II. Programtranszformációk

Definicíciók:

Jelölések: $A = A_1 \times ... \times A_m$, $a_i : A_i, i = 1, 2, ..., m$, $S \subseteq A \times A^{**}$

1. Azt mondjuk, hogy az S program $p(S)$ programfüggvénye független az $A_i, i \in [1..m]$, állapottérkomponenstől, ha $\forall a, b \in \mathcal{D}_{p(S)} : (\forall k \in ([1, i-1] \cup [i+1, m]) : a_k = b_k) \rightarrow p(S)(a) = p(S)(b)$
2. Azt mondjuk, hogy az $a_i : A_i, i \in [1..m]$, változó konstans függvény az S programban, ha $\forall a \in A : \forall \alpha \in S(a) : (\forall \alpha_k \in \alpha : \alpha_{k\,i} = a_i)$
3. Azt mondjuk, hogy az S program végrehajtása nem változtatja meg az $a_i : A_i, i \in [1..m]$, változót, ha $\forall a \in \mathcal{D}_{p(S)} : \forall b \in p(S)(a) : b_i = a_i$.

Tételek:

1. Nem megengedett elágazásfeltételek kitranszformálása

Legyenek $S_i \subseteq A \times A^{**}, i = 1, 2, ..., n$, programok és $\pi_j : A \rightarrow \mathcal{L}, i = 1, 2, ..., j$, logikai függvények, ahol $A = A_1 \times ... \times A_m$. Legyen $S_{IF} = IF(\pi_1 : S_1, ..., \pi_n : S_n)$. Legyen $A' = A_1 \times ... \times A_m \times \mathcal{L}_1 \times ... \times \mathcal{L}_n$ és $a_i : A_i,\ i = 1, 2, ..., m,\ l_j : \mathcal{L}_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Legyen továbbá

$S' \subseteq A' \times A'^{**}$:

$l_1 := \pi'_1(a_1, ..., a_m, l_1, ..., l_n)$ ... $l_n := \pi'_n(a_1, ..., a_m, l_1, ..., l_n)$

ahol $\pi'_j : A' \rightarrow \mathcal{L}$ és $\pi'_j(a_1, ..., a_m, l_1, ..., l_n) = \pi_j(a_1, ..., a_m), j = 1, 2, ..., n$. Ekkor az $S'_{IF} ::= (S'; IF(l_1 : S'_1, ..., l_n : S'_n)$, program ahol S'_j az S_j program kiterjesztése az A' térre, $j = 1, 2, ..., n$, ekvivalens A-n az S programmal.(biz.: lev. szab.)

2. Nem megengedett ciklusfeltétel kitranszformálása

Legyen $A = A_1 \times ... \times A_m$, $S_0 \subseteq A \times A^{**}$ program és $\pi : A \leftarrow \mathcal{L}$ állítás. Legyen $S_{DO} = DO(\pi : S_0)$. Legyen $A' = A_1 \times ... \times A_m \times \mathcal{L}$, $a_i : A_i, i = 1, 2, ..., m$ és $l : \mathcal{L}$. Jelölje S'_0 az S_0 program kiterjesztését az A' térre.

$S'_{DO} \subseteq A' \times A'^{**}$:

$l := \pi'(a_1, ..., a_m, l)$	
l	
	S'_0
	$l := \pi'(a_1, ..., a_m, l)$

program, ahol $\pi'(a_1, ..., a_m, l) = \pi(a_1, ..., a_m)$, ekvivalens A-n az S_{DO} programmal. (biz.: lev. szab.)

3. Szimultán értékadás kitranszformálása
$S \subseteq A \times A^{**}$ és $S ::= a_{i_1}, ..., a_{i_j} := f_1(a_{i_1}, ..., a_{i_j}), ..., f_j(a_{i_1}, ..., a_{i_j})$,
ahol $A = A_1 \times ... \times A_m$.
Legyen $A' = A_1 \times ... \times A_m \times A'_{i_1} \times ... \times A'_{i_j}$, $a_i : A_i, i = 1, ..., m$, $a'_{i_k} : A'_{i_k}$ és $A'_{i_k} = A_{i_k}, k = 1, ..., j$.

Legyen

$S' \subseteq A' \times A'^{**}$:

$a'_{i_1}, ..., a'_{i_j} := f_1(a_{i_1}, ..., a_{i_j}), ..., f_j(a_{i_1}, ..., a_{i_j})$
$a_{i_1}, ..., a_{i_j} := a'_{i_j}, ..., a'_{i_j}$

valamint

$S'' \subseteq A' \times A'^{**}$:

$a'_{i_1} := f_1(a_{i_1}, ..., a_{i_j})$ ... $a'_{i_j} := f_j(a_{i_1}, ..., a_{i_j})$
$a_{i_1} := a'_{i_1}$ ... $a_{i_j} := a'_{i_j}$

Ekkor az S' program ekvivalens A-n az S programmal és S'' program ekvivalens A-n az S programmal. (biz.: szekv. lev. szab.)

4. Szekvencia két tagjának felcserélése
Legyenek S_1 és S_2 programok az A állapottéren. Legyen $S_{12} = (S_1; S_2)$ és $S_{21} = (S_2; S_1)$. Tegyük fel, hogy minden olyan állapottérkomponenst, amelytől $p(S_1)$ nem függelen, az S_2 végrehajtása nem változtat meg és viszont. Akkor S_{12} ekvivalens S_{21}-gyel az A-n.

5. Ciklusmagban levő szekvencia két tagjának felcserélése:
Legyen S_0 program, π állítás az A állapottéren. Legyen $S = DO(\pi : S_0)$. Tegyük fel, hogy $S_0 = (i := i + 1; S_{01})$. Legyen $\overline{S_0} = ({S_{01}}^{i \leftarrow i+1}; i := i + 1)$. Ha i konstans függvény S_{01}-ben, akkor S ekvivalens $\overline{S} = DO(\pi : \overline{S_0})$-vel az A-n.

6. Függvény helyettesítése változóval

Legyen f az $A = A_1 \times ... \times A_m$ állapottér $A_{i_1} \times ... \times A_{i_k}$ alterén értelmezett függvény, melynek értékkészlete a H halmaz. ($f \circ (a_{i_1}, ..., a_{i_k})$ az A-n értelmezett fgv.) Ha S-ben az $a_{i_1}, ..., a_{i_k}$ változók konstans függvények, akkor S ekvivalens az

$$\overline{S} = (z := f(a_{i_1}, ..., a_{i_k}); S'^{f(a_{i_1},...,a_{i_k}) \leftarrow z})$$

programmal az A-n, ahol $\overline{S} \subseteq A' \times A'^{**}$ és $A' = A_1 \times ... \times A_m \times H$, $a_i : A_i$, i=1,2,...,m és $z : H$ és S' az S program kiterjesztése A'-ra. .

7. Rekurzív függvény kitranszformálása

Legyen $A = A_1 \times ... \times A_m$ állapottér, S_0 és S_1 programok A-n, valamint π állítás A-n. Legyen továbbá H egy tetszőleges halmaz, $k > 0$ egy egész szám, továbbá $f : \mathcal{Z} \to H$, $h : \mathcal{Z} \times H^k \to H$ olyan függvények, hogy $f(0) = t_0$, $f(-1) = t_{-1}$,..., $f(-k+1) = t_{-k+1}$ és $\forall i > 0 : f(i+1) = h(i+1, f(i), ..., f(i-k+1))$.

Legyen S :

$i := 0$
S_1
π
S_0
$i := i + 1$

program A-n, és tegyük fel, hogy i konstans függvény S_1-ben és S_0-ban, valamint S_0-ban hivatkozás történik $f(i+1)$-re. Ekkor S ekvivalens a következő $S' \subseteq A' \times A'^{**}$ programmal az A-n:

$i, z, z_{-1}, .., z_{-k+1} := 0, t_0, t_{-1}, .., t_{-k+1}$
S_1'
π'
$z, z_{-1}, .., z_{-k+1} := h(i+1, z, z_{-1}, .., z_{-k+1}), z, .., z_{-k+2}$
$S_0'^{f(i+1) \leftarrow z}$
$i := i + 1$

ahol $A' = A_1 \times ... \times A_m \times H \times H_{-1} \times ... \times H_{-k+1}$, $a_i : A_i, i = 1, 2, ..., m$, $z : H$ és $z_i : H_i, i = -1, ..., -k+1$. S_0' az S_0 kiterjesztése A'-ra, S_1' az S_1 kiterjesztése A'-ra, és $\pi'(a_1, ..., a_m, z, z_{-1}, ..., z_{-k+1}) = \pi(a_1, ..., a_m)$.

8. Programinverzió - általános eset

Jelölések:

A továbbiakban legyen $i = 1, ..., n$ és $j = 1, ..., m$. Legyenek U_i, V_j tetszőleges típusértékhalmazok, H tetszőleges halmaz.

$$X ::= X_1 \times ... \times X_n, X_i \subseteq 2^H (i = 1, ..., n),$$
$$Y ::= Y_1 \times ... \times Y_m, Y_j \subseteq 2^H (j = 1, ..., m).$$

Legyenek $f_{1\,i} : U_i \to X_i$, $f_2 : X \to Y$, $f_{3\,j} : Y_j \to V_j$ függvények. Legyen f_2 elemenként feldolgozható és
$\forall e \in X :$
$(\forall e_0 \in H : \forall i \in [1, n] : (e_i = \emptyset \vee e_i = \{e_0\}) \to \forall j \in [1, m] : (|f_2(e)_j| \leq 1))$

Definicíciók:

Elemenként előállító program

Az $S_{1\,i} \subseteq A_{1\,i} \times A_{1\,i}^{**}$, $\quad S_{1\,i} ::= (S_{11\,i}(u); x_i := \emptyset; DO(\pi_{1\,i}; S_{130\,i}))$ programot elemenként előállító programnak nevezzük, ha

i) megoldása az alábbi $Q_{u_i'}$ és $R_{u_i'}$ elő-, ill. utófeltétel párral specifikált feladatnak,
ii) $P_{u_i'}$ az $S_{13\,i}$ program ciklusinvariánsa, valamint
iii) $S_{11\,i}(u_i)$ és $S_{1301\,i}(u_i, e_i)$-ben x_i konstans függvény, ahol

$A_{1\,i} = U_i \times X_i, \quad u_i : U_i, \quad x_i : X_i$
$B_{1\,i} = U_i, \quad u_i' : U_i$
$Q_{u_i'} = (u_i = u_i'),$
$R_{u_i'} = (x_i = f_{1\,i}(u_i')).$
$P_{u_i'} = (x_i \cup f_{1\,i}(u_i) = f_{1\,i}(u_i') \wedge \forall p, q \in H : (p \in x_i \wedge q \in f_{1\,i}(u_i) \to p < q).$

<table>
<tr><td colspan="2">$S_{11\,i}(u_i)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x_i := \emptyset$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\pi_{1\,i}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>$S_{1301\,i}(u_i, e_i)$</td></tr>
<tr><td>$x_i := x_i \tilde{\cup} e_i$</td></tr>
</table>

Elemenként felhasználó program

Az $S_{3j} \subseteq A_{3j} \times {A_{3j}}^{**}$, $S_{3j} ::= (S_{31j}(v_j); DO(y_j \neq \emptyset; S_{320j}); S_{33j}(v_j))$ programot elemenként felhasználó programnak nevezzük, ha

i) megoldása az alábbi $Q_{y_j{}'}$ és $R_{y_j{}'}$ elő-, ill. utófeltétel párral specifikált feldatnak,

ii) $P_{y_j{}'}$ az S_{32j} program ciklusinvariánsa, valamint

iii) $S_{31j}(v_j), S_{3203j}(v_j, g_j)$ és $S_{33j}(v_j)$-ban y_j konstans függvény.

$$A_{3j} = Y_j \times V_j, \quad y_j : Y_j, \quad v_j : V_j$$
$$B_{3j} = Y_j \quad {y_j}' : Y_j$$
$$Q_{y_j{}'} = (y_j = {y_j}'),$$
$$R_{y_j{}'} = (v_j = f_{3j}({y_j}'))$$
$$P_{y_j{}'} = ...$$

$S_{31}(v_j)$
$y_j \neq \emptyset$
$g_j := mem(y_j)$
$y_j := y_j \tilde{-} \{g_j\}$
$S_{3203j}(v_j, g_j)$
$S_{33j}(v_j)$

Tétel:

Legyen $f ::= f_3 \ o \ f_2 \ o \ f_1$, ahol $f_1 ::= (f_{1 1}, ..., f_{1 n})$,$f_3 ::= (f_{3 1}, ..., f_{3 m})$. Az alábbi S program megoldása az

$$A = U_1 \times ... \times U_n \times V_1 \times ... \times V_m, \quad u_i : U_i, \quad v_i : V_i$$
$$B = U_1 \times ... \times U_n \quad {u_i}' : U_i$$
$$Q_{u_1{}', ..., u_n{}'} = (u_1 = {u_1}' \wedge ... \wedge u_n = {u_n}'),$$
$$R_{u_1{}', ..., u_n{}'} = ((v_1, ... v_m) = f({u_1}', ..., {u_n}'))$$

specifikációval definiált feladatnak.

$S_{11\,1}(u_1)$

$S_{1301x1}(u_1, e_1)$

$\dots$

$S_{11\,n}(u_n)$

$S_{1301xn}(u_n, e_n)$

$S_{31\,1}(v_1)$

$\dots$

$S_{31\,m}(v_m)$

$\pi_{1\,1} \vee \dots \vee \pi_{1\,n}$

$e : min_{i=1}^{n}(e_i)$

$\backslash \dots$ | $\backslash$ $e = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e = e_{i_k} \wedge e \neq e_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e \neq e_{i_n}$ | $\backslash \dots$

$\dots$ | $(g_1, ..., g_m) := f(sl(\{i_1 \dots i_k\}, e))$ | $\dots$

$S_{1301xi_1}(u_{i_1}, e_{i_1})$

$\dots$

$S_{1301xi_k}(u_{i_k}, e_{i_k})$

$S_{3202x1}(v_1, g_1)$

$\dots$

$S_{3202xm}(v_m, g_m)$

$S_{33\,1}(v_1)$

$\dots$

$S_{33\,m}(v_m)$

ahol $i_1, ..., i_n$ az $1, ..., n$ permutációja, $sl : 2^{\{1,\dots,n\}} \times H \to Y$,

$$sl(\{i_1, .., i_k\}, e)_i = \begin{cases} \{e\}, & \text{ha } i \in i_1, ..., i_k \\ \emptyset, & \text{ha } i \notin i_1, ..., i_k \end{cases}$$

az elágazás "ágainak" száma $2^n - 1$,

$e_i : X_i$, $g_j : Y_j$,

$S_{1301xi}(u_i, e_i) ::= IF(\pi_{1\,i} : S_{1301\,i}(u_i, e_i); \neg\pi_{1\,i} : e_i := \emptyset)$,

$S_{3202xj}(v_j, g_j) ::= IF(g_j \neq \emptyset : S_{2302\,j}(v_j, g_j); g_j = \emptyset : SKIP)$,

$\pi_{1\,i}$, $S_{11\,i}(u_i)$, $S_{1301\,i}(u_i, e_i)$ az $S_{1\,i}$ program, $S_{31\,j}(u_j)$, $S_{3203\,j}(v_j, g_j)$, $S_{33\,j}(v_j)$ az $S_{3\,j}$ program megfelelő részei.

9. Kiemelési szabályok

a) $IF(\pi_1 : (S;S_1), \pi_2 : (S;S_2))$ ekvivalens A-n az $S' = (S; IF(\pi_1 : S_1, \pi_2 : S_2)$ programmal, ha π_1 és π_2 függvényekre és az S programra alkalmazható a fv. helyettesítése változóval transzformáció.

b) ...

III. Típustranszformációk programozási tételekre

1. Sorozatról (a) **file**(lopop,ext)-ra (x) : (előreolvasási technikával)

$a.low$
$a : lorem$
$a.dom \neq 0$

$dx, x : lopop$
dx
$dx, x : lopop$
$dx \neq extr$

2. Halmazról $(x, y, z$ szig. mon. rend. **sorozatra** (a, b, c) (elemenkénti feldolg.)

$z := \emptyset$
$x \neq \emptyset \vee y \neq \emptyset$
$e : mem(x \cup y)$
$z\tilde{\cup}$
$x\tilde{-}$
$e \in x$, $e \notin x$

$c := ()$
$a.dom \neq 0 \vee b.dom \neq 0$
$e := min(a.low, b.low)$
$c : hiext$
$a : lorem$
$e = a.low$, $e < a.low$!!

3. Intervallumon $([m,n]\ ,\ i \in [m,n])$ értelmezett függvényről **sorozatra** x

$i = n$
$f(i+1)$
$i := i+1$
$f(m)$

$x.dom = 0$
$x.low$
$x : lorem$
$x.low$

4. Sorozatról a **vektorra** $v\ ,\ i,j \in [v.lob, v.hib]\ ,\ i \leq j$ (fv. típusra)

$a.dom = 0$
$a.low$
$a : lorem$
$a : hiext(e)$

$i = j$
$v(i)$
$i := i+1$
$v(j+1), j := e, j+1$