Programozási tételek

1. Összegzés

Legyen H egy tetszőleges halmaz, amelyen értelmezett az összeadás művelete. Tegyük fel, hogy létezik neutrális eleme a H-nak az összeadásra nézve (jelölje ezt 0), valamint adott az $f : \mathbb{Z} \to H$ függvény. Adott $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumon összegezzük az f függvény értékeit! Legyen $\sum\limits_{i=m}^{n} f(i) = 0$, ha $n < m$.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathrm{H}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \land n = n'\big)$$

$$R : \Big(Q \land s = \sum_{i=m'}^{n'} f(i)\Big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \Big(Q \land k \in [m..n] \cup \{m-1\} \land s = \sum_{i=m}^{k} f(i)\Big)$$

$k, s := m - 1, 0$
$k < n$
$s := s + f(k + 1)$
$k := k + 1$

2. Számlálás

Legyen $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Számoljuk meg, hány helyen igaz β az $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban. Legyen $\sum\limits_{i=m}^{n} \chi(\beta(i)) = 0$, ha $n < m$.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathbb{N}_0}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

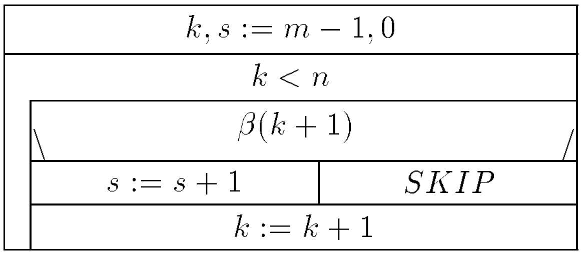
$$Q : \big(m = m' \land n = n'\big)$$

$$R : \Big(Q \land s = \sum_{i=m'}^{n'} \chi(\beta(i))\Big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum_{i=m}^{k} \chi(\beta(i))\big)$$

$$\text{ahol } \chi : \mathbb{L} \to \mathbb{N}_0, \chi(a) = \begin{cases} 1 & , a = \uparrow \\ 0 & , a = \downarrow \end{cases}.$$



3. Feltételes összegzés

Legyen $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Összegezzük az f függvény értékeit az $[m..n]$ intervallum azon pontjaiban, amelyekben β feltétel igaz. Legyen $\sum\limits_{i=m}^{n} \chi(\beta(i)) * f(i) = 0$, ha $n < m$.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{s}{\mathbb{N}_0}$$

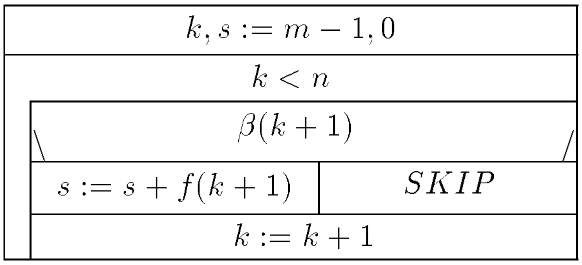
$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n\big)$$

$$R : \big(Q \wedge s = \sum_{i=m'}^{n'} \chi(\beta(i)) * f(i)\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge s = \sum_{i=m}^{k} \chi(\beta(i)) * f(i)\big)$$



4. Maximumkeresés

Legyen $(H, \leq)$ egy tetszőleges halmaz és $f : \mathbb{Z} \to H$ egy függvény. Keressük meg az f függvény maximumát és egy olyan helyet, ahol ezt a maximumértéket felveszi egy adott $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumban.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathrm{H}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n\big)$$

$$R : \big(Q \wedge i \in [m..n] \wedge f(i) = h \wedge \forall j \in [m..n] : f(j) \leq f(i)\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \wedge i \in [m,k] \wedge f(i) = h \wedge \forall j \in [m,k] : f(j) \leq f(i)\big)$$

$i, k, h := m, m, f(m)$		
$k \neq n$		
	$h \leq f(k+1)$	$h \geq f(k+1)$
	$i, h := k+1, f(k+1)$	$SKIP$
	$k := k+1$	

5. Feltételes maximumkeresés

Legyen $(H, \leq)$ tetszőleges halmaz és $f : Z \to H$ egy függvény, $m, n \in \mathbb{Z}$ és $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$. Határozzuk meg, hogy van-e az $[m, n]$ intervallumban olyan i pont, ahol $\beta(i)$ érvényes, és ha van ilyen pont, akkor határozzuk meg a $[\beta] \cap [m, n]$ halmaz felett az f függvény maximumát és a halmaz egy olyan pontját, ahol f a maximum értékét felveszi.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathrm{H}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge n = n'\big)$$

$$R : \big(Q \wedge (l \leftrightarrow (\exists i \in [m..n] : \beta(i))) \wedge (l \to (\varepsilon(m, n, i) \wedge f(i) = h))\big)$$

ahol $\varepsilon(m, k, i) : \big(i \in [m, k] \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m, k] : (\beta(j) \to f(j) \leq f(i))\big)$.

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge k \in [m..n] \cup \{m-1\} \wedge (l \leftrightarrow (\exists i \in [m,k] : \beta(i))) \wedge (l \to (\varepsilon(m,k,i) \wedge f(i) = h))\big)$$

<table>
<tr><td colspan="5" align="center">$k, l := m-1, \downarrow$</td></tr>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="4" align="center">$k < n$</td></tr>
<tr><td>$\neg\beta(k+1)$</td><td colspan="2" align="center">$\beta(k+1) \wedge l$</td><td align="center">$\beta(k+1) \wedge \neg l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2" align="center">$SKIP$</td><td align="center">$h \leq f(k+1)$</td><td align="center">$h \geq f(k+1)$</td><td rowspan="2" align="center">$l, i, h := \uparrow, k+1, f(k+1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$i, h := k+1, f(k+1)$</td><td align="center">$SKIP$</td></tr>
<tr><td colspan="4" align="center">$k := k+1$</td></tr>
</table>

6. Lineáris keresés

Legyen $m \in \mathbb{Z}$, $\beta : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$. Keressük meg azt a legkisebb β tulajdonságú egész számot, amely nem kisebb mint m.

6.1.

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge \exists j \geq m : \beta(j)\big)$$

$$R : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j)\big)$$

6.1.1. Lineáris keresés 1. változat

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge i \geq m \wedge \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)\big)$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$i := m$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td align="center">$\neg\beta(i)$</td></tr>
<tr><td align="center">$i := i+1$</td></tr>
</table>

6.1.2. Lineáris keresés 2. változat

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge i \geq m-1 \wedge (\forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)) \wedge l = \exists j \in [m, i] : \beta(j)\big)$

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$i, l := m-1, \downarrow$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td align="center">$\neg l$</td></tr>
<tr><td align="center">$l := \beta(i+1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$i := i+1$</td></tr>
</table>

6.2.

Tegyük fel, hogy $\beta = \gamma \vee \delta$ és létezik $i \geq m$, hogy $\beta(i)$. Keressük meg a legkisebb olyan i-t, amire $i \geq m$ és $\beta(i)$, és adjuk meg azt is, hogy $\gamma(i)$, illetve $\delta(i)$ igaz-e!

6.2.1. Lineáris keresés 3. változat

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}} \times \underset{v}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}}$$

$$Q : \big(m = m' \wedge \exists j \geq m' : \beta(j)\big)$$

$$R : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge$$
$$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i)) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(Q \wedge i \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \gamma(j))) \wedge (v \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \delta(j))) \wedge$$
$$\wedge\ \forall j \in [m, i) : \neg\beta(j)\big)$$

.

<table>
<tr><td colspan="2">$i, u, v := m - 1, \downarrow, \downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg u \wedge \neg v$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$u, v := \gamma(i+1), \delta(i+1)$</td></tr>
<tr><td>$i := i + 1$</td></tr>
</table>

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i)) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$,
valamint
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i)) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (v \leftrightarrow \delta(i))\big)$.
Ezért a fenti program

$$R' : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i))\big),$$

illetve

$$R' : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge \beta(i) \wedge \forall j \in [m', i) : \neg\beta(j) \wedge (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$$

feltétel mellett is megoldja a feladatot.

6.2.2. Lineáris keresés 2.8. változat

Legyen $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{L},\ m, n \in \mathbb{Z}$. Adjuk meg, hogy van-e az $[m..n]$ intervallumban olyan egész szám, amelyre γ igaz, és ha van, akkor keressük meg az első ilyen tulajdonságú helyet. Ez a 3. változat speciális esete $\delta(j) = (j \geq n)$ választással. Ennek megfelelően a következők érvényesek:

$$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{u}{\mathbb{L}}$$

$$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}}$$

$Q : \big(m = m' \wedge n = n'\big)$

$R : \big(Q \wedge i \geq m' \wedge (\gamma(i) \vee i \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m', i) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i))\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge m \leq n \wedge i \geq m - 1 \wedge (u \leftrightarrow (\exists j \in [m, i] : \gamma(j))) \wedge$
$\wedge\ ((\forall j \in [m, i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m, i) : j < n))\big)$

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">$\backslash$ $m \leq n$ $/$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$i, u := m - 1, \downarrow$</td><td rowspan="4" align="center">$i, u := m, \gamma(m)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\neg u \wedge i < n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td align="center">$u := \gamma(i + 1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$i := i + 1$</td></tr>
</table>

Ha valódi intervallumban keresünk, azaz

$Q : \big(m = m' \wedge n = n' \wedge m \leq n\big)$

feltételből indulunk ki, akkor az előzőek alapján, a keresett program:

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$i, u := m - 1, \downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\neg u \wedge i < n$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td align="center">$u := \gamma(i + 1)$</td></tr>
<tr><td align="center">$i := i + 1$</td></tr>
</table>

Ebben az esetben könnyen belátható, hogy

$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge (\gamma(i) \vee i \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m', i) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge (u \rightarrow (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j)))\big)$,
valamint
$\big(Q \wedge i \geq m' \wedge (\gamma(i) \vee i \geq n') \wedge ((\forall j \in [m', i) : \neg\gamma(j)) \wedge (\forall j \in [m', i) : j < n)) \wedge$
$\wedge\ (u \leftrightarrow \gamma(i))\big) \Rightarrow$
$\big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge$
$\wedge (u \rightarrow (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j))) \wedge (\neg u \rightarrow i = n')\big)$.

Tehát a fenti program

$R' : \big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge (u \to (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j)))\big)$,

valamint

$R' : \big(Q \wedge (u \leftrightarrow \exists j \in [m'..n'] : \gamma(j)) \wedge$
$\wedge (u \to (i \in [m'..n'] \wedge \gamma(i) \wedge \forall j \in [m'..i) : \neg\gamma(j))) \wedge (\neg u \to i = n')\big)$

feltételek mellett is megoldja a feladatot, ugyanakkor ez utóbbi feltételek direkt módon fejezi ki a megoldandó problémát. Természtesen ez utóbbi feltételekből kiindulva a levezetések a lineáris keresés 3. változatára történő visszautalás nélkül is elkészíthetőek.

7. Logaritmikus keresés

Legyen H egy olyan halmaz, amin értelmezve van egy rendezési reláció. Legyen $f : \mathbb{Z} \to H$ monoton növekedő függvény. Döntsük el egy adott $h \in H$ értékről, hogy felveszi-e azt az f függvény egy adott $[m, n] \subset \mathbb{Z}$ intervallumon, és ha igen, akkor adjuk meg egy olyan pontját, ahol a függvényérték h.

$A = \underset{m}{\mathbb{Z}} \times \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{i}{\mathbb{Z}} \times \underset{h}{\mathrm{H}} \times \underset{l}{\mathbb{L}}$

$B = \underset{m'}{\mathbb{Z}} \times \underset{n'}{\mathbb{Z}} \times \underset{h'}{\mathrm{H}}$

$Q : \big(m = m' \wedge n = n' \wedge h = h' \wedge \forall j, k \in [m'..n'] : j \leq k \to f(j) \leq f(k)\big)$

$R : \big(Q \wedge l = (\exists j \in [m'..n'] : f(j) = h') \wedge (l \to (i \in [m'..n'] \wedge f(i) = h'))\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \wedge [u, v] \subseteq [m..n] \wedge \forall j \in [m..n] \setminus [u, v] : f(j) \neq h \wedge (l \to (i \in [u, v] \wedge f(i) = h))\big)$

<table>
<tr><td colspan="4">$u, v, l := m, n, \downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg l \wedge (u \leq v)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">$i := [(u + v)/2]$</td></tr>
<tr><td>$f(i) < h$</td><td>$f(i) > h$</td><td>$f(i) = h$</td></tr>
<tr><td>$u := i + 1$</td><td>$v := i - 1$</td><td>$l := \uparrow$</td></tr>
</table>

8. Speciális formában adott függvény értékének kiszámítása adott helyen

8.1. Függvénykompozícióval definiált függvény

Legyenek H_1, H_2, H_3 tetszőleges halmazok, továbbá $f : H_1 \to H_3$, $g : H_1 \to H_2$, $h : H_2 \to H_3$ olyan függvények, hogy $f = h \circ g$. Határozzuk meg az f függvény $v \in H_1$ helyen felvett értékét.

$A = \underset{v}{H_1} \times \underset{z}{H_3}$

$B = \underset{v'}{H_1}$

$Q : \big(v = v'\big)$

$R : \big(Q \wedge z = f(v')\big)$

$w := g(v)$
$z := h(w)$

8.2. Esetszétválasztásos függvény

Legyen H egy tetszőleges halmaz, $f : \mathbb{Z} \to H$, $h_1, \dots, h_k : \mathbb{Z} \to H$, $\pi_1, \dots, \pi_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{L}$, amelyekre

$$f(i) := \begin{cases} h_1(i) & \text{, ha } \pi_1(i) \\ \vdots & \vdots \\ h_k(i) & \text{, ha } \pi_k(i) \end{cases}$$

Határozzuk meg az f parciális függvény v helyen felvett értékét!

$A = \underset{v}{\mathbb{Z}} \times \underset{z}{H}$

$B = \underset{v'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(v = v' \wedge v' \in \bigcup_{j=1}^{k} [\pi_j]\big)$

$R : \big(Q \wedge z = f(v')\big)$

$\pi_1(v)$	$\dots$	$\pi_k(v)$
$z := h_1(v)$	$\dots$	$z := h_k(v)$

8.3. Rekurzív formulával definiált függvény

Legyen H egy tetszőleges halmaz, $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Z} \to H$, $h : \mathbb{Z} \times H^k \to H$ olyan függvények, hogy $f(t_0) = f_0$, $f(t_0 - 1) = f_{-1}$, $\dots$, $f(t_0 - k + 1) = f_{-k+1}$ $(t_0 \in \mathbb{Z})$ és $\forall i \geq t_0 : f(i+1) = h(i+1, f(i), \dots, f(i-k+1))$. Határozzuk meg az f függvény $n > t_0$ helyen felvett értékét.

$A = \underset{n}{\mathbb{Z}} \times \underset{z}{\mathrm{H}}$

$B = \underset{n'}{\mathbb{Z}}$

$Q : \big(n = n' \wedge n \geq t_0\big)$

$R : \big(Q \land z = f(n')\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(Q \land t_0 \leq i \leq n \land z = f(i) \land z_{-1} = f(i-1) \land \ldots \land z_{-k+1} = f(i-k+1)\big)$

$i, z, z_{-1}, .., z_{-k+1} := t_0, f_0, f_{-1}, .., f_{-k+1}$	
$i \neq n$	
	$z, z_{-1}, .., z_{-k+1} := h(i+1, z, \ldots, z_{-k+1}), z, .., z_{-k+2}$
	$i := i + 1$

8.4. Elemenként feldolgozható függvény

Legyenek $E, F_i \;\; (i = 1, \ldots, m)$ tetszőleges halmazok, $m, n \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek.

$$\begin{aligned} X =& X_1 \times \ldots \times X_n \qquad (X_i \subseteq 2^E \; (i = 1, \ldots, n)) \\ Y =& Y_1 \times \ldots \times Y_m \qquad (Y_i \subseteq 2^{F_i} \; (i = 1, \ldots, m)) \end{aligned}$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy $\overline{x}, \overline{\overline{x}} \in X$ *teljesen diszjunkt felbontása* $x \in X$-nek, ha

i) $\forall i \in [1, n] : x_i = \overline{x}_i \cup \overline{\overline{x}}_i$ és

ii) $\forall i, j \in [1, n] : \overline{x}_i \cap \overline{\overline{x}}_j = \emptyset$.

Definíció: Legyen $f : X \to Y$. Ha bármely $x \in X$ bármely $\overline{x}, \overline{\overline{x}}$ teljesen diszjunkt felbontására

i) $f(\overline{x}) \cup f(\overline{\overline{x}}) = f(x)$ és

ii) $f(\overline{x}) \cap f(\overline{\overline{x}}) = (\emptyset, ..., \emptyset)$,

akkor f-et *elemenként feldolgozhatónak* nevezzük.

Megjegyzés:

1. Az $\cup$ és $\cap$ műveletek komponensenként értendők.
2. $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ jelölést alkalmazva, ahol

$$f_j(x) : \; X \to Y_j, \quad j = 1, \ldots, m \; ,$$

könnyen látható, hogy az $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ függvénnek mind elemenként feldolgozhatóak.

8.4.1. Egyváltozós egyértékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y$ $(n = 1, m = 1)$ elemenként feldolgozható függvény. Határozzuk meg az f függvény értékét valamely $x \in X$ pontban.

$$A = \underset{x}{X} \times \underset{y}{Y}$$

$$B = \underset{x'}{X}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(y = f(x')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(y \cup f(x) = f(x') \wedge y \cap f(x) = \emptyset\big)$

$y := \emptyset$	
$x \neq \emptyset$	
	$e :\in (x)$
	$y := y \,\widetilde{\cup}\, f(\{e\})$
	$x := x \simeq \{e\}$

Megjegyzés: $\widetilde{\cup}$ a diszjunkt unió, $\simeq$ valamely halmaz és egy eleme, mint halmaz közötti különbség műveletét jejöli.

8.4.2. Kétváltozós egyértékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y \;\; (n = 2, m = 1)$ elemenként feldolgozható függvény.

$$A = \underset{x_1}{X_1} \times \underset{x_2}{X_2} \times \underset{y}{Y}$$

$$B = \underset{x_1'}{X_1} \times \underset{x_2'}{X_2}$$

$Q : \big(x_1 = x_1' \wedge x_2 = x_2'\big)$

$R : \big(y = f(x_1', x_2')\big)$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$P : \big(y \cup f(x_1, x_2) = f(x_1', x_2') \wedge y \cap f(x_1, x_2) = \emptyset\big)$

<table>
<tr><td colspan="4">$y := \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$x_1 \neq \emptyset \vee x_1 \neq \emptyset$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">$e :\in (x_1 \cup x_2)$</td></tr>
<tr><td>\ $e \in x_1 \wedge e \notin x_2$</td><td>\ $e \notin x_1 \wedge e \in x_2$</td><td>\ $e \in x_1 \wedge e \in x_2$</td></tr>
<tr><td>$y, x_1 :=$
$y \widetilde{\cup} f(\{e\}, \emptyset),$
$x_1 \simeq \{e\}$</td><td>$y, x_2 :=$
$y \widetilde{\cup} f(\emptyset, \{e\}),$
$x_2 \simeq \{e\}$</td><td>$y, x_1, x_2 :=$
$y \widetilde{\cup} f(\{e\}, \{e\}),$
$x_1 \simeq \{e\},$
$x_2 \simeq \{e\}$</td></tr>
</table>

8.4.3. Egyváltozós kétértékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y$ $(n = 1, m = 2)$, elemenként feldolgozható függvény, $f_1 : X \to Y_1,\ f_2 : X \to Y_2,\ f = (f_1, f_2)$.

$$A = \underset{x}{X} \times \underset{y_1}{Y_1} \times \underset{y_2}{Y_2}$$

$$B = \underset{x'}{X}$$

$$Q : \big(x = x'\big)$$

$$R : \big(y_1 = f_1(x') \wedge y_2 = f_2(x')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(y_1 \cup f_1(x) = f_1(x') \wedge y_1 \cap f_1(x) = \emptyset \wedge y_2 \cup f_2(x) = f_2(x') \wedge y_2 \cap f_2(x) = \emptyset\big)$$

$y_1, y_2 := \emptyset, \emptyset$	
$x \neq \emptyset$	
	$e :\in (x)$
	$y_1, y_2 := y_1 \widetilde{\cup} f_1(\{e\}), y_2 \widetilde{\cup} f_2(\{e\})$
	$x := x \simeq \{e\}$

8.4.4. n változós, m értékű elemenkénti feldolgozás

Legyen $f : X \to Y$ $(n, m \in \mathbb{N})$, elemenként feldolgozható függvény, $f_1 : X \to Y_1, \ldots,\ f_n : X \to Y_n,\ f = (f_1, \ldots, f_n)$.

$$A = \underset{x_1}{X_1} \times \cdots \times \underset{x_n}{X_n} \times \underset{y_1}{Y_1} \times \cdots \times \underset{y_m}{Y_m}$$

$$B = \underset{x_1'}{X_1} \times \cdots \times \underset{x_n'}{X_n}$$

$$Q : \big(x_1 = x_1' \wedge \cdots \wedge x_n = x_n'\big)$$

$$R : \big(y_1 = f_1(x_1', \ldots, x_n') \wedge \cdots \wedge y_m = f_m(x_1', \ldots, x_n')\big)$$

Keressük a megoldást adó programot **ciklus** formában, ahol

$$P : \big(\forall j \in [1..m] : (y_j \cup f_j(x_1, \ldots, x_n) = f_j(x_1', \ldots, x_n') \wedge y_j \cap f_j(x_1, \ldots, x_n) = \emptyset\big)$$

<table>
<tr><td colspan="4">$y_1, \ldots, y_m := \emptyset, \ldots, \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\vee_{i=1}^{n} x_i \neq \emptyset$</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="3">$e :\in (\bigcup_{i=1}^{n} x_i)$</td></tr>
<tr><td>\ ...</td><td>\ $e \in x_{i_1} \wedge \ldots e \in x_{i_k} \wedge e \notin x_{i_{k+1}} \wedge e \notin x_{i_n}$</td><td>\ ...</td></tr>
<tr><td>...</td><td>$y_1, \ldots, y_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} :=$
$y_1 \tilde{\cup} f_1(sl(x,e)), \ldots, y_m \tilde{\cup} f_m(sl(x,e)),$
$x_{i_1} \simeq \{e\}, \ldots, x_{i_k} \simeq \{e\}$</td><td>...</td></tr>
</table>

ahol $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ különbözőek, $sl : X \times E \to X$,

$$sl(x,e)_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{ha } e \in x_i \\ \emptyset, & \text{különben} \end{cases}$$

Az elágazás "ágainak" száma $2^n - 1$.