DNS gráfok

A $G = (V, X)$ párost, ahol V tetszőleges nem üres véges halmaz, X pedig a V különböző elemeiből képzett **rendezetlen** párokból álló halmaz, *gráfnak* nevezzük. A V elemeit a gráf *csúcsainak*, az X elemeit pedig a gráf *éleinek* nevezzük.

Az X-hez tartozó tetszőleges $x = \{u, v\}$ rendezetlen pár az u és a v csúcsokat összekötő él. Az $x = \{u, v\}$ él és az u, illetve v csúcsok *illeszkednek.* Ha két különböző x és y él ugyanahhoz a csúcshoz illeszkednek, akkor azt mondjuk, hogy az x és y élek *szomszédosak.* A p csúcsból és q élből álló gráfot (p, q) gráfnak nevezzük.

A $G = (V, X)$ párost, ahol V tetszőleges nem üres véges halmaz, X pedig a V különböző elemeiből képzett **rendezett** párokból álló halmaz, *orientált gráfnak* nevezzük. Az X elemeit orientált éleknek nevezzük. Az orientált $\{x, y\}$ és $\{y, x\}$ éleket tetszőleges x és y esetén szimmetrikus élpárnak nevezzük. Azokat az orientált gráfokat, amelyek nem tartalmaznak szimmetrikus orientált élpárt *irányított gráfoknak* nevezzük.

Valamely G gráfban egy váltakozóan csúcsokból és élekből álló $v_0, x_1, v_1, ...v_{n-1}, x_n, v_n$ sorozatot *láncolatnak* nevezzük, ha a sorozat csúccsal kezdődik és végződik, továbbá, ha minden a sorozatban előforduló él illeszkedik az őt közvetlen megelőző, illetve az őt közvetlen követő csúcshoz. Az n értéket a láncolat hosszának nevezzük. Valamely láncolat hossza tehát a benne előforduló élek számával egyezik meg. Azt mondjuk, hogy a $v_0, x_1, v_1, ...v_{n-1}, x_n, v_n$ láncolat a v_0 és a v_n csúcsokat köti össze. Az elmondottakból következik, hogy valamely $v_0, x_1, v_1, ...v_{n-1}, x_n, v_n$ láncolatot egyértelműen meghatároz a benne előforduló $v_0, v_1, ...v_{n-1}, v_n$ csúcsok sorozata. A v_0 csúcsot a lácolat kezdő, a v_n csúcsot pedig a láncolat végcsúcsának nevezzük. A láncolat zárt, ha $v_0 = v_n$, különben nyílt.

Valamely láncolatot *láncnak* nevezzük, ha benne minden él különböző. Valamely láncolatot *egyszerű láncnak,* vagy *útnak* nevezzük, ha benne minden csúcs különböző. Könnyen látható, hogy minden egyszerű lánc egyúttal lánc is.

A zárt láncot *ciklusnak* nevezzük. Valamely $v_0, x_1, v_1, ...v_{n-1}, x_n, v_n$ zárt láncolatot *egyszerű ciklusnak,* vagy *körnek* nevezünk, ha a $v_1, ..., v_n$ csúcsok mind különbözőek és $n \geq 3$.

A G gráf *összefüggő,* ha bármely két csúcsa összeköthető egyszerű lánccal (úttal).

Valamely G gráf *aciklikus,* ha nicsen benne ciklus. Az összefüggő és aciklikus gráfot *fának* nevezzük.

Legyen a $G = (V, X)$ gráf fa. Legyen továbbá v_0 a V csúcsok halmazának egy kitüntetett eleme, amelyet a továbbiakban a G fa gyökér pontjának nevezzük. Mivel a feltevés szerint a G gráf fa, ezért bármely v_0-tól különböző v csúcshoz létezik pontosan

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

egy olyan út a gráfban, amely a v_0 csúcsot a v csúccsal köti össze. Mint láttuk, egy ilyen út az őt képező csúcsok sorozatával adható meg.

Tegyük fel, hogy adott egy C címkehalmaz, amely számossága elegendően nagy ahhoz, hogy ha igény merül fel arra, hogy a csúcsok valamely V' részhalmazát a C-be képezzük kölcsönösen egyértelműen, azaz megkülönböztető címkéket rendeljünk a V' elelmeihez, akkor ez mindíg elvégezhető. A gyakorlatban a C általában valamely ABC feletti korlátos hosszúságú szavakból álló halmaz.

Lokális címkézés:. *Rendeljünk egy tetszés szerinti címkét a v_0 csúcshoz. Rendeljünk különböző címkéket mindazon v csúcsokhoz, amelyekre $\{v_0, v\} \in V$. Könnyen látható, pontsan ezek a csúcsok azok, amelyek a v_0-ból 1 hosszúságú úttal elérhetőek. Általában, ha a v_0-tól n hosszúságú úttal összeköthető csúcsokhoz már rendeltünk címkéket, akkor a v_0-tól $n+1$ hosszúságú úttal összeköthető csúcsokhoz, ha egyáltalán ilyen létezik, úgy rendeljünk címkéket, hogy két ilyen v_1 és v_2 csúcs szükségképpen különböző cimkét kapjon, ha létezik olyan $\overline{v}$, amely a v_0-ból n hosszúságú úttal elérhető, és $\{\overline{v}, v_1\} \in X$, illetve $\{\overline{v}, v_2\} \in X$.*

Tétel:. *Legyen (G, v_0) v_0 gyökerű fa. Rendeljünk a lokális címkézési algoritmus szerint címkéket a G gráf csúcsaihoz. Reprezentáljuk a v_0 csúcsot a címkéjével (egy elemből álló címkesorozat). Általában minden v_0-tól különböző v csúcsot, reprezentáljunk azzal a cimkesorozattal, amelyet úgy kapunk, hogy tekintjük a v_0-ból a v-be vezető egyetlen $v_0, ..., v_n = v$ utat és a benne előforduló csúcsokat a hozzájuk rendelt címkékkel helyettesítjük.*

A különböző csúcsokhoz ilyen módon hozzárendelt címkesorozatok különbözőek.

Bizonyítás. A bizonyítás teljes indukcióval történik. Legyen c egy olyan címkesorozat, amely egyetlen címkéből áll, és amelyhez van olyan csúcs, amelyhez rendelt címkesorozat pontosan a c. A címkézési algoritmus szerint olyan csúcs, amelyhez rendelt címkesorozat egyetlen címkéből áll, pontosan egy van, és ez a v_0 gyökérpont. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$-re igaz, hogy ha a c címkesorozat n elemű, akkor legfeljebb egy olyan csúcspont van V-ben, amelyhez rendelt címke a c. Legyen c $n+1$ hosszúságá címkesorozat és tegyük fel, hogy van olyan csúcs, amelyekhez rendelt címkesorozat a c. Legyenek v' és v'' ilyen csúcsok. Tekintsük a v_0-ból a v', valamint a v_0-ból a v'' csúcsokba vezető $v_0, v_1', ..., v_{n+1}' = v'$, illetve a $v_0, v_1'', ..., v_{n+1}'' = v''$ utakat. Vegyük észre, hogy a v_n' és a v_n'' csúcsokhoz ugyanaz az n hosszúságá címkesorozat tartozik. Ezért a feltevés szerint a v_n' és a v_n'' csúcsok azonosak. A címkézési algoritmus szerint, mivel a c címkesorozat utolsó eleme egyaránt a v' és a v'' csúcsokhoz is van rendelve, ezért a két csúcs azonos.

A fentiekből következik, hogy bármely két külöböző csúcshoz rendelt címkesorozat szükségképpen különböző.