1):\ SKIP)$.
Tehát
$S_0 = ((h < f(k+1):\ i, h := k+1, f(k+1),\ h \geq f(k+1):\ SKIP),\ k := k+1)$
alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Mivel
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(IF,\ \mathrm{lf}(k := k+1,\ t \leq t_0)) \Leftrightarrow lf(IF,\ t-1 \leq t_0)$
a szekvencia leggyengébb előfeltételére vonatkozó ismert tétel, és t választása miatt, ezért elegendő belátni, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow lf(IF,\ t-1 \leq t_0)$

Alkalmazva az elágazás levezetési szabályának megfordítását, ehhez elegendő belátni, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge h < f(k+1) \Rightarrow lf(i, h := k+1, f(k+1),\ t-1 \leq t_0) \Leftrightarrow t-1 \leq t_0$,
valamint
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge h \geq f(k+1) \Rightarrow lf(SKIP,\ t-1 \leq t_0) \Leftrightarrow t-1 \leq t_0$.
Könnyen látható, hogy mindkét állítás teljesül, ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{i,k,h \leftarrow m,m,f(m)}$
fennáll, mivel
$P^{i,k,h \leftarrow m,m,f(m)} : (Q \wedge m \in [m..n] \wedge m \in [m,m] \wedge f(m) = f(m) \wedge \forall j \in [m,m] : f(j) \leq f(m))$
és
$\big(m \in [m..n] \wedge m \in [m,m] \wedge f(m) = f(m) \wedge \forall j \in [m,m] : f(j) \leq f(m)\big) \Leftrightarrow true.$
Tehát
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(i,k,h := m,m,f(m),\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (k \neq n, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((i,k,h := m,m,f(m),\ DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="3">$i,k,h := m,m,f(m)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$k \neq n$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$h \leq f(k+1)$</td><td>$h \geq f(k+1)$</td></tr>
<tr><td>$i,h := k+1, f(k+1)$</td><td>$SKIP$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$k := k+1$</td></tr>
</table>

5. Feltételes maximumkeresés

Legyen $(H, \leq)$ tetszőleges halmaz és $f : Z \to H$ egy függvény, $m, n \in \mathbb{Z}$ és $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$. Határozzuk meg, hogy van-e az $[m, n]$ intervallumban olyan i pont, ahol $\beta(i)$ érvényes, és ha van ilyen pont, akkor határozzuk meg a $[\beta] \cap [m, n]$ halmaz felett az f függvény maximumát és a halmaz egy olyan pontját, ahol f a maximum értékét felveszi.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathrm{H}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n'\big)$$

$$R : \big(Q \wedge (l \leftrightarrow (\exists i \in [m..n] : \beta(i))) \wedge (l \to (\varepsilon(m, n, i) \wedge f(i) = h))\big)$$

ahol $\varepsilon(m, k, i) : \big(i \in [m, k] \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m, k] : (\beta(j) \to f(j) \leq f(i))\big)$.

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge (l \leftrightarrow (\exists i \in [m, k] : \beta(i))) \wedge (l \to (\varepsilon(m, k, i) \wedge f(i) = h))\big)$$

1. A ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi := (k \geq n)$. Ha ugyanis $n < m$ akkor, ha $P \wedge \neg\pi$, akkor $k = m - 1$ és ezért
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$ teljesül, mivel $n < m$ esetén
   a $\exists i \in [m, m-1] : \beta(i)$ és a $\exists i \in [m, n] : \beta(i)$ formulák értéke egyaránt hamis, és abból, hogy
   $l \leftrightarrow \exists i \in [m, m-1] : \beta(i)$ következik, hogy
   $l \leftrightarrow \exists i \in [m, n] : \beta(i)$ is igaz és l hamis.
   Ez utóbbiból viszont következik, hogy
   $l \to (\varepsilon(m, n, i) \wedge f(i) = h))$
   biztosan igaz. Tehát R igaz.
   Ha viszont $n \geq m$, akkor, ha $P \wedge \neg\pi$, akkor $k = n$ és ezért
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$ nyilván teljesül.
   Tehát $\pi : k < n$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = n - k$
   a π választása miatt.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   $S_2 = (k := k + 1)$
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,

$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{k\leftarrow k+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(k := k+1,\ P) \Leftrightarrow P^{k\leftarrow k+1}$.
$P^{k\leftarrow k+1} : \big(Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(l \leftrightarrow (\exists i \in [m, k+1] : \beta(i))) \wedge$
$\wedge(l \rightarrow (\varepsilon(m, k+1, i) \wedge f(i) = h))\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \wedge l \wedge h \leq f(k+1) \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(l \leftrightarrow (\exists j \in [m, k+1] : \beta(j))) \wedge$
$\wedge(l \rightarrow (\varepsilon(m, k+1, k+1) \wedge f(k+1) = f(k+1))) \Leftrightarrow P^{k\leftarrow k+1}{}^{i,h\leftarrow k+1, f(k+1)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{lf}(i, h := k+1, f(k+1), P^{k\leftarrow k+1})$,
valamint
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \wedge l \wedge h \geq f(k+1) \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(l \leftrightarrow (\exists i \in [m, k+1] : \beta(i))) \wedge$
$\wedge(l \rightarrow (\varepsilon(m, k+1, i) \wedge f(i) = h)) \Leftrightarrow P^{k\leftarrow k+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{lf}(SKIP, P^{k\leftarrow k+1})$.
Alkalmazva az elágazásra érvényes levezetési szabályt, kapjuk:
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \wedge l \Leftrightarrow \mathrm{lf}(IF, P^{k\leftarrow k+1})$,
ahol $IF : (h \leq f(k+1) : i, h := k+1, f(k+1), h \geq f(k+1) : SKIP)$.
Hasonlóan
$P \wedge \pi \wedge \beta(k+1) \wedge \neg l \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(\uparrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, k+1] : \beta(j))) \wedge$
$\wedge(\uparrow \rightarrow (\varepsilon(m, k+1, k+1) \wedge f(k+1) = f(k+1))) \Leftrightarrow P^{k\leftarrow k+1}{}^{l,i,h:=\uparrow, k+1, f(k+1)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{lf}(l, i, h := \uparrow, k+1, f(k+1), P^{k\leftarrow k+1})$,
valamint
$P \wedge \pi \wedge \neg\beta(k+1) \Rightarrow Q \wedge k+1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(l \leftrightarrow (\exists i \in [m, k+1] : \beta(i))) \wedge$
$\wedge(l \rightarrow (\varepsilon(m, k+1, i) \wedge f(i) = h)) \Leftrightarrow P^{k\leftarrow k+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathrm{lf}(SKIP, P^{k\leftarrow k+1})$.
Ismételten alkalmazva az elágazás levezetési szabályát, adódik:
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(IF_1, P^{k\leftarrow k+1})$,
ahol IF_1:
$(\neg\beta(k+1) : SKIP, \beta(k+1) \wedge l : IF, \beta(k+1) \wedge \neg l : l, i, h := \uparrow, k+1, f(k+1))$.
Tehát
$S_0 = ($
$(\neg\beta(k+1) : SKIP, \beta(k+1) \wedge l : IF, \beta(k+1) \wedge \neg l : l, i, h := \uparrow, k+1, f(k+1))$;
$k := k+1)$
alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.

Belátható, hogy
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ (t \leq t_0)^{k \leftarrow k+1}) \Leftrightarrow n - k \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{k,l \leftarrow m-1,\downarrow}$
fennáll, mivel
$P^{k,l \leftarrow m-1,\downarrow} : \big(Q \wedge m-1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(\downarrow \leftrightarrow (\exists i \in [m, m-1] : \beta(i))) \wedge$
$\wedge(\downarrow \rightarrow (\varepsilon(m, m-1, i) \wedge f(i) = h))\big)$,
ugyanakkor
$\big(m-1 \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge$
$\wedge(\downarrow \leftrightarrow (\exists i \in [m, m-1] : \beta(i))) \wedge$
$\wedge(\downarrow \rightarrow (\varepsilon(m, m-1, i) \wedge f(i) = h))\big) \Leftrightarrow true.$
Tehát
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(k, l := m-1, \downarrow,\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (k < n, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((k, l := m-1, \downarrow; DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="5">$k, l := m-1, \downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$k < n$</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td>$\neg\beta(k+1)$</td><td colspan="2">$\beta(k+1) \wedge l$</td><td>$\beta(k+1) \wedge \neg l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$SKIP$</td><td>$h \leq f(k+1)$</td><td>$h \geq f(k+1)$</td><td rowspan="2">$l, i, h := \uparrow, k+1, f(k+1)$</td></tr>
<tr><td>$i, h := k+1, f(k+1)$</td><td>$SKIP$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$k := k+1$</td></tr>
</table>

6. Lineáris keresés

Legyen $m \in \mathbb{Z}$, $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$. Keressük meg azt a legkisebb β tulajdonságú egész számot, amely nem kisebb mint m.

6.1.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \land \exists j \geq m : \beta(j)\big)$$

$$R : \big(Q \land i \geq m' \land \beta(i) \land \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j)\big)$$

6.1.1. Lineáris keresés 1. változat

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \land i \geq m \land \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)\big)$

1. Könnyen látható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \land \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi :\ \beta(i)$.
   Tehát $\pi :\ \neg\beta(i)$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \land \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = \tau(m) - i$,
   ahol a $\tau(m)$ függvényre: $m \leq \tau(m) \land \beta(\tau(m))$.
   $P \Rightarrow Q$, viszont Q-ból következik, hogy ilyen m-től függő τ mindig létezik, ezért P-ből is következik, hogy ilyen m-től függő τ létezik.
   Könnyen látható, hogy
   $P \land \pi \Rightarrow t > 0,$
   mivel
   $P \land \pi \Rightarrow \forall j \in [m, i] : \neg\beta(j),$
   ezért
   $P \land \pi \Rightarrow \tau(m) > i.$
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   $S_2 = (i := i + 1)$
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
   $P \land \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
   teljesül, ha
   $P \land \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i+1}),$
   mivel
   $\mathrm{lf}(i := i + 1,\ P) \Leftrightarrow P^{i \leftarrow i+1}.$
   $P^{i \leftarrow i+1} : \big(Q \land i + 1 \geq m \land \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)\big),$
   ugyanakkor
   $P \land \pi \Rightarrow Q \land i \geq m \land \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j) \land \neg\beta(i) \Rightarrow$
   $Q \land i + 1 \geq m \land \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j),$

ahonnan
$P \wedge \pi \Rightarrow P^{i \leftarrow i+1}$.
Tehát már
$S_0 = (i := i + 1)$
is alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
   $P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
   Mivel
   $\text{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow (t \leq t_0)^{i \leftarrow i+1} \Leftrightarrow \tau(m) - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
   ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.
5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
   $Q \Rightarrow P$
   nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
   $Q \Rightarrow P^{i \leftarrow m}$
   fennáll, mivel
   $P^{i \leftarrow m} : \big(Q \wedge m \geq m \wedge \forall j \in [m, m) : \neg\beta(j)\big)$,
   és
   $\big(m \geq m \wedge \forall j \in [m, m) : \neg\beta(j)\big) \Leftrightarrow true$.
   Tehát
   $Q \Rightarrow \text{lf}(i := m,\ P)$.
   Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
   $P \Rightarrow P$
   nyilván teljesül, ezért
   $P \Rightarrow \text{lf}(DO,\ R)$
   is igaz, ahol $DO = (\neg\beta(i), S_0)$.
   Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
   $Q \Rightarrow \text{lf}((i := m; DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$i := m$
$\neg\beta(i)$
$i := i + 1$

6.1.2. Lineáris keresés 2. változat

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge i \geq m - 1 \wedge (\forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)) \wedge l = \exists j \in [m, i] : \beta(j)\big)$

1. Könnyen látható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$

teljesül, ha $\neg\pi: \ l$.
Tehát $\pi: \ \neg l$ alkalmas választás.

2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
$P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
teljesül, ha $t = \tau(m) - i$,
ahol a $\tau(m)$ függvényre: $m \leq \tau(m) \wedge \beta(\tau(m))$.
$P \Rightarrow Q$, viszont Q-ból következik, hogy ilyen m-től függő τ mindig létezik, ezért P-ből is következik, hogy ilyen m-től függő τ létezik.
Könnyen látható, hogy
$P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
mivel
$P \wedge \pi \Rightarrow \forall j \in [m, i] : \neg\beta(j)$,
ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \tau(m) > i$.

3. Célszerű a ciklusmagot
$S_0 : (S_1; S_2)$
szekvencia fomában keresni, ahol
$S_2 = (i := i + 1)$
abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, \ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1, \ lf(S_2, \ P))$
teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(i := i + 1, \ P) \Leftrightarrow P^{i \leftarrow i+1}$.
$P^{i \leftarrow i+1} : \big(Q \wedge i + 1 \geq m - 1 \wedge (\forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)) \wedge l = \exists j \in [m, i + 1] : \beta(j)\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \Rightarrow Q \wedge i \geq m - 1 \wedge (\forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)) \wedge l = \exists j \in [m, i] : \beta(j) \wedge \neg\beta(i) \Rightarrow$
$Q \wedge i + 1 \geq m \wedge \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j) \wedge \beta(i + 1) = \exists j \in [m, i + 1] : \beta(j)$,
ahonnan
$P \wedge \pi \Rightarrow P^{i \leftarrow i+1 \, l \leftarrow \beta(i+1)}$.
Ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(l := \beta(i + 1), \ P^{i \leftarrow i+1})$.
Tehát
$S_0 = (l := \beta(i + 1); \ i := i + 1)$
is alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Mivel
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow (t \leq t_0)^{i \leftarrow i+1} \Leftrightarrow \tau(m) - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
   $Q \Rightarrow P$
   nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
   $Q \Rightarrow P^{i,l \leftarrow m-1,\downarrow}$
   fennáll, mivel
   $P^{i,l \leftarrow m-1,\downarrow} : \big(Q \wedge m-1 \geq m-1 \wedge (\forall j \in [m, m-1) : \neg\beta(j)) \wedge \downarrow = \exists j \in [m, m-1] : \beta(j)\big)$,
   és
   $\big(m-1 \geq m-1 \wedge (\forall j \in [m, m-1) : \neg\beta(j)) \wedge \downarrow = \exists j \in [m, m-1] : \beta(j)\big) \Leftrightarrow true.$
   Tehát
   $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(i, l := m, \downarrow,\ P)$.
   Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
   $P \Rightarrow P$
   nyilván teljesül, ezért
   $P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
   is igaz, ahol $DO = (\neg l, S_0)$.
   Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
   $Q \Rightarrow \mathrm{lf}((i, l := m-1, \downarrow;\ DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$i, l := m-1, \downarrow$
$\neg l$
$l := \beta(i+1)$
$i := i+1$

6.2.

Tegyük fel, hogy $\beta = \gamma \vee \delta$ és létezik $i \geq m$, hogy $\delta(i)$. Állapítsuk meg, hogy van-e olyan $i \geq m$, amelyre $\gamma(i)$ igaz és az $[m..i)$ intervallumban a δ mindenütt hamis. Ha van ilyen tulajdonságú i, akkor keressük meg a ezek közül a legkisebbet.

6.2.1. Lineáris keresés 3. változat

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge \exists j \geq m : \delta(j)\big)$$

$$R : \big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \geq m' : (\gamma(j) \wedge \forall k \in [m', j) : \neg\delta(k))) \wedge$$
$$\wedge (u \rightarrow (i \geq m' \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j)))$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge i \geq m-1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m,i) : \neg\beta(j)\big)$.

1. Belátható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi :\ u \vee v$.
   Tegyük fel, hogy $P \wedge u$ teljesül, akkor nyilván Q teljesül, hiszen P-ben Q konjunkciós tag. Mivel u igaz a feltevés szerint és $(u \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \gamma(j)))$ igaz, mert konjunkciós tag P-ben, ezért $(\exists j \in [m,i] : \gamma(j))$ is igaz. De $\forall j \in [m,i) : \neg\beta(j)$ is teljesül, mivel konjunkciós tag P-ben. E két utóbbi állításból következik, hogy $\gamma(i)$ igaz, $i \geq m$ és $\forall j \in [m,i) : \neg\delta(j)$ is teljesül, mivel ha $\neg\beta(j)$ igaz, akkor $\neg\delta(j)$ is igaz. Tehát $\exists j \geq m' : (\gamma(j) \wedge \forall k \in [m',j) : \neg\delta(k))$ is igaz, mert $m = m'$ igaz és $i \geq m \wedge (\gamma(i) \wedge \forall k \in [m,i) : \neg\delta(k))$ igaz.
   Ezért $(u \leftrightarrow \exists j \geq m' : (\gamma(j) \wedge \forall k \in [m',j) : \neg\delta(k)))$ igaz, hiszen az ekvivalencia logikai műveletében mindkét tag igaz.
   A $(i \geq m' \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m',i) : \neg\beta(j))$ állítást már az elzőekben beláttuk, ezért az $(u \rightarrow (i \geq m' \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m',i) : \neg\beta(j)))$ állítás is igaz, mivel az implikáció logikai műveletében mindkét tag igaz.
   Adódott tehát, hogy $P \wedge u \Rightarrow R$
   Tegyük fel, hogy $P \wedge \neg u \wedge v$ teljesül, akkor nyilván Q teljesül, hiszen P-ben Q konjunkciós tag.
   Ekkor $(u \rightarrow (i \geq m' \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m',i) : \neg\beta(j)))$ nyilván igaz, mert u hamis, és ezért az implikáció biztosan igaz. A $\exists j \geq m' : (\gamma(j) \wedge \forall k \in [m',j) : \neg\delta(k)))$ állítás viszont hamis, mert a $(\exists j \in [m,i] : \gamma(j))$ állítás hamis, hiszen a $(u \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \gamma(j)))$ ekvivalencia igaz, mivel konjunkciós tag P-ben és u hamis. Hasolóan, a $(v \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \delta(j)))$ ekvivalencia igaz, mivel konjunkciós tag P-ben. Ebből következik a v igaz feltétel miatt, hogy $(\exists j \in [m,i] : \delta(j))$ igaz és ezért $i \geq m$. A $\forall j \in [m,i) : \neg\beta(j)$ állítás is igaz, mert konjunkciós tag P-ben. Ebből viszont az következik, hogy $i \geq m \wedge \delta(i) \wedge \neg\gamma(i) \wedge \forall j \in [m,i) : \neg\beta(j)$, tehát a $\exists j \geq m' : (\gamma(j) \wedge \forall k \in [m',j) : \neg\delta(k)))$ biztosan hamis, mivel $m = m'$ és az $i \geq m$ pontokban a δ tulajdonság előbb teljesült, mint a γ tulajdonság. Ezért $(u \leftrightarrow \exists j \geq m' : (\gamma(j) \wedge \forall k \in [m',j) : \neg\delta(k)))$ igaz, hiszen az ekvivalencia logikai műveletében mindkét tag hamis.
   Adódott tehát, hogy $P \wedge \neg u \wedge v \Rightarrow R$.
   Összegezve a fentieket, kapjuk, hogy $P \wedge (u \vee v) \Rightarrow R$.
   Tehát $\pi :\ \neg u \wedge \neg v$ alkalmas választás.

2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = \tau(m) - i$,
   ahol a $\tau(m)$ függvényre: $m \leq \tau(m) \wedge \beta(\tau(m))$.
   $P \Rightarrow Q$, viszont Q-ból következik, hogy ilyen m-től függő τ mindig létezik, ezért P-ből is következik, hogy ilyen m-től függő τ létezik.
   Könnyen látható, hogy

$P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
mivel
$P \wedge \pi \Rightarrow \forall j \in [m, i] : \neg\beta(j)$,
ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \tau(m) > i$.

3. Célszerű a ciklusmagot
$S_0 : (S_1; S_2)$
szekvencia fomában keresni, ahol
$S_2 = (i := i + 1)$
abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(i := i + 1,\ P) \Leftrightarrow P^{i \leftarrow i+1}$.
$P^{i \leftarrow i+1}$:
$\big(Q \wedge i + 1 \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \Rightarrow Q \wedge i \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j) \wedge \neg\gamma(i) \wedge \neg\delta(i) \Rightarrow$
$Q \wedge i + 1 \geq m - 1 \wedge$
$\wedge(\gamma(i + 1) \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \gamma(j))) \wedge (\delta(i + 1) \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)$,
ahonnan
$P \wedge \pi \Rightarrow {P^{i \leftarrow i+1}}^{u,v \leftarrow \gamma(i+1), \delta(i+1)}$.
Ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(u, v := \gamma(i + 1), \delta(i + 1),\ P^{i \leftarrow i+1})$.
Tehát
$S_0 = (u, v := \gamma(i + 1), \delta(i + 1);\ i := i + 1)$
is alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Mivel
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow (t \leq t_0)^{i \leftarrow i+1} \Leftrightarrow \tau(m) - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{i,u,v \leftarrow m-1, \downarrow, \downarrow}$

fennáll, mivel

$P^{i,u,v \leftarrow m-1,\downarrow,\downarrow}$:

$\big(Q \wedge m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \gamma(j))) \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, m-1) : \neg\beta(j)\big)$,

és

$\big(m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \gamma(j))) \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, m-1) : \neg\beta(j)\big) \Leftrightarrow true.$

Tehát

$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(i, u, v := m, \downarrow, \downarrow,\ P).$

Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:

$P \Rightarrow P$

nyilván teljesül, ezért

$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$

is igaz, ahol $DO = (\neg u \wedge \neg v, S_0)$.

Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:

$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((i, u, v := m-1, \downarrow, \downarrow;\ DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$i, u, v := m-1, \downarrow, \downarrow$	
$\neg u \wedge \neg v$	
	$u, v := \gamma(i+1), \delta(i+1)$
	$i := i+1$

6.2.2. Lineáris keresés 2.8. változat

Legyen $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\ \beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$. Határozzuk meg, hogy van-e az $[m, n]$ intervallumban β tulajdoságú egész szám és ha van, akkor keressük meg ezek közül a legkisebbet. Látható, hogy a **Lineáris keresés 3. változatának** speciális esetéről van szó, hiszen $\gamma = \beta$ és $\delta = j \geq n$ választásával a feladat visszavezethető a **Lineáris keresés 3. változatára**.
A feladat direkt megoldása a következő:

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n' \wedge n+1 \geq m\big)$$

$$R : \big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m', n'] : \beta(j)) \wedge$$
$$\wedge (u \to (i \in [m', n'] \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j)))$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge i \in [m-1, n] \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \beta(j))) \wedge$$
$$\wedge\ \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)\big).$$

1. Könnyen látható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi : \ u \vee i \geq n$.
   Tehát $\pi : \ \neg u \wedge i < n$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t : \ n - i$.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   $S_2 = (i := i + 1)$
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
   teljesül, ha
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i+1})$,
   mivel
   $\mathrm{lf}(i := i + 1,\ P) \Leftrightarrow P^{i \leftarrow i+1}$.
   $P^{i \leftarrow i+1}$:
   $\big(Q \wedge i + 1 \in [m - 1, n] \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \beta(j))) \wedge$
   $\wedge\ \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)$,
   ugyanakkor
   $P \wedge \pi \Rightarrow Q \wedge i + 1 \in [m - 1, n] \wedge (\beta(i + 1) \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \beta(j))) \wedge$
   $\wedge\ (\forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)$,
   ahonnan
   $P \wedge \pi \Rightarrow P^{i \leftarrow i+1^{u \leftarrow \beta(i+1)}}$.
   Ezért
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(u := \beta(i + 1),\ P^{i \leftarrow i+1})$.
   Tehát
   $S_0 = (u := \beta(i + 1);\ i := i + 1)$
   is alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.
4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
   $P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
   Mivel
   $\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow (t \leq t_0)^{i \leftarrow i+1} \Leftrightarrow n - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
   ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.
5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
   $Q \Rightarrow P$
   nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
   $Q \wedge m \leq n \Rightarrow P^{i,u \leftarrow m-1,\downarrow}$
   fennáll, mivel
   $P^{i,u \leftarrow m-1,\downarrow}$:

$\big(Q \wedge m-1 \in [m-1,n] \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m,m-1] : \beta(j))) \wedge$
$\wedge \forall j \in [m,m-1) : \neg\beta(j)\big)$,
és
$\big(m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m,m-1] : \beta(j))) \wedge$
$\forall j \in [m,m-1) : \neg\beta(j)\big) \Leftrightarrow true$.
Tehát
$Q \wedge m \leq n \Rightarrow \mathrm{lf}(i,u := m-1,\downarrow,\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (\neg u \wedge i < n, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((i,u := m-1,\downarrow;\ DO),\ R)$.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$i, u := m-1, \downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\neg u \wedge i < n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td align="center">$u := \beta(i+1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$i := i+1$</td></tr>
</table>

Megjegyzés I.

A **Lineáris keresés 3. változatának** a következő feladatot is szokták tekinteni: Tegyük fel, hogy $\beta = \gamma \vee \delta$ és létezik $i \geq m$, hogy $\beta(i)$. Keressük meg a legkisebb olyan i-t, amire $i \geq m$ és $\beta(i)$, és adjuk meg azt is, hogy $\gamma(i)$, illetve $\delta(i)$ igaz-e!

$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}} \times \underset{v}{\mathbb{L}}$

$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(m = m' \wedge \exists j \geq m' : \beta(j)\big)$

$R : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i)) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge i \geq m-1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m,i] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m,i) : \neg\beta(j)\big)$

.

1. Könnyen látható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$

teljesül, ha $\neg\pi: \ u \vee v$.
Tehát $\pi: \ \neg u \wedge \neg v$ alkalmas választás.

2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
$P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
teljesül, ha $t = \tau(m) - i$,
ahol a $\tau(m)$ függvényre: $m \leq \tau(m) \wedge \beta(\tau(m))$.
$P \Rightarrow Q$, viszont Q-ból következik, hogy ilyen m-től függő τ mindig létezik, ezért P-ből is következik, hogy ilyen m-től függő τ létezik.
Könnyen látható, hogy
$P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
mivel
$P \wedge \pi \Rightarrow \forall j \in [m, i] : \neg\beta(j)$,
ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \tau(m) > i$.

3. Célszerű a ciklusmagot
$S_0 : (S_1; S_2)$
szekvencia fomában keresni, ahol
$S_2 = (i := i + 1)$
abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
teljesül, ha
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(i := i + 1,\ P) \Leftrightarrow P^{i \leftarrow i+1}$.
$P^{i \leftarrow i+1}$:
$\big(Q \wedge i + 1 \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \Rightarrow Q \wedge i \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j) \wedge \neg\gamma(i) \wedge \neg\delta(i) \Rightarrow$
$Q \wedge i + 1 \geq m - 1 \wedge$
$\wedge(\gamma(i + 1) \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \gamma(j))) \wedge (\delta(i + 1) \leftrightarrow (\exists j \in [m, i + 1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, i + 1) : \neg\beta(j)$,
ahonnan
$P \wedge \pi \Rightarrow {P^{i \leftarrow i+1}}^{u,v \leftarrow \gamma(i+1),\delta(i+1)}$.
Ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(u, v := \gamma(i + 1), \delta(i + 1),\ P^{i \leftarrow i+1})$.
Tehát
$S_0 = (u, v := \gamma(i + 1), \delta(i + 1);\ i := i + 1)$
is alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.

Mivel
$\text{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow (t \leq t_0)^{i \leftarrow i+1} \Leftrightarrow \tau(m) - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{i,u,v \leftarrow m-1,\downarrow,\downarrow}$
fennáll, mivel
$P^{i,u,v \leftarrow m-1,\downarrow,\downarrow}$:
$\big(Q \wedge m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \gamma(j))) \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, m-1) : \neg\beta(j)\big)$,
és
$\big(m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \gamma(j))) \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \delta(j))) \wedge$
$\wedge\ \forall j \in [m, m-1) : \neg\beta(j)\big) \Leftrightarrow true.$
Tehát
$Q \Rightarrow \text{lf}(i, u, v := m, \downarrow, \downarrow,\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \text{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (\neg u \wedge \neg v, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \text{lf}((i, u, v := m-1, \downarrow, \downarrow;\ DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$i, u, v := m-1, \downarrow, \downarrow$	
$\neg u \wedge \neg v$	
	$u, v := \gamma(i+1), \delta(i+1)$
	$i := i+1$

Megjegyzés II.:

Nyilvánvaló, hogy
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i)) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$,
valamint
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i)) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big)$.
Ezért a fenti program

$R' : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$, illetve

$R' : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$

feltétel mellett is megoldja a feladatot.

A **Lineáris keresés 2.8-as változata** a az előző 3. változat speciális esete $\delta(j) = (j \geq n)$ választással. Ennek megfelelően a következők érvényesek:

$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}}$

$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(m = m' \wedge n = n'\big)$

$R : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge (\gamma(i) \vee i \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m', i) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge m \leq n \wedge i \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \gamma(j))) \wedge$
$\wedge\ ((\forall j \in [m, i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m, i) : j < n))\big)$

1. Könnyen látható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi :\ u \vee i \geq n$.
   Tehát $\pi :\ \neg u \wedge i < n$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = \tau(m, n) - i$,
   ahol a $\tau(m, n)$ függvényre: $m \leq \tau(m, n) \wedge \beta(\tau(m, n))$.
   $\beta = \gamma \vee \delta$ és $\delta(j) = (j \geq n)$ miatt ilyen m-től és n-től függő τ mindig létezik.
   Könnyen látható, hogy
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$,
   mivel
   $P \wedge \pi \Rightarrow \forall j \in [m, i] : \neg\beta(j)$,
   ezért
   $P \wedge \pi \Rightarrow \tau(m) > i$.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   $S_2 = (i := i + 1)$
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
   teljesül, ha

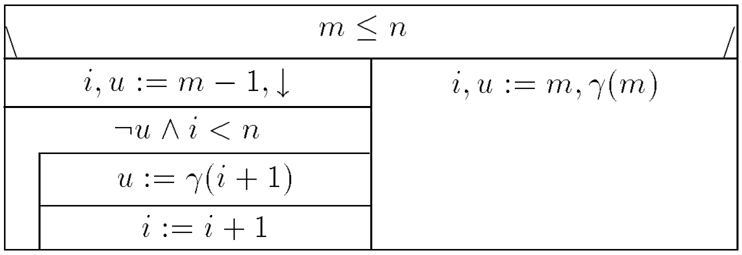
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i \leftarrow i+1})$,
mivel
$\mathrm{lf}(i := i+1,\ P) \Leftrightarrow P^{i \leftarrow i+1}$.
$P^{i \leftarrow i+1}$:
$\big(Q \wedge m \leq n \wedge i+1 \geq m-1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i+1] : \gamma(j))) \wedge$
$\wedge\ ((\forall j \in [m, i+1) : \neg\gamma(j)) \wedge i+1 \leq n)\big)$,
ugyanakkor
$P \wedge \pi \Rightarrow Q \wedge m \leq n \wedge i+1 \geq m-1 \wedge (\gamma(i+1) \leftrightarrow (\exists j \in [m, i+1] : \gamma(j))) \wedge$
$\wedge\ ((\forall j \in [m, i+1) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m, i+1) : j < n))$,
ahonnan
$P \wedge \pi \Rightarrow P^{i \leftarrow i+1 \, u \leftarrow \gamma(i+1)}$.
Ezért
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(u := \gamma(i+1),\ P^{i \leftarrow i+1})$.
Tehát
$S_0 = (u := \gamma(i+1);\ i := i+1)$
is alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltétele teljesüléséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Mivel
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow (t \leq t_0)^{i \leftarrow i+1} \Leftrightarrow \tau(m) - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \wedge m \leq n \Rightarrow P^{i,u \leftarrow m-1, \downarrow}$
fennáll, mivel
$P^{i,u \leftarrow m-1, \downarrow}$:
$\big(Q \wedge m \leq n \wedge m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \gamma(j))) \wedge$
$\wedge\ ((\forall j \in [m, m-1) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m, m-1) : j < n)\big)$,
és
$\big(m-1 \geq m-1 \wedge (\downarrow \leftrightarrow (\exists j \in [m, m-1] : \gamma(j))) \wedge$
$\wedge\ ((\forall j \in [m, m-1) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m, m-1) : j < n)\big) \Leftrightarrow true$.
Tehát
$Q \wedge m \leq n \Rightarrow \mathrm{lf}(i, u := m-1, \downarrow,\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (\neg u \wedge i < n, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \wedge m \leq n \Rightarrow \mathrm{lf}((i, u := m-1, \downarrow;\ DO),\ R)$.
Ugyanakkor

$Q \wedge m > n \Rightarrow R^{i,u \leftarrow m,\gamma(m)}$,
mivel $R^{i,u \leftarrow m,\gamma(m)} \Leftrightarrow$
$Q \wedge m \geq m' \wedge (\gamma(m) \vee m \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', m) : \neg\gamma(m)) \wedge (\forall j \in [m', m) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (\gamma(m) \leftrightarrow \gamma(m))$.

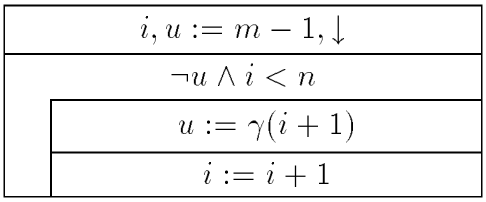
Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:



Ha valódi intervallumban keresünk, azaz

$Q : \big(m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n\big)$

feltételből indulunk ki, akkor az előzőek alapján, a keresett program:



Ebben az esetben könnyen belátható, hogy

$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge (\gamma(i) \vee i \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m', i) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge (u \rightarrow (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j)))\big)$,
valamint
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge (\gamma(i) \vee i \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m', i) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge$
$\wedge (u \rightarrow (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j))) \wedge (\neg u \rightarrow i = n')\big)$.

Tehát a fenti program

$R' : \big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge (u \rightarrow (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j)))\big)$,

valamint

$R' : \big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge$
$\wedge (u \rightarrow (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j))) \wedge (\neg u \rightarrow i = n')\big)$

feltételek mellett is megoldja a feladatot, ugyanakkor ez utóbbi feltételek direkt módon fejezi ki a megoldandó problémát. Természtesen ez utóbbi feltételekből kiindulva a levezetések a lineáris keresés 3. változatára történő visszautalás nélkül is elkészíthetőek.

7. Logaritmikus keresés

Legyen H egy olyan halmaz, amin értelmezve van egy rendezési reláció. Legyen $f : \mathbb{Z} \to H$ monoton növekedő függvény. Döntsük el egy adott $h \in H$ értékről, hogy felveszi-e azt az f függvény egy adott $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumon, és ha igen, akkor adjuk meg egy olyan pontját, ahol a függvényérték h.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathrm{H}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}} \times \underset{h'}{\mathrm{H}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n' \wedge h = h' \wedge \forall j, k \in [m'..n'] : j \leq k \to f(j) \leq f(k)\big)$$

$$R : \big(Q \wedge l = (\exists j \in [m'..n'] : f(j) = h') \wedge (l \to (i \in [m'..n'] \wedge f(i) = h'))\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge [u, v] \subseteq [m..n] \wedge \forall j \in [m..n] \setminus [u, v] : f(j) \neq h \wedge (l \to (i \in [u, v] \wedge f(i) = h))\big)$$

1. A ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi : \ l \vee u > v$.
   Tehát $\pi : \ \neg l \wedge u \leq v$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t : \ v - u + 1 - \chi(l)$.
3. Az f függvény monotonitására tett feltételt kihasználva rendre igazolhatók a következő állítások:
   $P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2] \wedge f(i) < h \Rightarrow P^{u \leftarrow i+1}$,
   $P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2] \wedge f(i) > h \Rightarrow P^{v \leftarrow i-1}$,
   valamint
   $P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2] \wedge f(i) = h \Rightarrow P^{l \leftarrow \uparrow}$.
   Alkalmazva az elágazás levezetési szabályát, kapjuk:
   $P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2] \Rightarrow \mathrm{lf}(IF,\ P)$,
   ahol
   $IF : \ (f(i) < h : \ u := i + 1,\ f(i) > h : \ v := i - 1,\ f(i) = h : \ l := \uparrow)$.
   Ugyanakkor
   $P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(i := [(u + v)/2],\ P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2])$,
   mivel
   $\mathrm{lf}(i := [(u + v)/2],\ P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2]) \Leftrightarrow$
   $P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u + v)/2]^{i \leftarrow [(u+v)/2]} \Leftrightarrow P \wedge (\neg l \wedge u \leq v)$.

Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére az ismert tételt, kapjuk:
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \Rightarrow \mathrm{lf}((i := [(u+v)/2];\ IF),\ P)$,
tehát
$S_0 :\ (i := [(u+v)/2];\ IF)$
alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltételének teljesítéséhez.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Alkalmazva a szekvencia levezetési szabályának megfordítását, ha belátjuk, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge i = [(u+v)/2] \Rightarrow \mathrm{lf}(IF,\ t \leq t_0)$
tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re, akkor
a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül, mivel
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow$
$\mathrm{lf}(i := [(u+v)/2],\ P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge i = [(u+v)/2])$.
Alkalmazva az elágazás levezetési szabályának megfordítását, ha belátjuk, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge i = [(u+v)/2] \wedge f(i) < h \Rightarrow \mathrm{lf}(u := i+1,\ t \leq t_0)$,
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge i = [(u+v)/2] \wedge f(i) > h \Rightarrow \mathrm{lf}(v := i-1,\ t \leq t_0)$,
valamint
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge i = [(u+v)/2] \wedge f(i) = h \Rightarrow \mathrm{lf}(l := \uparrow,\ t \leq t_0)$,
akkor
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge i = [(u+v)/2] \Rightarrow \mathrm{lf}(IF,\ t \leq t_0)$
tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re, és
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.
Egyszerű belátni, hogy a t választása miatt mindhárom fenti állítás igaz.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{u,v,l \leftarrow m,n,\downarrow}$
fennáll, mivel
$P^{u,v,l \leftarrow m,n,\downarrow}$:
$\big(Q \wedge [m,n] \subseteq [m..n] \wedge \forall j \in [m..n] \setminus [m,n] : f(j) \neq h \wedge (\downarrow \rightarrow (i \in [m,n] \wedge f(i) = h))\big)$,
és
$\big([m,n] \subseteq [m..n] \wedge \forall j \in [m..n] \setminus [m,n] : f(j) \neq h \wedge (\downarrow \rightarrow (i \in [m,n] \wedge f(i) = h))\big) \Leftrightarrow$
$true$.
Tehát
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(u, v, l := m, n, \downarrow,\ P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (\neg l \wedge u \leq v, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((u, v, l := m, n, \downarrow;\ DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="4">$u, v, l := m, n, \downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg l \wedge (u \leq v)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">$i := [(u+v)/2]$</td></tr>
<tr><td>$f(i) < h$</td><td>$f(i) > h$</td><td>$f(i) = h$</td></tr>
<tr><td>$u := i + 1$</td><td>$v := i - 1$</td><td>$l :=\uparrow$</td></tr>
</table>

Megjegyzés:

3' Az $i = [(u+v)/2]$ feltétel a
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u+v)/2] \wedge f(i) < h \Rightarrow P^{u \leftarrow i+1}$,
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u+v)/2] \wedge f(i) > h \Rightarrow P^{v \leftarrow i-1}$,
valamint
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge i = [(u+v)/2] \wedge f(i) = h \Rightarrow P^{l \leftarrow \uparrow}$
állításokban nem tűnik természetesnek első látásra. Valóban, a levezetés mögött húzódó matematikai meggondolás alapján, mely szerint az $[u, v]$ intervallum fokozatos szűkítése a cél, az alábbi összefüggések adódnak közvetlenül:
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge f([(u+v)/2]) < h \Rightarrow P^{u \leftarrow [(u+v)/2]+1}$,
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge f([(u+v)/2]) > h \Rightarrow P^{v \leftarrow [(u+v)/2]-1}$,
valamint
$P \wedge (\neg l \wedge u \leq v) \wedge f([(u+v)/2]) = h \Rightarrow P^{i,l \leftarrow [(u+v)/2], \uparrow}$.
A fentiek alapján
S_0 :
$(f([(u+v)/2]) < h : \; u := [(u+v)/2] + 1,$
$f([(u+v)/2]) > h : \; v := [(u+v)/2] - 1,$
$f([(u+v)/2]) = h : \; i, l := [(u+v)/2], \uparrow)$
alkalmas választás a ciklus levezetési szabálya negyedik feltételének teljesítéséhez. A levezetés többi lépése változatlanul érvényes. Gyakorlati szempontból azonban a fenti módszer nem tűnik gazdaságosnak, mivel valahányszor hivatkozás történik a $[(u+v)/2]$ értékre, mindannyiszor ki kell azt számolni. Az eredetileg alkalmazott módszer éppen ezt küszöböli ki.
E feledatban a gyakran hivatkozott aritmetikai kifejezés értékének előre történő kiszámítására láttunk példát.

8. Speciális formában adott függvény értékének kiszámítása adott helyen

8.1. Függvénykompozícióval definiált függvény

Legyenek H_1, H_2, H_3 tetszőleges halmazok, továbbá $f : H_1 \to H_3$, $g : H_1 \to H_2$, $h : H_2 \to H_3$ olyan függvények, hogy $f = h \circ g$. Határozzuk meg az f függvény $v \in H_1$ helyen felvett értékét.

$$A = \underset{v}{H_1} \times \underset{z}{H_3}$$

$B = \underset{v'}{H_1}$

$Q : \big(v = v'\big)$

$R : \big(Q \wedge z = f(v')\big)$

Legyen $R' : \big(Q \wedge z = h(w) \wedge w = g(v)\big)$.
Könnyen látható, hogy
$R' \Rightarrow R$.
Ugyanakkor
$Q \Rightarrow ({R'}^{z \leftarrow h(w)})^{w \leftarrow g(v)}$
is teljesül. Ezért a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert összefüggés alapján
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((w := g(v); z := h(w)),\ R')$.
$R' \Rightarrow R$ miatt
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((w := g(v); z := h(w)),\ R)$ is teljesül.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$w := g(v)$
$z := h(w)$

8.2. Esetszétválasztásos függvény

Legyen H egy tetszőleges halmaz, $f : \mathbb{Z} \to H$, $h_1, \ldots, h_k : \mathbb{Z} \to H$, $\pi_1, \ldots, \pi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$, amelyekre

$$f(i) := \begin{cases} h_1(i) & \text{, ha } \pi_1(i) \\ \vdots & \vdots \\ h_k(i) & \text{, ha } \pi_k(i) \end{cases}$$

Határozzuk meg az f parciális függvény v helyen felvett értékét!

$A = \underset{v}{\mathbb{Z}} \times \underset{z}{H}$

$B = \underset{v'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(v = v' \wedge v' \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} [\pi_j]\big)$

$R : \big(Q \wedge z = f(v')\big)$

A feltételek alapjan
$Q \wedge \pi_i(v) \Rightarrow Q \wedge h_i(v) = f(v) \Leftrightarrow (Q \wedge z = f(v))^{z \leftarrow h_i(v)}$.
Tehát minden $i \in [1..k]$ esetén
$Q \wedge \pi_i(v) \Rightarrow \mathrm{lf}(z := h_i(v), R)$.

Alkalmazva az elágazás levezetési szabályát, adódik:
$Q \wedge (\vee_{i=1}^{k} \pi_i(v)) \Rightarrow \mathrm{lf}(IF, R)$,
De nyilván $Q \wedge (\vee_{i=1}^{k} \pi_i(v)) \Leftrightarrow Q$, ezért
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(IF, R)$,
ahol $IF : (\pi_1 : z := h_1, ..., \pi_k : z := h_k)$.

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$\pi_1(v)$	...	$\pi_k(v)$
$z := h_1(v)$	...	$z := h_k(v)$

8.3. Rekurzív formulával definiált függvény

Legyen H egy tetszőleges halmaz, $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Z} \to H$, $h : \mathbb{Z} \times H^k \to H$ olyan függvények, hogy $f(t_0) = f_0,\ f(t_0 - 1) = f_{-1},\ \ldots,\ f(t_0 - k + 1) = f_{-k+1}\quad (t_0 \in \mathbb{Z})$ és $\forall i \geq t_0 : f(i+1) = h(i+1, f(i), \ldots, f(i-k+1))$. Határozzuk meg az f függvény $n > t_0$ helyen felvett értékét.

$A = \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{z}{\mathrm{H}}$

$B = \underset{n'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(n = n' \wedge n \geq t_0\big)$

$R : \big(Q \wedge z = f(n')\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge t_0 \leq i \leq n \wedge z = f(i) \wedge z_{-1} = f(i-1) \wedge \ldots \wedge z_{-k+1} = f(i-k+1)\big)$

1. Könnyen látható, hogy a ciklus levezetési szabálya második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi : (i = n)$.
   Tehát $\pi : i \neq n$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = n - i$,
   a π választása és amiatt, hogy
   $P \wedge \pi \Rightarrow t_0 \leq i \leq n \wedge i \neq n \Rightarrow i < n$.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   $S_2 = (i := i + 1)$
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$

teljesül, ha

$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1, P^{i\leftarrow i+1})$,

mivel

$\mathrm{lf}(i := i+1,\ P) \Leftrightarrow P^{i\leftarrow i+1}$.

$P^{i\leftarrow i+1} : \big(Q \wedge t_0 \leq i+1 \leq n \wedge z = f(i+1) \wedge z_{-1} = f(i) \wedge \ldots \wedge z_{-k+1} = f(i-k+2)\big)$,

ugyanakkor

$P \wedge \pi \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \wedge t_0 \leq i+1 \leq n \wedge h(i+1, z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1}) = f(i+1) \wedge$

$\wedge z = f(i) \wedge \ldots \wedge z_{-k+2} = f(i-k+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {P^{i\leftarrow i+1}}^{z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}\leftarrow h(i+1,z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}),z,z_{-1},\ldots,z_{-k+2}}$.

Mivel

${P^{i\leftarrow i+1}}^{z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}\leftarrow h(i+1,z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}),z,z_{-1},\ldots,z_{-k+2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{lf}(z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1} := h(i+1, z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1}), z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+2}, P^{i\leftarrow i+1})$,

ezért

$S_1 : (z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1} := h(i+1, z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1}), z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+2})$

alkalmas választás.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:

   $P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.

   Mivel

   $\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow {(t \leq t_0)^{i\leftarrow i+1}}^{z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}\leftarrow h(i+1,z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}),z,z_{-1},\ldots,z_{-k+2}} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow n - i \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow t \leq t_0 + 1$ tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re,

   ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy

   $Q \Rightarrow P$

   nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy

   $Q \Rightarrow P^{i,z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}\leftarrow t_0,f_0,f_{-1},\ldots,f_{-k+1}}$

   fennáll, mivel

   $P^{i,z,z_{-1},\ldots,z_{-k+1}\leftarrow t_0,f_0,f_{-1},\ldots,f_{-k+1}} \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow Q \wedge t_0 \leq t_0 \leq n \wedge f_0 = f(t_0) \wedge f_{-1} = f(t_0 - 1) \wedge \ldots \wedge f_{-k+1} = f(t_0 - k + 1)$

   és

   $\big(f_0 = f(t_0) \wedge f_{-1} = f(t_0 - 1) \wedge \ldots \wedge f_{-k+1} = f(t_0 - k + 1)\big) \Leftrightarrow true$.

   és

   $Q \Rightarrow Q \wedge t_0 \leq t_0 \leq n$ a Q választása miatt.

   Tehát

   $Q \Rightarrow \mathrm{lf}(i, z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1} := t_0, f_0, f_{-1}, \ldots, f_{-k+1},\ P)$.

   Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:

   $P \Rightarrow P$

   nyilván teljesül, ezért

   $P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$

   is igaz, ahol $DO = (i \neq n, S_0)$.

   Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:

   $Q \Rightarrow \mathrm{lf}((i, z, z_{-1}, \ldots, z_{-k+1} := t_0, f_0, f_{-1}, \ldots, f_{-k+1}; DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$i, z, z_{-1}, .., z_{-k+1} := t_0, f_0, f_{-1}, .., f_{-k+1}$
$i \neq n$
$z, z_{-1}, .., z_{-k+1} := h(i+1, z, \ldots, z_{-k+1}), z, .., z_{-k+2}$
$i := i + 1$

8.4. Elemenként feldolgozható függvény

Legyenek $E, F_i \;\; (i = 1, \ldots, m)$ tetszőleges halmazok, $m, n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek.

$$\begin{aligned} X =& X_1 \times \ldots \times X_n \qquad (X_i \subseteq 2^E \; (i = 1, \ldots, n)) \\ Y =& Y_1 \times \ldots \times Y_m \qquad (Y_i \subseteq 2^{F_i} \; (i = 1, \ldots, m)) \end{aligned}$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in X$ *teljesen diszjunkt felbontása* $x \in X$-nek, ha

i) $\forall i \in [1, n] : x_i = \overline{x}_i \cup \overline{\overline{x}}_i$ és

ii) $\forall i, j \in [1, n] : \overline{x}_i \cap \overline{\overline{x}}_j = \emptyset$.

Definíció: Legyen $f : X \to Y$. Ha bármely $x \in X$ bármely $\overline{x}, \overline{\overline{x}}$ teljesen diszjunkt felbontására

i) $f(\overline{x}) \cup f(\overline{\overline{x}}) = f(x)$ és

ii) $f(\overline{x}) \cap f(\overline{\overline{x}}) = (\emptyset, ..., \emptyset)$,

akkor f-et *elemenként feldolgozhatónak* nevezzük.

Megjegyzés:

1. Az $\cup$ és $\cap$ műveletek komponensenként értendők.
2. $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ jelölést alkalmazva, ahol

$$f_j(x) : \; X \to Y_j, \quad j = 1, \ldots, m \; ,$$

könnyen látható, hogy az $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ függvénnek mind elemenként feldolgozhatóak.

8.4.1. Egyváltozós egyértékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y \;\; (n = 1, m = 1)$ elemenként feldolgozható függvény. Határozzuk meg az f függvény értékét valamely $x \in X$ pontban.

$$A = \underset{x}{X} \times \underset{y}{Y}$$

$$B = \underset{x'}{X}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(y = f(x')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P: \big(y \cup f(x) = f(x') \wedge y \cap f(x) = \emptyset\big)$

1. A ciklus levezetési szabályának második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi:\ x = \emptyset$.
   Ha ugyanis $x = \emptyset$, akkor az elemenként feldolgozható tulajdonság miatt
   $f(x) = \emptyset$.
   Tehát $\pi:\ x \neq \emptyset$ alkalmas választás.
2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
   $P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
   teljesül, ha $t = |x|$ ($|x|$ jelenti x elemeinek számát)
   a π választása miatt.
3. Célszerű a ciklusmagot
   $S_0 : (S_1; S_2)$
   szekvencia fomában keresni, ahol
   S_2 azon egyszerű parciális értékadás, amelyre
   $D_{F_1} = \{(x, y, e) | e \in x\}$ és $F_1((x, y, e)) = \{x \simeq \{e\}\}$ minden $(x, y, e) \in D_{F_1}$,
   abból a meggondolásból, hogy a ciklus levezetési szabályának 5. feltétele is teljesüljön. Alkalmazva a szekvencia leggyengébb előfeltételére ismert tételt,
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0,\ P) \Leftrightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ lf(S_2,\ P))$
   teljesül, ha
   $P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ \mathrm{lf}(S_2, P)) \Leftrightarrow lf(S_1,\ P^{x \leftarrow x \simeq \{e\}} \wedge e \in x)$
   mivel
   $\mathrm{lf}(S_2,\ P) \Leftrightarrow P^{x \leftarrow x \simeq \{e\}} \wedge e \in x$.
   $P^{x \leftarrow x \simeq \{e\}} \wedge e \in x$:
   $\big(y \cup f(x \simeq \{e\}) = f(x') \wedge y \cap f(x \simeq \{e\}) = \emptyset \wedge e \in x\big)$.
   Ugyanakkor
   $P \wedge \pi \wedge e \in x \Rightarrow$
   $\big(y \cup f(x \simeq \{e\}) \cup f(\{e\}) = f(x') \wedge y \cap (f(x \simeq \{e\}) \cup f(\{e\})) = \emptyset \wedge e \in x\big)$,
   ugyanis $e \in x$, valamint a $\simeq$ művetel tulajdonsága miatt x-nek $x \simeq \{e\}$ és $\{e\}$ diszjunkt felbontása, ezért
   $f(x) = f(x \simeq \{e\}) \tilde{\cup} f(\{e\})$.
   Ugyanakkor a teljesen diszjunkt felbontás miatt
   $f(x \simeq \{e\}) \cap f(\{e\}) = \emptyset$
   is teljesül, ezért $e \in x$ esetén
   $y \cap (f(x \simeq \{e\}) \cup f(\{e\})) = \emptyset \Rightarrow (y \tilde{\cup} f(\{e\})) \cap f(x \simeq \{e\}) = \emptyset$,
   tehát $P \wedge \pi \wedge e \in x \Rightarrow$
   $\big(y \cup f(x \simeq \{e\}) \cup f(\{e\}) = f(x')$
   $\wedge\, (y \tilde{\cup} f(\{e\})) \cap f(x \simeq \{e\}) = \emptyset \wedge y \cap f(\{e\}) = \emptyset \wedge e \in x\big) \Leftrightarrow$
   $\mathrm{lf}(S_{1,2},\ P^{x \leftarrow x \simeq \{e\}} \wedge e \in x)$,
   ahol $S_{1,2}$ azon egyszerű parciális értékadás, amelyre
   $D_{F_2} = \{(x, y, e) | y \cap f(\{e\}) = \emptyset$
   és $F_2((x, y, e)) = \{y \tilde{\cup} f(\{e\})\}$ minden $(x, y, e) \in D_{F_2}$.

Látható viszont, hogy
$P \wedge \pi \not\Rightarrow P \wedge \pi \wedge e \in x$,
ezért egy olyan $S_{1,1}$ programra van szükség, amelyre
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_{1,1},\ P \wedge \pi \wedge e \in x)$.
Az ilyen tulajdonságú programokat x bizonyos elemeit kiválasztó programoknak nevezzük.
$S_{1,1}$ prgramra alkalmas választás lehet az
$S_{1,1}:\ e :\in (x)$
értékkiválasztás (ez x minden elemét kiválasztja!), ugyanis könnyen belátható, hogy
$\mathrm{lf}(e :\in (x), P \wedge \pi \wedge e \in x) \Leftrightarrow P \wedge \pi$
az $e :\in x$ értékkiválasztásnak adott utófeltétel mellett, a leggyengébb előfeltételére vonatkozó tétele alapján.
A $S_{1,2}:\ y := y \widetilde{\cup} f(\{e\})$ jelölést használva, tehát beláttuk, hogy az
$S_1:\ (S_{1,1}; S_{1,2})$
alkalmas választás.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Alkalmazva a szekvencia levezetési szabályát, adódik:
$\mathrm{lf}(S_0, t \leq t_0) \Leftrightarrow$
$\mathrm{lf}(S_{1,1},\ \mathrm{lf}(S_{1,2},\ \mathrm{lf}(S_2,\ t \leq t_0))) \Leftrightarrow$
$\mathrm{lf}(S_{1,1},\ \mathrm{lf}(S_{1,2},\ e \in x \wedge Cardinal(x \simeq \{e\}) \leq t_0)) \Leftrightarrow$
$\mathrm{lf}(S_{1,1},\ \mathrm{lf}(S_{1,2},\ e \in x \wedge t - 1\ \leq t_0)) \Leftrightarrow$
$\mathrm{lf}(S_{1,1},\ y \cap f(\{e\}) = \emptyset \wedge e \in x \wedge t - 1\ \leq t_0)$.
Felhasználva az f függvény elemenként feldolgozható tulajdonságát, belátható, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \mathrm{lf}(S_{1,1},\ y \cap f(\{e\}) = \emptyset \wedge e \in x \wedge t - 1\ \leq t_0)$
tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re, ugyanis
$\mathrm{lf}(S_{1,1},\ y \cap f(\{e\}) = \emptyset \wedge e \in x \wedge t - 1\ \leq t_0) \Leftrightarrow$
$x \neq \emptyset \wedge \forall e \in x : (y \cap f(\{e\}) = \emptyset \wedge e \in x \wedge t - 1\ \leq t_0)$,
és egyszerűen belátható, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow$
$x \neq \emptyset \wedge \forall e \in x : (y \cap f(\{e\}) = \emptyset \wedge e \in x \wedge t - 1\ \leq t_0)$
ezért a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{y \leftarrow \emptyset}$
fennáll, mivel
$P^{y \leftarrow \emptyset} : \big(\emptyset \cup f(x) = f(x') \wedge \emptyset \cap f(x) = \emptyset\big) \Leftrightarrow \big(f(x) = f(x')\big)$,
ugyanis
$\emptyset \cap f(x) = \emptyset \Leftrightarrow true$ nyilván teljesül.
Tehát

$Q \Rightarrow \mathrm{lf}(y := \emptyset, P)$.
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:
$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (x \neq \emptyset, S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((y := \emptyset; DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

$y := \emptyset$	
$x \neq \emptyset$	
	$e :\in (x)$
	$y := y \widetilde{\cup} f(\{e\})$
	$x := x \simeq \{e\}$

Megjegyzés: $\widetilde{\cup}$ a diszjunkt unió, $\simeq$ valamely halmaz és egy eleme, mint halmaz közötti különbség műveletét jejöli.

8.4.2. Kétváltozós egyértékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y$ $(n = 2, m = 1)$ elemenként feldolgozható függvény.

$$A = \underset{x_1}{X_1} \times \underset{x_2}{X_2} \times \underset{y}{Y}$$

$$B = \underset{x_1'}{X_1} \times \underset{x_2'}{X_2}$$

$$Q : \big(x_1 = x_1' \wedge x_2 = x_2'\big)$$

$$R : \big(y = f(x_1', x_2')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(y \cup f(x_1, x_2) = f(x_1', x_2') \wedge y \cap f(x_1, x_2) = \emptyset\big)$$

1. A ciklus levezetési szabályának második feltétele:
   $P \wedge \neg\pi \Rightarrow R$
   teljesül, ha $\neg\pi :\ x = (\emptyset, \emptyset)$.
   Ha ugyanis $x = (\emptyset, \emptyset)$, akkor az elemenként feldolgozható tulajdonság miatt $f(x) = \emptyset$.
   Tehát $\pi :\ x \neq (\emptyset, \emptyset)$, vagy
   $\pi :\ x \neq (\emptyset, \emptyset) \Leftrightarrow x_1 \neq \emptyset \vee x_2 \neq \emptyset$
   miatt $\pi :\ x_1 \neq \emptyset \vee x_2 \neq \emptyset$ egyaránt alkalmas választás.

2. A ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele:
$P \wedge \pi \Rightarrow t > 0$
teljesül, ha $t = |x_1 \cup x_2|$ ($|x|$ jelenti valamely x halmaz elemeinek számát) a π választása miatt.

3. Vegyük észre, hogy
$P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \Rightarrow$
$\big(y \cup f(x_1 \simeq \{e\}, x_2) \cup f(\{e\}, \emptyset) = f(x') \wedge y \cap (f(x_1 \simeq \{e\}, x_2) \cup f(\{e\}, \emptyset)) = \emptyset\big)$,
ugyanis $e \in x_1 \wedge e \notin x_2$, valamint a $\simeq$ művetel tulajdonsága miatt (x_1, x_2)-nek $(x_1 \simeq \{e\}, x_2)$ és $(\{e\}, \emptyset)$ teljesen diszjunkt felbontása, ezért
$f((x_1, x_2)) = f((x_1 \simeq \{e\}, x_2)) \tilde{\cup} f((\{e\}, \emptyset))$.
Ugyanakkor a teljesen diszjunkt felbontás miatt
$f((x_1 \simeq \{e\}, x_2)) \cap f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset$
is teljesül, ezért $e \in x_1 \wedge e \notin x_2$ esetén
$y \cap (f((x_1 \simeq \{e\}, x_2)) \cup f((\{e\}, \emptyset))) = \emptyset \Rightarrow$
$(y \tilde{\cup} f((\{e\}, \emptyset))) \cap f((x_1 \simeq \{e\}, x_2)) = \emptyset$,
tehát
$P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \Rightarrow$
$\big(y \cup f((x_1 \simeq \{e\}, x_2)) \cup f((\{e\}, \emptyset)) = f(x') \wedge$
$\wedge (y \tilde{\cup} f((\{e\}, \emptyset))) \cap f((x_1 \simeq \{e\}, x_2)) = \emptyset \wedge$
$\wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cap f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset\big) \Leftrightarrow$
$P^{x_1 \leftarrow x_1 \simeq \{e\}}{}^{y \leftarrow y \tilde{\cup} f((\{e\}, \emptyset))} \wedge$
$\wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cup f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset$.
Hasonlóan belátható, hogy
$P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \notin x_1 \wedge e \in x_2) \Rightarrow$
$\big(y \cup f((x_1, x_2 \simeq \{e\})) \cup f((\emptyset, \{e\})) = f(x') \wedge$
$\wedge (y \tilde{\cup} f((\emptyset, \{e\}))) \cap f((x_1, x_2 \simeq \{e\})) = \emptyset \wedge$
$\wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \notin x_1 \wedge e \in x_2) \wedge y \cap f((\emptyset, \{e\})) = \emptyset\big) \Leftrightarrow$
$P^{x_2 \leftarrow x_2 \simeq \{e\}}{}^{y \leftarrow y \tilde{\cup} f((\emptyset, \{e\}))} \wedge$
$\wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \notin x_1 \wedge e \in x_2) \wedge y \cap f((\emptyset, \{e\})) = \emptyset$,
és
$P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \in x_2) \Rightarrow$
$\big(y \cup f((x_1 \simeq \{e\}, x_2 \simeq \{e\})) \cup f((\{e\}, \{e\})) = f(x') \wedge$
$\wedge (y \tilde{\cup} f((\{e\}, \{e\}))) \cap f((x_1 \simeq \{e\}, x_2 \simeq \{e\})) = \emptyset \wedge$
$\wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \in x_2) \wedge y \cap f((\{e\}, \{e\})) = \emptyset\big) \Leftrightarrow$
$P^{x_1, x_2 \leftarrow x_1 \simeq \{e\}, x_2 \simeq \{e\}}{}^{y \leftarrow y \tilde{\cup} f((\{e\}, \{e\}))} \wedge$
$\wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \in x_2) \wedge y \cap f((\{e\}, \{e\})) = \emptyset$.
Alkalmazva az elágazás levezetési szabályát, valamint a
$e \in x_1 \cup x_2 \Leftrightarrow$
$e \in x_1 \cup x_2 \wedge ((e \in x_1 \wedge e \in x_2) \vee (e \notin x_1 \wedge e \in x_2) \vee (e \in x_1 \wedge e \notin x_2))$
összefüggést, kapjuk:
$P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2 \Rightarrow \mathrm{lf}(IF, P)$,

ahol
$IF:$
$\big(e \in x_1 \wedge e \notin x_2 : \ S_{2,1}, e \notin x_1 \wedge e \in x_2 : \ S_{2,2}, e \in x_1 \wedge e \in x_2 : \ S_{2,3}\big)$,
ahol
$S_{2,1}$ szimultán parciális értékadás, amelyre
$D_{F_1} = \{(x_1, x_2, y, e) |\ e \in x_1 \wedge e \notin x_2\}$ és
$F_1((x_1, x_2, y, e)) = \{x_1 \simeq \{e\}\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_1}$,
valamint
$D_{F_3} = \{(x_1, x_2, y, e) | y \cap f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset\}$ és
$F_3((x_1, x_2, y, e)) = \{y \tilde{\cup} f((\{e\}, \emptyset))\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_3}$,
$S_{2,2}$ szimultán parciális értékadás, amelyre
$D_{F_2} = \{(x_1, x_2, y, e) |\ e \notin x_1 \wedge e \in x_2\}$ és
$F_2((x_1, x_2, y, e)) = \{x_2 \simeq \{e\}\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_2}$,
valamint
$D_{F_3} = \{(x_1, x_2, y, e) | y \cap f((\emptyset, \{e\})) = \emptyset\}$ és
$F_3((x_1, x_2, y, e)) = \{y \tilde{\cup} f((\emptyset, \{e\}))\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_3}$,
$S_{2,3}$ szimultán parciális értékadás, amelyre
$D_{F_1} = \{(x_1, x_2, y, e) |\ e \in x_1 \wedge e \in x_2\}$ és
$F_1((x_1, x_2, y, e)) = \{x_1 \simeq \{e\}\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_1}$,
valamint
$D_{F_2} = \{(x_1, x_2, y, e) |\ e \in x_1 \wedge e \in x_2\}$ és
$F_2((x_1, x_2, y, e)) = \{x_2 \simeq \{e\}\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_2}$,
valamint
$D_{F_3} = \{(x_1, x_2, y, e) | y \cap f((\{e\}, \{e\})) = \emptyset\}$ és
$F_3((x_1, x_2, y, e)) = \{y \tilde{\cup} f((\{e\}, \{e\}))\}$ minden $(x_1, x_2, y, e) \in D_{F_3}$.
Látható viszont, hogy
$P \wedge \pi \neg \Rightarrow P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2$,
ezért egy olyan S_1 programra van szükség, amelyre
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}(S_1,\ P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2)$.
Az ilyen tulajdonságú programokat $x_1 \cup x_2$ bizonyos elemeit kiválasztó programoknak nevezzük.
S_1 prgramra alkalmas választás lehet az
$S_1 :\ e :\in (x_1 \cup x_2)$
értékkiválasztás (ez $x_1 \cup x_2$ minden elemét kiválasztja!), ugyanis könnyen belátható, hogy
$\mathrm{lf}(e :\in (x_1 \cup x_2), P \wedge \pi \wedge e \in x_1 \cup x_2) \Leftrightarrow P \wedge \pi$
az $e :\in (x_1 \cup x_2)$ értékkiválasztásnak adott utófeltétel mellett, a leggyengébb előfeltételére vonatkozó tétele alapján.
Alkalmazva a szekvenciára vonatkozó levezetési szabályt, kapjuk:
$P \wedge \pi \Rightarrow \mathrm{lf}((e :\in (x_1 \cup x_2);\ IF),\ P)$.
Tehát
$S_0 :\ (e :\in (x_1 \cup x_2);\ IF)$

választás esetén a ciklus levezetési szabálya harmadik feltétele is teljesül, és ugyanakkor látható, hogy a t termináló függvény értékei is csökken S_0 végrehajtásakor.

4. A ciklus levezetési szabálya ötödik feltétele:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \text{lf}(S_0, t \leq t_0)$ minden $t_0 \in \mathbb{Z}$-re.
Alkalmazva a szekvencia és az elágazás levezetési szabályainak megfordítását, ha belátjuk, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Rightarrow \text{lf}(e :\in (x_1 \cup x_2),\ P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2,$
és
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \Rightarrow \text{lf}(S_{2,1},\ t \leq t_0),$
valamint
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \notin x_1 \wedge e \in x_2) \Rightarrow \text{lf}(S_{2,2},\ t \leq t_0),$
valamint
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \in x_2) \Rightarrow \text{lf}(S_{2,3},\ t \leq t_0),$
tetszőleges $t_0 \in \mathbb{Z}$-re, akkor a ciklus levezetési szabályának ötödik feltétele is teljesül.
Az első összefüggés következik abból, hogy az értékkiválasztás leggyengébb előfeltételére:
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \Leftrightarrow \text{lf}(e :\in (x_1 \cup x_2),\ P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2.$
Ugyanakkor
$\text{lf}(S_{2,1},\ t \leq t_0) \Leftrightarrow$
$(t \leq t_0)^{x_2 \leftarrow x_2 \simeq \{e\}} \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cup f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset \Leftrightarrow$
$Cardinal(x_1 \cup (x_2 \simeq \{e\})) \leq t_0 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cup f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset \Leftrightarrow$
$Cardinal(x_1 \cup x_2) - 1 \leq t_0 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cup f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset \Leftrightarrow$
$t \leq t_0 + 1 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cup f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset.$
Könnyen látható, hogy
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \Rightarrow$
$t \leq t_0 + 1 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \wedge y \cup f((\{e\}, \emptyset)) = \emptyset,$
tehát
$P \wedge \pi \wedge t \leq t_0 + 1 \wedge e \in x_1 \cup x_2 \wedge (e \in x_1 \wedge e \notin x_2) \Rightarrow \text{lf}(S_{2,1},\ t \leq t_0).$
Hasonlóan látható be a másik két leggyengébb előfeltételre vonatkozó összefüggés is.

5. Könnyen ellenőrizhető, hogy
$Q \Rightarrow P$
nem teljesül. Ugyanakkor látható, hogy
$Q \Rightarrow P^{y \leftarrow \emptyset}$
fennáll, mivel
$P^{y \leftarrow \emptyset} : \big(\emptyset \cup f(x) = f(x') \wedge \emptyset \cap f(x) = \emptyset\big) \Leftrightarrow \big(f(x) = f(x')\big),$
ugyanis
$\emptyset \cap f(x) = \emptyset \Leftrightarrow true$ nyilván teljesül.
Tehát
$Q \Rightarrow \text{lf}(y := \emptyset, P).$
Ugyanakkor a ciklus levezetési szabálya első feltétele:

$P \Rightarrow P$
nyilván teljesül, ezért
$P \Rightarrow \mathrm{lf}(DO,\ R)$
is igaz, ahol $DO = (x_1 \neq \emptyset \vee x_1 \neq \emptyset,\ S_0)$.
Alkalmazva a szekvenciával kapcsolatos levezetési szabályt, kapjuk:
$Q \Rightarrow \mathrm{lf}((y := \emptyset; DO),\ R)$

Egy lehetséges megoldás tehát a következő program:

<table>
<tr><td colspan="4" align="center">$y := \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">$x_1 \neq \emptyset \vee x_1 \neq \emptyset$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3" align="center">$e :\in (x_1 \cup x_2)$</td></tr>
<tr><td align="center">$e \in x_1 \wedge e \notin x_2$</td><td align="center">$e \notin x_1 \wedge e \in x_2$</td><td align="center">$e \in x_1 \wedge e \in x_2$</td></tr>
<tr><td align="center">$y, x_1 :=$
$y\widetilde{\cup}f(\{e\}, \emptyset),$
$x_1 \simeq \{e\}$</td><td align="center">$y, x_2 :=$
$y\widetilde{\cup}f(\emptyset, \{e\}),$
$x_2 \simeq \{e\}$</td><td align="center">$y, x_1, x_2 :=$
$y\widetilde{\cup}f(\{e\}, \{e\}),$
$x_1 \simeq \{e\},$
$x_2 \simeq \{e\}$</td></tr>
</table>

8.4.3. Egyváltozós kétértékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y \;\; (n = 1, m = 2)$, elemenként feldolgozható függvény, $f_1 : X \to Y_1,\;\; f_2 : X \to Y_2,\;\; f = (f_1, f_2)$.

$$A = \underset{x}{X} \times \underset{y_1}{Y_1} \times \underset{y_2}{Y_2}$$

$$B = \underset{x'}{X}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(y_1 = f_1(x') \land y_2 = f_2(x')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(y_1 \cup f_1(x) = f_1(x') \land y_1 \cap f_1(x) = \emptyset \land y_2 \cup f_2(x) = f_2(x') \land y_2 \cap f_2(x) = \emptyset\big)$$

Vegyük figyelembe, hogy az $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ függvény $f_1(x)$ és $f_2(x)$ komponensei egyváltozós egyértékű elemenkénk feldolgozható függvények. Ennek alapján a levezetés és a programkonstrukció az egyváltozós egyértékű elemenként feldolgozható függvény esetén alkalmazott módszerrel és meggondolásokkal analóg módon elvégezhető.

Mindezek alapján a következő program a feladat egy lehetséges megoldása:

<table>
<tr><td colspan="2">$y_1, y_2 := \emptyset, \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x \neq \emptyset$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>$e :\in (x)$</td></tr>
<tr><td>$y_1, y_2 := y_1 \widetilde{\cup} f_1(\{e\}), y_2 \widetilde{\cup} f_2(\{e\})$</td></tr>
<tr><td>$x := x \simeq \{e\}$</td></tr>
</table>

8.4.4. n változós, m értékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y$ $(n, m \in \mathbb{N})$, elemenként feldolgozható függvény, $f_1 : X \to Y_1, \dots,\ f_n : X \to Y_n,\ f = (f_1, \dots, f_n)$.

$$\begin{aligned}
A = & \underset{x_1}{X_1} \times \cdots \times \underset{x_n}{X_n} \times \underset{y_1}{Y_1} \times \cdots \times \underset{y_m}{Y_m} \\
B = & \underset{x_1'}{X_1} \times \cdots \times \underset{x_n'}{X_n}
\end{aligned}$$

$$Q : \big(x_1 = x_1' \wedge \cdots \wedge x_n = x_n'\big)$$

$$R : \big(y_1 = f_1(x_1', \dots, x_n') \wedge \cdots \wedge y_m = f_m(x_1', \dots, x_n')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(\forall j \in [1..m] : (y_j \cup f_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(x_1', \dots, x_n') \wedge y_j \cap f_j(x_1, \dots, x_n) = \emptyset\big)$$

A programkonstrukció és a levezetés a kétváltozós egyértékű elemenként feldolozható függvény esetében alkalmazott módszer többváltozós esetre történő általánosításával, valamint annak figyelembe vételével kapható meg, hogy az $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ jelölést alkalmazva, ahol

$$f_j(x) :\ X \to Y_j, \quad j = 1, \dots, m\ ,$$

az $f_1(x), \dots, f_m(x)$ függvénnek mind n változós egyértékű elemenként feldolgozható függvények.
Mindezek alapján a következő program a feladat egy lehetséges megoldása:

	$y_1, \dots, y_m := \emptyset, \dots, \emptyset$	
	$\bigvee_{i=1}^{n} x_i \neq \emptyset$	
	$e :\in (\bigcup_{i=1}^{n} x_i)$	
$\backslash \cdots$	$\backslash$ $e \in x_{i_1} \wedge \dots e \in x_{i_k} \wedge e \notin x_{i_{k+1}} \wedge e \notin x_{i_n}$	$\backslash \cdots$
$\cdots$	$y_1, \dots, y_m, x_{i_1}, \dots, x_{i_k} :=$ $y_1 \tilde{\cup} f_1(sl(x, e)), \dots, y_m \tilde{\cup} f_m(sl(x, e)),$ $x_{i_1} \simeq \{e\}, \dots, x_{i_k} \simeq \{e\}$	$\cdots$

ahol $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ különbözőek, $sl : X \times E \to X$,

$$sl(x, e)_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{ha } e \in x_i \\ \emptyset, & \text{különben} \end{cases}$$

Az elágazás "ágainak" száma $2^n - 1$.