



.....	1
<b>Következő: Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk</b> . . . . .	<b>1</b>

## Jelfeldolgozás

---

● Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk . . . . .	1
○ Bevezetés . . . . .	2
● Kérdések, feladatok . . . . .	5
○ Fourier sorok, Fourier transzformáció . . . . .	6
● Jelek hasonlósága . . . . .	7
● 2.2 Fourier sorok . . . . .	9
● Fourier transzformáció . . . . .	10
● Kérdések, feladatok . . . . .	12
● Négyzetjel frekvenciaspektruma . . . . .	13
● Kérdések, feladatok . . . . .	15
● Az egységimpulzus: univerzális vizsgálójel . . . . .	16
○ Inverz Fourier transzformáció . . . . .	19
● Kérdések, feladatok . . . . .	24
○ Konvolúció . . . . .	25
○ Dekonvolúció . . . . .	27
● Kérdések, feladatok . . . . .	30
○ Korrelációs függvények . . . . .	31
● Kérdések, feladatok . . . . .	34
● Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei . . . . .	35
○ Példa . . . . .	38
○ Példa . . . . .	39
● Összefüggés az autokorrelációs függvény és az energiaspektrum között . . . . .	40
○ Összefoglalás . . . . .	41
● Kérdések, feladatok . . . . .	44
● Digitális jelek feldolgozása . . . . .	45
○ Analóg - digitál átalakítók . . . . .	46
○ Mintavételi törvény . . . . .	48
○ z-transzformáció, digitális szűrők . . . . .	52
○ Digitális szűrők megvalósítása . . . . .	59
● Egy különleges alkalmazási példa . . . . .	64
○ DFT - diszkrét Fourier transzformáció . . . . .	65
○ FFT - Fast Fourier Transformation . . . . .	68
○ Az FFT gyakorlati alkalmazása . . . . .	74
○ Egyéb eljárások, módszerek . . . . .	77
○ Wavelet transzformáció . . . . .	80
● 16.1 A Daubechies wavelet . . . . .	84
● A Diszkrét Wavelet Transzformáció . . . . .	86
● Wavelet közelítések . . . . .	89
○ Tömörítési eljárások . . . . .	92

● Jelek vizsgálata zaj jelenlétében . . . . .	96
○ A zajok jellemzői . . . . .	97
○ Integráló voltmérő . . . . .	99
○ Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében . . . . .	100
○ Ismert jelalak amplitudójának mérése . . . . .	103
○ Wiener szűrés . . . . .	106
○ Főkomponens analízis . . . . .	108

---



[p 2]



[p i]



[p i]

**Következő:** Bevezetés [p 2] **Fel:** Jelfeldolgozás [p i] **Előző** Jelfeldolgozás [p i]

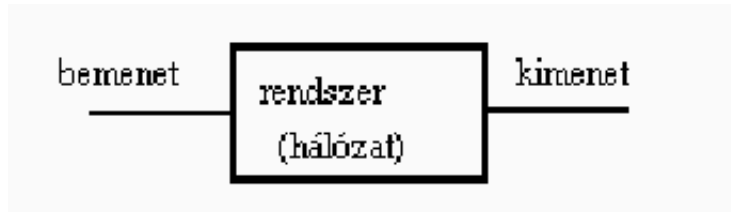
## Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk

---

- Bevezetés [p 2]
    - Kérdések, feladatok [p 5]
  - Fourier sorok, Fourier transzformáció [p 6]
    - Jelek hasonlósága [p 7]
    - 2.2 Fourier sorok [p 9]
    - Fourier transzformáció [p 10]
    - Kérdések, feladatok [p 12]
    - Négyszögjel frekvenciaspektruma [p 13]
    - Kérdések, feladatok [p 15]
    - Az egységimpulzus: univerzális vizsgálójel [p 16]
  - Inverz Fourier transzformáció [p 19]
    - Kérdések, feladatok [p 24]
  - Konvolúció [p 25]
  - Dekonvolúció [p 27]
    - Kérdések, feladatok [p 30]
  - Korrelációs függvények [p 31]
    - Kérdések, feladatok [p 34]
    - Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei [p 35]
      - Példa [p 38]
      - Példa [p 39]
    - Összefüggés az autokorrelációs függvény és az energiaspektrum között [p 40]
  - Összefoglalás [p 41]
    - Kérdések, feladatok [p 44]
-

## Bevezetés

A továbbiakban lineáris, időinvariáns rendszerekkel fogunk foglalkozni. Mindenekelőtt barátkozzunk meg a rendszernek, valamint az ehhez kapcsolódó jelek általános fogalmával. A rendszer egységnek tekintett, működésével leírható, kiemelt része a világnak, - kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések által összekapcsolt objektumok halmaza. A rendszer határainak megvonása sok esetben önkényes, valamely célszerű megfontolást követ. - Nagyon sokfajta, igencsak különbözően működő, valamilyen funkciót betöltő, látszólag elkülöníthetően kezelhető részt tekintünk rendszernek. Beszélünk pl. nyirok-rendszerről, melynek határai nyilvánvalóan definícióinktól függenek. A gazdasági rendszer fogalma még ennél is bizonytalanabb, közigazdász csoportok végeleáthatatlan vitáinak terepe. - Ehhez képest az általunk vizsgálni kívánt elektromos-elektronikus eszközök esetén a rendszer határai eléggé egyértelműek, működésük nemkevésbé. A rendszereket sokfajta csoportba sorolják a velük foglalkozó, számos szakmát képviselő szakemberek. Csak példaképpen: vannak koncentrált elemekből felépített és elosztott paraméterű rendszerek; léteznek determinisztikusan, de sztohasztikusan működő rendszerek is; folytonos és bináris; lineáris és nemlineáris rendszerek, stb. Az elektromos-elektronikus rendszer fogalmához hozzátartoznak a megkülönböztethető és egymástól egyértelműen elválasztható bemeneti és kimeneti jelek. Természetesen mindkét fajtából több is lehetséges. A jelek fogalmához pedig elválaszthatatlanul hozzátartozik azok mérhetősége és információhordozó képessége. A bemeneti jelből, rendszerből, kimeneti jelből álló sémát látjuk az 1 [p 2] ábrán. Az ábra ránézésre eléggé keveset mond, - a fogalmak és elnevezések használata következtében azonban szemléletünk meg fog változni. - Vizsgálataink a három elem (a bemenet; a rendszer és a kimenet) közötti általános érvényű összefüggések keresésére, kihasználására irányulnak. - A hálózat szó csak arra utal, hogy többnyire elektromos-elektronikus komponensekből felépített rendszer tulajdonságait keressük.



### 1. Ábra

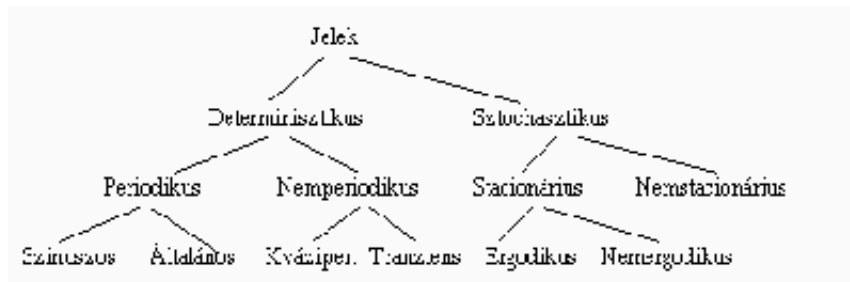
A továbbiakban azokat a rendszereket tekintjük lineárisaknak, amelyekre érvényes a szuperpozíció, vagyis amelyeknél két bemeneti jel összege olyan kimenőjelet hoz létre, mely az egyes bemenőjelekhez tartozó kimenőjelek összege. Triviális esetként:  $n$ -szer akkora bemeneti jel  $n$ -szer akkora kimeneti jelet eredményez. Ezt fejezik ki az alábbi, könnyen átlátható összefüggések is (b - a bemenetre, k - a kimenetre utal):

$$\begin{array}{lcl}
 v_{1b}(t) & \Rightarrow & v_{1k}(t) \\
 v_{2b}(t) & \Rightarrow & v_{2k}(t) \\
 v_{1b}(t) + v_{2b}(t) & \Rightarrow & v_{1k}(t) + v_{2k}(t)
 \end{array}$$

A valóságban lineáris rendszer nincs, csak a paraméterek bizonyos tartományában tekinthetünk egy rendszert lineárisnak. Jól látható ez a viszonylag lineárisnak tekintett elektromos hálózatoknál is: az ellenállások értéke általában függ a rájuk eső feszültségtől, a kondenzátorok átüthetnek, a tranzisztorok és egyéb félvezető elemek linearitásáról pedig csak igen szűk tartományban beszélhetünk. Az általunk vizsgált rendszerekről feltesszük azt is, hogy az időben eltolt jelek hatására keletkező kimenetek nem függenek az időeltolás mértékétől, tényétől; vagyis a rendszer átvitele időinvariáns.

$$\begin{array}{lcl} \nu_b(t) & \Rightarrow & \nu_k(t) \\ \nu_b(t + t_0) & \Rightarrow & \nu_k(t + t_0) \end{array}$$

Számos jeltípussal fogunk találkozni. Ezeket az 2 [p 3] ábra foglalja össze. Az elnevezések részben magától értetődöek, részben pedig a megfelelő részeknél kitérünk rájuk részletesebben is.



## 2. Ábra

Példáink többségét az elektromos rendszerek/hálózatok köréből vesszük. Ennek azonban elsődlegesen kényelmi, didaktikai okai vannak. Összefüggéseink, eredményeink sokkal tágabb körben is érvényesek. E tantárgy keretében lényegében a lineáris differenciál-egyenletekkel (vagy differencia-egyenletekkel) leírható rendszereket vizsgáljuk. Így tulajdonképpen közömbös, hogy egy csillapított rezgőkör áram-feszültség viszonyait, vagy egy súrlódó rugó- tömeg rendszer mozgásegyenletét elemezzük. Az 1 [p 2] ábra alapján három tipikus probléma lehetséges:

1. Ismert a bemenet és kimenet, keressük a hálózat jellemzőit. (Impulzusgenerátor és oszcilloszkóp segítségével vizsgálunk egy áramkört; geológiai robbantások hatását regisztrálva keressük a Föld belső szerkezetének jellemzőit, dinnyét vásárolunk ütögetéssel...)
2. Ismert a hálózat és a kimenet, keressük a valódi bemenőjelet. (Mozgó úrhajóról készített fénykép korrekciója, mérések véges felbontóképességű mérőeszközökkel, neurofiziológiai mérések egy csoportja...)
3. Ismert a bemenet és a hálózat, keressük a kimenetet. (Számítógépes gazdasági modellek gazdasági intézkedések hatásának becslésére, reaktorvezérlési rendszer tanulmányozása...)

További vizsgálatainkban a jelek és a rendszerek leírására időfüggvényeket, frekvenciakarakterisztikákat és számsorokat fogunk felhasználni. Léteznek más, bizonyos típusú feladatokhoz sokkal jobban alkalmazkodó technikák is (pl. Laplace transzformáció), ezek azonban e kurzus kereteit meghaladják.

Meggondolásaink bármiféle (dimenziójú) jelre vonatkozhatnak, azonban az esetek többségében jelölésként a  $v$  betűt használjuk mind a be-, mind a kimeneti jelek jelölésére. Ezzel tudatosan a feszültségre kívánunk utalni. Ezt az asszociációt néhányszor ki is használjuk: nehézkes bizonyítások helyett a fizikai tartalomnak megfelelően bizonyos tényeket triviálisnak tekintünk. Így például a

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|^2 dt = < \infty$$

feltételt triviálisnak tekintjük, mivel egy "normális" feszültség egységnyi (1 ohmos) ellenálláson véges idő alatt semmiképpen sem kelthet végtelen nagy energiát. A feszültség nyilván az idő függvényében változik, - ez is állandóan kísérni fog bennünket. Természetesen más független változó is előfordulhat, erre majd látunk különböző példákat.

---

- Kérdések, feladatok [p 5]
- 



**Következő:** Kérdésekfeladatok [p 5] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1]



[p 6]



[p 2]



[p 2]

**Következő:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Fel:** Bevezetés [p 2] **Előző** Bevezetés [p 2]

## Kérdések, feladatok

Lineárisnak és időinvariánsnak tekinthető-e egy olyan rendszer, amelyik művonalat tartalmaz?  
Hogyan kategorizálná azt a berendezést, amelyik egy izzólámpa fényerejét szabályozza tirisztor segítségével? Mondjon példát a sztohasztikus rendszerre. Lineáris-e az az áramkör, amelyikben egy szorozó áramkör is szerepel?

---



[p 7]



[p 1]



[p 5]

**Következő:** Jelek hasonlósága [p 7] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző**  
Kérdésekfeladatok [p 5]

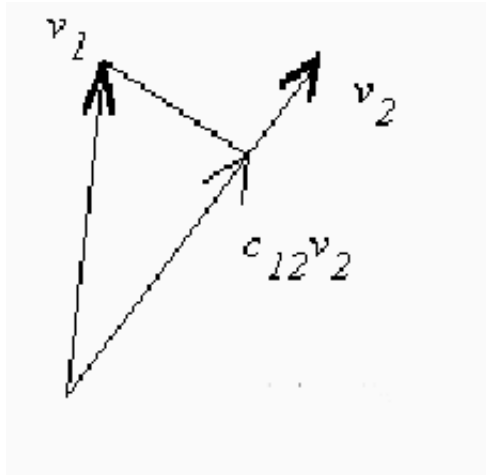
## Fourier sorok, Fourier transzformáció

---

- Jelek hasonlósága [p 7]
  - 2.2 Fourier sorok [p 9]
  - Fourier transzformáció [p 10]
  - Kérdések, feladatok [p 12]
  - Négyzögjel frekvenciaspektruma [p 13]
  - Kérdések, feladatok [p 15]
  - Az egységimpulzus: univerzális vizsgálójel [p 16]
-



## Jelek hasonlósága



### 3. Ábra

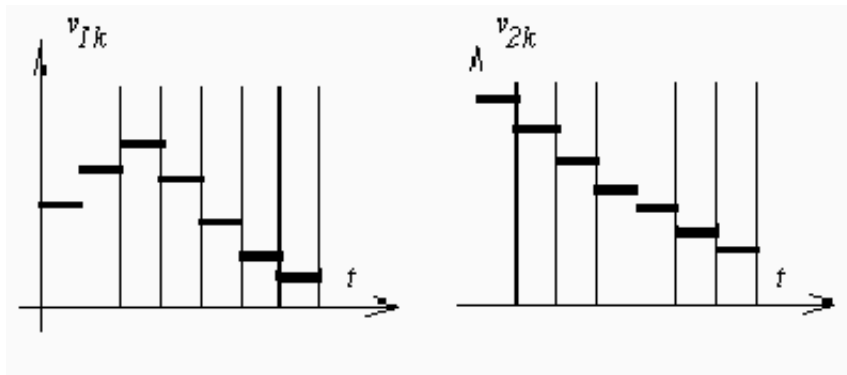
Sokat fogunk beszélni a jelek hasonlóságáról: arról, hogy az egyik jelben milyen mértékben foglaltatik benne egy másik. Az 3 [p 7] ábra alapján tegyük fel azt a furcsa kérdést, hogy mennyire hasonlít egymásra a  $v_1$  és  $v_2$  vektor. Ez a hasonlóság nyilván sokféleképpen definiálható. Egy lehetőség: a hasonlóság mértékéül keressük azt a skaláris mennyiséget  $c_{12}$ , amivel  $v_2$ -t megszorozva  $v_1$  és  $v_2$  közötti különbség minimális. (Valljuk be, van valami racionalitás ebben a definícióban is. Ha a két vektor azonos nagyságú és irányú, - vagyis egybeesnek, - akkor a hasonlóság mértéke "egyszeres"; ha a két vektor egymásra merőleges, akkor "zérus"; ha a két vektor ellentétes irányú, akkor -1-szeres.) Keresnünk kell  $v_1$  és a  $c_{12}$ -vel módosított  $v_2$  különbségének minimumát  $c_{12}$  függvényében:

$$\frac{\partial}{\partial c_{12}} |v_1 - c_{12}v_2|^2 = \frac{\partial}{\partial c_{12}} \sum_k (v_{1k} - c_{12}v_{2k})^2 = 0$$

Ha ezt a kijelölt minimum keresést végig csináljuk, akkor az alábbi eredményre jutunk:

$$c_{12} = \frac{\sum_k v_{1k}v_{2k}}{\sum_k v_{2k}^2}$$

Meggondolásaink természetesen tágabb értelemben,  $k$ -dimenziós vektorokra is vonatkozhatnak. - Érdekes módon egy folytonos időfüggvényt  $k$  diszkrét értékből összetettként is közelíthetünk (4 [p 8] ábra), ekkor eredeti kérdésünk úgy fogalmazható, mennyire hasonlít egymásra két időfüggvény.



#### 4. Ábra

Vegyük észre, hogy a két jel közötti hasonlóság ( $c_{12}$  - korreláció) mérőszámában meghatározóan jelenik meg a komponensek szorzatának összege. Az eredményül kapható  $c_{12}$  és  $c_{21}$  nyilván nem függetlenek egymástól, csak a nevezőben megjelenő jel energiája változik. Nagyon érdekes, ha azonos energiájú jelek hasonlóságát vizsgáljuk, akkor elegendő csak a számlálóval foglalkoznunk. Ha az időfüggvények felbontását minden határon túl finomítjuk, általánosítva azt mondhatjuk: ha két függvény szorzatának integrálját látjuk a későbbiekben, mindig gyanakodhatunk, hogy a két függvény közötti hasonlóság mértékszámával arányos mennyiséget állítunk elő. (Természetesen ez csak utalás, nem bizonyosság.) Van egy függvénycsoport, - a sin/cos függvények - amelyekre való felbontásnak kiemelt szerepe van a jelek, rendszerek vizsgálatában. Ennek az a nagyon fontos praktikus oka, hogy ezen függvények alakja differenciálás és integrálás során nem változik, tehát a lineáris rendszerelemeken - R, C, L - stacionárius állapotban alakváltoztatás nélkül jutnak át (persze fáziseltérés, időeltolódás van). (Energiaellátásunk is ezért alapul szinuszos jeleken, és pl. nem szimmetrikus négyszögfeszültségen. Ez utóbbival - azonos maximum/minimum esetén - kétszer nagyobb teljesítményt lehetne átvinni. Az átvivő rendszer elemei, az induktivitások, kapacitások differenciálnak, illetve integrálnak, és torzítatlan alakú jelátvitel csak szinuszos jelekkel lehetséges.) A sin/cos jelekre való felbontás technikáját a Fourier sorba fejtés illetve a Fourier integrál jelenti. E kettőt együtt Fourier transzformációnak fogjuk nevezni. - A Fourier transzformáció az ortogonális komponensekre való felbontás egyik módozata. Később röviden megemlítünk más, technikai szempontból jelentős ortogonális transzformációt is. A Fourier transzformáció további jelentős érdeme, hogy a konvolúció (l. később) igen egyszerűen végezhető vele. A Fourier sorokra, transzformációra vonatkozó összefüggéseket a matematika megfelelő fejezetei gondosan kimunkálták. Mi az alapvető összefüggéseket egyszerűen tényként elfogadjuk, nem keressük magyarázatukat; bizonyításukat vizsgálni, interpretálni csak fizikai, elektrotechnikai szempontból fogjuk.



[p 9]



[p 6]



[p 6]

**Következő:** 2.2 Fourier sorok [p 9] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Előző:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6]

**Következő:** Fourier transzformáció [p 10] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Előző** Jelek hasonlósága [p 7]

## 2.2 Fourier sorok

A periodikus függvények ún. Fourier sorokba fejthetők, vagyis sin/cos komponensekre bonthatók. Az eljárás visszafelé is igaz: a komponensekből az eredeti jel visszakapható. A legfontosabb összefüggések (  $T$  a jel periódusideje,  $\omega_0 = 2\pi/T$  ):

A függvény "összerakása" a komponensek segítségével:

$$v(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)) \quad v(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 k t} \quad c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}$$

A sin/cos k-ik komponens nagyságának meghatározása:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \cos(k\omega_0 t) dt \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$


---

## Fourier transzformáció

Nemperiodikus, impulzusszerű jeleket is felbonthatunk komponensekre. Ekkor azonban a különböző frekvenciájú komponensek végtelenül közel kerülnek egymáshoz, ezért a  $V(\omega)d\omega$  mennyiség fog számot adni arról, hogy a  $d\omega$  tartományban mekkora a komponensek átlagértéke. (Vagyis  $V(\omega)$  ún. spektrális "sűrűség"-függvényt kapunk a transzformáció eredményéül. Vegyük észre, hogy ennek dimenziója nem egyezik meg  $v(t)$  dimenziójával !) A legfontosabb (oda-vissza transzformáló) összefüggések:

$$V(\omega) = F\{v(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t} dt \quad v(t) = F^{-1}\{V(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

A Fourier transzformációnak több nagyon értékes tulajdonsága van, amelyeket a továbbiakban kihasználunk. Itt most ezeket fizikai szempontból röviden interpretáljuk.

$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$	$a_1 V_1(\omega) + a_2 V_2(\omega)$	a transzformáció lineáris (szuperpozíció)
$v(t/a)$	$aV(a\omega)$	léptékváltoztatás. Rövidebb jelnek szélesebb a spektruma
$v(t - t_0)$	$V(\omega)e^{j\omega t_0}$	az időeltolás nem változtatja meg a jel spektrumát
$v(t)e^{j\omega_0 t}$	$V(\omega - \omega_0)$	a szinuszos moduláló jel eltolja a spektrumot, de alakját nem változtatja
$\frac{d^n}{dt^n} v(t)$	$(j\omega)^n V(\omega)$	differenciálni a frekvenciatartományban igen egyszerű
$\int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} v(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} V(\omega)$	az integrálás is egyszerű
$\int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau)v_2(t - \tau) d\tau$	$V_1(\omega)V_2(\omega)$	a konvolúció a frekvencia-tartományban szorzássá redukálódik

### Megjegyzések

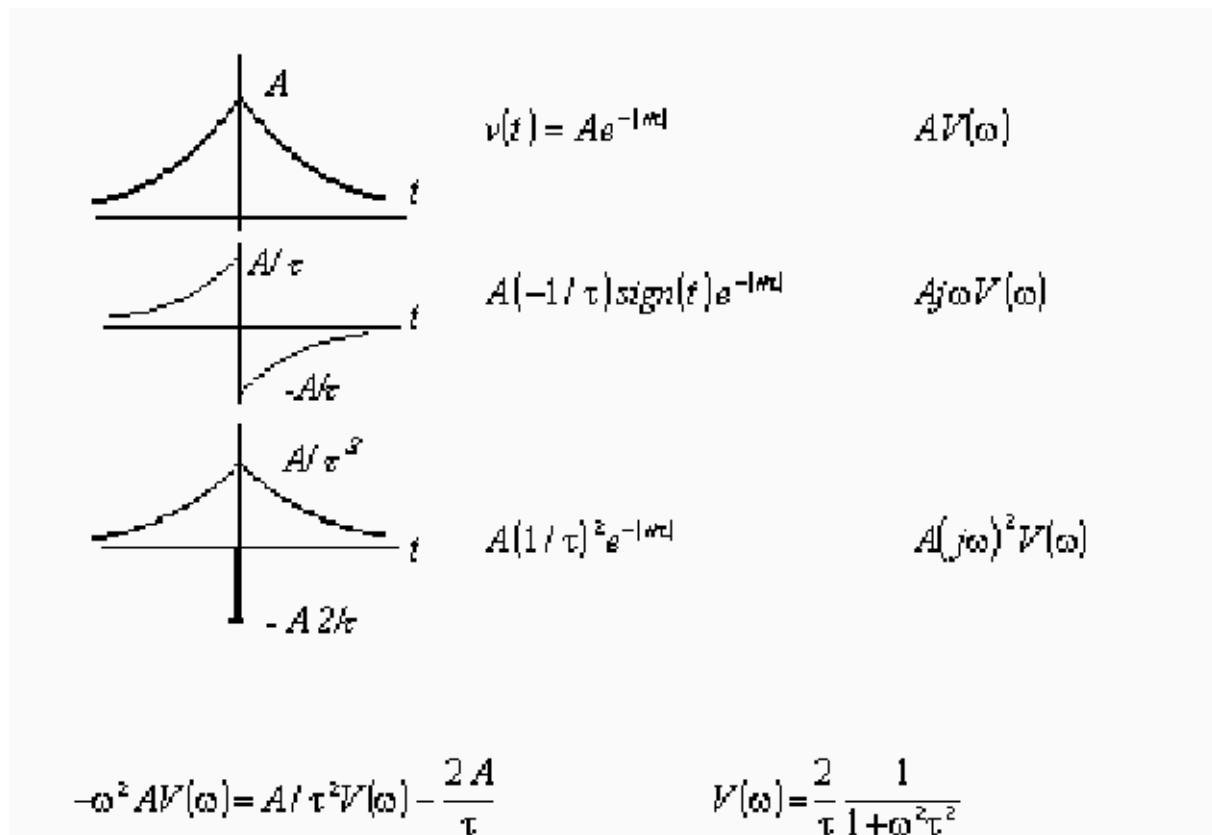
A frekvenciaspektrumot természetesen negatív frekvenciákra is értelmezhetjük. A sin/cos függvények páros/páratlan voltából adódóan ebből meglepően új információhoz azonban nem jutunk. A továbbiakban frekvenciaspektrumon, - ha mást nem mondunk róluk, - a komponensek abszolút értékéből előállított ábrát értünk. Sokszor említjük az energia-, illetve teljesítmény spektrumot is: itt a komponensek négyzetét vesszük figyelembe. Ezekre a különbségekre mindig ügyelnünk kell. A Fourier transzformáció alaptulajdonságai következtében sok olyan eljárás létezik, amelyek a spektrum előállítását megkönnyítik. Az 5 [p 11] ábrán egy szimmetrikus exponenciális görbe látható, amelynek meg kell határoznunk a frekvenciaspektrumát. - Természetesen mód lenne a transzformációs

$$v(t) = Ae^{-t/\tau}$$

képletekbe behelyettesíteni, de most más utat választunk. Ha a  $v(t)$  függvényt egymás

után kétszer differenciáljuk, visszakapjuk az eredeti függvény alakját, meg egy ideális impulzust (Dirac deltát). - A kétszeri differenciálás  $j\omega$  négyzetével való szorzást jelent. Ennek segítségével az eredeti függvény frekvenciaspektrumára vonatkozó összefüggés könnyen felírható, - amiből közvetlenül kifejezhető. (Az ideális impulzusnak a frekvenciaspektrumáról az [p 16] részben találunk ismereteket.) Figyeljünk fel arra, hogy az exponenciális, valamint a sin/cos függvények kétszeri deriválás után ugyanazt az alakot adják (csak az Y skála lesz más). A fenti eljárás tehát célszerűen alkalmazható, ha a megnevezett függvények, vagy azok szakaszai szerepelnek az eredeti időfüggvényben.

A Fourier transzformáció általában sokat egyszerűsödik, ha észrevesszük, hogy a függvény páros, vagy páratlan-e, illetve ha tudatosítjuk, hogy a függvény milyen szakaszok összegéből áll elő. Ha ezek a szakaszok könnyen transzformálhatók, akkor csak az eltoltsági tényező miatt komplex mennyiséget kell az egyes spektrumkomponensek összeadásánál figyelembe venni. - Az is sokat használ, ha rájövünk arra, hogy a transzformálandó függvény egy kétértékű (0 és 1) függvénynek és egy könnyen transzformálható függvénynek a szorzata. - Mindezekre számos példát találunk a Feladatok c. jegyzetben.



5. Ábra



**Következő:** Kérdéskérdések [p 12] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Előző:** 2.2 Fourier sorok [p 9]



[p 13]



[p 6]



[p 10]

**Következő:** Négyszögjel frekvenciaspektruma [p 13] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6]

**Előző** Fourier transzformáció [p 10]

## Kérdések, feladatok

1. Határozza meg egy ún. bekapcsolási jelenség frekvenciaspektrumát.

$$v(t) = 0 \quad \text{ha } t \leq 0$$

$$\sin(2\pi t/T) \quad t > 0$$

2. Határozza meg egyetlen T időtartamú szinuszhullám frekvenciaspektrumát.
-

**Következő:** Kérdéskeladatok [p 15] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Előző** Kérdéskeladatok [p 12]

## Négyszögjel frekvenciaspektruma

Viszonylag részletesen foglalkozunk egy egyszerű, periodikus jelalakkal, a négyszögjellel. Az 6 [p 13] ábrán ún. szimmetrikus négyszögjelet ábrázoltunk, a koordinátarendszer origójához képest eltolt helyzetekben. A periodikus négyszögjel frekvenciaspektruma viszonylag könnyen meghatározható, csak az erre rendelt képletet kell használnunk. Azt is tudjuk előre, hogy a spektrum "vonalas" lesz, vagyis csak diszkrét frekvenciákhoz tartozó eredményeket várhatunk. - Az eredmények vizsgálata sok értékes, általánosítható ismeretehz vezet.

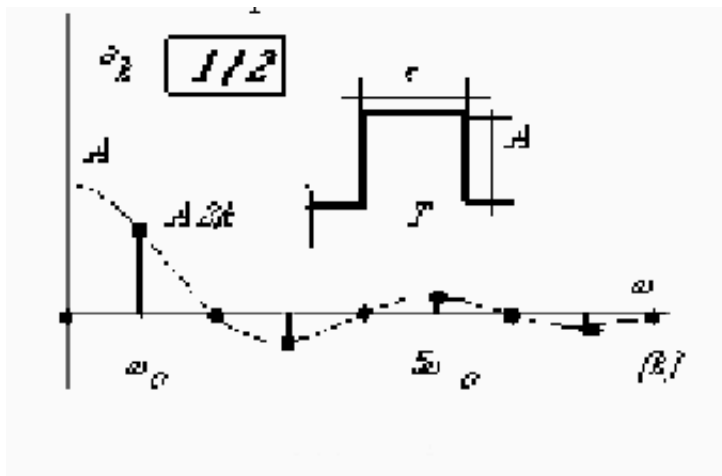
Először azt a szimmetrikus jelet választjuk, amelyik az origóhoz képest szimmetrikusan helyezkedik el. Ez páros függvény, így csak koszinuszos komponenseket kaphatunk.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) dt$$

a számolást elvégezve a következő - célszerűen átrendezett - eredményre jutunk:

$$a_k = 2A \frac{\tau}{T} \frac{\sin k\pi\tau/T}{k\pi\tau/T} \Rightarrow c \frac{\sin(x)}{x}$$

(A a négyszögjel amplitúdója,  $\omega_0 = 2\pi/T$ ,  $k$  pedig egész, - mutatja, hogy hányadik felharmonikusról van szó.) Az 1.3.1. ábrán mutatjuk  $\tau/T = 1/2$  esetében a felharmonikusokból létrehozott frekvenciaspektrumot.

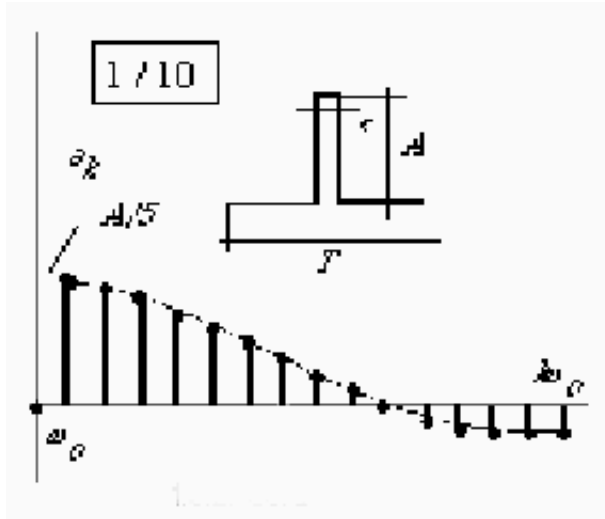


6. Ábra

Fel kell hívnunk a figyelmet a következőkre:

1. a spektrumvonalak burkológörbéje  $\sin(x)/x$  függvény szerinti. Ez a függvény rendszeresen, újra és újra fel fog bukkanni;
2. a spektrumvonalak  $1/k$  szerint csökkenő értékűek;
3. a szimmetrikus  $(\tau/T = 1/2)$  négyszögjelből a páros harmonikusok hiányoznak, csak a páratlanok zérustól eltérő értékűek;
4.  $a_0$  értéke zérusra adódik, mivel a négyszöghullámot éppen így helyeztük el. Vegyük észre, hogy a négyszögjel függőleges helyzetének változása csak az  $a_0/2$  ún. egyenáramú középértéket befolyásolja, a felharmonikusok nagyságát nem !

Ismételjük meg vizsgálatunkat a  $\tau/T = 1/10$  esetre. Az eredmény az 7 [p 14] ábrán látható.



7. Ábra

Itt a következők érdemelnek figyelmet:

1. a burkológörbe most is - triviálisan -  $\sin(x)/x$  szerinti;
2. a spektrumvonalak amplitúdója az előző esetben tapasztalt értékek  $1/5$ -ére csökkent, mivel  $\tau/T$  is ilyen arányban változott;
3. a burkológörbe első zérushelyéig  $n$  spektrumvonalat találunk.  $n$  meghatározható a  $\pi n \tau / T = \pi$  összefüggésből.  $n = \tau / T = 10$  spektrumkomponenst találunk az első zérushelyig;
4. az első néhány spektrumvonal lényegében azonos amplitúdójú.

Fogalmazzuk meg általános tapasztalatként: ha  $T$  állandó és  $\tau$  csökken, a spektrum kiszélesedik. Ha  $\tau$  állandó és  $T$  növekszik, akkor az alapharmonikusok frekvenciája csökken, a spektrumvonalak sűrűsödnek. A spektrumkomponensek amplitúdója mindkét esetben csökken.



**Következő:** Kérdéskeladatok [p 15] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Előző:** Kérdéskeladatok [p 12]





[p 16]



[p 6]



[p 13]

**Következő:** Az egységimpulzus: univerzális vizsgálójel [p 16] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6] **Előző** Négyszögjel frekvenciaspektruma [p 13]

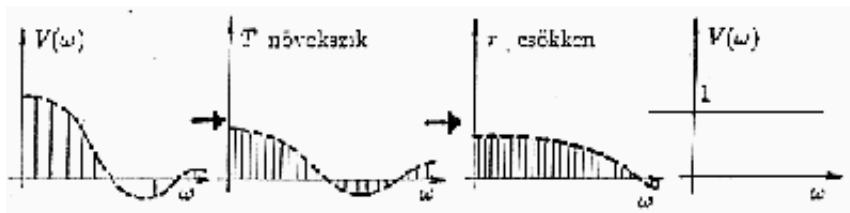
## Kérdések, feladatok

Mutassuk meg, hogy az 6 [p 13] ábra szerinti jelekhez - az egyenáramú szinttől függetlenül - azonos abszolút értékű spektrumkomponensek tartoznak. Közelítsük az 6 [p 13] és 7 [p 14] ábra szerinti jeleket az alapharmonikussal. Értelmezzük, hogy mely szakaszokon nagyobb, vagy kisebb az eredeti jel, mint az alapharmonikus értéke.

---

## Az egységimpulzus: univerzális vizsgálójel

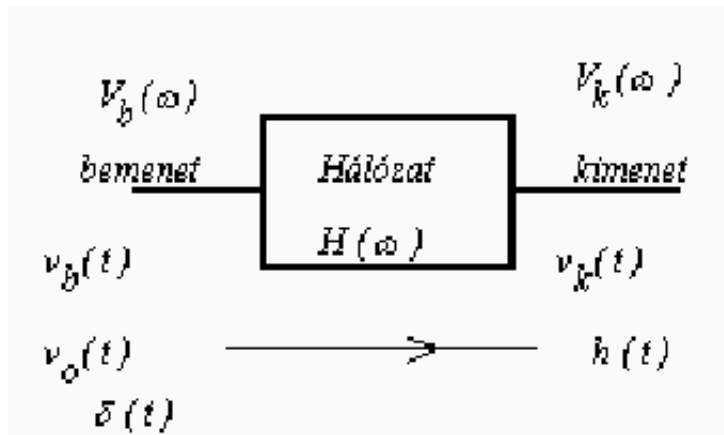
Az előbb kapott eredményeket megpróbáljuk úgy módosítani, hogy egy ideális impulzus (Dirac delta függvény) frekvenciaspektrumához jussunk el. Ez a továbbiakban nagyon fontossá válik. Ezért  $T$  értékét növeljük, egyidejűleg pedig  $\tau$  értékét csökkentjük, így az első zérushely egyre inkább kitolódik, közben azonban a spektrumvonalak száma állandóan növekszik. Sajnos, ezzel egyidejűleg a vonalak amplitúdója is csökken. Ennek kompenzálására  $A$  értékét növeljük úgy, hogy az  $A\tau$  szorzat állandó maradjon. Így eljutunk ahhoz az eredményhez, hogy az "ideális" impulzus frekvenciaspektrumára jellemző ábra egy, az abszcisszával párhuzamos egyenes lesz. (8 [p 16] ábra)



**8. Ábra**

Közben azonban minőségi változás is keletkezett. Mivel a keresett határesetben a spektrumvonalak végtelenül közel kerülnek egymáshoz, most már csak arról beszélhetünk, hogy egy igen keskeny  $d\omega$  sávban mekkora az átlagos amplitúdó komponens, - nem mondhatjuk meg pontosan, hogy adott értékű  $\omega$ -hoz mekkora amplitúdó tartozik. Az ábra alapján azt látjuk, hogy minden frekvenciakomponens azonos amplitúdóval szerepel. Ez az érték egységnyi nagyságú  $A\tau$  esetén egységnyi lesz. (Ezt külön nem bizonyítjuk.) A fenti gondolatot tartalmazza az egyszer lefutó (impulzus-szerű) jelekre vonatkozó Fourier transzformáció képlete is. Az ilyen típusú összefüggéseket, amelyek a Fourier transzformáció eredményeként állnak elő, (frekvencia)sűrűség spektrumnak hívják. Tényleges amplitúdóértéke csak a  $V(\omega)d\omega$

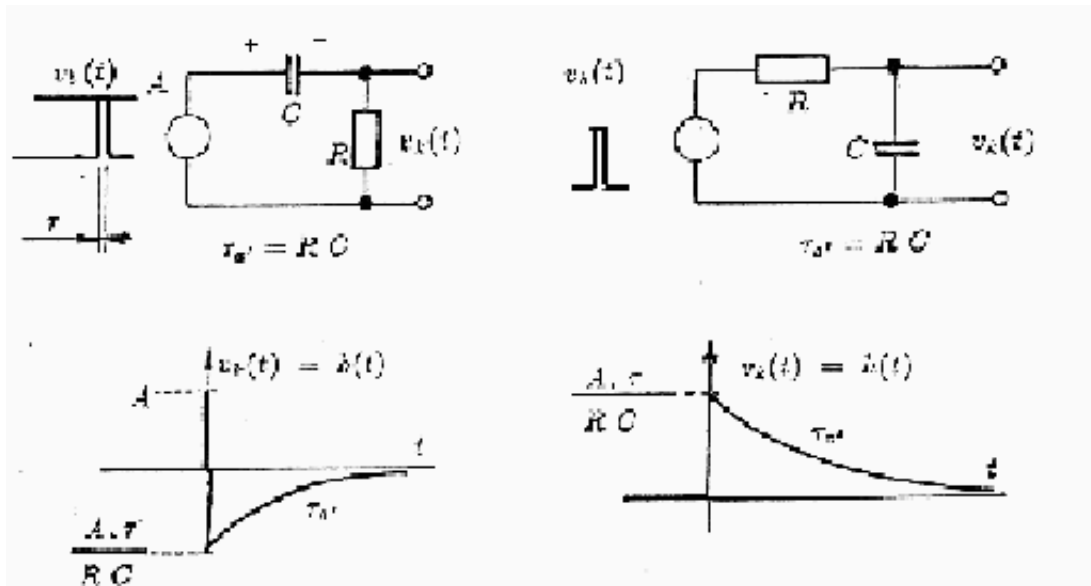
mennyiségnek van. (Vegyük észre, hogy gondolatmenetünkkel "bajt is okoztunk". Ha ezen sűrűség spektrum négyzetét minden frekvenciára integrálnánk, eredményül végtelen nagy energiát kapnánk. A bajt persze enyhíti, hogy "ideális" impulzusunk sem egészen hétköznapi, ennek energiája is végtelen nagy.) Az a tény, hogy a delta függvényben minden frekvenciájú komponens azonos amplitúdóval szerepel, kézenfekvő módon determinálja ideális rendszervizsgáló jelként. Ha ugyanis a rendszer pl. frekvenciakarakteristikájával adott, akkor az 9 [p 17] ábra alapján a bemenőjelhez tartozó kimenőjel frekvenciaspektruma igen könnyen megkapható, mindössze a bemenet és a hálózat frekvenciakarakteristikáját kell összeszoroznunk. (Természetesen ügyelnünk kell arra, hogy a hálózat fázismódosítását is figyelembe vegyünk, vagyis az átvitel komplex értékével kell számolnunk.)



9. Ábra

$$V_k(\omega) = V_b(\omega)H(\omega)$$

Ha  $v_0(t)$  a bemenőjelként megjelenő delta függvény, akkor a kimeneten keletkező jel frekvenciaspektruma megegyezik a hálózat frekvenciakarakteristikájával, mert a bemenetben minden komponens azonos amplitúdóval szerepel. - Természetesen a kimeneti frekvenciaspektrumot Fourier transzformációval időfüggvénnyé transzformálhatjuk. Ezt a  $h(t)$  kimeneti jelalakot a rendszer/hálózat súlyfüggvényének nevezik. Ez ugyanúgy jellemzi a hálózatot, mint a  $H(\omega)$  frekvenciakarakteristika, mivel közöttük a Fourier oda-, illetve vissza transzformáció teremt egyértelmű kapcsolatot. Egy rendszer frekvenciakarakteristikáját végtelen sok frekvencián történő amplitúdó és fázisméréssel lehet megkapni, de fizikailag azonos értékű eredményt ad, ha megmérjük a súlyfüggvényt. Ez utóbbi gyakorlatilag sokkal egyszerűbb. - Csak arra kell ügyelnünk, hogy a delta függvényt gyakorlati célokra "leszelídítsük". A végtelen nagy amplitúdó mindent tönkre tenne, tehát csak akkora impulzust adjunk, amelyet pl. a rendszerben található tranzisztorok elviselnek. A végtelenül keskeny impulzust sem egyszerű előállítani, ezért olyan rövidre válasszuk a szélességét, hogy az biztosan legalább egy nagyságrenddel kisebb legyen, mint a rendszer legkisebb időállandója. (Ez a hálózat felső frekvenciahatárától függ, l. Elektronika jegyzet áramkörökön, a kvázidifferenciáló és kváziintegráló áramkörökön vizsgáljuk (10 [p 18] ábra). A kváziintegráló bemenetére adjunk egy delta függvényt, melynek nagysága  $A\tau$ . Ha az áramkör bemenetén egy feszültségugrás jelenik meg, akkor  $A/R$  nagyságú áram indul, mely természetesen a kondenzátoron is áthalad. Ez az áram  $\tau$  ideig folyik, ezen idő alatt a kondenzátoron  $A\tau/R$  nagyságú töltés halmozódik fel, mely  $A\tau/RC$  nagyságú feszültséget jelent. Ha  $\tau$  végtelenül (vagyis elegendően) kicsi, akkor a bemeneti impulzus megszünte után a kondenzátor exponenciális görbe mentén RC időállandóval kisül.



10. Ábra

A kvázidifferenciáló áramkör esetében a kondenzátor töltődése természetesen ugyanígy fog lezajlani, azonban a bemeneti jel a kondenzátoron keresztül a kimeneten is megjelenik. A kondenzátor a megjelölt polaritásra töltődik és így negatív polaritású kisülési görbe keletkezik.



[p 19]



[p 6]



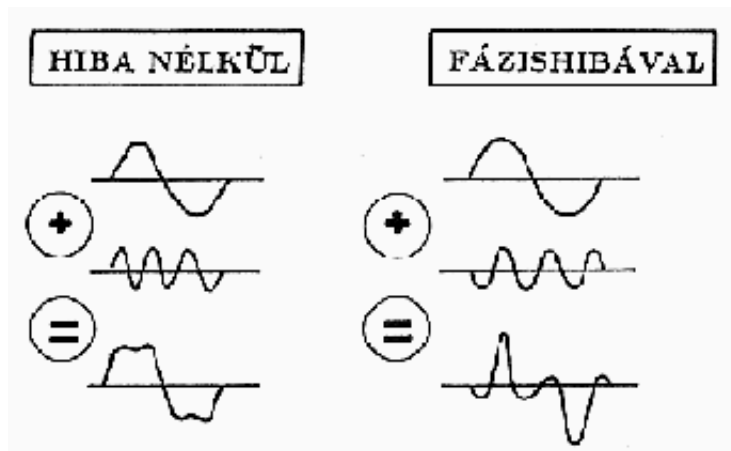
[p 15]

**Következő:** Inverz Fourier transzformáció [p 19] **Fel:** Fourier sorok Fourier transzformáció [p 6]

**Előző:** Kérdéskérdések [p 15]

## Inverz Fourier transzformáció

Mielőtt a címben jelzett tárgyhoz hozzáférnénk, egy a hálózatokkal kapcsolatos fontos fogalmat, a hálózatok időképletét és annak hatását kell megvizsgálunk.



11. Ábra

Az 11 [p 19] ábra már ismert jelenségre utal. Ha egy szimmetrikus négyszögjel első és harmadik harmonikusát összegezzük, akkor az eredeti jelhez eléggé hasonló eredményhez juthatunk. Ha azonban a harmadik harmonikus fázisát megfordítjuk, akkor az összeg már nem adja a helyes ábrát.

Ha ennek okát keressük, akkor először azt kell megállapítanunk, hogy mi a hálózatok torzítatlan jelátvitelének (egyik) feltétele. A Fourier komponensekre bontás szellemében a bemenetre érkező különböző frekvenciájú összetevők megérkeznek ugyan a kimenetre, azonban mindegyik némileg késik. Ha a bemeneten a jelkomponensek egymáshoz viszonyított fázisa adott, akkor az alakhű átvitel feltétele, hogy a kimeneten is ugyanilyen legyen a viszonyuk. A kimeneten megjelenő (szinuszos)

jelek  $\sin\{\omega(t - \tau(\omega))\}$  formában írhatók fel.  $\tau(\omega)$  azt fejezi ki, hogy a különböző frekvenciákhoz

különböző késleltetési idő tartozhat. Kézenfekvő, ha  $\tau(\omega)$  a frekvenciától független állandó  $(\tau_0)$ , akkor a komponensek fázisviszonyai a kimeneten éppen olyanok lesznek, mint a bemeneten.

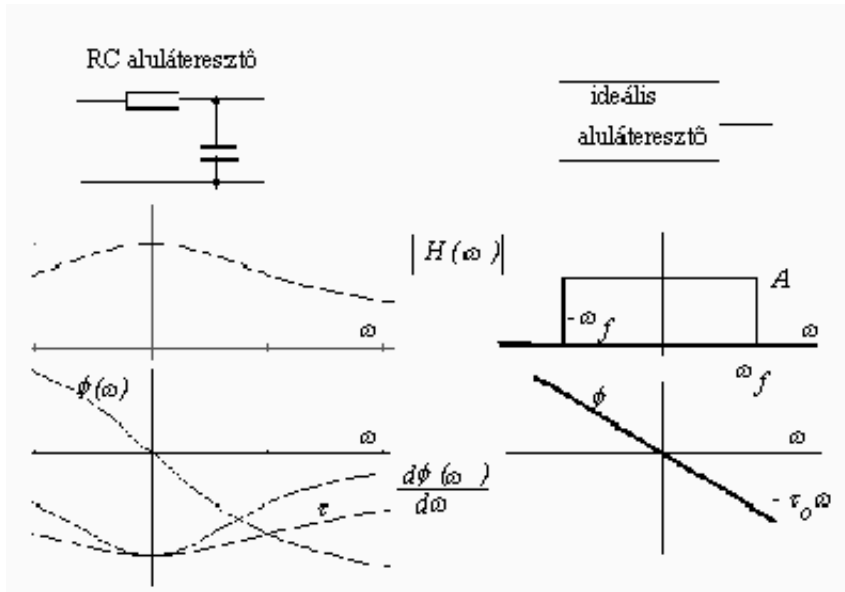
Vizsgáljunk most egy egyszerű példát, az RC aluláteresztő szűrőt. Ennek fázistolása

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

A kimenet és bemenet közötti időkézés mértéke - állandósult szinuszos jelet feltételezve - könnyen meghatározható.

$$\tau(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{2\pi} T = \frac{\varphi(\omega)}{\omega} \quad \frac{2\pi}{T} = \omega$$

Jól látszik, hogy a késleltetés akkor lesz állandó, ha  $\phi(\omega)$  függvény lineáris, vagyis  $\phi(\omega) = -\tau_0 \omega$ .  
 Az RC aluláteresztő esetében más a helyzet, mint ahogy az áramkörök többségében is.



12. Ábra

Az 12 [p 20] ábra baloldalán az RC aluláteresztő fázis és késleltetési idő görbéi láthatók. Feltüntetjük a  $\frac{d\phi}{d\omega}$  ún. csoport-futási idő görbét is. Ezt szokták a hálózat "diszperziójának" tekinteni, amely fogalom arra utal, hogy a különböző frekvenciájú komponensek mennyire "szóródnak szét" egymáshoz képest a hálózaton való áthaladásukkor (v.ö. kísérleti fizika fázisebesség). Az ábra jobb oldalán az ideális aluláteresztő hálózat abszolútérték átvitelét és fázismenetét ábrázoltuk. Ez az ábra egyúttal e fogalom definíciójaként is tekinthető.

Elégé magától értetődőnek tűnik azt kérdezni, hogy milyen kimenőjelet kapunk, ha egy ideális aluláteresztő szűrő bemenetére ideális impulzust adunk. Ha az impulzus nagysága

(amplitúdó-időtartam szorzat) egységnyi, akkor a kimeneten megjelenő komponens  $\int H(\omega) d\omega$  értékű lesz. A Fourier (vissza) transzformálás szabályai szerint (itt az  $e^{-j\omega\tau_0}$  kifejezés a minden frekvenciáira azonos mértékű jelkésleltetésre utal):

$$v_k(t) = \int_{-\omega_f}^{\omega_f} A e^{-j\omega\tau_0} e^{j\omega t} d\omega = 2A \frac{\sin[\omega_f(t - \tau_0)]}{t - \tau_0}$$

Az eredményből az alábbi fontosabb tanulságok vonhatók le:

1. A kimeneten megjelenő időfüggvény  $\frac{\sin x}{x}$  alakú lesz, - a Fourier transzformáció során tehát az időbeni és frekvenciatartománybeli jelalakok "felcserélhetők", szimmetrikusak;
2.  $t = 0$  előtt is van kimenőjel, mintha a rendszer előre sejtene, hogy a 0 időpillanatban majd impulzust adunk a bemenetére. (13 [p 21] ábra) Ez az ellentmondás sokáig foglalkoztatta a matematikusokat. Az ellentmondás feloldására azt mondjuk, hogy ideális aluláteresztő nem létezhet fizikailag. Pontosabban: fizikailag nem realizálható olyan hálózat, amelyiknek a

frekvencia átvitele egy adott értéken túl azonosan zérus.

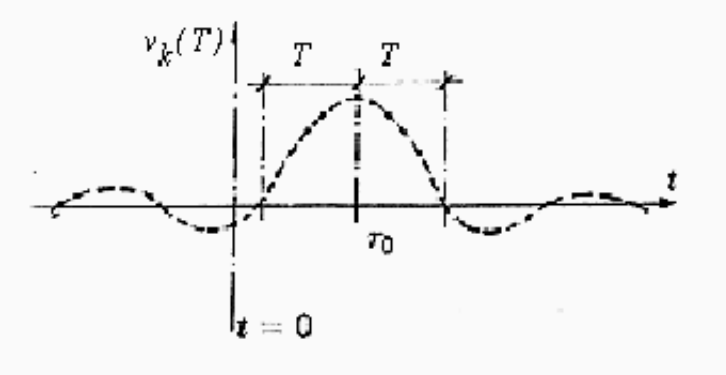
$$\omega_f T = \pi$$

3. A kimenőjel önkényes, - de nem irracionális - definíciójú talpszélessége az

$$2T = 1/f_f$$

összefüggésből értékűre adódik. A kimenőjel "főhulláma" tehát ennyi ideig tart, vagyis az aluláteresztő felső határfrekvenciájának a reciproka szabja meg. Ez nagyjából megegyezik régebbi ismereteinkkel, amelyeket pl. a kváziintegráló áramkör kimenetén kapható legrovidebb impulzusról szereztünk. - A dolog elvi jelentősége nagyon fontos: a felső frekvenciahatár szabja meg a kimeneten kialakuló legrovidebb impulzus szélességét.

4. átláthatjuk az ún. **Nyquist tételek** igazát, jelentőségét, mely szerint: egy  $f_f$  sávszélességű rendszeren legfeljebb  $2f_f$  jel (impulzus) vihető át megkülönböztethetően.



13. Ábra

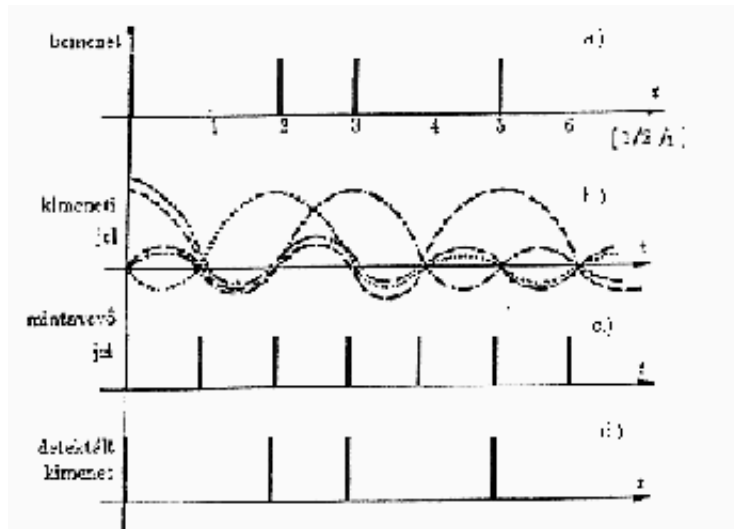
Az 14 [p 22] ábra a. része különös (ideális) impulzussorozatot mutat. A jelenség periodikus, azonban bizonyos időpontokban nem jelenik meg az impulzus. Ez így egyszerű modellje a bináris információ közlésnek: az "1" esetben van impulzus, "0" esetben nincs. Ezek a jelek - feltevésünk szerint - egy

ideális aluláteresztőn haladnak keresztül. Mindegyik bemeneti impulzus a kimeneten  $\sin x/x$  alakú jelet kelt. Ezek természetesen a bemeneti impulzushoz képest késve jelennek meg a kimeneten. A b. ábrán ezt a késleltetést a valóságos fizikai esettől eltekintve zérusnak tekintjük, hogy az ábrásor

áttekinthető legyen. A kimeneten  $\sin(x)/x$  alakú jelek összege jelenik meg. Nagyon fontos tudatosítani, hogy ez az összeg - a mintavételi időpontoktól eltekintve (c. ábra) - nem korlátos, mert az  $1/k$  szerint csökkenő mellékharok összege bármilyen értéket felvehet. - Ha a mintavételi időpontokat egybeejtjük az eredeti impulzusok időpontjaival, akkor a mintavételi időpontokban az esetleg véletlenszerűen változó múltbeli impulzusok esetén is pontosan kaphatjuk a kérdéses impulzus

amplitúdóját. - Az előbb már láttuk a  $\sin x/x$  alakú jelek részletesebb vizsgálatánál, hogy a helyesen

detektálható jelek ismétlődési idejének  $1/2f_f$ -nek kell lennie. Az ábra c. része a mintavető jeleket tünteti fel, d. részén pedig a detektált kimenetet látjuk. A fenti gondolatsor persze nem bizonyítás, csupán értelmezése a Nyquist tételnek. Ez a tétel az információközlésnek sarkalatos törvénye: véges felső határfrekvenciájú rendszeren nem lehet a határfrekvencia kétszeresénél gyorsabban impulzusokat (vagyis a lehető legrovidebb jeleket) továbbítani. (Ezt hívják Nyquist sebességnek.)



14. Ábra

Vegyük észre azt is, ha a bemeneti impulzusok amplitúdói különböző nagyságúak lehetnek, ezek magasságával is közölhetünk információt. Az ismertetett mintavételi eljárás ezeket is pontosan adja vissza, vagyis az átvitt információ mennyisége így is növelhető. Ennek a módszernek az átviteli csatornák zaja jelenti a korlátját, emiatt a a detektált impulzus amplitúdók nem lesznek egyértelműen

megkülönböztethetők. - Ezzel eljutottunk a csatornkapacitás fogalmához, amely egy  $f_f$  felső frekvenciahatáru csatornán átvihető maximális információfluxust adja meg, vagyis a másodpercenként átküldhető ideális impulzusok számát:

$$C = 2f_f \log_2(S/N + 1) \quad \text{ahol } S, \text{ illetve } N \text{ a jel, és a zaj teljesítményét jelenti.}$$

A delta-impulzus hálózaton történő átvitelének ismeretében más, technikai szempontból értékes ismeretehz is könnyen juthatunk. Így pl. meghatározhatjuk, hogy ugrásjel (lépcső- függvény) hatására mi jelenik meg az ideális aluláteresztő kimenetén. Ehhez azt kell észrevennünk, hogy a kimeneti jel frekvenciaspektruma mindig a bemeneti jel és a hálózat frekvenciaspektrumának szorzataként áll elő.

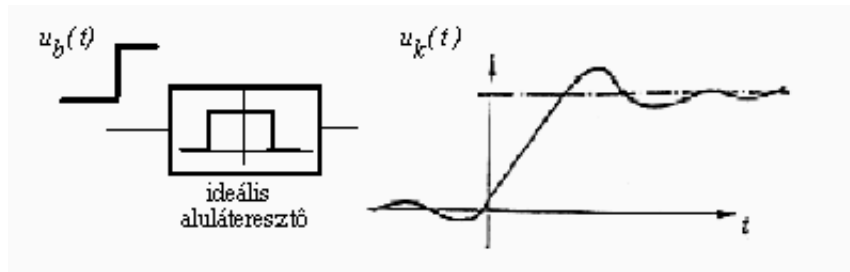
Ha a bemeneti jelet differenciáljuk, ez a bemenőjel spektrumának  $j\omega$ -val történő szorzásával, vagy osztásával egyenértékű. Ilyenkor azonban nem választható szét, hogy a műveletet a bemeneti jelen, vagy a kimeneten hajtottuk végre.

$$V_k(\omega) = H(\omega)V_b(\omega) \quad , \text{ illetve}$$

$$H(\omega)j\omega V_b(\omega) = j\omega V_k(\omega)$$

A dolog lényege: a bemenőjel differenciálásával , vagy integrálásával előálló bemenő jelalakhoz tartozó kimenőjelet a kimenőjel differenciálásával, illetve integrálásával is kaphatjuk. (Persze fordítva is !)





### 15. Ábra

Adjunk például egy ideális aluláteresztő szűrő bemenetére feszültségugrást. Ez az impulzus függvény integrálja, - tehát a kimeneti jelet megkaphatjuk az impulzushoz tartozó kimenőjel integrálásával (15 [p 23] ábra). Az ugrásfeszültség hatására tehát a  $\frac{\sin x}{x}$  függvény integrálja fog a kimeneten megjelenni. (Természetesen itt is sérül az oksági elv.)

- Kérdések, feladatok [p 24]



[p 24]



[p 1]



[p 16]

**Következő:** Kérdésekfeladatok [p 24] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző:** Az egységimpulzus: univerzális vizsgálójel [p 16]



[p 25]



[p 19]



[p 19]

**Következő:** Konvolúció [p 25] **Fel:** Inverz Fourier transzformáció [p 19] **Előző** Inverz Fourier transzformáció [p 19]

## Kérdések, feladatok

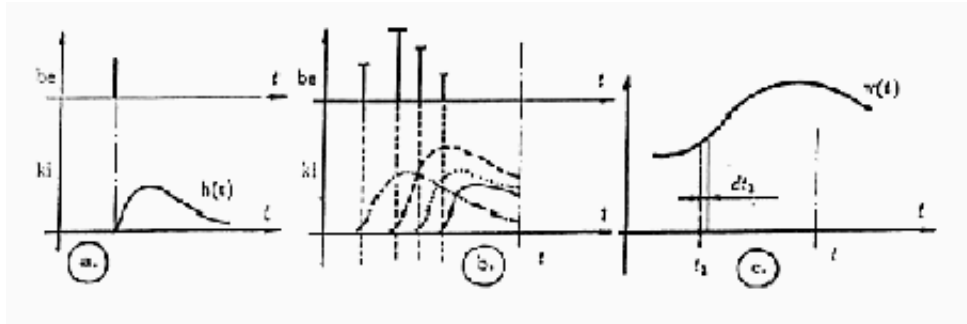
Milyen lesz az ideális felüláteresztő kimenőjele bemeneti delta impulzus, valamint bemeneti ugrásfeszültség hatására?

---

## Konvolúció

Ennek a tantárgynak az egyik legérdekesebb részéhez értünk el. Itt a szuperpozíció elvét fogjuk kihasználni a hálózatokra adott jelre adott kimeneti válasz keresésénél.

Állításunk a következő: lineáris hálózatok esetében a súlyfüggvény ismeretében tetszőleges bemenőjelhez meghatározhatjuk a kimenőjelet. Az 16 [p 25] . ábra ezt részletesen követhetővé teszi.



16. Ábra

Az a. ábra egyetlen bemenő impulzus sorsát tünteti fel, tehát ennek kimeneti válaszfüggvénye a  $h(t)$  függvény. A b. ábra bemenőjele több impulzusból áll, ezek mindegyike kivált egy  $h(t)$  függvényt a kimeneten. - A  $t$  időpillanatban létrejövő jel az "előzményekből" összegzéssel határozhatjuk meg.

A c. ábra már egy kicsit más helyzetet mutat. Itt a bemeneti függvény folyamatosan változik. A  $t_1$  időpont közvetlen közelében vett  $dt_1$  érték  $v(t_1)$  értékével együtt egy delta függvényt határoz meg,

tehát a kimenet, - az előzőhöz hasonlóan - a súlyfüggvények által determinált. a  $v(t)$  függvény nagyságú elemi impulzusokból tevődik össze. A kimenőjel általános formulája könnyen felírható. A kimeneten megjelenik a bemeneti impulzus hatására:

$$v(t_1)dt_1 h(t - t_1)$$

nagyságú jel. Ennek szellemében a kimenet:

$$v_k(t) = \int_{-\infty}^t v(t_1)h(t - t_1)dt_1$$

Ez fontos összefüggés, nagyon sok helyen felhasználható. (Számos, módosított alakja is létezik.) - Az integrál által megszabott műveletet konvolúciónak hívják. Talán most már megérthető, hogy ez a szuperpozíció elv leglényegesebb következménye, és nagyon tág az alkalmazási területe.

Példaképpen számoljuk ki egy alsó és felső frekvenciahatárral rendelkező (vagyis valóságos) erősítő kimenetén az ugrásfüggvény hatására a kimeneten keletkező jelalakot (4 [p 26] ábra). - Ez nem csupán gyakorló feladat, hanem fizikusok esetében a nukleáris jelek detektálásának/erősítésének alapvető kérdését is érinti. ( A nukleáris jeldetektorok többsége ugyanis egy - általában a detektált részecske energiájával arányos - feszültségugrást ad az erősítő bemenetére.)

Az ugrásfüggvény hatására a bemeneti kvázidifferenciáló áramkör kimenetén  $e^{-t/\tau_1}$  jellegű függvény keletkezik. Ezt kell konvolválni egy  $\tau_2$  időállandójú - már az előző részben megismert, kváziintegráló áramkör súlyfüggvényével. A konvolúció integrál felhasználásával az eredmény:

$$u_k = A_0 v_0 \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{\tau_1}\right) \frac{1}{\tau_2} \left(-\frac{(t-\tau)}{\tau_2}\right) d\tau = A_0 v_0 \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2}\right)$$

Ez könnyen kiszámolható, - és az eredmény arra utal, hogy a kváziintegráló és a kvázidifferenciáló áramkörök mennyire módosítják a kimeneti jel alakját és amplitúdóját. Az eredmény kvalitatíve az 4 [p 26] ábrán látható. (A görbék mellett feltüntettük az integráló, majd a differenciáló időállandó értéket  $\mu s$ -ban.)



[p 27]



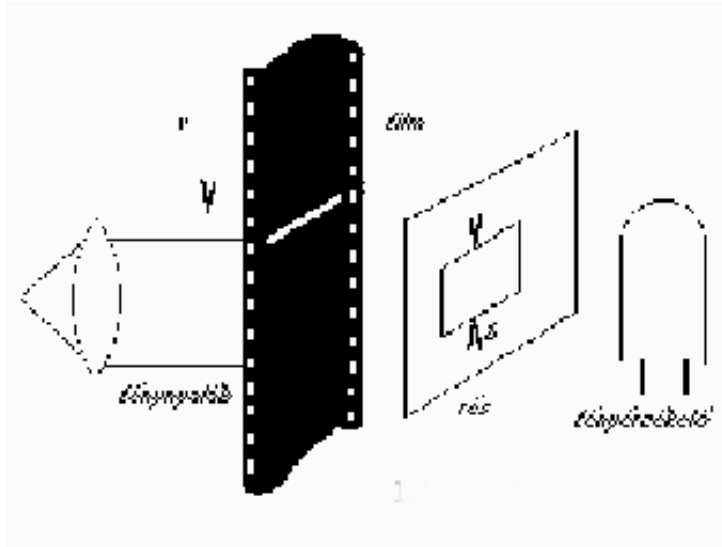
[p 1]



[p 24]

**Következő:** Dekonvolúció [p 27] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző:** Kérdésekfeladatok [p 24]

## Dekonvolúció

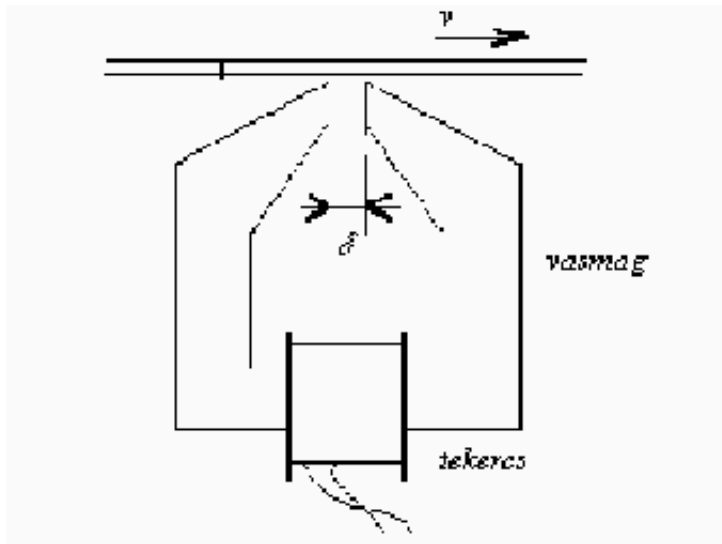


17. Ábra

A mérőrendszerek általában bonyolult hálózatok és valamilyen meghatározott  
 frekvenciakarakterisztikájuk van. Közismert pl az, hogy a mérőrendszer a keskeny vonalakat  
 kiszélesíti, "elkeni" - tehát gyanakodhatunk valamilyen felső határfrekvencia léte. Két fontos példát  
 mutatunk. Az egyik a mozifilmek hangcsíkainak detektálása (17 [p 27] . ábra). Itt egy fénynyaláb  
 világítja meg a filmet és a fényt egy résen keresztül érzékeljük. - Ha a filmen egy extrém keskeny

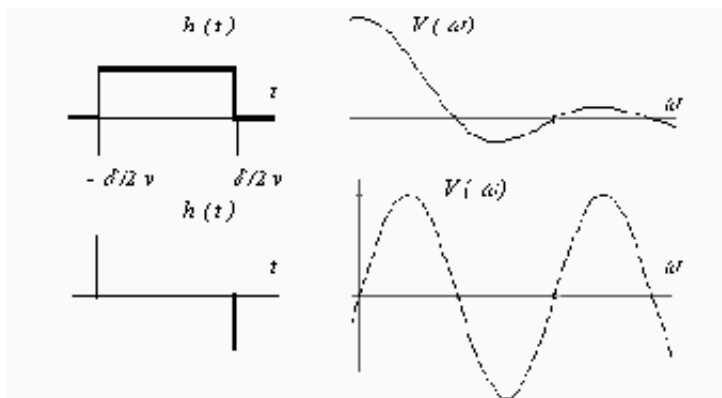
átlátszó csíkot mozgatunk, akkor a szalag  $v$  sebességgel történő mozgásánál egy  $\delta/v$  szélességű jelet  
 kapunk a fénydetektor kimenetén. Ez a jel azonban most sokat jelent: ez a mérőrendszer

súlyfüggvénye ! Ennek Fourier transzformáltja  $\frac{\sin x/x}{\sin x/x}$  alakú lesz. (Ezt a függvényt a leírt jelenség  
 miatt "résfüggvénynek" is nevezik.)



18. Ábra

A második példánk (18 [p 28] .ábra ) a mágneses hangrögzítés lejátszási elvét mutatja. Az ugyancsak  $\delta$  szélességű rés előtt most egy rendkívül rövid mágneses szakasz halad el. Tegyük fel, hogy a mágneses szakasz csak a légrésben fejt ki hatását, vagyis itt indukál a tekercsben feszültséget. - Most azonban a kimeneti jel  $\delta/v$  távolságban lévő két, ellenkező polaritású delta függvényből fog állni, mivel ez alatt az idő alatt a tekercs fluxusa nem változik. Természetesen az ehhez tartozó frekvenciakarakterisztikát is meg lehet határozni. A két frekvenciakarakterisztika az 19 [p 28] ábrán látható. Vegyük észre, hogy rés szélességének, valamint a szalag mozgási sebességének meghatározó szerepe van. Érdekes az a különbség is, ami a zérus frekvencia átvitelében tapasztalható. - A hangrögzítés karakterisztikája nem nagyon bizalomkeltő, - egyenlő amplitúdójú átvitel csak korlátozottan lehetséges.

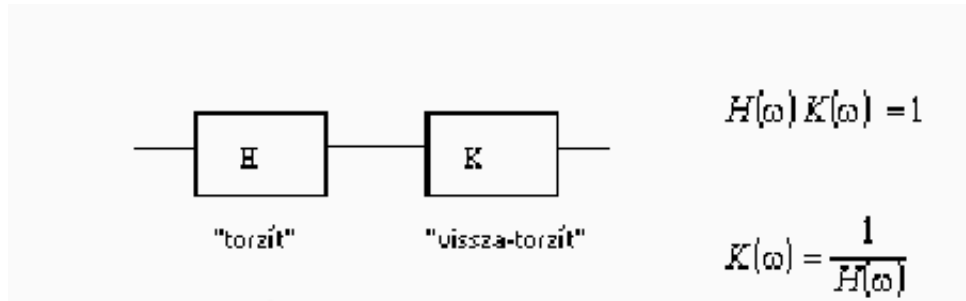


19. Ábra

A mért jelet a mérőrendszer kimenetén észleljük, ahol ez már "torzított". Nagyon érdekes kérdés: a mérőrendszer átvitelének ismeretében lehetséges-e olyan korrekciós hálózatot beiktatni, amelyik a teljes elrendezést mindent-áteresztővé, tehát "torzításmentessé" teszi. Ez a mérési probléma szinte minden természettudományos szakterületen jelentkezik.

A feladvány az 20 [p 29] ábra alapján elvileg egyszerűen megoldható: olyan korrekciós hálózatot kell használnunk, amelynek karakterisztikája a mérőeszköz karakterisztikájának reciproka. A valóságban azonban a helyzet bonyolultabb. Ha a  $H$  hálózat bizonyos frekvenciákat alig, vagy egyáltalán nem visz

át, akkor  $K$  értékének ezeken a frekvenciákon igen nagyoknak (végtelennek) kell lennie. A minden rendszerben elkerülhetetlenül jelenlévő zajok azonban az elvi módszer gyakorlati alkalmazhatóságát radikálisan korlátozzák: a nagy erősítésű szakaszok nagyon (végtelenül) zajosak lesznek. A korrekciós hálózatok tervezése tehát megfontolást kíván és csak kompromisszumokkal lehet végrehajtani. Az elvileg egyszerű megoldású dekonvolúciós feladatnak - kisszámú kivételtől eltekintve - csak közelítő megoldása létezik a gyakorlatban.



20. Ábra

- Kérdések, feladatok [p 30]

 [p 30]
  [p 1]
  [p 25]

**Következő:** Kérdésekfeladatok [p 30] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző:** Konvolúció [p 25]



[p 31]



[p 27]



[p 27]

**Következő:** Korrelációs függvények [p 31] **Fel:** Dekonvolúció [p 27] **Előző** Dekonvolúció [p 27]

## Kérdések, feladatok

Számolja ki az 4 [p 26] ábra feladatát úgy, hogy a kvázidifferenciáló és kváziintegráló áramkörök helyet cserélnek. Milyen lesz a kimeneti jel egy kváziintegráló áramkör kimenetén, ha a bemenetre a  $t = 0$  időpontban egy koszinusz függvényt kapcsolunk, melynek periódusideje megegyezik az áramkör időállandójával? Milyen lesz az 17 [p 27] ábra szerinti elrendezés kimeneti frekvenciakarakteristikája, ha a rés a film mozgási irányához képest kissé elferdül? Milyen lényeges változás jön létre? Milyen lesz a kimeneti frekvenciakarakterisztika, ha a "rés" kör alakú? Rajzolja meg, hogy egy kváziintegráló (vagy kvázidifferenciáló) jellegű hálózathoz milyen dekonvolúciós hálózat tartozik? Lehet ezt megvalósítani?

---



## Korrelációs függvények

Az a furcsa kérdés, hogy mennyire hasonlít egy függvény önmagára, eléggé értelmetlennek tűnik. - Azt azonban könnyű átlátni, hogy egy függvény hasonlíthat időben eltolatott változatára. - Az 2.1 [p 7] szakaszban már azt is láttuk, hogy a hasonlóság mértéke a két függvény szorzatának integráljával arányos.

Az autokorrelációs függvényt úgy állítjuk elő, hogy az eredeti függvényt és a  $\tau$  értékkel eltolatott függvényt összeszorozzuk egymással. Eredményül az  $R(\tau)$  függvényhez érkezünk:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)v(t - \tau) dt,$$

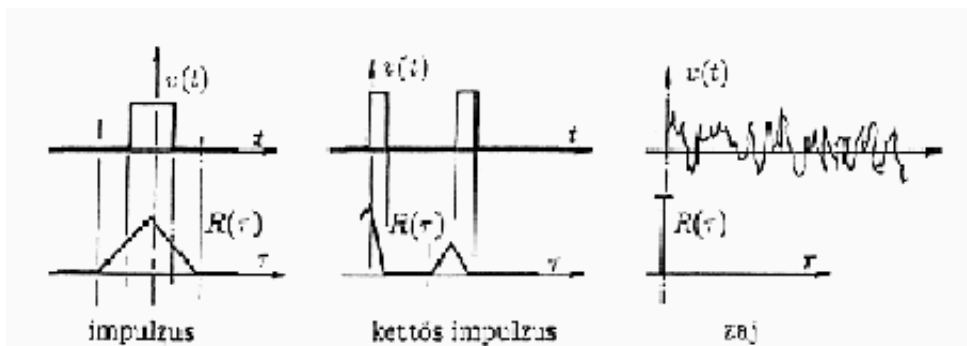
illetve:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v(t)v(t - \tau) dt.$$

Az autokorrelációs függvény legfontosabb tulajdonságai könnyen átláthatók, illetve érthetők:

- $R(\tau) = R(-\tau)$  :a függvény az origóra szimmetrikus.
- $R(0) \approx \int v^2 dt$  a 0 pontban felvett értéke a jel energiájával arányos
- $R(0) > R(\tau)$ ; ha  $\tau \neq 0$  :maximális értéke a 0 pontban található

Az 21 [p 31] ábrán egyszerű függvényeket és autokorrelogramjukat mutatjuk be. Néhány egyszerű összefüggést, szabályt könnyű átlátni. - Az impulzusszerű függvények autokorrelációs függvényei is impulzusszerűek. A periodikus jelek megőrzik periodicitásukat. A zajszerű jelek autokorrelogramja pedig impulzusszerű.



21. Ábra

Érdemes arra is figyelni, hogy

- két függvény összegének autokorrelációs függvénye nem a két függvény autokorrelációs függvényének összege
- az autokorrelációs függvényből nem lehet az eredeti függvényt visszakapni.

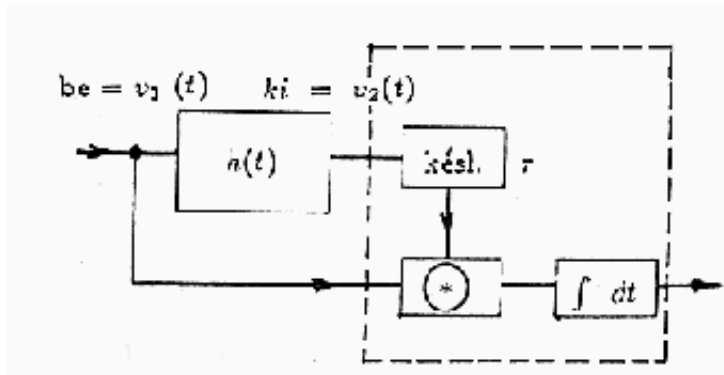
Az autokorrelátorok, mint jelvizsgáló eszközök - a digitális számítógépek elterjedése előtti időkben - igen fontosak voltak. Sok szakma használta őket, különösen ott, ahol a jelek a hangfrekvenciás tartományba, vagy annak közelébe estek. Ez esetben ugyanis a jelek késleltetését a magnetofonfejek közötti távolság változtatásával egyszerűen meg lehetett oldani.

Autokorrelációs módszerrel elsősorban zajjal fedett jeleket értékelték. Az egyik sikeres alkalmazást a pulzások felfedezése jelenti. Ez tulajdonképpen tipikus alkalmazásnak is számíthat, mert zajszerű jelben vadásztak valamifajta periodicitásra.

Az autokorrelációs függvényhez hasonlatosan az ún. "keresztkorrelációs függvény" is definiálható, illetve értelmezhető:

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)v_2(t - \tau)dt,$$

Nagyon érdekes eredményre jutunk, ha egy rendszer bemenőjele és kimenőjele közötti keresztkorrelációs függvényt állítjuk elő (22 [p 32] . ábra)



22. Ábra

Az alábbi megfontolások végeredménye nagyon fontos: ha  $R_{12}(\tau)$  lényegesen rövidebb időtartamú, mint  $h(t)$ , - vagyis a bemenőjel lényegében zajszerű és autokorrelációs függvénye impulzusszerű - akkor a mérőrendszer kimenetén a súlyfüggvényt kapjuk eredményül. (Az impulzusfüggvénnyel való konvolúció után ugyanis az eredeti függvényt kapjuk vissza.)

$$v_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)v_1(t + \tau - \vartheta)d\vartheta$$

$$R_{12}(\tau) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)v_1(t + \tau - \vartheta)dt d\vartheta =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) v_1(t + \tau - \vartheta) d\vartheta dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) R_1(t - \vartheta) d\vartheta$$

Így olyan eljárás birtokosai lettünk, mellyel egy rendszer súlyfüggvénye akár üzem közben is meghatározható, - a rendszer kis amplitúdójú zajjal történő zavarásával. Ennek az elvnek a mérés technikai értéke igen nagy (pl. nukleáris reaktoroknál).

---

- Kérdések, feladatok [p 34]
  - Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei [p 35]
    - Példa [p 38]
    - Példa [p 39]
  - Összefüggés az autokorrelációs függvény és az energiaspektrum között [p 40]
- 



[p 34]



[p 1]



[p 30]

**Következő:** Kérdésekfeladatok [p 34] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző:** Kérdésekfeladatok [p 30]



[p 35]



[p 31]



[p 31]

**Következő:** Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei [p 35] **Fel:** Korrelációs függvények [p 31]

**Előző** Korrelációs függvények [p 31]

## Kérdések, feladatok

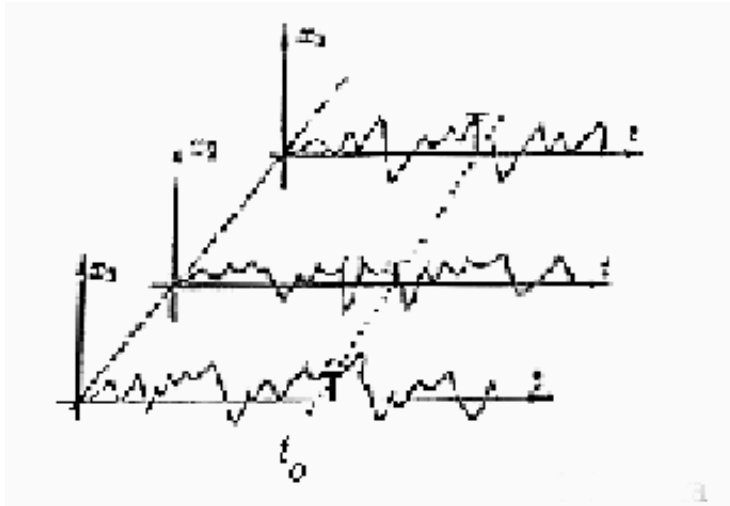
Hogyan fog kinézni egyetlen periódusidőig tartó szinuszhullám autokorrelációs függvénye? Miért nem lehet visszakapni az autokorrelációs függvényből az eredeti függvényt? Keressen két olyan - "szemre" nagyon eltérő - függvényt, amelyeknek azonos az autokorrelációs függvénye. Hogyan lehetne a keresztkorrelációs függvényt előállítani a két függvény frekvencia-spektrumából? Van-e valamilyen kapcsolat a keresztkorreláció és a konvolúció között?

---

## Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei

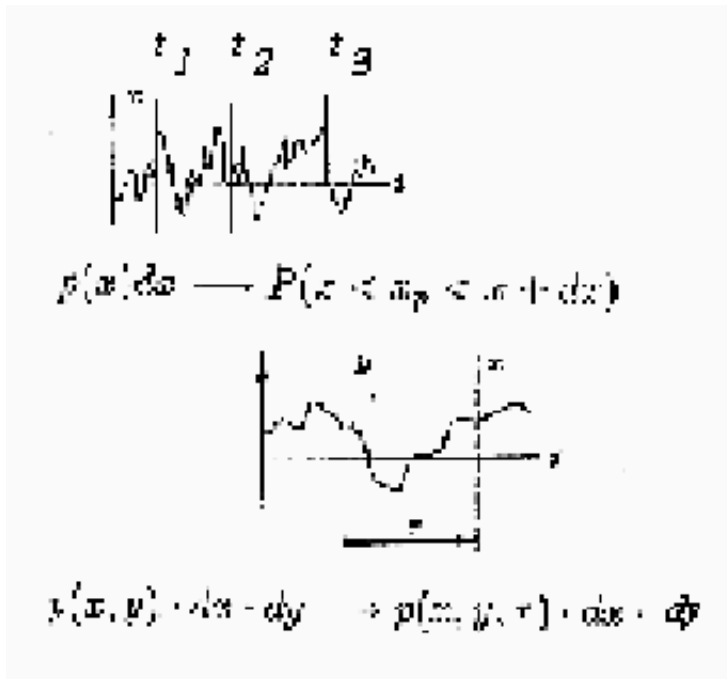
Stacionernek és ergodikusnak azokat a folyamatokat nevezzük, amelyek statisztikus jellemzői az időben állandóak és amelyek sok hasonló folyamat egyidejű vizsgálatával, vagy egyetlen folyamat időbeni elemzésével egyaránt megkaphatók, vagyis az ún. időátlag és halmazátlag (sokaságátlag)

azonos. 23 [p 35] ábra ezt kívánja szemléletessé tenni: mindegy, sok hasonló generátor  $(x_1, x_2, x_3)$  jelét mérjük-e egyetlen to pillanatban, vagy egyetlen zajgenerátor jelét vizsgáljuk igen hosszú időn keresztül.



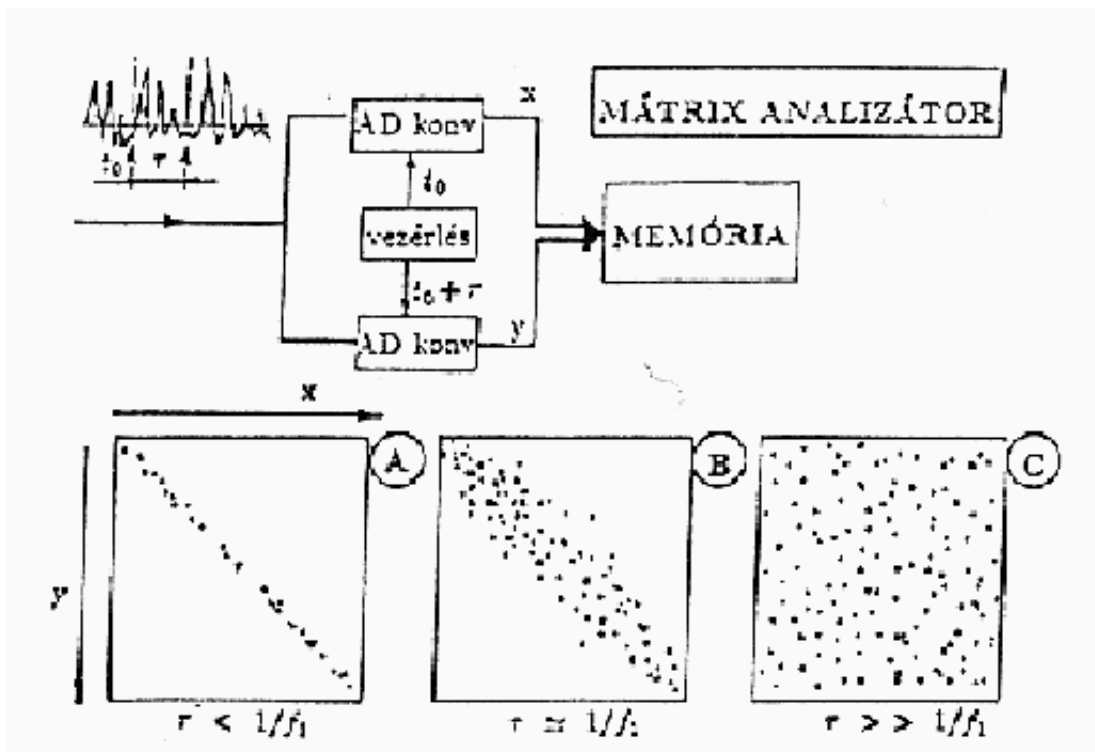
23. Ábra

A véletlenszerű folyamatok statisztikai adatokkal, statisztikai függvényekkel írhatók le (átlagérték, momentumok, stb). A továbbiakban kiemelkedő szerepe lesz az ún. sűrűség- függvényeknek. - Tekintsünk egy véletlenszerű időfüggvényt, melynek pillanatnyi amplitúdója  $x(t)$  és vegyünk belőle sokszor mintát. A mintavételek időpontját is véletlenszerűen -  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  - válasszuk. (Ez bizonyos körülmények között periodikus is lehet.) A  $p(x)dx$  értékkel azt adjuk meg, hogy a jelből véletlenszerű időpontban mintát véve, mekkora valószínűséggel találjuk a mért amplitúdó értéket  $x$  és  $(x+dx)$  között. A  $p(x, y, \tau)dx dy$  kifejezés adja meg, hogy ha két mintavétel között éppen  $\tau$  nagyságú rögzített időkülönbség van, mi a valószínűsége, hogy az egyik mért érték  $x$  és  $(x+dx)$  közé esik, valamint a másik az  $y$  és  $(y+dy)$  közötti amplitúdó tartományban lesz. (24 [p 36] . ábra)



24. Ábra

Ez utóbbi együttes valószínűség értelmezéséhez tekintsük az 25 [p 36] ábra szerinti mérőberendezést. Itt két analóg-digitál átalakító  $\tau$  időkülönbséggel ugyanabból a jeltől vesz mintát. A mért értékeket tároljuk egy mátrix-szerű elrendezésben. Ez - szemléletesen - egy négyzetes memória-blokk, amelyiknek minden elemében egy számláló található. E számlálók tartalma akkor növekszik eggyel, ha az AD konverterek mérési eredményei éppen ezt a cellát jelölik ki, - a mért  $x$  és  $y$  értékekkel. - (Ez a mérési elrendezés a "mátrix analízátor" nevet viseli, és elsődlegesen két nukleáris detektorról érkező különböző amplitúdójú (energiájú) jelek kölcsönös esemény- valószínűségének mérésére szolgál.)



## 25. Ábra

A bemenőjel a jelen esetben legyen  $f_1$  határfrekvenciájú fehér zaj. Ezt a fogalmat majd később alaposabban is megismerjük, - itt csak annyit kell tudnunk róla, hogy lényegében véletlenszerű jel, amelyiknek a frekvenciaspektrumában egy meghatározott értéknél nagyobb frekvenciák egyáltalán nem fordulnak elő.

-Ha  $\tau$  nagyon kicsi (a zaj ún. korrelációs idejéhez képest), akkor  $x$  értékének ismeretében eléggé jól meg lehet jósolni  $y$  mivel a két érték valószínűleg alig tér el egymástól. Ha  $\tau$  növekszik, a jóslás egyre bizonytalanabb lesz, nagy időkülönbségeknél pedig lehetetlen. A mérőberendezés nyilván gyakoriságokat mér, amelyeket bizonyos szabályok betartásával valószínűségekké módosíthatunk. A  $p(x, y, \tau)$

függvényt tehát az előbb ismertetett eszközzel megmérhetjük. Bizonyos ismert mechanizmusú folyamatoknál azonban matematikailag, analitikusan is meghatározhatjuk. Ennek jelentősége azért nagy, mert ennek ismeretében az autokorrelációs függvényt is előállíthatjuk. Az autokorrelációs függvény az alábbi formula alkalmazásával is megkapható:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y, \tau) x dy \quad (1)$$

Ezt a képletet itt nem vezetjük le, csak értelmezzük, illetve elfogadhatóvá tesszük. - Elsőként gondoljuk meg, hogy a korreláció és a keresztkorreláció képleténél mit is csináltunk.: minden  $\tau$  értéknél képeztük a függvényértékek szorzatának összegét. Most is erről van szó: Az  $x dx$  és  $y dy$  értékek a függvényértékek egy-egy sávját jelölik ki. Az integrálási határok arra utalnak, hogy ezek értéke bármi lehet. A  $p(x, y, \tau)$  értékkel azért kell megszoroznunk őket, hogy az előbbi definíció értelmében az együttes előfordulási valószínűségüket is figyelembe vegyük. - Az elemi szorzatokat természetesen összegezni is kell, - erre utal a kétszeres integrálás.

A továbbiakban két érdekes esetet fogunk megvizsgálni azért, hogy a fenti képlet hasznosságáról fogalmat alkothassunk.

- 
- Példa [p 38]
  - Példa [p 39]



[p 38]



[p 31]



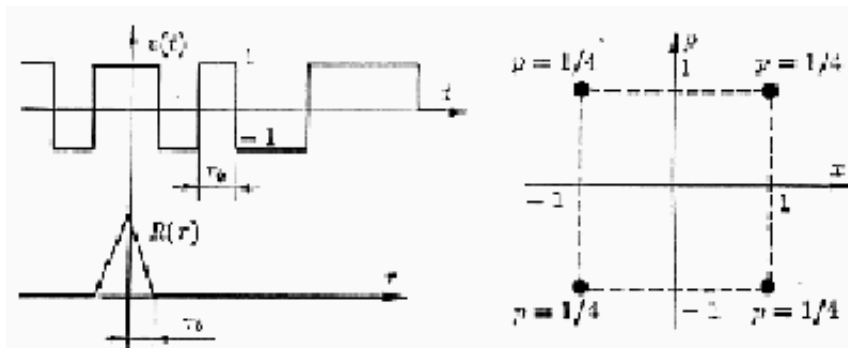
[p 34]

**Következő:** Példa [p 38] **Fel:** Korrelációs függvények [p 31] **Előző:** Kérdésekfeladatok [p 34]

**Következő:** Példa [p 39] **Fel:** Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei [p 35] **Előző**  
 Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei [p 35]

## Példa

Periodikusan ( $T_0$  időközönként) feldobunk egy forintost és a fej/írás határoz meg egy bináris függvényértéket (26 [p 38] . ábra).



26. Ábra

A  $p(x, y, \tau)$  most könnyen előállítható, mivel az egymást követő pénzfeldobások eredményei között semmiféle összefüggés sincs. A fej vagy írás természetesen  $1/2$  valószínűséggel fordul elő, két dobás eredményei pedig  $1/4$  valószínűségűek.

Határozzuk meg a korrelációs függvényt  $\tau > T_0$  esetre a fent bevezetett (1 [p 37]) összefüggés szellemében, - az integrál diszkrét értékekre való felbontásával:

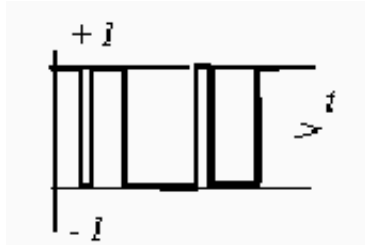
$$R(\tau) = 1 \cdot 1 \cdot p(1, 1) + 1 \cdot (-1) \cdot p(1, -1) + (-1) \cdot (-1) \cdot p(-1, -1) + (-1) \cdot 1 \cdot p(-1, 1) = 0$$

Eredményül azt kaptuk, hogy a dobások közötti korreláció zérus, ami persze természetes is, hiszen ebből indultunk ki. - A  $\tau < T_0$  esetében másként kell eljárunk. Gondoljunk arra, hogy valamilyen véges hosszúságú jel esetén az autokorrelációs függvény értékét elég könnyen megmondhatjuk: ez egy háromszög alakú jel lesz, mivel négyszögjeleket csúsztatunk egymáson. - Az 26 [p 38] . ábrán a teljes korrelációs függvényt feltüntettük.



**Következő:** Összefüggés az autokorrelációs függvény és az [p 40] **Fel:** Véletlenszerű jelek autokorrelációs függvényei [p 35] **Előző Példa** [p 38]

## Példa



27. Ábra

Az 27 [p 39] ábrán ún. "véletlen távírójelet" látunk. Ez úgy áll elő, hogy Poisson eloszlás szabja meg azokat az időpillanatokot, amelyikében az egyébként bináris függvény értékei változnak. (A Poisson eloszlásról a valószínűségszámítás tárgyban lehet bővebben tanulni. Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a radioaktív bomlások időbeni statisztikáját ez az eloszlás írja le. - Az előző esethez képest az most lényeges különbség, hogy itt az értékváltozások időpillanatai véletlenszerűek, nem periodikusak.) A Poisson statisztika szerint annak a valószínűsége, hogy  $\tau$  időtartam alatt éppen  $k$  esemény következik be ( $\tau_0$  az események közötti "átlagos" időtartam):

$$p(k, \tau) = \frac{1}{k!} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^k e^{-\tau/\tau_0}$$

Az autokorrelációs függvény:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= p(\text{páros számú átmenet}) - p(\text{páratlan számú átmenet}) = \\ &= \sum_{k=\text{páros}} \frac{\tau}{\tau_0} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^k e^{-\tau/\tau_0} - \sum_{k=\text{páratlan}} \frac{\tau}{\tau_0} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^k e^{-\tau/\tau_0} \\ &= e^{-\tau/\tau_0} \left[ \sum_{k=\text{páros}} \frac{\tau}{\tau_0} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^k - \sum_{k=\text{páratlan}} \frac{\tau}{\tau_0} \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^k \right] = e^{-\frac{2\tau}{\tau_0}} \end{aligned}$$

Észre kell vennünk, hogy a szögletes zárójelben lévő sorozat éppen egy exponenciális függvény Taylor sora. Mivel az autokorrelációs függvény páros, a végeredmény :

$$R(\tau) = e^{-\frac{2\tau}{\tau_0}}$$

Sikerült tehát ennek a véletlenszerűen viselkedő függvénynek is zárt formában megkapni az autokorrelációs függvényét.

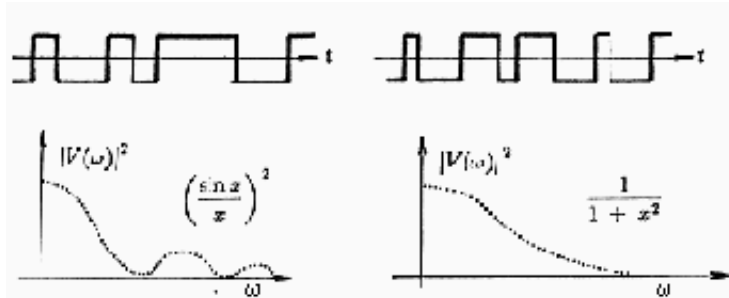
## Összefüggés az autokorrelációs függvény és az energiaspektrum között

Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból igen fontos az alábbi transzformációs pár, amelyeket Wiener tételnek is neveznek:

$$|V(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2)$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega$$

Az autokorrelációs függvény és a jel energiaspektruma között tehát kapcsolat van, egyik ismeretében a másik meghatározható. (A képleteket itt nem bizonyítjuk, de igazságuk eléggé könnyen átlátható, ha arra gondolunk, hogy az autokorrelációs függvényt úgy is megkaphatjuk, hogy egy  $v(t)$  jelet egy  $h(t) = v(-t)$  súlyfüggvényű hálózaton visszük keresztül. (Miért is?) A konvolúciót frekvenciatartományú szorzással helyettesítve közvetlenül jutunk az energiaspektrumhoz, vagyis a Wiener tétel felismeréséhez.) A képletek felhasználásával a fenti 6.2.1 [p 38] . és 6.2.2 [p 39] példa véletlenszerű jeleinek is megkaphatjuk az energiaspektrumát. Az 28 [p 40] ábrán ezek kvalitatív képét láthatjuk. Vegyük észre, hogy az 6.2.1 [p 38] példa generálási folyamatában van periodicitás, ennek nyoma az energiaspektrumban is határozottan megtalálható.



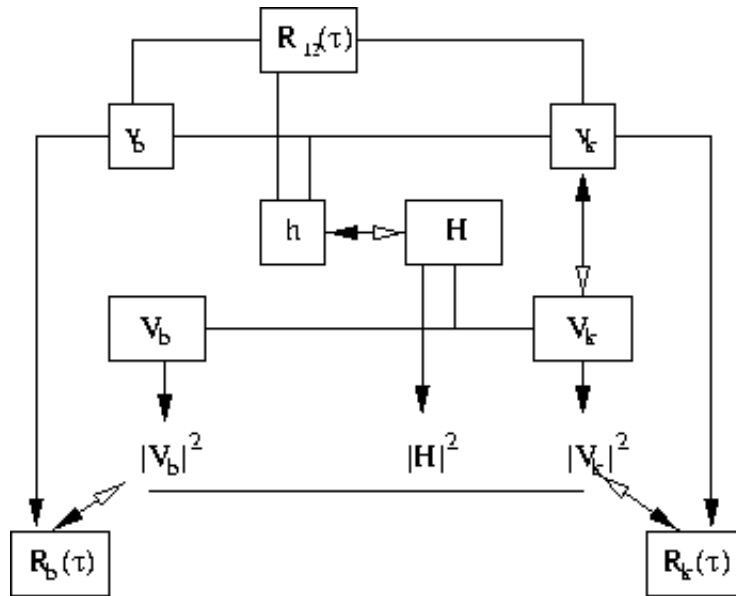
**28. Ábra**

(Nagyon jelentős észrevétel: az autokorrelációs függvényből nem tudjuk az eredeti függvényt visszakapni, - valamifajta információvesztés történik. Természetesen az energiaspektrumból sem lehet a jelet visszaállítani. Fontos azt is tudatosítani, hogy nagyon különböző jeleknek lehet azonos jellegű energiaspektrumuk: például az RC aluláteresztő áramkörre adott ideális impulzus hatására keletkező kimenőjelnek és ugyanezen hálózaton a sávlimitálás nélküli fehér zaj hatására létrejövő kimenőjelnek az energiaspektruma megegyezik.)

**Következő:** Kérdésekfeladatok [p 44] **Fel:** Lineáris rendszerek jellemzői és vizsgálatuk [p 1] **Előző** Összefüggés az autokorrelációs függvény és az [p 40]

## Összefoglalás

Eddigi összefüggéseinket és a közöttük fennálló kapcsolatokat tekinthetjük át az 29 [p 41] ábrán. A fekete-fehér nagyméretű nyilak a Fourier transzformációra, illetve a visszatranszformációra utalnak. A pontok szorzást, vagy konvolúciót jelölnek. - Az ábra jól mutatja, hogy melyek az egyirányú műveletek.

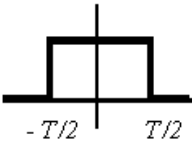


29. Ábra

Az 1 [p 41] táblázat azt foglalja össze, hogy milyen módon határozhatjuk meg egy hálózat/rendszer átviteli jellemzőit. Bár a közölt eljárások műszer/eszköz igénye jócskán különbözik egymástól, e módszerek gyakorlati jelentősége igen nagy.

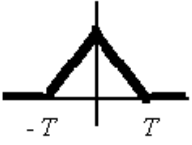
Táblázat 1:

Mérhető, vizsgálható	Bemenet	Kimenet
Frekvenciakarakterisztika	Színuszos generátor, változatható frekvenciával	Amplitúdó és fázismérő
Súlyfüggvény	(Ideális) impulzust adó jelforrás	Időfüggvényt rögzítő eszköz, pl. oszcilloszkóp
Súlyfüggvény	Szélessávú zajforrás	Korrelátor (komputer)



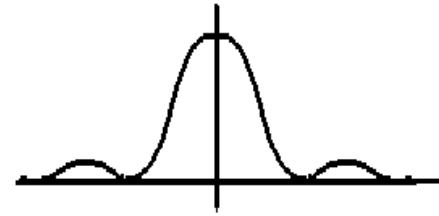
$$1 \quad |t| < T/2$$

$$0 \quad \text{máshol} \quad T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$



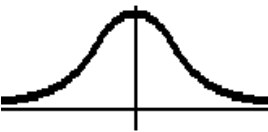
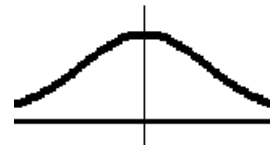
$$1 - \frac{|t|}{T} \quad |t| < T \quad T \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2$$

$$0$$



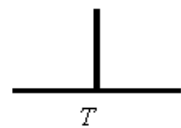
$$e^{-\frac{|t|}{T}}$$

$$\frac{2T}{(\omega T)^2 + 1}$$



$$e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t}{T} \right)^2}$$

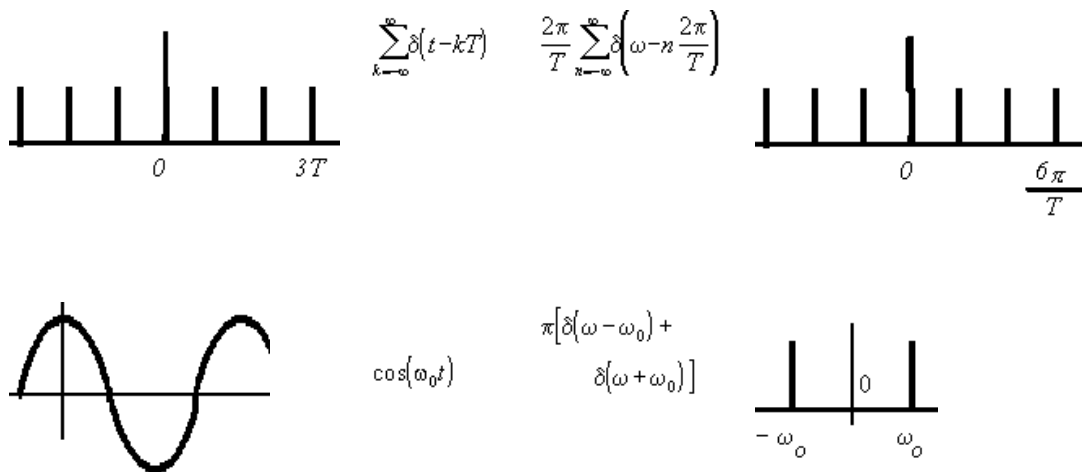
$$\sqrt{2\pi} T e^{-\frac{1}{2} (\omega T)^2}$$



$$\delta(t - T)$$

$$e^{-i\omega T}$$

KOMPLEX



### 30. Ábra

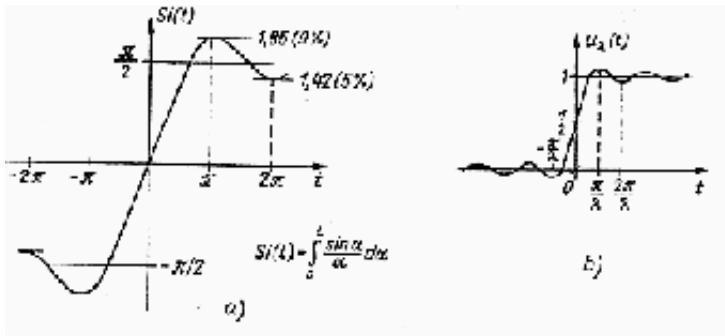
Az 30 [p 41] ábra függvénypárok Fourier transzformáltjairól közöl ábrákat, illetve összefüggéseket.

- négyszögfüggvény Fourier transzformáltja  $\sin(x) / x$  alakú. Természetesen ez visszafelé is igaz, négyszög alakú átviteli görbe az időtartományban  $\sin(x) / x$ -et eredményez;
- háromszög alakú időjel transzformáltja  $(\sin(x)/x)^2$  jellegű lesz;
- szimmetrikus exponenciális függvény jellegű frekvenciaspektrumot eredményez (ez érdekes módon megegyezik az aluláteresztő szűrő amplitúdó-átvitelével);
- a Gauss-görbe alakváltoztatás nélkül transzformálható ide, oda;
- periodikus időbeni impulzussorozat a frekvenciatartományban is periodikus impulzussorozat lesz (ez nagyon fontos, ezt a tényt többször kihasználjuk);
- a koszinusz függvényből két spektrumvonalat kapunk.

- Kérdések, feladatok [p 44]

## Kérdések, feladatok

- Igazolja az 1.10.2. Táblázatban található függvénpárok közötti összefüggéseket.
- Az 31 [p 44] ábra a  $\frac{\sin(x)}{x}$  függvény integrálját mutatja, - ez a függvény táblázatokból elérhető. - Mutassa ki, hogy igaz a Gibbs jelenség, vagyis az ugrásfüggvény átvitel túllövésének relatív mértéke független az aluláteresztő sávszélességétől. Milyen következményei lesznek ennek a gyakorlatban?



31. Ábra

## Digitális jelek feldolgozása

Ebben a fejezetben a digitális jelfeldolgozás legegyszerűbb eljárásairól lesz szó. Ez ma egyértelműen számítógép-centrikus megoldásokat jelent.

Megismerkedünk az analóg-digitál konverterek használatára vonatkozó legfontosabb szabályokkal, majd az ún. digitális szűrők témakörét tekintjük át. Az előző fejezet inkább "matematikus" jellegét itt a komputer számropogató ("number crunching") szerepéből fakadó vonások veszik át.

A digitális jelfeldolgozás előnyei és érdemei szinte megszámlálhatatlanok:

- a digitális számítógépek működése és pontossága normális körülmények között független az alkatrészek értékének változásától;
- a számítógépek könnyen programozhatók nagyon eltérő jellegű feladatok végrehajtására;
- az eredmények kísérteties pontossággal reprodukálhatók, megismételhetők;
- könnyű a feladathoz alkalmazkodni, adaptív programot készíteni;
- a számítógépek standard rutinjai is kiaknázhatók, - az adattömörítés, az adattovábbítás, stb.

Természetesen a gépek működési sebessége nem közömbös: az elmúlt évek félvezető gyártási technológiájának jóvoltából a digitális jelfeldolgozás újabb és újabb területeket hódít el az analóg áramköröktől. Természetesen extrém nagy sebességek esetén (100 MHz-nél nagyobb) csak az utóbbiak jöhetnek számításba.

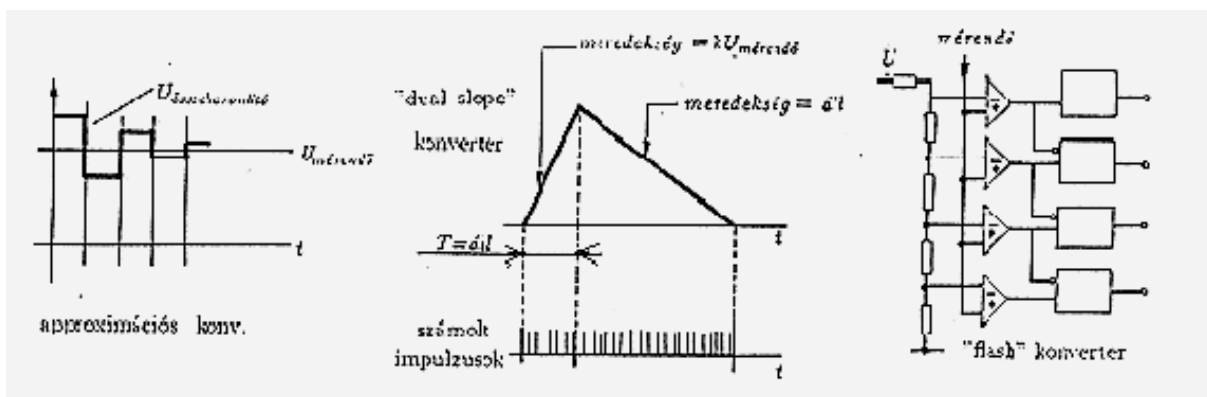
- 
- Analóg - digitál átalakítók [p 46]
  - Mintavételi törvény [p 48]
  - z-transzformáció, digitális szűrők [p 52]
  - Digitális szűrők megvalósítása [p 59]
    - Egy különleges alkalmazási példa [p 64]
  - DFT - diszkrét Fourier transzformáció [p 65]
  - FFT - Fast Fourier Transformation [p 68]
  - Az FFT gyakorlati alkalmazása [p 74]
  - Egyéb eljárások, módszerek [p 77]
  - Wavelet transzformáció [p 80]
    - 16.1 A Daubechies waveletek [p 84]
    - A Diszkrét Wavelet Transzformáció [p 86]
    - Wavelet közelítések [p 89]
  - Tömörítési eljárások [p 92]
-

**Következő:** Mintavételi törvény [p 48] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző** Digitális jelek feldolgozása [p 45]

## Analóg - digitál átalakítók

Az általában időben folytonosan változó mérendő jelekből az ún. mérőátalakítók csinálnak elektromos - többnyire feszültség - jeleket. A mérőátalakítóknak se szeri, se száma: vannak hőmérséket, nyomás, sebesség, páratartalom, elmozdulás, erő, stb. átalakítók. (Talán csak a "lelkierő" mérése a kivétel...) Kimenőjelükből analóg-digitál konverterek segítségével lehet a komputer számára érthető digitális (bináris) mennyiségeket, jeleket előállítani. (L. Elektronika jegyzet 7.3. fejezet.)

Sokfajta, változatos pontosságú, sebességű, stb. konverter létezik. A használatos működési elvek szempontjából az alábbiak a legfontosabbak (32 [p 46] ábra)



32. Ábra

- A (szukcesszív) approximációs konverterek a mérendő jelet barkochba játék módjára hasonlítják össze fokozatosan változó - meghatározott stratégiával választott - értékekkel (részletesebben az Elektronika jegyzetben). Az egyszerű, olcsó konverterek többsége ezen az elven működik. Általában 8-12 bit felbontásúak, konverziós idejük néhány tized- és 40-60 mikroszekundum között változik.
- Az ún. kettős meredekségű (dual slope) konverterekben kialakított jel felfutó szakaszának meredekségét a mérendő jel pillanatnyi amplitúdója szabja meg, - a lefutó él meredeksége állandó, a mért jel amplitúdójától független. Az így kialakuló jel talpszélessége arányos a mérendő jel amplitúdójával. Ennek következtében a mérési eredmény alig függ az alkatrészek hőfokfüggésétől, öregedésüktől. 10 - 14 bit felbontásra készülnek, - tehát viszonylag pontos eredményt adnak, működési sebességük sok feladathoz még megfelelő, - eléggé költségesek.
- Az ún. "flash" konverterek a mérendő jelet különböző, de egyenként állandó értékű feszültség-szintekkel hasonlítják össze és ezek kimeneti logikai értékeiből állítják elő a mért értéket. Míg az előző konverter típusok mérési folyamata határozottan időigényes, a flash konverter - elvileg - végtelenül kicsi idő alatt is szolgáltat mérési eredményt. - Pontosságuk 5-8 bit (ez esetben az ellenálláslánc 256 darabból áll !). Konverziós sebességük a gyakorlatban akkora, hogy tévéképeket folyamatosan tudnak digitalizálni, tehát a kb. 60 mikroszekundumig tartó tv képsoron 400 - 800 mérést végeznek.



Természetesen számos más működésű elvű konverter is létezik. Itt csak azt az eléggé gyakori megoldást említjük, amelynél a lassan változó mérendő jelek folyamatosan módosítják egy oszcillátor frekvenciáját (ez lehet VCO, vagy valamilyen multivibrátor jellegű áramkör). Ebből a jelből vesznek állandó időtartamú mintákat és megszámozzák, hány teljes ciklus érkezett. Ez a szám kerül a számítógépbe.

A konverterek többsége előjeles bináris számokat produkál mérési eredményként, - ezeket a legkényelmesebb feldolgozni.

---



[p 48]



[p 45]

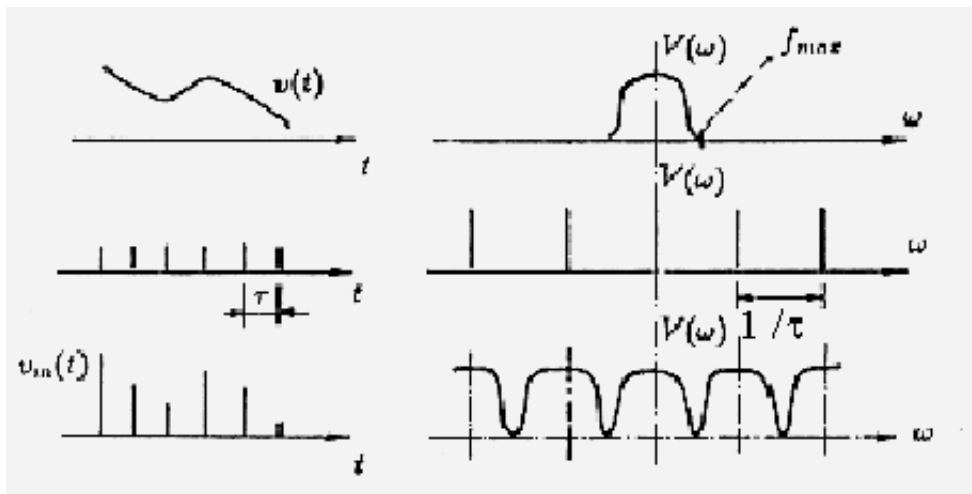


[p 45]

**Következő:** Mintavételi törvény [p 48] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** Digitális jelek feldolgozása [p 45]

## Mintavételi törvény

A folyamatos jelekből történő mintavétel igen nevezetes szabálya az ún. mintavételi törvény. Megértéséhez, értelmezéséhez a 33 [p 48] ábra lesz segítségünkre. Az ábra baloldalán időbeli "eseményeket" látunk, a másik oldalon a frekvenciatérben vizsgáljuk ugyanezeket. - Kiindulásunk alap gondolata, hogy a mintavételezett jel olyan, hogy egy meghatározott érték feletti frekvenciakomponensei azonosan zérus amplitúdójúak. Ezt sávlimitált jelnek nevezik. - Ebből a jelből  $\tau$  időközönként ( $\frac{1}{\tau}$  ismétlődési frekvenciával) veszünk mintát, vagyis a két jelet összeszorozzuk. A mintavett jeleket is feltüntettük.



33. Ábra

A frekvenciatérben is mutatjuk a mérendő jelet, amely az ábra szerint valóban sávlimitált. A második sorban a periodikus impulzussorozat frekvenciaspektrumát látjuk, mely szintén periodikus impulzussorozat lesz, ez  $\frac{1}{\tau}$  frekvenciánként ismétlődik. - Az időbeni szorzásnak a frekvenciatérben konvolúció felel meg, - így könnyen meghatározhatóvá válik a mintavett jel frekvenciaspektruma is. Ez a spektrum a mérendő jel periodikus ismétléséből áll.

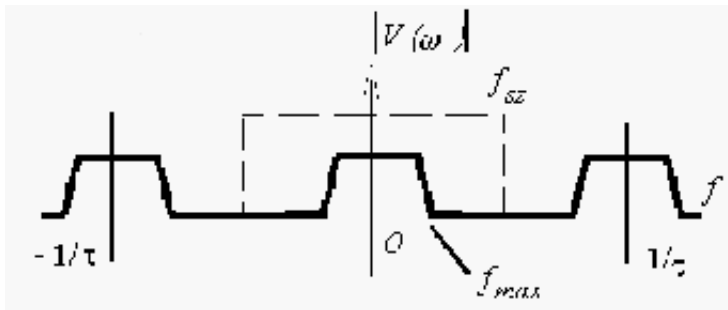
Jól látható, ha  $\tau$  értéke nagyon kicsi, akkor az  $f_{max}$  sávhatáru jelek egyedi frekvenciaspektrumai nagyon határozottan különválnak. Ha a mintavételi frekvencia éppen kétszerese  $f_{max}$ -nak, akkor az egyes szakaszok még éppen nem lapolódnak át. - Az átlapolódás nagy bajt jelent, - ekkor az eredeti spektrumhoz nem kívánt komponensek is társulnak.

Eddigi megállapításaink összegezéséeként az

$$f_{mintavétel} \geq 2f_{max}$$

összefüggéshez jutunk. Ezt nevezik mintavételi törvénynek. E szabály eléggé sok fontos következményt jelent.

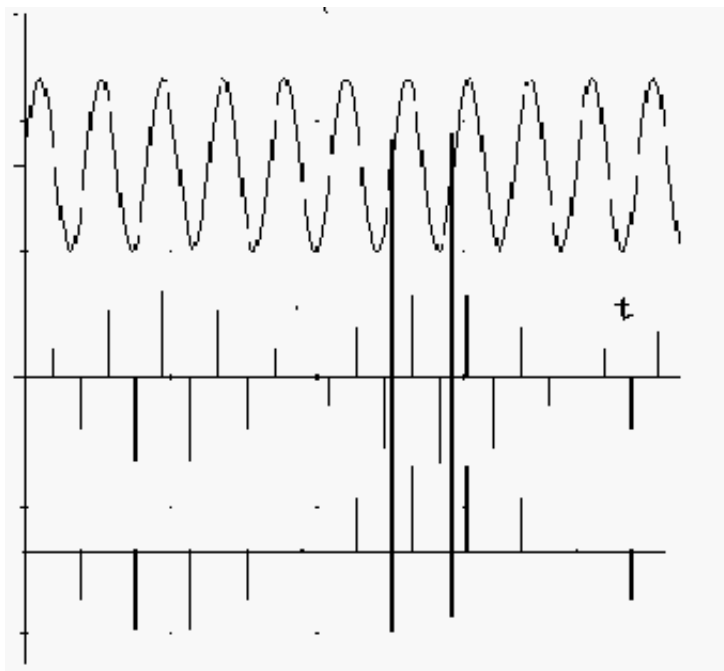
- a jel legmagasabb frekvenciájú komponenséből is legalább két mintát kell vennünk.
- az ilyen módon mintavett jelekből az eredeti jel tökéletesen rekonstruálható, ha a mintavett impulzusokat egy - jól megválasztott - felső határfrekvenciájú ideális aluláteresztőn bocsátjuk keresztül (34 [p 49] ábra).



34. Ábra

Ez az állítás némiképpen meghökkentő, mert azt jelenti, hogy periodikus ideális impulzussorozatból az impulzusok közötti időszakaszra vonatkozó információ is visszanyerhető. Természetesen csak akkor, ha a mintavétel a fenti megkötésnek megfelelt és a jel ténylegesen sávlimitált volt. (Ez utóbbi azonban - ha valaki jobban belegondol - fizikailag lehetetlen feltevés.)

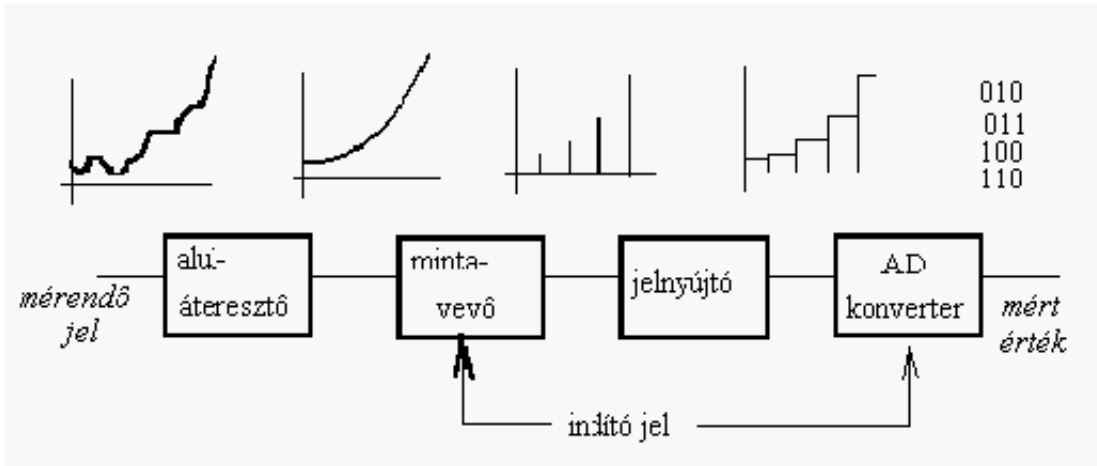
- a mintavételi törvény betartása esetén is sok meglepetés érhet bennünket. Utalunk a 40 [p 55] ábrára, ahol az ábra felső részén egy szinuszos jelet látunk. Ha ebből a mintavételi törvény szerint mintákat veszünk (vagyis periódusonként legalább kettőt), akkor az ábra középső részén látható furcsa jelsorozathoz jutunk. Ezt - megfelelő szűrővel - az eredeti szinuszos jellel alakítani.



35. Ábra

Ha azonban az eredeti jeltől csak periódusonként egy mintát veszünk, az ábra alsó részén látható képhez jutunk. Ez egy egészen más - sokkal alacsonyabb - frekvenciájú szinusszá alakítható csak vissza.

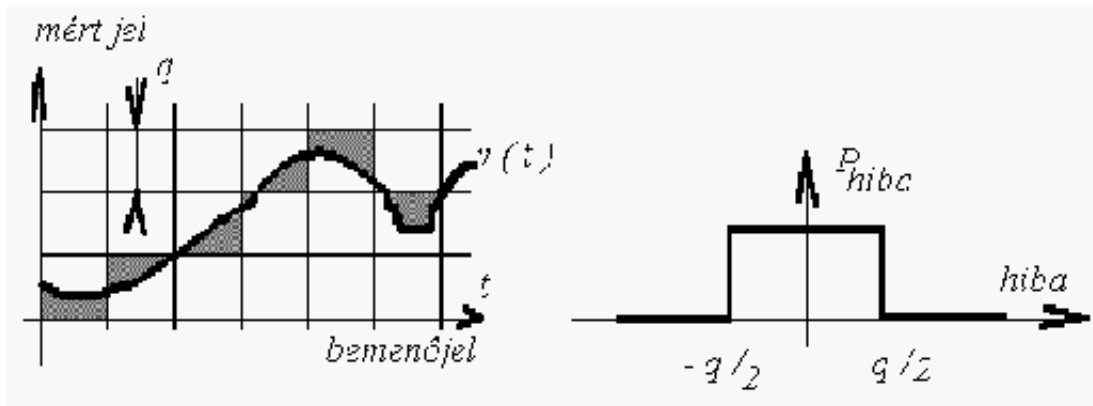
- felmerülhet az a kérdés, hogyan lehet biztosítani, hogy a mérendő jel sávlimitált legyen. Sajnos, csak a módszer áll rendelkezésünkre, hogy a konverter bemenete elé egy valóságos aluláteresztő szűrőt helyezünk. Ez a persze sohasem ideális és a zárási sávjában is található kisebb amplitúdójú frekvencia komponensek. - Ez a szűrő a bemeneti jel hirtelen, tükyszerű ugrásait erősen mérsékeli. Eredményeképpen a gyakorlatban ténylegesen használható analóg-digitál átalakítók szinte kötelezően a 36 [p 50] ábra szerinti egységekből épülnek fel.



36. Ábra

Az könnyen átlátható, hogy a szűrő felső frekvencia-határának illeszkednie kell a maximális sebességű minta-vétel frekvenciájához. Az ábrán feltüntetettük az egyes egységek kimenetén található jelalakokat, értékeket.

Befejezésül az analóg-digitális átalakítás egy fontos mellékhatásáról kell megemlékeznünk. A 37 [p 50] ábrán olyan konvertert látunk, amely 2 bit felbontóképességű, vagyis négy szintet képes megkülönböztetni.



37. Ábra

A  $v(t)$  függvényt a mért értékek csak közelítik. Az ábrán jól látható az ún. kvantum-nagyság ( $q$ ), a legkisebb, mérésel megkülönböztethető bemenőjel. (A bemenőjel szó nem hiba: az ábra abban a szellemben készült, hogy a bemenőjel és a kimenőjel skálája azonos.) Elvben a  $q$  értéknek a fele fordul elő maximális hibaként, - konverter szinte sohasem mér hiba nélkül. Ez a gyakorlati alkalmazások egy részében - pl. a hangfrekvenciás jelek digitalizálásánál - kellemetlen hatásként, zajként jelenik meg. - Az ábra jobboldali részén azt az esetet tüntettük fel, amikor e hibahatárok

közötti érték előfordulási valószínűsége azonos. - Ebből a hibaeloszlásból a zaj mértéke pontosan meghatározható. Annyit kell erről megjegyeznünk, hogy 10 - 12 bit felbontásnál jobb konverterek esetén a zaj már elhanyagolható.

---



[p 52]



[p 45]



[p 46]

**Következő:** z-transzformációdigitális szűrők [p 52] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** Analóg - digitál átalakítók [p 46]

## z-transzformáció, digitális szűrők

A mintavett jelek feldolgozási lehetőségeinek talán legfontosabb területe az, amit összefoglaló névvel digitális szűrőknek neveznek. Kialakulását a digitális mérés technika, valamint a komputer elterjedése tette lehetővé, illetve határozottan sürgette. Ez a módszer hardware és software elemekkel évről évre gyarapszik és alkalmazási területeinek korlátjai ma még nem látszanak. A matematikailag korrekt elmélet eléggé terjedelmes, esetenként nehéz. Mi itt nem ezt az utat követjük, hanem az elméleti eredményeket egyszerű példákon illusztráljuk és általános érvényűnek nyilvánítjuk.

A digitális szűrőt úgy tekintjük, mint egy eljárást, amely egy  $x_n$  elemekből álló bemeneti számsorozatot  $y_n$  számsorozattá transzformál. Ily módon tulajdonképpen általánosítjuk az eddig általunk használt egyszerű szűrő-fogalmat. - A digitális szűrő vázlata 38 [p 53] ábrán látható: lényegében késleltető elemekből áll, amelyek kimeneteit súlyfaktorokkal szorozva összegezzük. A késleltető elemek mindegyike egy szám tárolására alkalmas, ezek tartalma - hurkatöltő módjára - egyszerre mozog, ahogy ezt már a shift-regiszterek esetén is láttuk. (Elektronika jegyzet, 115. o.) A számok mozgását a teljes rendszerre hatásos "clock", vagy szinkronjel végzi, - ezt általában nem tüntetjük fel, ennek ellenére minden esetben a rendszerhez tartozónak tekintjük. A késleltető lánc periodikusan is, de nem periodikusan is mozgatható.

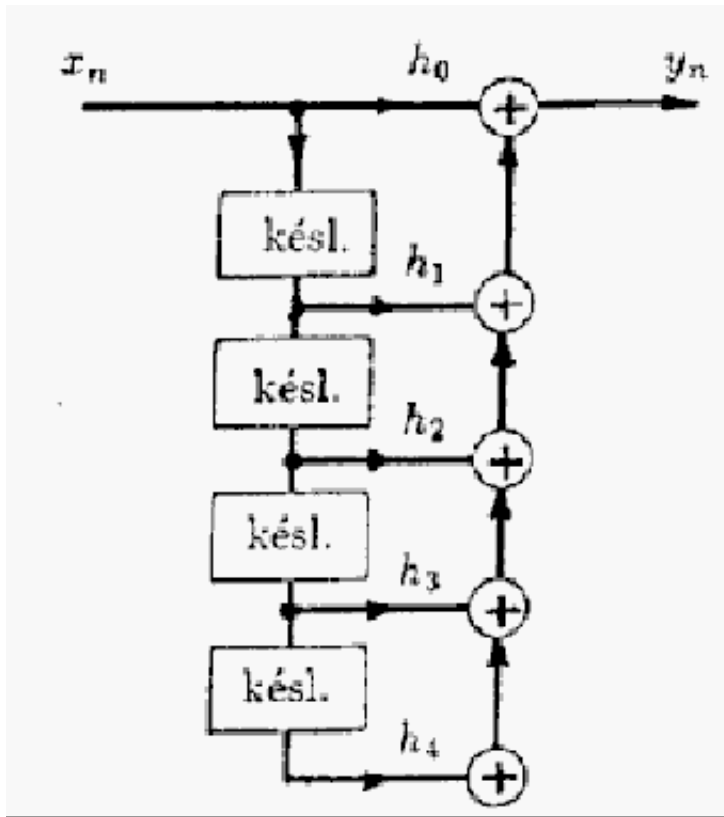
Kézenfekvő, hogy a folyamatos jelek vizsgálatánál megszokott ideális impulzust (delta függvényt), és annak hatására keletkező súlyfüggvényt értelemszerűen diszkrét jelekre is alkalmazzuk. - A

súlyfüggvényt most  $h_n$ -nel jelöljük, ezt az ún. Kronecker-delta hatására kapjuk. A delta függvény egyetlen egyesből áll, ami előtt és mögött zérusok állnak.

Nézzük végig figyelmesen az (3 [p 52]) táblázatot, amelyből azt a fontos következtetést vonhatjuk le,

hogy a bemeneti Kronecker deltából  $h_n$  kimeneti számsort kapunk, melynek értékeit a  $h_0, h_4$  - súlyfaktorok szabják meg. (Ebben a konkrét esetben a súlyfaktorok értékeit 3, 5, 7, 2, -3 értékűre választottuk.) Egy fontos felfedezést kell tennünk: ezzel a módszerrel akármilyen súlyfüggvényt is közelíthetünk, még olyanokat is, amelyek fizikai hálózatokkal nem hozhatók létre !

$n$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
Bemenő számsor (Kronecker- $\delta$ )	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
kimenő számsor	0	0	3	5	7	2	-3	0	0	(3)
$y_n = h_n$										



38. Ábra

E fogalom felhasználásával a diszkrét jelekre vonatkozó konvolúció az alábbiak szerinti:

$$y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{n-m} h_m$$

Ennek értelmezéséhez vizsgáljunk egy példát részletesen (4 [p 53] Táblázat). A súlyfaktorok (vagyis  $h_n$  meghatározói) most legyenek 1, 3, 12, -11, -0.1; - a bemenő számsor pedig 1, 5, 13, 0, -6, -10. - A "történést", vagyis a számok áthaladását a 38 [p 53] ábra szerinti eszközön könnyen áttekinthetjük. Az alábbi sémán ((4 [p 53] ) táblázat) ezt látjuk:

1	3	12	-11	-0.1	*	1	5	13	0	-6	-10
1	3	12	-11	-0.1							
	5	15	60	-55	-0.5						
		13	39	-141	-1.3						
			0	0	0	0	0				
				-5	-18	-72	66	0.6			
					-10	-30	-120	110	1		
1	8	40	88	94.9	-171.5	-103.3	-54	110.6	1		

(4)

Az tűnik fel, hogy a konvolúció látszólag szorzás jellegű. Ez természetes is, mert az egyes bejövő értékek "egy helyértékkel - időben(?) - eltolva" adódnak össze. A fenti "furcsa" szorzás eredménye arra utal, hogy polinom szorzást végeztünk.

Természetesen az előbb megadott  $x^n$  és  $h_n$  számértékeket egy polinom együtthatóinak is tekinthetjük. A polinom változójának megadásában látszólag szabad kezünk van. Lehetne  $x$  egész kitevőjű hatványait is használni, azonban mi itt a késleltetés mértékére a  $z^{-1}$  egész számú hatványait fogjuk használni. Ennek oka az, hogy az ún.  $z$ -transzformáció tradicionális elnevezés és jelentősége manapság rendkívül fontos. A negatív kitevőjű hatványok a transzformáció matematikáját jelentősen egyszerűsítik. Így tehát a fenti "szorzás" eredményét úgy is felírhatjuk, hogy:

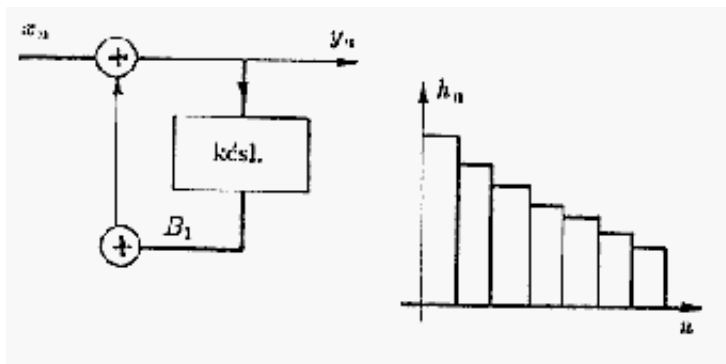
$$(1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} - 11z^{-3} - 0.1z^{-4})(1 + 5z^{-1} + 13z^{-2} - 6z^{-4} - 10z^{-5})$$

A fentiekből azt látjuk, hogy a polinom szorzást és a  $z$ -transzformáció szerint kifejezett számértékek sorát közeli rokonság fűzi egybe. Az is fontos felfedezés, hogy a közönséges, elemi iskolában tanult szorzás és konvolúció között sok, lényegi összefüggés rejlik.

A bemenő számsort, a súlyfüggvényt, a kimeneti számsort kibővíthetjük  $z$  megfelelő hatványaival. Az így keletkező polinomokat  $z$ -transzformáltaknak nevezzük. Közöttük a következő - triviálisnak tűnő - összefüggés áll fenn:

$$Y_z = H_z X_z$$

A  $z$ -transzformáción alapuló digitális szűrők 33 [p 48] ábra szerinti típusát véges impulzusválaszú szűrőknek nevezik (finite impulse response = FIR). Nyilvánvaló, hogy a súlyfüggvénynek csak annyi eleme lehet, ahány késleltető elemet használunk.



39. Ábra

A FIR szűrők mellett azonban léteznek IIR (infinite impulse response) szűrők is. Ezek legegyszerűbb változata a 39 [p 54] ábrán látható. Működését könnyen megérthetjük, ha azt gondoljuk, hogy

$$B_1 = 0.9$$

bemenetére egy Kronecker delta érkezik. Ha  $B_1 = 0.9$ , akkor a kimeneti számsor 1, 0.9, 0.81, stb lesz, - és ez a geometriai sor végtelen hosszú lehet (pontosabban: ez a sorozat is véges, mert a számítógép által kezelhető legkisebb számig tarthat csak). Viszonylag könnyen, zárt formában is fel tudjuk írni a kimenő számsor  $z$ -transzformáltját (a geometriai sorokra vonatkozó összefüggések alapján):

$$H(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} B^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{B}{z}\right)^m = \frac{1}{1 - Bz^{-1}}$$

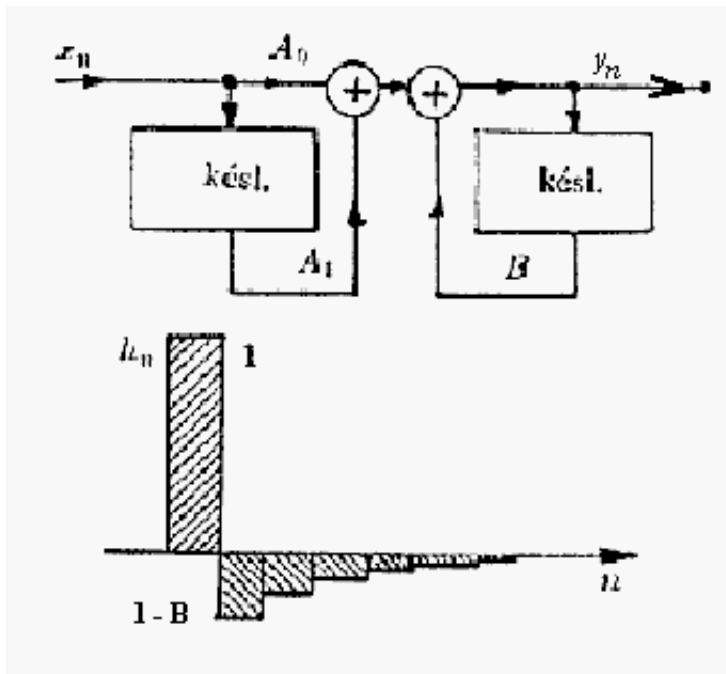


Természetesen ez csak akkor konvergens, ha  $B/z < 1$ . (Kicsit pontosabban:  $B$  semmiképpen nem lehet egyenél nagyobb, mert 39 [p 54] ábrán látható sémánk szerint ilyenkor a kimenet korlátlanul nagygyá válik.) Az a következmény is eléggé meglepő, hogy itt végtelen hosszan tartó súlyfüggvényhez jutunk egyetlen késleltető elem felhasználásával. Az előbbi eredményt azonban másként is megkaphatjuk az ábra alapján:

$$y_n = x_n + B y_n z^{-1}$$

$$y_n = \frac{1}{1 - B z^{-1}} x_n$$

A 39 [p 54] ábra szerinti digitális szűrő tehát úgy viselkedik, mint egy kváziintegráló áramkör, - legalábbis a súlyfüggvényük lényegileg hasonló. Vajon hogyan lehetne kvázidifferenciáló jellegű digitális szűrőt csinálni? A 40 [p 55] ábra ezt mutatja. Mivel a kvázidifferenciáló áramkör súlyfüggvénye egy delta függvénnyel kezdődik, ezért az előbb tárgyalt IIR szűrőt egy FIR szűrővel egészítjük ki. - Az ábra mutatja a  $h_n$  súlyfüggvényt, - ez éppen megfelelőnek tűnik.



40. Ábra

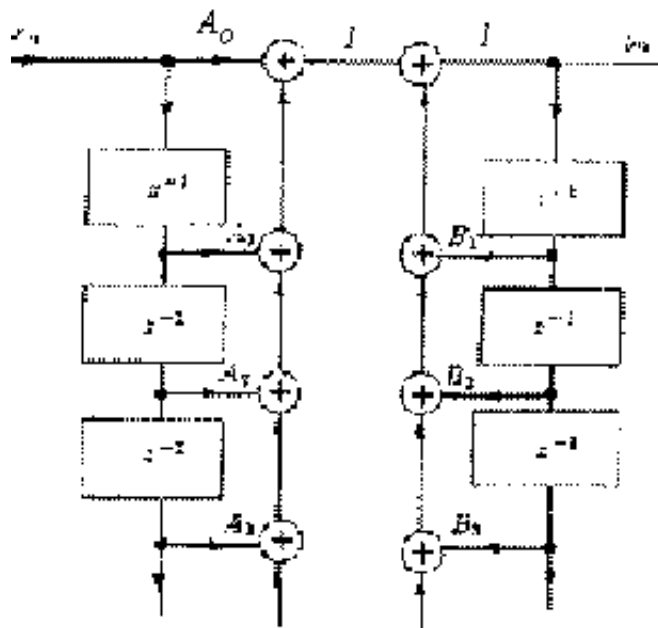
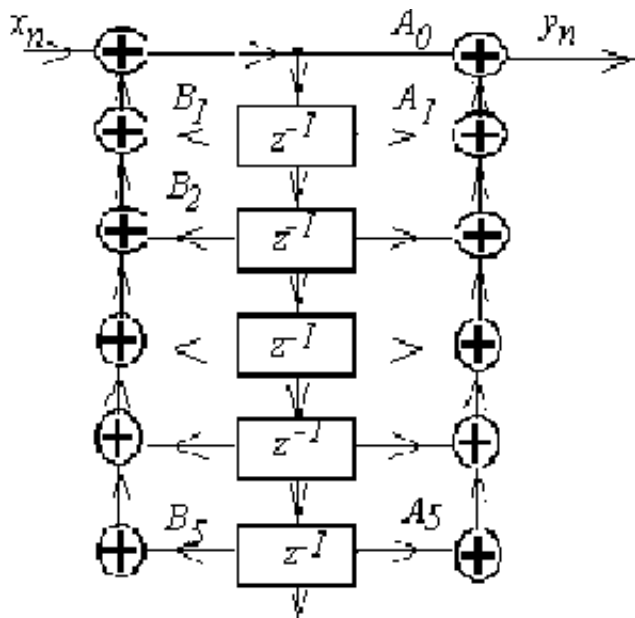
Kiszámolhatjuk ennek z-transzformáltját is:

$$y_n = A_0 x_n + A_1 z^{-1} x_n - B z^{-1} y_n$$

$$y_n = \frac{A_0 + A_1 z^{-1}}{1 - B z^{-1}} x_n$$

Érdekes módon a súlyfüggvény z-transzformáltját most egy törtfüggvény írja le. Ha  $A_0 = 1$  és  $A_1 = -1$

-et választunk, akkor a bemeneti Kronecker deltából éppen egy darab kimeneti jel származik. Ehhez kapcsolódik az IIR rész exponenciálisan csökkenő jele.



41. Ábra

A fentieket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a digitális szűrők általános alakja a 41 [p 56] ábra szerinti, a szűrő súlyfüggvénye pedig egy racionális törtfüggvény. A kimenő számsor részben a bemeneti, részben pedig a kimeneti számsorból alakul ki. Tudnunk kell azt is, hogy a 41 [p 56] ábra (bal oldala) szerinti általános megoldásnál "tömörebb" kevesebb késleltető elemet használó sémák is léteznek. Erre példát a 42 [p 57] ábra jobb oldalán látunk. - Egy általános  $z$ -transzformált az alábbi formában írható fel:

$$H(z) = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \dots + A_k z^{-k}}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \dots + B_m z^{-m}}$$

Érdeemes észrevenni, hogy  $B_0$  értéke csak egy lehet, továbbá  $k$  és  $m$  értékének nem kell megegyezniük.

A racionális törtfüggvények számos tulajdonságát használhatjuk ki, például azt, hogy a nevezőt rész-polinomok szorzataként is előállíthatjuk, - így a transzformáció a komputer számára egyszerűbb, gyorsabb lesz. (Pl. egy páros fokszámú polinomot másodfokú kifejezések szorzataként is realizálhatunk, - ahogy ez gyakorlatban sokszor meg is történik.)

A parciális törtekre bontás hasznosságára mutatunk egy példát. Az alábbi  $H(z)$  függvény "szelídnék" tűnik. Ha azonban megkeressük a nevező gyökeit (ezek  $2/3$  illetve  $-5/3$  nagyságúak) és felírjuk a részlettörteket, akkor azonnal szembe tűnik, hogy az egyik tört nem lehet stabil.

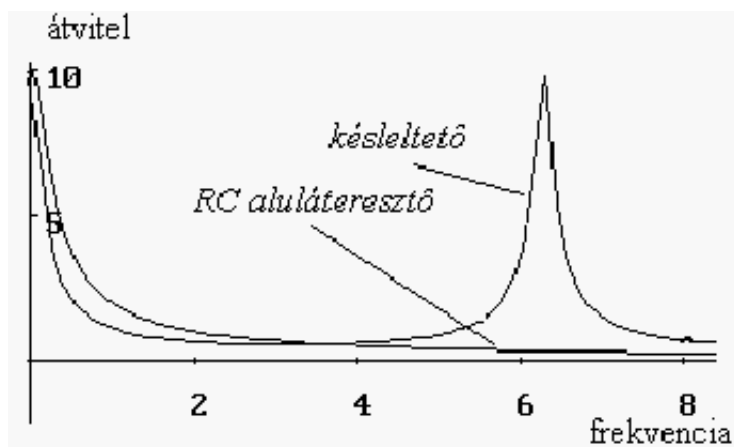
$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1} - 0.9z^{-2}} \Rightarrow \frac{a}{1 - 15z^{-1}} + \frac{b}{1 + 0.6z^{-1}}$$

Valóban, ha ezt a  $z$ -transzformációt a DSPLAY programba beírjuk, futtatásakor a program "elszáll", így adva tudtukra, hogy  $H(z)$ -t rosszul választottuk meg. (A  $z$ -transzformáltak stabilitásának vizsgálata az alkalmazások nagyon lényeges része!)

Érdekes és tanulságos eredményhez jutunk, ha a 39 [p 54] ábra szerinti "kváziintegráló" elrendezést kicsit más szemszögből vizsgáljuk. Képzeld el, hogy eddigi, diszkrét időpontokban történő léptetési feltételezéseink kibővítéseként most a késleltető elem valódi késleltetést nyújt. - Egy művonal darab, vagy üvegszál kábel alkotja a késleltetőt, amelyek tehát folytonos (analóg) jeleket is késleltetnek. Ha a 39 [p 54] ábrán látható kapcsolás bemenetére Dirac-deltát adunk, a kimeneti frekvenciakarakterisztika könnyen előállítható. A  $\tau$  késleltetésű rendszer impulzusátvitelére ugyanis  $e^{-j\omega\tau}$ , vagyis az ábra szerinti kapcsolás amplitúdó átvitele:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 - Be^{-j\omega\tau}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + B^2 - 2B \cos(\omega\tau)}}$$

Ez a karakterisztika  $\omega\tau = 2\pi$  szerint periodikus. Érdekes ezt az átviteli karakterisztikát az RC kváziintegráló kapcsolás átvitelével összehasonlítani. A két karakterisztika látható a 42 [p 57] ábrán. Mindkét görbe kezdeti szakasza nagyjából hasonló, azonban az RC áramkör átvitele a frekvencia növekedésével monoton csökken, míg a késleltető áramköré ettől lényegesen eltér. Figyeljünk fel arra, hogy ez a karakterisztika a periodikus mintavételi eljárás során keletkező frekvencia-átvitellel lényegében megegyezik (32 [p 46] ábra).



## 42. Ábra

---



[p 59]



[p 45]



[p 48]

**Következő:** Digitális szűrők megvalósítása [p 59] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** Mintavételi törvény [p 48]



[p 64]



[p 45]



[p 52]

**Következő:** Egy különleges alkalmazási példa [p 64] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző** z-transzformációdigitális szűrők [p 52]

## Digitális szűrők megvalósítása

A z-transzformáción alapuló digitális szűrők igen széles alkalmazási területeket hódítottak meg. Ezek közül a legfontosabbak:

- híradástechnikai jelek kezelése (pl. kommunikációs hálózatokban);
- képfeldolgozás;
- hangfrekvenciás technika (beszédfelismerés, szintetizálás, stb.);
- mérésadat feldolgozás fizikusi, vegyészeti, biológusi, stb. feladatként.

Az első három csoportban általában speciális cél-processzorokkal valósítják meg a digitális szűrőket. Ezek a szorzást, összeadást igen gyorsan végzik, utasításrendszerük e cél érdekében hatékony, vagyis elsősorban nagysebességű. Ez utóbbi érdekében számos - a digitális jelfeldolgozás technikájában használatos - utasítást gépi utasításként valósítanak meg. (Csak példaképpen: a gyors Fourier transzformációban szükséges az adatok keverése ("scrambling"). Általában egy erre a célra készített algoritmusból készítenek programot, amely 10 - 15 gépi utasítást jelent, benne több ciklussal. A célprocesszorok számára ez csak egyetlen gépi utasításból áll, mivel ezekben a szükséges hardware elemek is eleve be vannak építve.) A mérésadat kiértékelési gyakorlatban - ahol az adatok kiértékelése csak a mérés befejezése után kezdődik, a megvalósítás leggyakoribb módja a számítógépes program írása, futtatása.

A mérésadat-feldolgozásban elsősorban az alábbi célok, módszerek szoktak érvényesülni:

1. A nemkívánatos zavarokat, zajhatásokat csökkenteni akarjuk. Legegyszerűbb eljárás, ha a hasznos jel frekvenciatartományán kívüli zajszerű jeleket a lehető legkisebbre csökkentjük. Ilyenkor a sávlimitálás, az áteresztő sáv célszerű megválasztása a feladat. Nagyon sok helyen használják erre a célra az ún. Wiener szűrőt.
2. Digitális szűrőkkel viszonylag egyszerűen készíthetünk dekonvolúciós, vagy egyéb korrekciós hálózatokat - ezek a mérő rendszer elkerülhetetlen lineáris torzításait hivatottak kompenzálni. Úgyes, átgondolt alkalmazásuk lényegesen növelheti a mérés felbontóképességét.

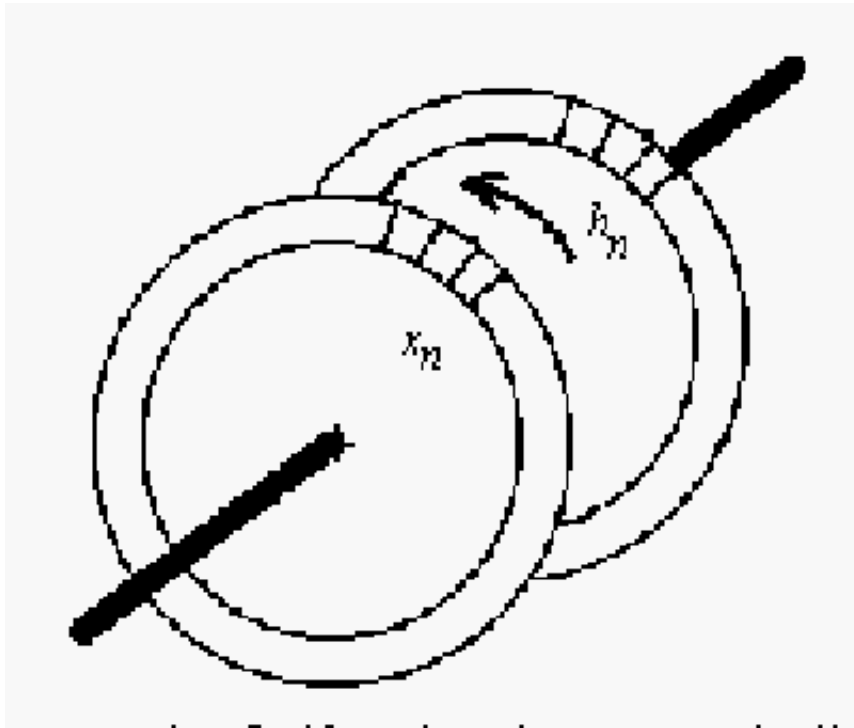
Kis túlzással azt mondhatnánk, ha egy mintavételezett mérési adatsort digitális szűrő nélkül dolgoztunk fel, akkor feltehetően jócskán "dobáltunk el" információt, ami a mérés ésszerűségét, pontosságát, tervezettségét ugyancsak megkérdőjelezi.

A fenti feladatok digitális szűrővel való megoldása a következő előnyökkel jár:

- nagyobb pontosság érhető el velük, mint LRC áramkörökkel,
- olyan szűrők is megvalósíthatók, amelyeknek nem létezik valós, RLC elemekből készíthető megfelelőjük,
- a szűrőkarakterisztikák az együtthatók cseréjével igen egyszerűen és gyorsan módosíthatók,
- készíthetők ún. adaptív, vagyis a feladathoz automatikusan alkalmazkodó szűrők is,
- nem hatnak rájuk a hőmérséklet és az egyéb klimatikus tényezők.

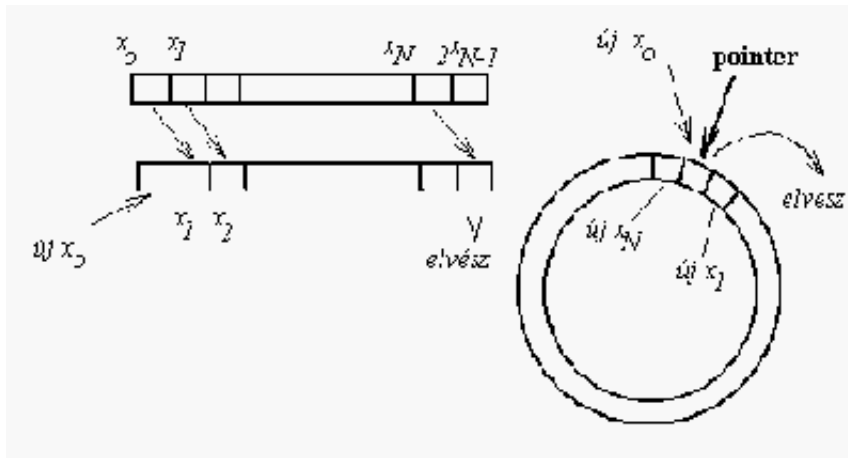
Azt is vegyük észre, hogy a digitális szűrők általános sémái ( 41 [p 56] ábra) lényegében egy számítógépes program flowdiagram szerű megadásai: a programokat ezen ábrák alapján könnyen lehet "kódolni".

A digitális szűrők (ideértve a gyors Fourier transzformációt is) lényegében a 43 [p 60] ábra szerinti elven dolgoznak. Két tárcsát kell elképzelnünk, amelyik egyikének a "fogain" a bejövő adatsor foglal helyet, a másik tárcsán pedig a súlyfaktorok, a súlyfüggvény diszkrét értékei. Az egymást fedő számokat össze kell szoroznunk, ezeknek kell az összegét képezni. - Ezután az egyik tárcsát egy osztásnyit el kell fordítani és az előző műveletet megismételni.



43. Ábra

A digitális szűrők használata során az ún. gyűrűs tárolók eléggé elterjedtek. Egy megszokott számítógépben a memóriahelyek "lineáris" elrendezése a természetes (l. 44 [p 61] ábra). Folyamatosan érkező mérési adatok azonnali feldolgozása esetén azonban az adatok léptetése feleslegesen időigényes (az n-ik helyen mindig az adatsor (n-1) -ik adata található). A gyűrűs séma lehetővé teszi, hogy egy új adatot a legrégebbi helyére írjunk, - fenntartva így az adatok helyes sorrendjét. Természetesen ilyenkor egy körbe járó és az új adat bevételezésénél tovább léptetett mutatót (pointer) is használnunk kell.



44. Ábra

A digitális jelfeldolgozás komputeres változatának szépség-hibájaként csak azt említhetjük, hogy a véges számábrázolási pontosság valamelyest zajkeltő hatást jelent; továbbá azt, hogy a feldolgozás számokkal zajlik, tehát a frekvenciákra, különösen a mintavételi frekvencia értékére gondosan ügyelni kell.

Befejezésül röviden áttekintjük a leggyakrabban használt szűrők típusait, legfontosabb tulajdonságaikat. A szűrők igen változatosak, - tervezési módszereik már régen kialakultak.

Először tekintsük célunknak azt, hogy olyan aluláteresztő szűrőt kívánunk tervezni, amely átviteli sávjának a csillapítása állandó, illetve monoton változik, - e felett azonban a csillapítás minél meredekebben növekedjen.

Az ún. Butterworth szűrőknél a frekvenciakarakterisztikát úgy választják meg, hogy az az alábbi alakú legyen:

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + a_3(j\omega)^3 + \dots} \right| = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}}$$

45. Ábra

(A nevezőben lévő hatvány parabolát definiál, mely annál hosszabban állandó értékű, minél nagyobb  $n$ , mivel így egyre több differenciálhányadosa lesz az origóban zérus értékű. Ha a parabola emelkedni kezd, akkor  $n$  növelésével meredeksége is növekszik. - Ne feledkezzünk meg arról, hogy most a nevezőben szereplő hatvány viselkedését néztük, a szűrő átvitelét az  $1 / (1 + xn)$  függvény szabja meg, - pont ilyen tulajdonságokat akartunk elérni.)

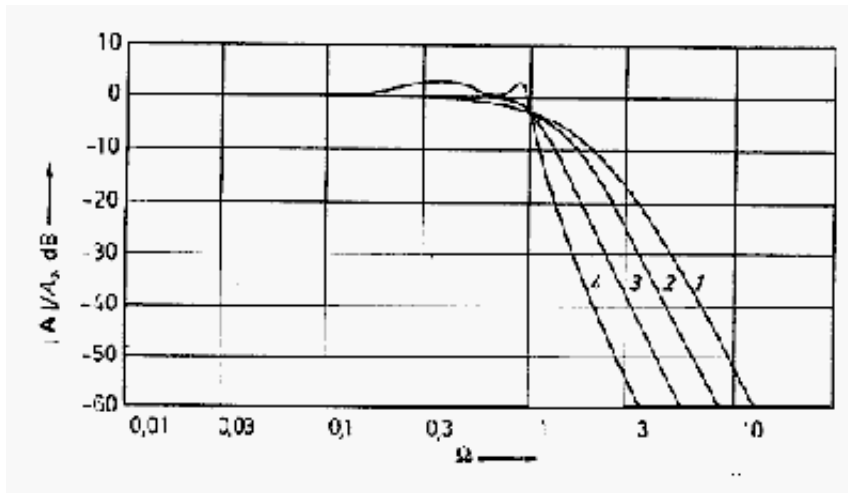
A Butterworth szűrők tervezéséhez táblázatok állnak rendelkezésre, ezek lényegében a megfelelő együtthatókat ( $a_1, a_2, a_3$  stb.) tartalmazzák.

Az ún. Csebisev szűrők polinom struktúrája egészen más: itt az áteresztő sávban megengednek valamekkora értékű átvitel-ingadozást, külön definiálják a záró sávot, ahol előírnak egy minimális csillapítás értéket, de ebben a sávban is ingadozhat az átviteli csillapítás.

Végül a Bessel szűrők átviteli törtfüggvényét úgy alakítják ki, hogy a kialakuló rendszer

fáziskarakterisztikája -  $\phi(\omega)$  - minél szélesebb sávban legyen lineáris. Ennek fontosságát már láttuk az 3 [p 19] fejezetben.

E három szűrőtípus frekvenciakarakterisztikájának összehasonlítására a 46 [p 62] ábrán láthatunk példát (negyedfokú szűrők karakterisztikák; 1 = kritikusan csillapított; 2 = Bessel; 3 = Butterworth; 4 = Csebisev szűrő). Jól látszik a Csebisev szűrő átviteli ingadozása az áteresztő sávban. - Gyakorlati szempontból nagyon fontos ezeknek a szűrőknek a bemeneti ugrásfüggvény átvitele. A 47 [p 63] ábra azt mutatja, hogy a kritikusan csillapított rendszer (1. Bevezető jegyzet, Rezgőkörök fejezete) nem eredményez túllövést és a jelfelfutás is eléggé gyors. A Butterworth szűrő alkalmazása kismértékű túllövést jelent, viszonylag gyors felfutási idővel. A Csebisev szűrő felfutása sokkal gyorsabb, de túllövése is nagyobb. A Bessel szűrő viszonylag lomha felfutású. (1 = kritikusan csillapított; 2 = Bessel; 3 = Butterworth; 4 és 5 = Csebisev szűrők)



46. Ábra

A "gyorsaság és lengedezés" közötti választás lényegében az alkalmazási feladat jellegétől függ, és mindig komoly megfontolást igényel.

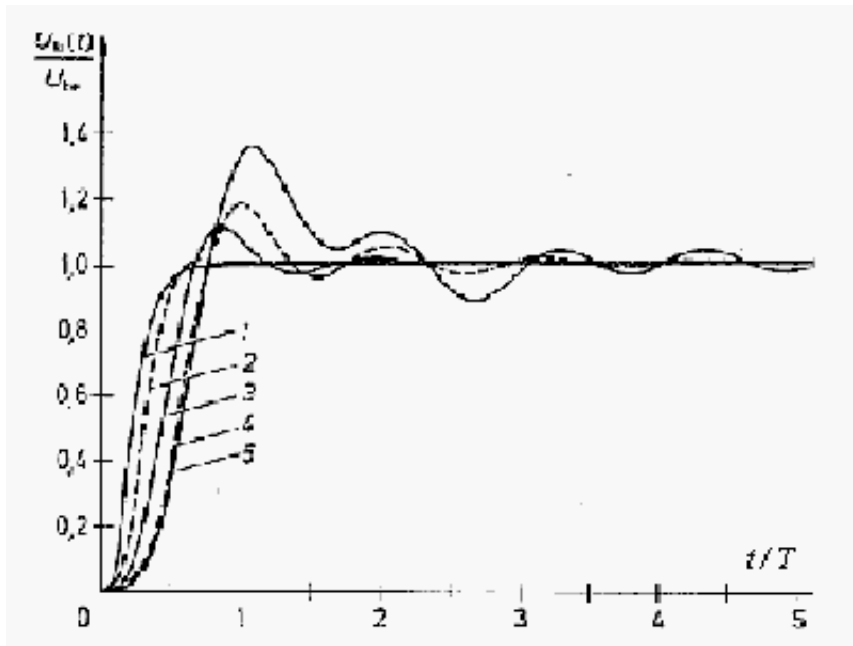
Említést érdemel az a tény, hogy az aluláteresztő szűrők felülát-eresztővé, vagy sáváteresztővé transzformálhatók (l. pl. *Tietze-Schenk: Analóg és digitális áramkörök 14. fejezet*). Ennek részleteivel itt nem foglalkozunk.

Természetesen a fentiekén kívül más megfontolásokon alapuló szűrőtípusok is léteznek.

Fontos tudni, hogy a DSPLAY program rendkívül kényelmes szűrőtervezési részt is tartalmaz. (Nagyon szép és érdekes ennek a programnak a felépítése, működése. Bonyolultsága miatt persze elég nehezen érthető.) Természetesen ezzel csak digitális szűrőket lehet tervezni. - A program részeredményként közli az együtthatók értékét. Ezek 5 számot tartalmazó csoportokban jelennek meg, mivel a program minden szűrőt másodfokú törtfüggvények kaszkád kapcsolásának tekint. Az 5 szám

közül az első három vonatkozik a számlálóra, az ezt követő kettő pedig nevezőre. ( $B_0$  értéke definíciószerűen egységnyi, - ld. 9 [p 48] fejezet.) - Ezek a számértékek jól használhatók akkor, ha a mérési adatok feldolgozására magunk írunk programot, de a kívánt digitális szűrő tervezésének verítékét el szeretnénk kerülni.





47. Ábra

†  
 A † ábra a DSPLAY program által tervezett negyedfokú, aluláteresztő, Butterworth típusú szűrő z-transzformáltjának együtthatóit mutatja, - illetve az ebből létrehozható digitális szűrő  $H(z)$  kifejezését. (A szűrő tervezésénél 100 minta/mp értéket, valamint 15 Hz felső határfrekvenciát vettünk figyelembe. Az átviteli sávban az erősítés egységnyi. - Az együtthatók a képernyőn tíz számjegy pontossággal jelennek meg, - itt ezek lényegesen megcsonkítva szerepelnek.)

0.11 0.23 0.11  
 -0.67 0.14  
 0.15 0.31 0.15-  
 -0.89 0.52

$$H(z) = \frac{0.11 + 0.23z^{-1} + 0.11z^{-2}}{1 - 0.67z^{-1} + 0.14z^{-2}} \frac{0.15 + 0.31z^{-1} + 0.15z^{-2}}{1 - 0.89z^{-1} + 0.52z^{-2}}$$

ábra

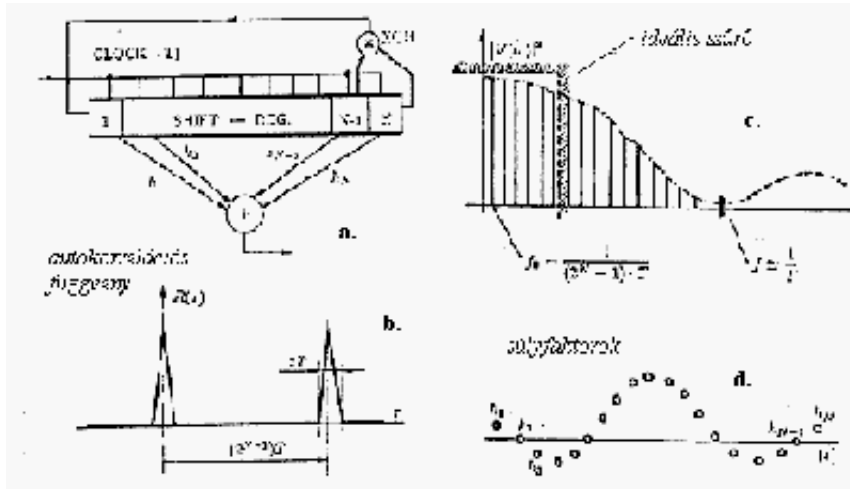
- Egy különleges alkalmazási példa [p 64]

[p 64] [p 45] [p 52]

**Következő:** Egy különleges alkalmazási példa [p 64] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** z-transzformációdigitális szűrők [p 52]

## Egy különleges alkalmazási példa

Az eddig tanultak összefoglalásaként és speciális alkalmazására az alábbiakban mutatunk egy "gyönyörűséges" példát. A 48 [p 64] ábra a Hewlett-Packard cég zajgenerátorának vázlatát mutatja.



48. Ábra

Az álvéletlen jelek forrása egy visszacsatolt shiftregiszteren alapuló generátor. Erről tudjuk (Elektronika jegyzet, 117. o.), hogy  $n$  fokozatú regiszter esetén a kimenőjel  $2^n - 1$  állapot után ismétlődik. Ennek ismeretében felrajzolhatjuk az álvéletlen távírójel autokorrelációs függvényét, illetve ebből meghatározhatjuk a jel energia-spektrumát a b. és c. ábra részlet szerint. (Az álvéletlen - vagyis ismétlődő - távírójel autokorrelációs függvénye periodikus lesz, ennek frekvenciaspektruma pedig vonalas és ez a  $(\sin(x)/x)^2$  függvény szerinti burkoló görbével rendelkezik.)

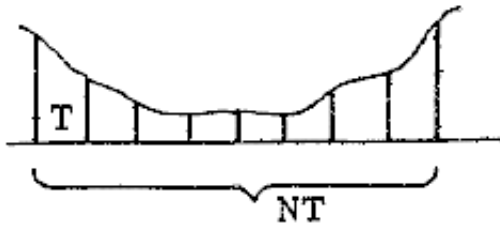
Ha ezeket az álvéletlen jeleket olyan ideális aluláteresztő szűrőn visszük át, amelyik azt a tartományt bocsátja keresztül, ahol az egyes spektrumkomponensek amplitúdói lényegében állandóak, akkor kimenetként ún. sávlimitált fehérzajt kapunk. Ezt az ideális szűrőt olyan FIR elrendezéssel valósítjuk meg, amelyik a shiftregiszter fokozataihoz kapcsolódik, méghozzá úgy, hogy a súlyfaktorokat a  $\sin(x)/x$  függvénynek megfelelően választjuk (d. részlet). A súlyozott összeadó egy műveleti erősítővel felépített rendszer is lehet, ahol a súlyfaktorokat ellenállásokkal állíthatjuk be. A kimeneti jelben az egyes frekvenciakomponensek tehát azonos amplitúdóval szerepelnek, a zaj amplitúdó-eloszlása pedig Gauss-görbe szerinti lesz. (Ez könnyen átlátható, mivel a kimenet nagyszámú álvéletlen -fej/írás- jel összegeként áll elő.)

Ezt a lépcsős jelet természetesen még egy valóságos (RLC) aluláteresztő szűrővel simítani szükséges.

## DFT - diszkrét Fourier transzformáció

A digitális számítógépek elterjedése a Fourier transzformáción alapuló eljárások csodálatos virágzását eredményezte. A digitális számítógépek azonban csak diszkrét értékekkel képesek dolgozni, ezért az ún. diszkrét Fourier transzformáció lehetőségei részletesebb vizsgálatot igényelnek.

Ha egy folyamatos, sávlimitált jelből  $N$  számú mintát veszünk, akkor e minták alapján végrehajtott Fourier transzformáció (az általános képletnek időben diszkrét értékekre való átalakításával) az alábbi lesz:



$$V(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} v(nT)e^{-j\Omega knT}$$

ahol

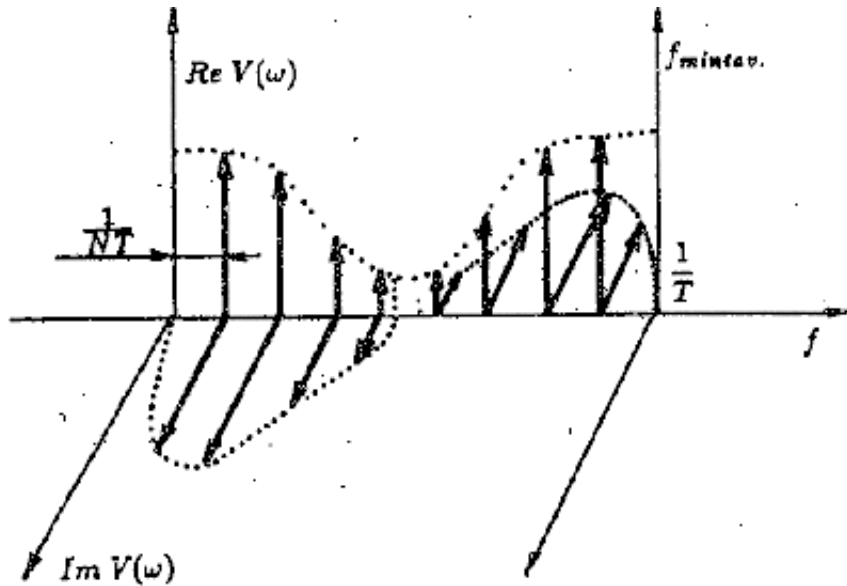
$$\Omega = \frac{2\pi}{NT}$$

A fenti képlet burkoltan, de határozottan arra utal, hogy a transzformáció a jelet  $N$  mintánként periódikusnak tekinti. Erre a felhasználások bizonyos fajtáinál érdemes ügyelni.

A diszkrét transzformációval kapcsolatban joggal vetődik fel az a kérdés, hogy  $N$  mérési eredményből hány különböző  $k$  spektrumvonalat lehet meghatározni. Ha feltesszük, hogy  $k = rN + k_0$  és  $r$ -egész, akkor

$$V(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} v(nT)e^{-j\Omega(rN+k_0)nT} = \sum_{n=0}^{N-1} v(nT)e^{-j\Omega k_0 nT} \quad (e^{-j\Omega TNr} \equiv 1)$$

vagyis a spektrum  $N$  értékenként teljesen megismétlődik.- Továbbmenve: a 49 [p 66] ábra mutatja, hogyan alakulhatnak a mintavételi törvényt figyelembe véve a valós és képzetes spektrumvonalak. Jól látható, hogy mind a szinuszos mind a koszinuszos komponensek egy-egy szakaszon belül kétszer fordulnak elő ugyanakkora értékkel. Természetesen a komponensek páros, illetve páratlan természetének megfelelő előjellel. Így azt állíthatjuk, hogy  $N$  adatból valójában csak  $N/2$  független spektrumvonal meghatározására van mód. (A diszkrét transzformáció ezen tulajdonsága igen jól látszik a DSPLAY program használatánál.)



49. Ábra: A valós és képzetes spektrumvonalak alakja.

A diszkrét Fourier transzformáció - a képlet átrendezésével - értelmezhető mátrix műveletként is, az alábbiak szerint [  $\omega = \exp(j2\pi/N)$  ]:

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^{-2} & \dots & \omega^{-(N-1)} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \dots & \omega^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{-(N-1)} & \omega^{-2(N-1)} & \dots & \omega^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{pmatrix}$$

Érdemes észrevenni, hogy  $N=4$  esetén a transzformáció igen egyszerűen végezhető el: érdemi szorzási művelet nélkül juthatunk el az eredményhez:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix}$$

Azt is felfedezhetjük, hogy egy olyan mintavett jelsorozatnak, amelynek csak a kezdő értéke nem zérus - vagyis egyetlen Dirac delta függvényből áll, - a diszkrét Fourier transzformáljának minden komponense azonos értékű.

A Fourier oda- és visszatranszformáció természetesen összefügg egymással. Az alábbiakban a két eljárás egymást követő elvégzésével visszakaphatjuk az eredeti  $v_n$  számsort. Figyeljünk arra, hogy az oda- és visszatranszformáció során csak egy  $1/N$  faktor híján kapjuk vissza kiinduló értékeinket.

$$V_k = \sum_{n=0}^{N-1} \omega^{-nk} v_n$$

$$v_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{nk} V_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{nk} \sum_{l=0}^{N-1} \omega^{-lk} v_l = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} v_l \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(n-l)} = \begin{cases} v_n & (n = l) \\ 0 & (n \neq l) \end{cases}$$

$$\left( \omega = e^{j2\pi/N}, \quad \frac{1 - \omega^{(n-l)N}}{1 - \omega^{n-l}} = 0. \right)$$


---



[p 68]



[p 45]



[p 64]

**Következő:** FFT - Fast Fourier Transformation [p 68] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** Egy különleges alkalmazási példa [p 64]



[p 74]



[p 45]



[p 65]

**Következő:** Az FFT gyakorlati alkalmazása [p 74] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző** DFT - diszkrét Fourier transzformáció [p 65]

## FFT - Fast Fourier Transformation

A Fourier transzformáció igen fontos eszköz jelek vizsgálatában, mérési eredmények értékelésében, stb. Nem kell tehát különösebben csodálkoznunk azon, hogy rengeteg munkát fordítottak a transzformáció részleteinek alapos kidolgozására.

A digitális számítógépek, valamint a digitális mérés technika elterjedése újabb lökést adott a Fourier transzformáció alkalmazásának. A digitális számítógépek azonban lényegüket tekintve nagyon lomha, lusta rendszerek, mivel az aritmetikai műveleteket mindig logikai alpműveletekre vezetik vissza. Különösen vontatottak a szorzások végzésében. A Fourier transzformáció pedig igen sok szorzást igényel: a mátrix koncepcióból eléggé nyilvánvalóan következik, hogy  $N$  szám transzformációjához  $N^2$  szorzás szükséges. Egy 1000 mérési pontot tartalmazó adatsor DFT-je tehát egymillió szorzást igényel, ami a jelenlegi (átlagos) gépsebességek mellett több/sok másodperces művelési időt igényel. (Az összeadások idejét nem szokás külön beszámítani, mivel ennek időigénye a szorzásnak legfeljebb tizede.)

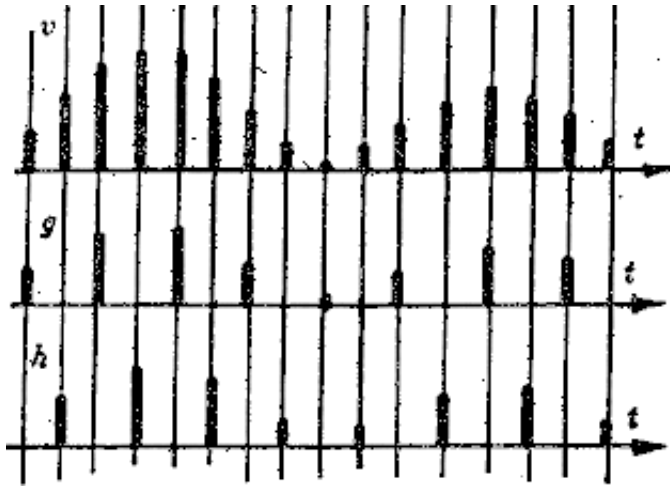
A Fourier transzformáció számítási idejét az 1965-ben Cooley és Tukey (CT) amerikai matematikusok által kidolgozott algoritmus csökkentette radikálisan. 1978-ban pedig Winograd lépett elő egy új eljárással. Nézzük csak az alábbi összehasonlító táblát:

szorzás/pont	összeadás/pont
--------------	----------------

A CT - Fast Fourier Transformation alap gondolata eléggé kézenfekvő:  $N$  pont DFT-je  $N^2$  szorzást igényel. Ha az adatokat két egyforma részre bontjuk, akkor a két rész külön-külön transzformációja  $2(N/2)^2$

szorzásba kerül. Ha a két transzformáció rész eredményei könnyen összekombinálhatók, akkor érdemes ezt az utat választani. Az is nyilvánvaló, hogy  $N$ -et célszerű 2 egész kitevőjű hatványának választani, hogy a szorzás-spórolás jótéteményéből többszörösen részesedhessünk.

A 50 [p 69] ábrán az eredeti  $v$  adatsorból a párosakat és páratlanokat szétválogatva  $g$  és  $h$  adatsorokhoz juthatunk. A DFT képletének mindkét adatsorra való alkalmazásával arra az eredményre jutunk, hogy a  $G$  és  $H$  részspektrumok összekombinálásához csak  $\omega^k$ -nal történő szorzás kell, tehát viszonylag olcsón "ússzuk meg" azt, hogy a két részre bontással műveleteket spóroltunk.



50. Ábra: Az adatsor szétválasztása páros és páratlan sorokra.

$$v(n) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \Rightarrow \begin{cases} g(n) = v(2n) & n = 0, 1, \dots, N/2-1 \\ h(n) = v(2n+1) & 0, 1, \dots, N/2-1 \end{cases}$$

$$V_k = \sum_{n=0}^{N-1} v_n \omega^{-nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} g_n \omega^{-2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} h_n \omega^{-(2n+1)k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

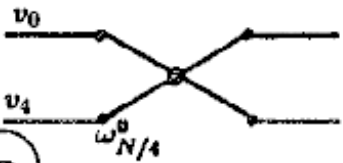
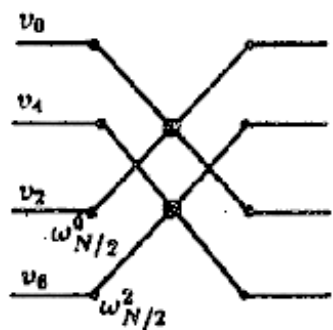
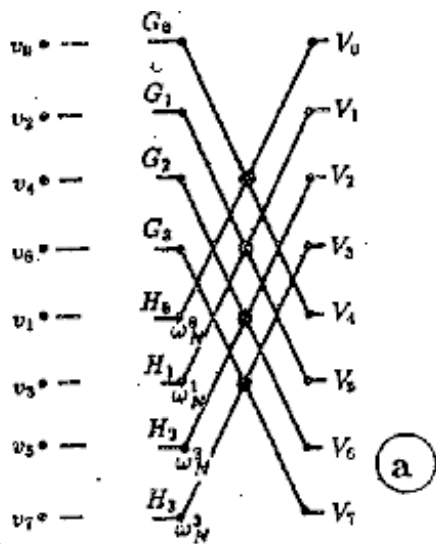
$$\omega_N^2 = \omega_{N/2}$$

$$V_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} g_n \omega_{N/2}^{-nk} + \omega_N^{-k} \sum_{n=0}^{N/2-1} h_n \omega_{N/2}^{-nk} = G_k + \omega_N^k H_k \quad k = 0, 1, \dots, N/2-1$$

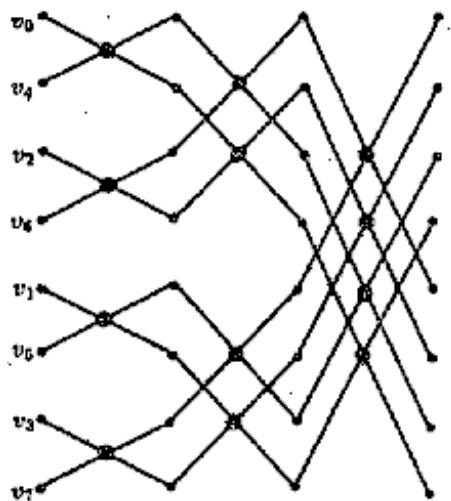
Ha  $k > N/2-1$ -nél, akkor  $k-N/2$ -vel helyettesíthető, így végül

$$\begin{aligned} V_k &= G_{k-N/2} + \omega_N^{-k} H_{k-N/2} & N/2 \leq k \leq N-1 \\ V_{k+N/2} &= G_k + \omega_N^{-k+N/2} H_k & 0 \leq k \leq N/2-1 \end{aligned}$$

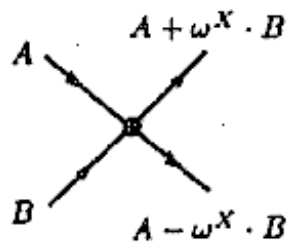
A 51 [p 70] ábrán az előbbi elv alkalmazását ábrázoljuk grafikusán. Az ábra a./ részén feltüntettük a kiinduló adatokat, két csoportba szétválogatva. Az előbb tárgyalt algoritmus szerint a  $V$  spektrumkomponenseket úgy kapjuk meg, ha két-két adaton az ún. lepke műveletet végezzük el. (A "lepke" az ábra e./ részén látható: az  $A$  és  $B$  mennyiségeket alakítja át a megadott módon.) -- Természetesen megfontolásunk négy, illetve két adatra is érvényes (lásd a b./ ábra felső és alsó része).



(b)

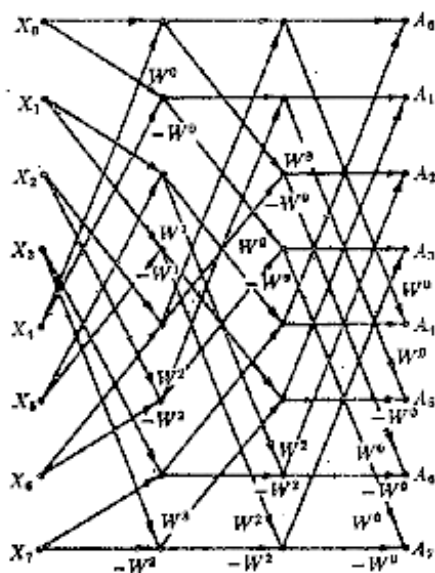


(c)



"LEPKE"  
MÜVELET

(d)



II



**51. Ábra:** Az FFT algoritmus részei  $N=8$  esetén

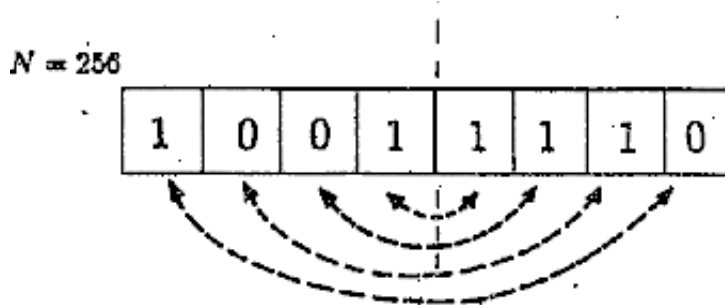
Az ábra figyelmes vizsgálata arra a megállapításra vezet, hogy a teljes transzformációhoz

$(N/2) \log_2 N$

lepkeművelet szükségeltetik (kettes alapú logaritmus). Ha észrevesszük, hogy a  $N \log_2 N$

lepkeművelet tulajdonképpen csak egyetlen -- de komplex -- szorzást tartalmaz, akkor az összefüggés a teljes FFT szorzás-igényét adja meg.  $N=1024$  esetén egymillió szorzás helyett csak 10000 szorzást kell elvégezni, vagyis a DFT-hez képest az FFT csak századannyi gépidőt használ.

Vegyük észre, hogy az FFT alkalmazásánál a bemenő adatok nem sorrendben követik egymást, hanem furcsa módon meg vannak "keverve". A kiinduló adatok megfelelő sorrendbe állítása is igényel némi gépidőt. Ennek elvégzéséhez is találtak ügyes eljárást. Figyelmes matematikusok észrevették, hogyha 256 bemenő adattal dolgoznak, akkor pl. a 158-ik adat helyére a 21-ik adat kerül. Ez az egy-egy értelmű leképezés az ún. "bit-reverzálás" nevű algoritmuson alapul, mely lényegében a biteknek a felező tengely körüli elforgatásából áll (l. 52 [p 71] ábra).



**52. Ábra:** A bit-reverzálás művelet

Felezési elven nagyon sokfajta FFT algoritmus létezik. A 51 [p 70] .c ábra szerinti eljárás nagy érdeme, hogy a számítások során nem igényel külön tárolóhelyet: a bemenő adatok helyére íródhatnak a részeredmények, illetve a végeredmény. -- A 51 [p 70] .d ábra szerinti algoritmus viszont nem igényli a kezdő adatok keverését, de a lepkeművelete összetettebb, stb.

Befejezésül megadjuk az FFT-nek egy program listáját, BASIC nyelven. Az A tömbben a valós, a B tömbben a képzetes részeket tároljuk. A program két részből áll: az első részben az adatok "keverése" történik, a második rész az igazi transzformáció.

```
DIM A(256), B(256)
```

```
NP=256 : ND=NP/2 : M=8 (  $M = \log_2 NP$  )
```

```
REM KEVERES
```

```
J=1
```

```
FOR I=1 TO NP-1
```

```
IF I<J THEN TR=A(I) : IT=B(I) : A(I)=A(J)
```

```

: B(I)=B(J) : A(J)=TR : B(J)=IT
K=ND
440 IF K<J THEN J=J-K : K=INT(K/2) : GOTO 440
J=J+K
NEXT I
REM TRANSZFORMACIO
LE=1
FOR L=1 TO M
LD=LE : LE=LE+LE
UR=1 : UI=0 : AN=3.1415926/LD
WR=COS(AN) : WI=-SIN(AN)
FOR J=1 TO LD
FOR I=J TO NP STEP LE
IP=I+LD
TR = A(IP)*UR-B(IP)*UI : IT=A(IP)*UI+B(IP)UR
A(IP)=A(I)-TR : B(IP)=B(I)-IT : A(I)=A(I)+TR : B(I)=B(I)+IT
NEXT I
TR=UR*WR-UI*WI : UI=UR*WI+UI*WR : UR=TR
NEXT J
NEXT L

```

A program begépelési hibamentessége könnyen ellenőrizhető: válasszunk egy tetszőleges bemenő adatsort, transzformáljuk, a valós és képzetes részeket egyaránt osszuk el  $N$ -nel, fordítsuk meg a képzetes részek előjelét, használjuk megegyeszer ugyanezt a programot és eredményül az eredeti adatsorhoz kell jutnunk.

Az FFT belső szerkezetének megértése sok esetben vezethet számítástechnikai előnyhöz, vagyis kisebb futási időhöz. Ha például azonos méretű szakaszokat kell egymás után folyamatosan transzformálni, akkor jobban járunk, ha két adatsort töltünk be a transzformáció indításakor, az egyiket a valós, a másikat a képzetes részbe. A transzformáció lineáris volta miatt ugyanis a két részspektrum az eredőből és annak konjugáltjából egy gyors/olcsó művelettel megkapható:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1(\mathbf{n}) &\iff \mathbf{V}_1(\mathbf{k}) \\
\mathbf{v}_2(\mathbf{n}) &\iff \mathbf{V}_2(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

$$V(k) = V_1(k) + jV_2(k)$$
$$V_1(k) = \frac{1}{2} [V^*(N-k) + V(k)]$$

$$V^*(k) = V_1(k) - jV_2(k)$$
$$V_2(k) = \frac{1}{2} [V^*(N-k) - V(k)]$$

---



[p 74]



[p 45]



[p 65]

**Következő:** Az FFT gyakorlati alkalmazása [p 74] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** DFT - diszkrét Fourier transzformáció [p 65]

## Az FFT gyakorlati alkalmazása

Az FFT igen hatékony számítási algoritmus, amelyet szinte univerzális eljárássá vált. Igyekeznek mindenfajta feladatot úgy megfogalmazni, hogy az FFT-re visszavezethető legyen. Tipikus példa a konvolúció lehet: ritkán végzik ezt közvetlenül, az eredeti integrál-formula alapján. Inkább a frekvenciatartományú szorzást és az inverz Fourier transzformáció útját választják.

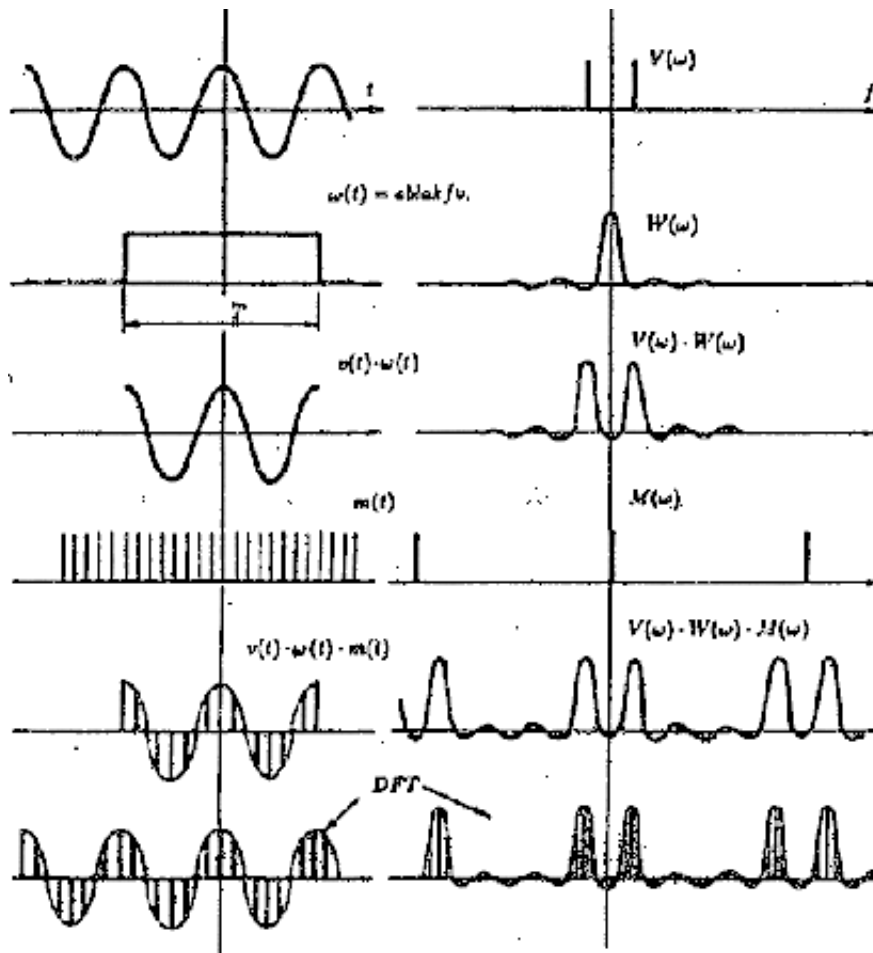
Az FFT, vagy annak valamely módosított változatának alkalmazásánál bizonyos tipikus kérdések szoktak felmerülni. Ezek között a legelső a szükséges gépidő mennyisége. Gondoljuk végig, hogy milyen módszerek állnak rendelkezésre a számítások gyorsításához:

- gyorsabb számítógép, nagyobb órajel frekvenciával;
- aritmetikai processzor használata, esetleg gyors szorzó áramkörök alkalmazása;
- lehetőleg mindent számítsunk ki előre, és ún. look-up table -ből vegyük elő a szükséges adatokat;
- ne számoljunk felesleges pontossággal, -- ha az AD konverter felbontóképessége csak 8 bit, ne használjunk 40 bites számábrázolást;
- keressünk minél hatékonyabb algoritmusokat, használjuk ki az az algoritmusok mélyén rejlő lehetőségeket
- használjunk speciális elemeket, ún. DSP (digital signal processor) chipet, amelyeket kifejezetten ilyen célokra terveztek és így igen gyorsak. Ezek tulajdonképpen speciális komputer, nagyon gyors tárolóval, párhuzamos műveleti egységekkel, a számítástechnika korszerű megoldásainak arzenáljával felszerelve.

A felsorolt javaslatok megvalósításának zöme elsősorban pénzkérdés. Aki gazdagabb, gyorsabban transzformál.

A gyakorlati alkalmazások másik fontos témaköre ahhoz a tényhez kötődik, hogy a DFT/FFT a transzformált szakaszt periódikusan ismétlődőnek tekint. Ennek következtében a kezdeti és befejező "ugrások" olyan nagyfrekvenciás komponensek forrásai, amelyek végeredményben a kapott spektrum meghamisítását, eltorzítását okozzák. Ezért elterjedt gyakorlat szerint a mintavett adatok transzformálandó szakaszát egy ún. ablakfüggvénnyel megszorozzák és a transzformációt csak ezután hajtják végre. Ezek az ablakfüggvények általában olyanok, hogy a szakaszhatárokon értékük zérus. Így ugyanis kiküszöbölhetők az említett nagyfrekvenciás zavarok. - Az ablakfüggvény léte azonban újabb torzítás kiindulópontja. Nagyon érdekes kérdés, hogyan kell tehát ezeket az ablakfüggvényeket megválasztani.

Az 53 [p 75] ábra a legrosszabb ablakfüggvény, a négyszögimpulzus esetét mutatja be (vagyis semmiféle adatkorrekciót sem végzünk).



53. Ábra: A DFT energiaspektrum alakja négyszögimpulzus ablakfüggvény esetén

Az ábra bal oldalán azt követhetjük nyomon, miként jelölünk ki egy  $T$  szélességű ablakkal egy szakaszt a  $v(t)$  jelből. Ez a  $v(t)$  szinuszos, frekvenciaspektrumaként két vonalat várunk. A transzformált jelsorozat a bemenőjelnek egy négyszögjellel, valamint periodikus delta-függvénysorozattal történő szorzásából áll elő, -- az időtartománybeli szorzásoknak frekvenciatartománybeli konvolúciók felelnek meg. -- A DFT elvégzése az adatok periodikus kiterjesztését jelenti, mintha  $T$  időnként megismétlődnének a minta diszkrét értékei.

Az ábra jobb oldalán a frekvenciatartományban látjuk ugyanezt. Feltűnő, hogy az eredetileg vonalas  $V(\omega)$  az ablakjel hatására kiszélesedik és a végeredményül kapható spektrum is viseli az ablakfüggvény emlékét. A spektrum a DFT következtében csak vonalas lehet!

Ablakfüggvényként olyan jelalakokat választanak, amelyek a kezdő és befejező szakaszokat csak igen kis súllyal veszik figyelembe. Ezek az ablakfüggvények számos szempont alapján értékelhetők. Az alábbi táblázatban (54 [p 76] ábra) feltüntettük a főhullám szélességét, valamint az ún. hullámosságot. Ez utóbbi az első mellék hullám és a főhullám amplitúdójának hányadosa. (E fogalmak eléggé

triviálisak, ha a  $\frac{\sin(x)}{x}$  függvény alakjára gondolunk.)

	NÉGYSZÖG 1	$4\pi/N$	22 %
	BARTLETT (HÁROMSZÖG) $1 - 2 n /(N - 1)$	$8\pi/N$	4 %
	HAMMING $0.54 + 0.46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})$	$8\pi/N$	1 %
	HANNING $0.5 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1})$	$8\pi/N$	2.6 %
	BLACKMAN $0.42 + 0.5 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4\pi n}{N-1})$	$12\pi/N$	0.1 %

$$|n| < \frac{N - 1}{2}$$

54. **Ábra:** Különböző ablakfüggvények hatása a frekvenciatományban

---

 [p 77]  [p 45]  [p 68]

**Következő:** Egyéb eljárásokmódszerek [p 77] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** FFT - Fast Fourier Transformation [p 68]

## Egyéb eljárások, módszerek

Az FFT ismertetett változata mellett más hatékony algoritmusok is léteznek, amelyek spektrumok számítását, vagy ezzel közel ekvivalens értékű műveletek végrehajtását segítik.

Léteznek például ún. gyors konvolúciós eljárások, amelyeket elsősorban gyors jeldetektálási (jelfelismerési) feladványoknál használnak. Alapgondolatuk: a szorzások számának csökkentése, a feladat megoldásának érdekében az összeadások számának árán. Egy ilyen eljárás az ún. *Strassen algoritmus*. Az ötlet szinte kézenfekvő: két komplex szám szorzatát a triviális négy szorzás és két összeadás helyett három szorzással és három összeaddással is elvégezhetjük (Az  $(a-b)d$  szorzatot csak egyszer kell kiszámítani). Konvencionálisan:

$$\begin{aligned}
 e + jf &= (a + jb)(c + jd) \implies e = ac - bd, \quad f = ad + bc. \\
 \text{Strassen:} \quad e &= (a - b)d + a(c - d), \quad f = (a - b)d + b(c + d).
 \end{aligned}$$

A Strassen algoritmust elsősorban az ún. cirkuláris konvolúció számítására használják. (Ez végeredményben a konvolvándó jeleket periodikusnak tekinti.) A konvolúciót három szakaszra  $8 \times 8$  bontják, egy előösszeadásra, szorzásra és utóösszeadásra. Eléggé meghökkentő módon, egy  $8 \times 8$ -as cirkuláris konvolúciót a triviális 64 helyett 17 szorzással is el lehet végezni. - Az előbbi komplex szorzás az algoritmus szerint tehát így néz ki:

$$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c-d & 0 & 0 \\ 0 & c+d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

A Winograd féle gyors Fourier transzformáció hasonló megfontolásokból indult. Ennél az eljárásnál a részekre bontás primszámok, illetve ezek hatványai szerint történik. Példaképpen bemutatjuk az 5 pontos Winograd transzformációt ( $\Theta = 2\pi/5$ ):

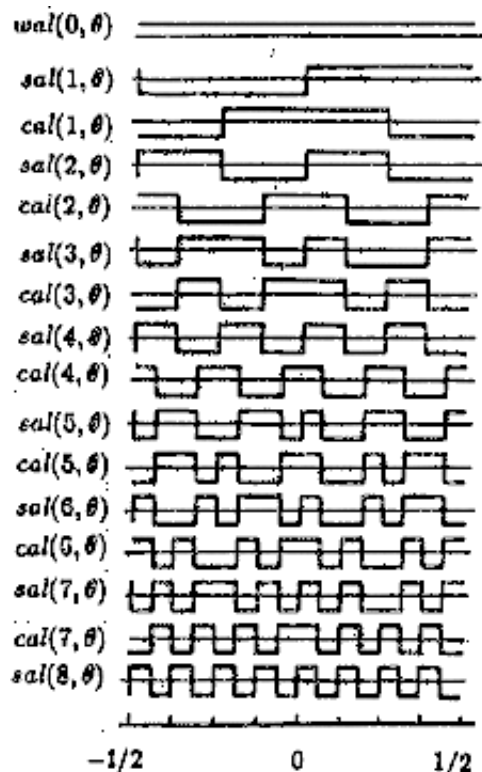
$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 & 0 & 0 & \dots & & \\ 0 & B_1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & B_2 & & & \\ \vdots & & & B_3 & & \\ & & & & B_4 & \\ & & & & & B_5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 0.5(\cos \Theta + \cos 2\Theta) - 1, \quad B_2 = 0.5(\cos \Theta - \cos 2\Theta),$$

$$B_3 = j \sin \Theta, \quad B_4 = j(-\sin \Theta + \sin 2\Theta), \quad B_5 = j(\sin \Theta + \sin 2\Theta).$$

Bár a módszer az igényelt szorzások számának szempontjából nagyon hatékony, programozása nehézkes, memória-helyfoglalása nagyobb, mint a CT eljárás esetén lenne. Azt sem feledhetjük, hogy a bonyolult indexelés, a gyakori keresés a memóriában nem a sebességnövekedés irányába hat.

Itt említjük meg röviden, hogy létezik egy ún. *Walsh transzformáció* is, amelyet valaha a Fourier transzformáció komoly konkurensének tartottak. A Walsh függvények az ortogonális függvényrendszerek közé tartoznak, kétértékűek, előállításukra egy rekurziós formula szolgál. A sin és cos függvények mintájára cal és sal függvényekről beszélhetünk. Jellegükről némi tájékoztatást a 55 [p 78] ábráról kaphatunk. (A világos és sötét részek a kétértékű Walsh függvények mintájára változnak.)



55. Ábra: A Walsh-bázis első néhány függvénye

A Walsh függvények tehát alkalmasak periodikus jelek komponensekre bontására. Valaha előnyüket az jelentette, hogy e függvényeket egyszerű digitális áramkörökkel relatíve könnyen elő lehetett állítani. Kétértékű voltukból következik, hogy a szorzás helyett csak összeadni, kivonni kellett. Így tehát megvalósítható volt a jelfeldolgozás nagy álma: az on-line (valós idejű) spektrum előállítás. Sajnos, az örömből némi üresség is vegyült, mert a Walsh függvényekre a konvolúció csak módosított formában érvényes. Az is hátrányos, hogy a "természet" lényegében nem ismeri ezeket a függvényeket, így szemléletes, vagy hasznos voltak ugyancsak kérdéses. Ezek ellenére vannak bizonyos szakterületek, amelyek állítják, hogy jelfelismerési problémáikhoz a Walsh spektrumok igen jól használhatók.





[p 80]



[p 45]



[p 74]

**Következő:** Wavelet transzformáció [p 80] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** Az FFT gyakorlati alkalmazása [p 74]



[p 84]



[p 45]



[p 77]


**Következő:** 16.1 A Daubechies waveletek [p 84] **Fel:** Digitális jelek feldolgoása [p 45] **Előző** Egyéb eljárások módszerek [p 77]

## Wavelet transzformáció

A jelfeldolgozás során előforduló jeleknek eddig vagy az amplitúdó - idő és az amplitúdó - frekvencia leírását használtuk.

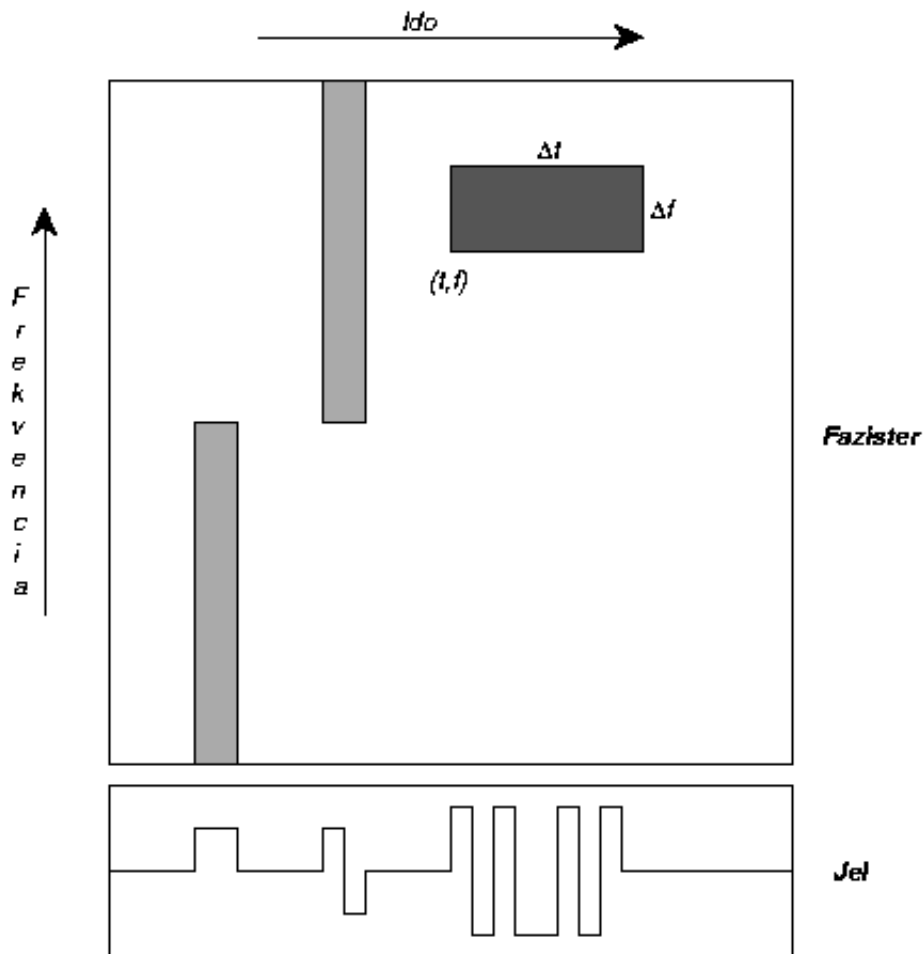
Pl. egy ilyen leírás megadja a mért jel amplitúdójának időfüggését - a jellemző frekvenciákról ilyenkor nem tudunk semmit, azok vizsgálatához át kell térnünk a frekvencia-térbe.

A Fourier transzformációval a frekvencia-térbeli leírás pontosan megadja a jelsorozatot létrehozó sin és cos függvények amplitúdó és fázisértékeit, de semmit nem mond a jel időbeli változásairól (pl. a jellemző időbeli frekvenciák változásáról).

Erre példa egy rövid, Dirac-delta jellegű impulzus Fourier-transzformáltja: ahogy azt a  [p 16] . fejezetben láttuk ez nagyon sok, kb. ugyanolyan amplitúdójú **sin** és **cos** hullámból áll. A hullámok fázisai ‘‘pontosan’’ úgy állnak, hogy az impulzus előtt és után a hullámok kioltják egymást, de a megfelelő időpontban az impulzus megjelenik: a Fourier-térben nem lehet közvetlenül megmondani az impulzus előfordulási idejét.

A wavelet transzformált a rögzített, a csak idő vagy a csak frekvencia kép ‘‘közötti’’ leírás. A wavelet transzformáció segítségével a jelek időbeli (vagy térbeli) és a frekvenciatartománybeli analízise az előbbi módszerekkel szemben *egyszerre* hajtható végre (valójában a az amplitúdó - idő és az amplitúdó - frekvencia leírását a waveletleírás két végétének tekinthető). Így a wavelet transzformáció segítségével egy éles változás a frekvenciaspektrumban annak előfordulási idejével együtt, egyszerre határozható meg.

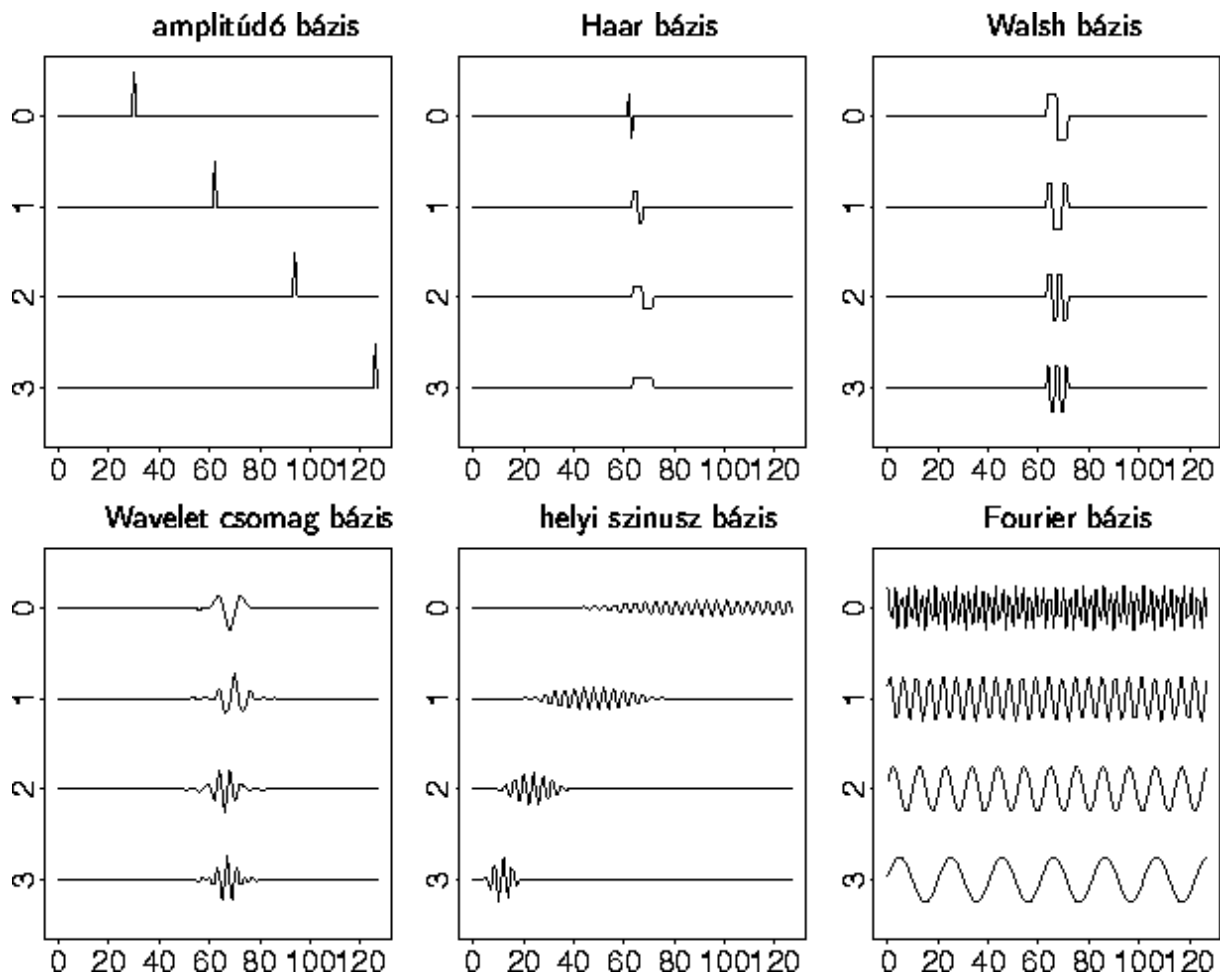
Egy wavelet a frekvencia-idő síkot (ez valójában a jel ‘‘fázistere’’)  $\Delta f \times \Delta t$  méretű cellára bontja. Ebben a térben a szokásos idő- és frekvenciatartománybeli ábrázolás egy olyan speciális felbontásként fogható fel, amikor az adott cella egyik irányban végtelen kiterjedésű lesz (pontosabban lefedi a teljes megfigyelt spektrumtartományt ill. az egész megfigyelési időt).



**56. Ábra:** Egy adott jelre jellemző területek a frekvencia-idő síkon

Természetesen a fázissíkon végtelen számú felbontással kísérletezhetünk. A waveleteket ezek közül az emeli ki, hogy miközben frekvenciájuk viszonylag jól meghatározott, eközben időbeli (térbeli) helyzetük is korlátozott. Ez a két feltétel - a kvantummechanikai határozatlansági relációhoz hasonló elvi okok miatt - nem elégíthető ki tetszőleges pontossággal egyszerre.

A jeleket ún. ortogonális bázisfüggvények szerint fejthetjük ki. Ha ezek a Dirac-delta függvények, akkor a szokásos amplitúdó-idő leíráshoz jutunk, ha ezek a sin és cos függvények, akkor ez a Fourier leírás. Az 57 [p 81] ábrán e két leírás mellett más lehetséges wavelet bázisok néhány alapfüggvényét tüntettük fel.



**57. Ábra:** Különböző, jelek leírására használható bázisfüggvények alakja. Az ábrákon a 0, 1, 2, 3 jellel jelölve a (0,128) időintervallumban választható függvények különböző tagjai láthatóak: az amplitúdó bázis a szokásos amplitúdó-idő leírást jelenti (ennek bázisfüggvényei a Dirac-delták). A Haar bázis az ún. Haar függvényekből, a Walsh bázis a [p 78] . oldalon említett Walsh függvényekből áll. A wavelet csomag bázis a 16.1 [p 84] fejezetben tárgyalt DAUB4 függvényeket használja, a helyi szinusz bázis alapja egy adott frekvenciájú, de időben Gauss-függvénnyel korlátozott idejű szinuszjel csomag. A Fourier bázist különböző amplitúdójú szinusz- és koszinuszfüggvények alkotják.

A wavelet transzformációk alapstruktúrája rekurzív szűrésekből és (az FFT CT algoritmusánál is megismert) páros-páratlan tagok szétválogatásából áll. A waveletek viszonylag alacsony (az FFT-vel összemérhető) számítási kapacitást igényelnek. A diszkrét wavelet transzformáció (DWT) az FFT-hez hasonlóan egy olyan gyors, lineáris szorzási művelet, amely a  $2^N$  méretű bemeneti vektort (adatsort) egy ugyanilyen méretű kimeneti vektorba transzformál át (FFT esetén ezzel a 12 [p 65] fejezetben foglalkoztunk). Ezért mind az FFT, mind a DWT egy forgatásnak fogható fel az amplitúdó-idő doménből a frekvencia-idő térbe, és mindkettő egy-egy mátrix segítségével is megadható.

- 16.1 A Daubechies waveletek [p 84]
- A Diszkrét Wavelet Transzformáció [p 86]
- Wavelet közelítések [p 89]



[p 84]



[p 45]



[p 77]

**Következő:** 16.1 A Daubechies waveletek [p 84] **Fel:** Digitális jelek feldolgoása [p 45] **Előző:**  
Egyéb eljárások módszerek [p 77]

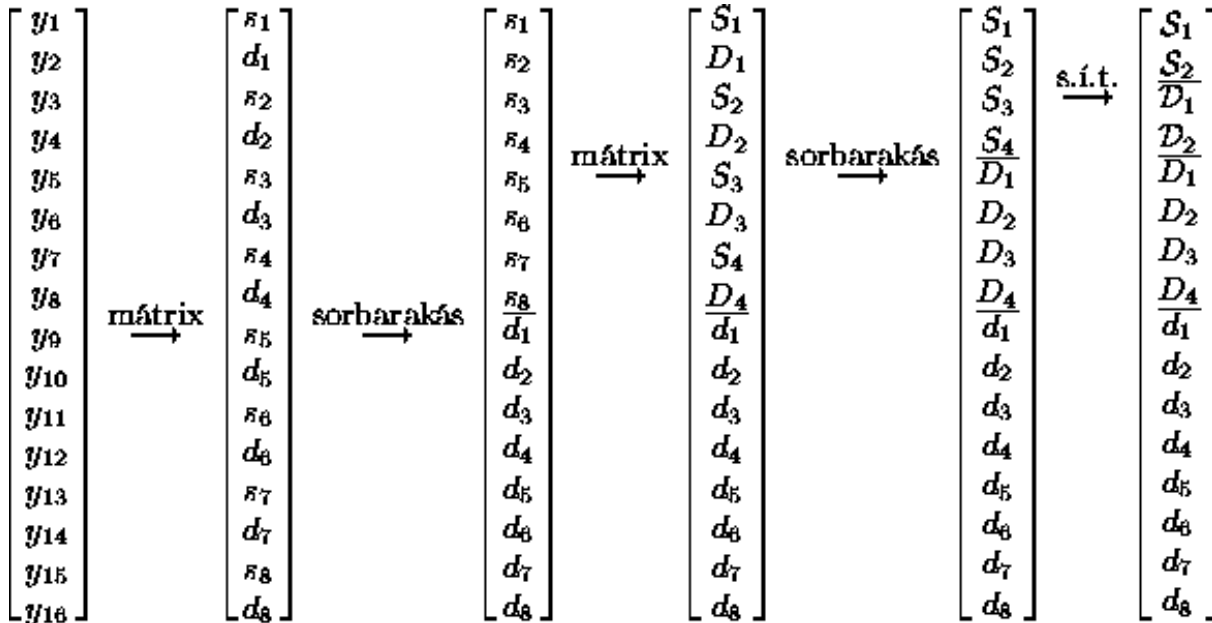


$$\begin{aligned}c_0 &= (1 + \sqrt{10} + \sqrt{5 + 2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} & c_1 &= (5 + \sqrt{10} + 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\c_2 &= (10 - 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} & c_3 &= (10 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5 + 2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} \\c_4 &= (5 + \sqrt{10} - 3\sqrt{5 + 2\sqrt{10}})/16\sqrt{2} & c_5 &= (1 + \sqrt{10} - \sqrt{5 + 2\sqrt{10}})/16\sqrt{2}\end{aligned}$$

---

## A Diszkrét Wavelet Transzformáció

A Diszkrét Wavelet Transzformáció (DWT) az előzőekben megismert wavelet mátrix egymás utáni hierarchikus alkalmazását jelenti: először a teljes  $N = 2^n$  hosszúságú adatsorra alkalmazzuk, ezután a “simított” adatokat kivesszük, és ezt az  $N/2$  adatsort szorozzuk be a mátrixszal, majd a “simított-simított” adatokkal ismételjük meg a műveletet, s.i.t. . Az eljárást egészen addig folytatjuk, amíg csak két komponens nem marad:

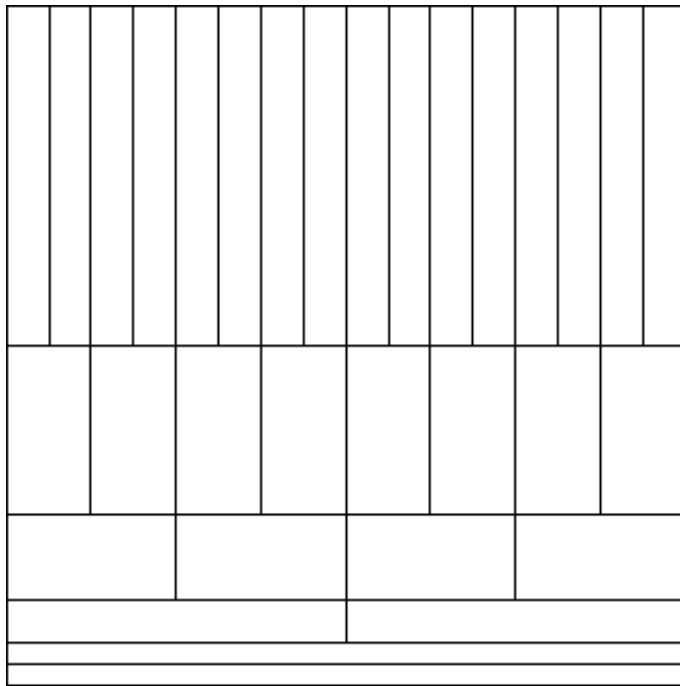


Láthatóan a transzformáció  $2^n$  pont esetén két  $S$ -el és a  $D$ ,  $D$ ,  $d$  stb. wavelet együtthatók sokaságával ér véget. Mivel az egész eljárás ortogonális transzformációk sorozata, az DWT maga is ortogonális lineáris művelet. Az inverze egyszerűen az egész eljárás megfordításából áll (természetesen a wavelet mátrix helyett annak transzponáltját (azaz inverzét) kell használni).

A fenti algoritmus nagymértékben hasonlít az FFT CT algoritmusára: az egyes DWT mátrixszorzásoknak a lepke-művelet alkalmazása feleltethető meg, míg a simított adatok kiválogatása az FFT rendezésével hozható párhuzamba. Különbség viszont, hogy az FFT esetén minden lépésben  $2^n$  ponton végzünk műveletet, míg a DWT esetén az adatok száma lépésenként feleződik: ez jeleníti meg a DWT esetén az egyes frekvenciákhoz tartozó komponensek időfüggését (l. 58 [p 87] ábra).

A DWT segítségével a fázisteret hierarchikusan építjük fel, egymás után duplázva a frekvenciát és felezve a pontok számát (azaz duplázva a pontokra eső időintervallumok számát). A 58 [p 87] ábrán látható módon az alacsony frekvenciák értékét viszonylag pontosan tudjuk, de előfordulásuk idejét nem nagyon ismerjük. A magas frekvenciájú komponensek értéke rosszul (pontatlanul) ismert, de helyüket jól ismerjük.

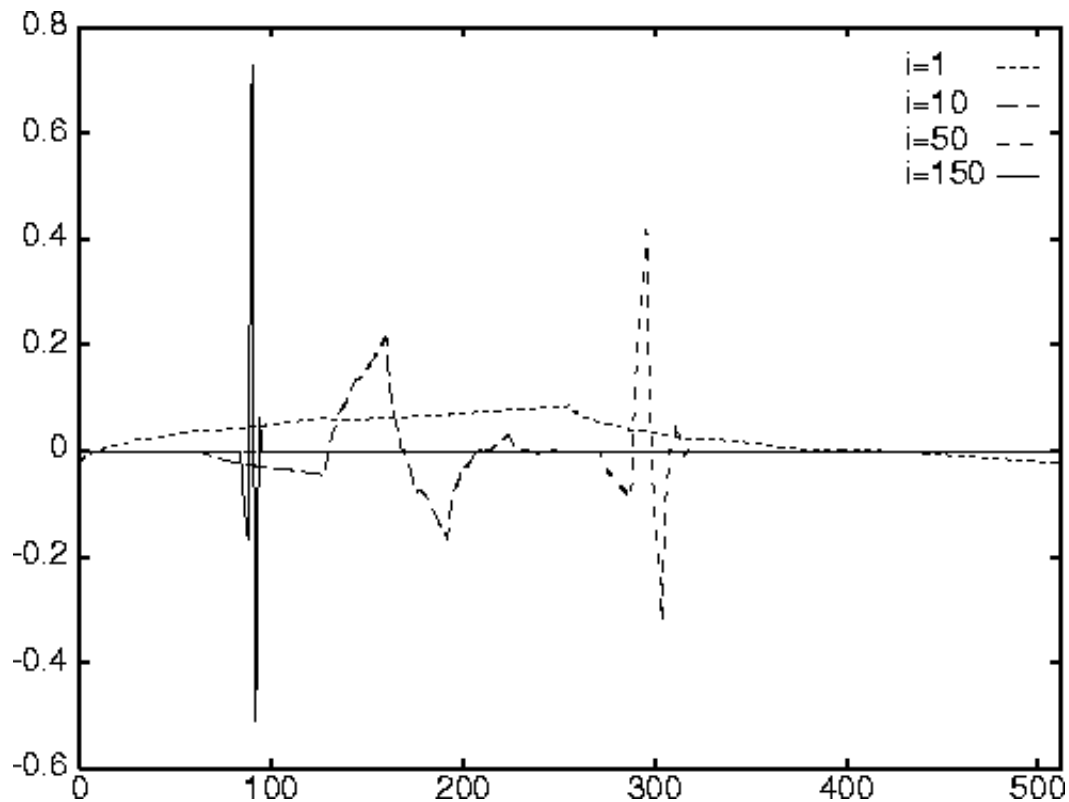




**Wavelet basis**

**58. Ábra:** A fázistér felosztása a DWT-vel.

Az inverz DWT segítségével kirajzoltathatjuk a DAUB4 waveleteket is. Az 59 [p 88] ábrán a DAUB4 wavelet  $i=1, 10, 50$  és  $150$  komponense látható  $N=512$  pont esetén. Megfigyelhető, hogy  $i$  növekedésével a függvény egyre inkább egy keskeny intervallumra koncentrálódik, úgy, ahogy ezt a transzformáció hierarchikus felépítése alapján várjuk. A DAUB4 esetében a wavelet folytonos, de néhány pontban a jobboldali deriválva nem létezik!



**59. Ábra:** A DAUB4 wavelet  $i=1, 10, 50$  és  $150$  esetén  $512$  pontra.  $i=150$  esetén a  $(128,255)$  intervallumban vagyunk, a wavelet az  $x=(150-128)/(256-128)*512=88$  pont körül jelenik meg.  $i=50$  esetén a  $(32,63)$  intervallumban vagyunk, a wavelet az  $x=(50-32)/(64-32)*512=288$  pont körül jelenik meg. Kicsi  $i$  esetén a pozíciók pontatlanabbak (ui. a karakterisztikus frekvencia alacsony).

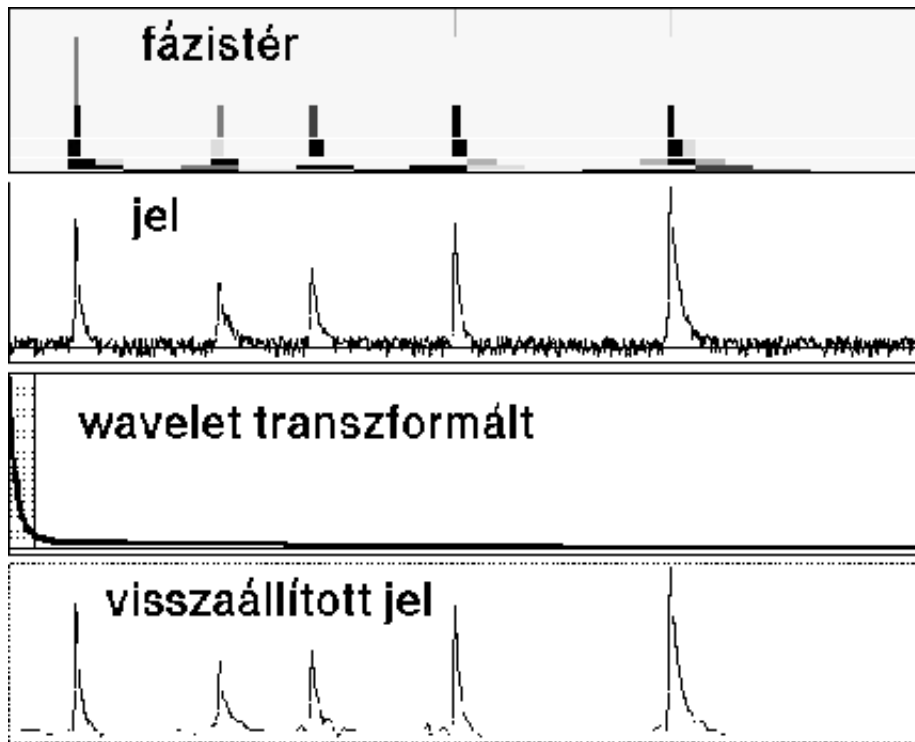
A DWT-t a Fourier-transzformációhoz hasonlóan  $n$  dimenzióban is elvégezhetjük: ilyenkor egyszerűen az  $1., 2., \dots, n.$  dimenzió szerint sorban elvégzünk egy egydimenziós DWT-t.

 [p 89]
  [p 80]
  [p 84]

**Következő:** Wavelet közelítések [p 89] **Fel:** Wavelet transzformáció [p 80] **Előző:** 16.1 A Daubechies waveletek [p 84]

## Wavelet közelítések

A DWT transzformációval most már megkísérelhetjük végrehajtani a fejezet elején említett fázistér vizsgálatot. A 60 [p 89] ábrán néhány exponenciális lefutású, különböző amplitúdójú impulzust transzformálunk a wavelet térbe. Figyejünk meg, hogy a fázistérben az egyes impulzusok környékén széles (pontosabban magas) frekvenciaspektrum jelenik meg! Ha a wavelet komponensek közül csupán az 512/32 legnagyobbat hagyjuk meg (szürke sáv), akkor ezek alapján majdnem tökéletesen megkaphatjuk az eredeti jelet.

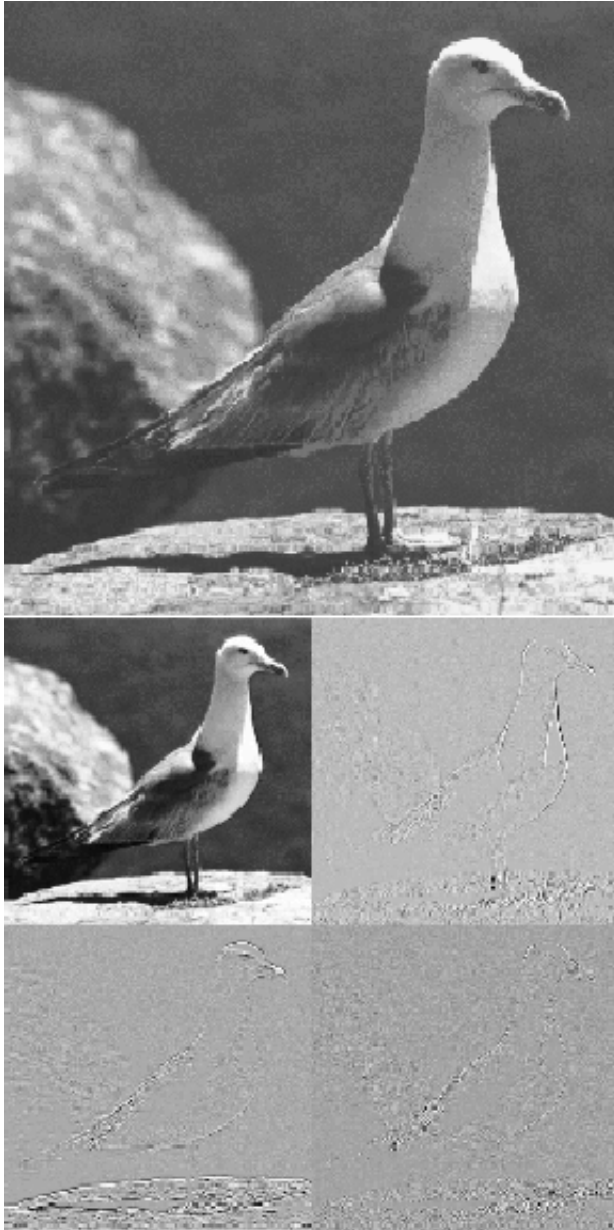


**60. Ábra:** Impulzusok DAUB4 wavelet transzformációja. A visszaállított jel csak a szürkével jelölt komponenseket használja. A wavelet komponensek nagyság szerint csökkenő sorrendbe vannak rendezve!

Ezzel az eljárás segítségével (ugyan veszteségesen de) tömöríthetjük a jelet. Természetesen itt nem csak az amplitúdót, hanem az adott wavelet pozícióját is el kell tárolnunk: így a fenti impulzusokat 1/16-od részére tömörítettük. Bebizonyítható, hogy az összes ortonormált bázis közül a wavelet segítségével érhető el a Shannon entrópia szerint mért *legrövidebb* együttes leírása az adatoknak és a modellnek (azaz a bázisfüggvényeknek). A wavelet rosszul tömöríti a jelhez kevert véletlen zajt: ennek eredményeképpen a csak a jelentős wavelet komponensekből visszaállított jel esetén megjavítjuk a jel/zaj viszonyt is!

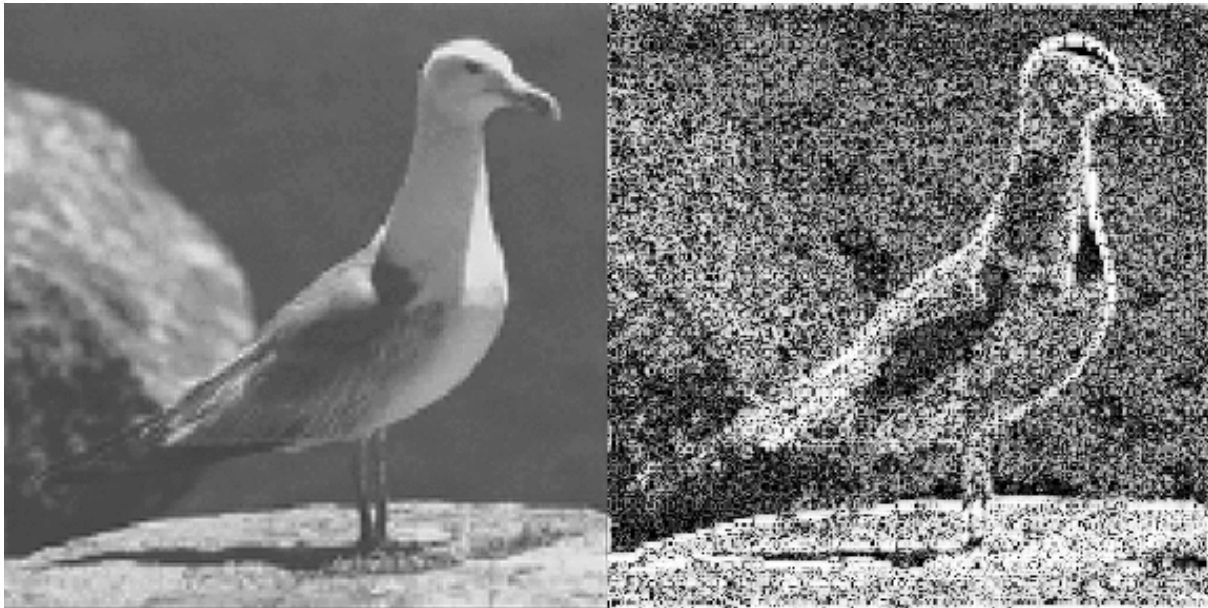
A wavelet tömörítés általában nagyon jól alkalmazható képek esetén. Szemünk különösen érzékeny az élekre, a wavelet transzformált pedig pontosan ezeket a változásokat tudja jól leírni, így elegendő kevesebb paraméter rögzítése. A 61 [p 90] ábrán egy kép és annak wavelet transzformáltja látható az első DAUB4 lépés után. A transzformált képben a bal felső kép az  $x$ - $y$  irányú simítás után létrejött

kép, mellette van a csak vízszintes irányú, alatta a függőlegesé, a jobb alsó képen pedig a mindkét irányú “durvítás” eredménye.



**61. Ábra:**

A DAUB4 lépéseket a DWT-nek megfelelően folytathatjuk, de érdemes megnézni az egy lépésben simított képből visszaállított képet a 62 [p 90] ábrán. A visszaállított kép mellett látható az eredeti és rekonstruált kép különbsége is (a különbség kevesebb, mint a maximális amplitúdó 1%-a). Figyeljük meg, hogy a különbség az élek mellett a legnagyobb, a háttérben lévő szikla majdnem tökéletesen rekonstruálható!



62. Ábra:

---

 [p 92]  [p 80]  [p 86]

**Következő:** Tömörítési eljárások [p 92] **Fel:** Wavelet transzformáció [p 80] **Előző:** A Diszkrét Wavelet Transzformáció [p 86]

**Következő:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző** Wavelet közelítések [p 89]

## Tömörítési eljárások

Az elektronikus eszközökkel létrehozott adatok (programok, képek, állományok) közül sok tartalmaz részben ismétlődő szakaszokat, részeket. Ezek az adatok általában különböző tömörítési algoritmusokkal (pl. a közismert  $pkz$   $ip$  vagy  $arj$ ) eredeti méretük töredékére zsugoríthatók. Így csökkentő az adatok átviteléhez szükséges idő, redukálható a tárolásához szükséges hely. Az eljárások közül megkülönböztetünk veszteség nélküli és veszteséges eljárásokat (ez utóbbiak ugyan jobban tömörítenek, de az eredeti jelek tökéletes visszaállítása itt nem lehetséges).

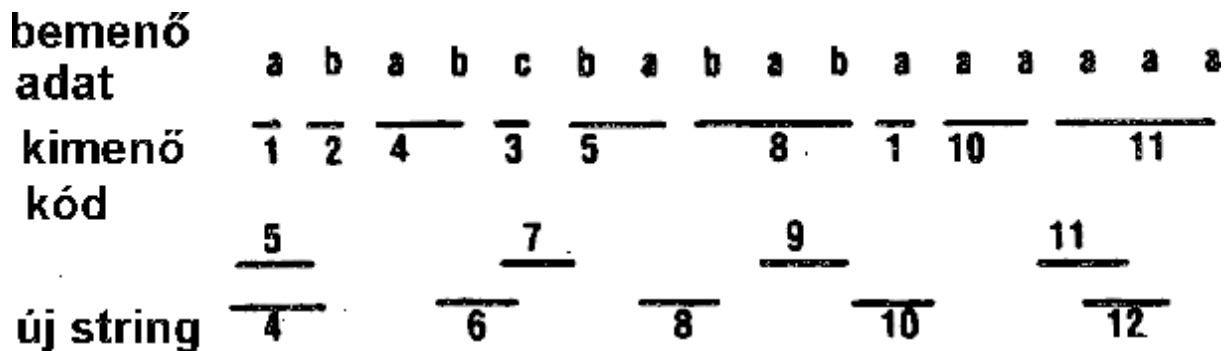
A veszteségmentes tömörítő eljárások közül legegyszerűbb a futási hossz kód. Ilyenkor pl. a 127 alatti karakterek jelzik, hogy hányszor kell az utánuk jövő karaktert megismételni, a 128 feletti karakterek pedig a 128 feletti értékkel megadott számú, egymás után jövő (különböző) karaktert jeleznek (hasonló eljárást használnak a faxokban is). Az eljárás ugyan egyszerű, de nem mindig hatásos: pl. egy ABABAB... szöveg esetén nem ismeri fel az ismétlődő mintát. Ilyen esetekre az ún. Lempel-Ziv-Welch eljárás tekinthető a módszer egyfajta kiterjesztésének: ekkor folyamatosan egy szótár épül fel sorban, dinamikusan a kódolandó adatokból. Minden egyes bejövő adat (pl. byte) a korábbi adatokkal együtt egy új szót hoz létre. Ezt a szótár elemeivel összehasonlítjuk, és a maximális egyezésű szótárelem az új adattal együtt egy újabb szótárelemet hoz létre.

Nézzük a következő példát! A szótárat a 63 [p 92] ábrán láthatjuk, a kódolás pedig a 64 [p 92] ábrán követhető nyomon. A bejövő adatok balról jobbra kerülnek vizsgálatra. Az első karakter a  $a$ . Mivel nincs hosszabb egyező szó a szótárban, ezért a  $ab$  szó bekerül a szótárba, 4-es kóddal.

stringtábla		szótár	
a	1	a	1
b	2	b	2
c	3	c	3
-----			
ab	4	1b	4
ba	5	2a	5
abc	6	4c	6
cb	7	3b	7
bab	8	5b	8
baba	9	8a	9
aa	10	1a	10
aa	11	10a	11
aaaa	12	11a	12

**63. Ábra:** Példa a szótár felépítésére az LZW eljárásban: a szótár a szaggatott vonal feletti három  $a$ ,  $b$ ,  $c$  karakterrel lett inicializálva.

A tömörített kódot a maximális egyezésű szótárelem pozíciója adja, a kimenetre csak az így megadott szótár-kód kerül.

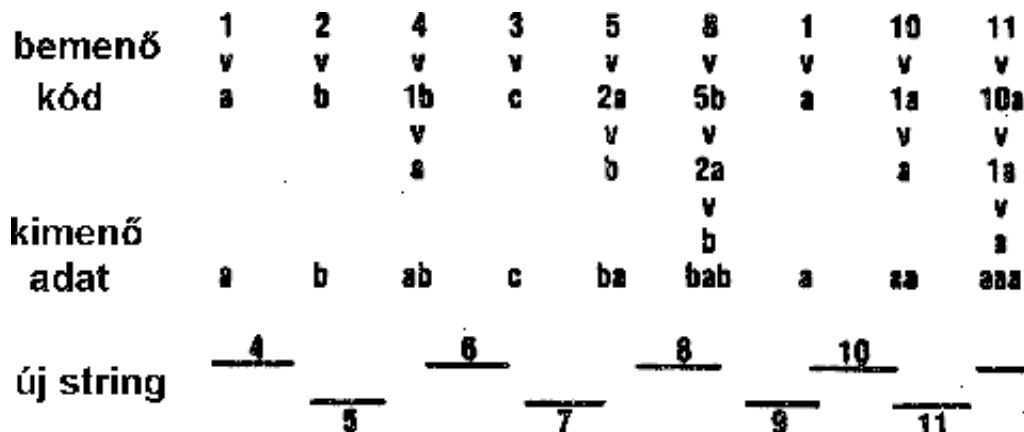


64. Ábra: Az LZW kódok előállítás.

A szótár a méretét tipikusan  $2^{12}$ - $2^{16}$  szóra választják. Amikor a szótár megtelik, akkor akkor azt letörlik (pl. byte méret esetén csak az első 256 szó marad meg), majd újra indul az algoritmus.

A dekódoláshoz a bejövő kódok alapján fel kell újra építeni a szótárat. Ez (a kódoláshoz hasonlóan) folyamatosan elvégezhető, azaz az eljárással az adatokat folyamatosan tömöríthetjük ill. állíthatjuk vissza. Több, adatfolyamban is használt program is (pl. *gzip*, *compress*) részben ezen az algoritmuson alapul.

Példánk dekódolását láthatjuk a 65 [p 93] ábrán. Minden kód rekurzívan helyettesítődik a prefix kódjával (szótárelem kódja) és a követő karakterrel. A végeredmény az eredeti adatfolyam.



65. Ábra: Az LZW kódok dekódolása

Az eljárás hardware segítségével is könnyen megvalósítható (így valós idejű diszk tömörítés hozható létre!).

Bizonyos esetekben, amikor a bejövő jelek eloszlása előzetesen pontosan ismert, a fenti algoritmusoknál esetlegesen jobban tömörítő ún. Huffman-kódolást is használhatunk. Ennek lényege a 66 [p 94] ábrán látható: az eljárás az egyes jeleket (pl. karakterek) előfordulásuk valószínűségében sorbarendezi. Ezek után a két legkisebb valószínűségű jelet helyettesíti egy olyan új jellel, amelynek valószínűsége a két jel valószínűségének összege. Ezután újra rendez, majd megismétli az egész folyamatot egészen addig, amíg csak két jel nem marad.

		lépések			
Jel	Valószínűség	1	2	3	4
$a_2$	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6
$a_6$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4
$a_1$	0.1	0.1	0.2	0.3	
$a_4$	0.1	0.1	0.1		
$a_3$	0.06	0.1			
$a_5$	0.04				

66. Ábra: A Huffman-kódolás rendezési lépései

A kódoláshoz megfordul a rendezési folyamat: pl. a nagyobb valószínűségű jelhez rendeljük a 0-t, míg az 1-et a kisebbhez. Ezek után visszalépünk egyet a rendezésben, és újra 0-t írunk a nagyobb, 1-et a kisebb jel kódja után (prefix kódolás). A visszalépéseket addig ismételjük, amíg minden elemi jelhez hozzá nem rendelünk egy kódot (l. 67 [p 94] ábra). Az eljárás eredményeként a gyakran előforduló jelek kódolása mindössze néhány bittel történik, míg eközben a nagyon ritka jelek akár 10-14 bites kódot is használhatnak. Érdekes megfigyelni, hogy az így előálló kód egyértelműen dekódolható, nem szükséges megjelölni az egyes kódok határait.

		lépések				
Jel	Val.	Kód	1	2	3	4
$a_2$	0.4	1	0.4 1	0.4 1	0.4 1	0.6 0
$a_6$	0.3	00	0.3 00	0.3 00	0.3 00	0.4 1
$a_1$	0.1	011	0.1 011	0.2 010	0.3 01	
$a_4$	0.1	0100	0.1 0100	0.1 011		
$a_3$	0.06	01010	0.1 0101			
$a_5$	0.04	01011				

67. Ábra: A Huffman-kódolás kódolási lépései

**Kérdés:** Mekkora a példában szereplő karaktersorozat és annak Huffman kódolásának Shannon-entrópiája?

Az eljárás ugyan jól tud tömöríteni, de hátránya, hogy a bejövő jelek eloszlását ismerni kell (azaz folyamatos on-line tömörítést nem tudnk végezni vele). Ezen úgy segítenek, hogy megvizsgálják sok, hasonló jel eloszlását és ezek alapján felépítenek egy statikus kódtáblát (ennek használata gyorsabb, mivel nem kell elvégezni a rendező-kódoló lépéseket). Statikus kódtábla esetén ráadásul nem kell esetről-esetre rögzíteni (vagy a kommunikációs vonalon átküldeni) a kódtáblát.

A veszteséges kódolásokra példát láttunk a wavelet transzformáció során. A korszerű képtömörítési eljárások hasonló technikákat alkalmaznak, itt most az egyik leggyakrabban használt *JPEG baseline coding* eljárást nézzük meg:



A JPEG kódolást hosszú kutatómunka és kísérletezés előzte meg. Az kódolási eljárás 8 bitre korlátozza a be és kimenő adatok pontosságát. A képet először  $8 \times 8$  pixel méretű négyzetekre bontják, eltolják az egyenszintet a skála közepére, majd diszkrét koszinusz transzformációval (DCT) transzformálják és 11 bit pontossággal kvantálják. A DCT a bejövő  $8 \times 8$ -es mátrixot a következőképpen transzformálja:

A DCT komponenseket a  $8 \times 8$ -as négyzet sarkából cikk-cakk mintában haladva egydimenziós sorozattá alakítják (l. 68 [p 95] ábra).

0	1	5	6	14	15	27	28
2	4	7	13	16	26	29	42
3	8	12	17	25	30	41	43
9	11	18	24	31	40	44	53
10	19	23	32	39	45	52	54
20	22	33	38	46	51	55	60
21	34	37	47	50	56	59	61
35	36	48	49	57	58	62	63

68. Ábra: A DCT komponensek sorbarendezése

Mivel így a DCT transzformált növekvő frekvenciájú komponensei egymás mellé kerülnek, a homogén, egyszínű felületek sok egymás utáni 0-át tartalmaznak, ezért az AC komponenseket futási hossz kóddal tömörítik. A DC együttthatók viszonylag lassan változnak, ezért ezeknél csak a korábbi értékekhez viszonyított eltérést adják meg (delta kódolás). A szabvány megad előre rögzített Huffman-kódokat is a kromacitás és luminancia színinformációk egyszerű, de hatékony kódolására is (de saját Huffman-kódtáblát is lehet használni). A JPEG veszteségének mértéke állítható: nagyobb pontossághoz nagyobb fileméret tartozik. Mivel az eljárás jól alkalmazkodik a gyakran előforduló sima felületekhez, ezért pl. egy 1:25 arányban összenyomott JPEG kép általában még élvezhető minőségű. Az eljárás a  $8 \times 8$  pixelekből álló négyzetek miatt lokálisan adaptív, azaz képes alkalmazkodni az élekhez is: itt ugyan több DCT komponenst kell megőrizni, de általában viszonylag kevés ilyen ( $8 \times 8$ -as) blokk akad egy képen.



**Következő:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Fel:** Digitális jelek feldolgozása [p 45] **Előző:** Wavelet közelítések [p 89]



[p 97]



[p i]



[p 92]

**Következő:** A zajok jellemzői [p 97] **Fel:** Jelfeldolgozás [p i] **Előző** Tömörítési eljárások [p 92]

## Jelek vizsgálata zaj jelenlétében

---

- A zajok jellemzői [p 97]
  - Integráló voltmérő [p 99]
  - Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében [p 100]
  - Ismert jelalak amplitudójának mérése [p 103]
  - Wiener szűrés [p 106]
  - Főkomponens analízis [p 108]
-

**Következő:** Integráló voltmérő [p 99] **Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96]

## A zajok jellemzői

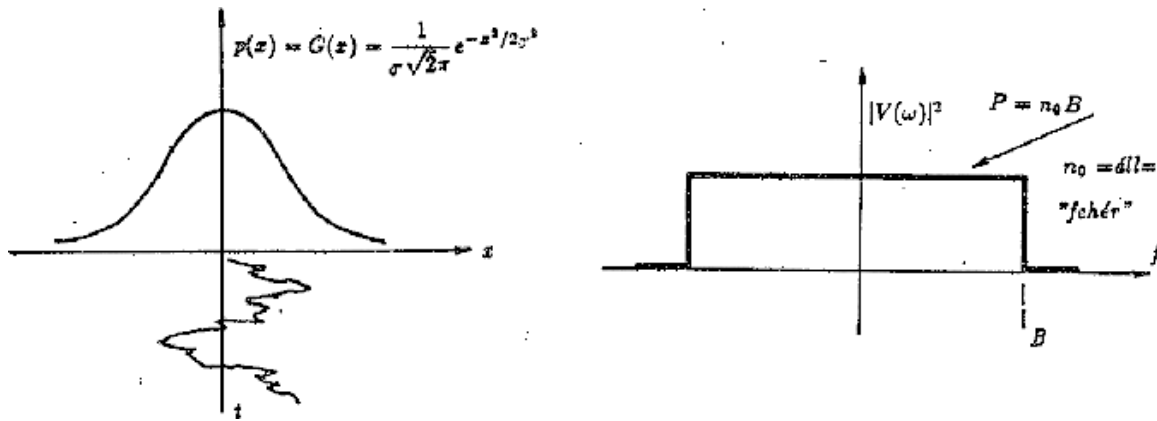
A mérés technika egyik legfontosabb célja: küzdelem a mindig, mindenütt jelenlevő zaj ellen. A zajok általában nem kívánt, de az általunk éppen vizsgált mennyiséget befolyásoló természeti folyamatok eredményei, így könnyen átlátható, hogy sokfajta zaj létezik. (A zajok sohasem szüntethetők meg, szemben a zavarokkal. A zavarok ember-keltette jelek, pl. fénycsövek működésétől származnak. Megszüntetésük, csökkentésük csak elvben lehetséges, a valóságban sokszor lehetetlen.) A zajok csak valószínűségi adatokkal jellemezhetők, e jellemzők maguk is valószínűségi változók. Két gyakran használt fogalmat a 69 [p 97] ábra alapján értelmezzük: fehér zajról akkor beszélünk, ha a zaj energia/teljesítményspektruma egy adott frekvenciatartományban állandó értékű. -- Gauss zajnak azt nevezzük, amikor a zaj pillanatnyi amplitúdó eloszlása a Gauss féle valószínűségeloszlást követi. E két dolog nem szükségképpen jár együtt, de a valóságos zajok, -- pontosabban a matematikai módszerekkel tárgyalható zajok -- többsége ilyen. (Gyakran beszélünk ún. random zajról is. Itt a pillanatnyi amplitúdó eloszlása egyenletes, állandó értékű. A DSPLAY program a Gauss és random zajok eloszlását könnyen szemléltethetővé teszi.

Zajok esetében a szokásosan mért mennyiségek (átlagérték, effektívérték, csúcsérték) közül tulajdonképpen csak az effektívértéknek van értelme. Ha egy  $\lambda$  nagyságú egyenáramú jelre egy  $\sigma$  szórású Gauss eloszlású zaj szuperponálódik, akkor a jel teljesítménye:

$$\text{teljesítmény} = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + x)^2 G(x) dx = \lambda^2 + \sigma^2 = P_{=} + P_{\sim} .$$

(Ezt az összefüggést csak bizonyos valószínűségszámítási ismeretek birtokában lehet átlátni, értelmezni. )

Ez azt jelenti, hogy -- a várakozásnak megfelelően -- a jel teljesítménye az egyen- és váltakozóteljesítmények összege. Az azonban nagyon érdekes és értékes eredmény, hogy a zaj effektív értékének méréseként kapott mennyiség (teljesítmény) a szórásnégyzettel egyezik meg  $\lambda = 0$  esetén. Így tehát egy meglehetősen összetett valószínűségi adatot viszonylag hétköznapi műszerrel, vagyis ún. valódi effektívérték mérővel közvetlenül mérhetünk.



69. Ábra: A Gauss-zaj és a fehérzaj

Ha ismerjük az  $n_0$  értékét, vagyis az egy Hz sávzélességre jutó zajteljesítmény nagyságát, akkor a  $B$  sávzélességű fehér zaj teljesítménye az alábbi összefüggésből számolható:

$$P_{\text{zaj}} = n_0 B \quad .$$


---

**Következő:** Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében [p 100] **Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző** A zajok jellemzői [p 97]

## Integráló voltmérő

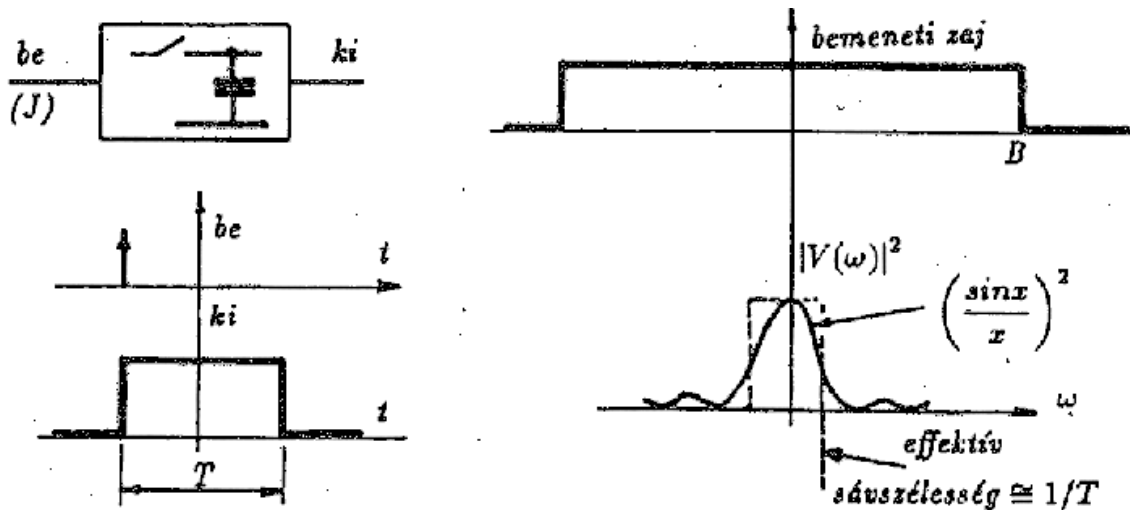
Régóta használatos mérés technikai fogás, hogy zajos egyenfeszültségű jelet úgy mérnek, hogy bizonyos ideig integrálják. Ösztönösen érezhető, hogy így az ingadozások csökkennek, a zaj “kiátlagolódik”. Az integrálásból adódó zajcsökkenés mértékét viszonylag egyszerűen meghatározhatjuk.

A  $T$  idejű integrálás súlyfüggvényét a 70 [p 99] ábra alapján állíthatjuk elő. Ha egy delta függvényt  $T$  ideig integrálunk, akkor  $T$  szélességű impulzust kapunk, az időszak végén ugyanis az integrálás megszűnik. Teermészetesen az integrált értéket egy alkalmas számláló, vagy egyéb eszköz megőrizheti. Az integrálással nyert impulzus teljesítményspektrumát Fourier transzformációval állíthatjuk elő. A spektrum “zöme” az  $f=1/T$  tartományba esik, a további szakaszok elhanyagolhatók. Ha a bemenő zaj  $B$  sávszélességű és  $P$  teljesítményű volt, akkor a kimeneti zaj:

$$P_{\text{zaj}} = \sigma_{\text{ki}}^2 = n_0 B_{\text{eff}} \simeq \frac{\sigma_{\text{be}}^2}{BT} .$$

Láthatjuk, hogy  $BT$  érték ügyes megválasztásával a kimeneti zajt a bemeneti zaj töredékére csökkenthetjük.

Érdekességként megemlíjtük, hogy az integráló voltmérők integrálási idejét általában a hálózati feszültség periódusidejének egészszámú többszörösére választják, hogy az ebből a zavarforrásból származó hibát a lehetséges minimum közelében tartsák.



70. Ábra: Az integráló voltmérő működési elve

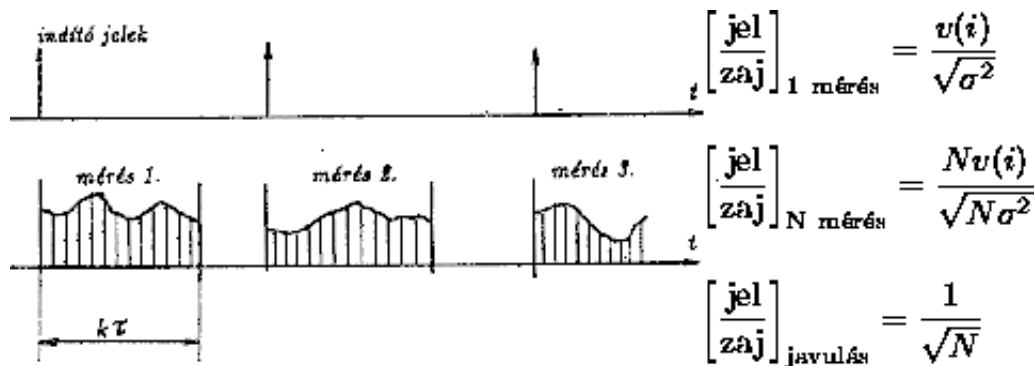
## Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében

A zajok integrálással/összegezással való eliminálásának technikája periodikus, vagy periodikussá tett jelek esetén is jó eredményekre vezet. Periodikussá úgy tehetünk jeleket, hogy egy-egy triggerjel hatására lezajló folyamatok eredményét összegezzük. Ez az eljárás igen gyakori pl. a neurofiziológiában, a geofizikai mérések egy csoportjában, stb.

Az integrálás csak akkor hatékony, ha igen nagy pontossággal ismerjük a periódusidőt és a fázishelyzetet, vagy a mérendő és összegezendő folyamatot ismert jelekkel mi magunk váltjuk ki.

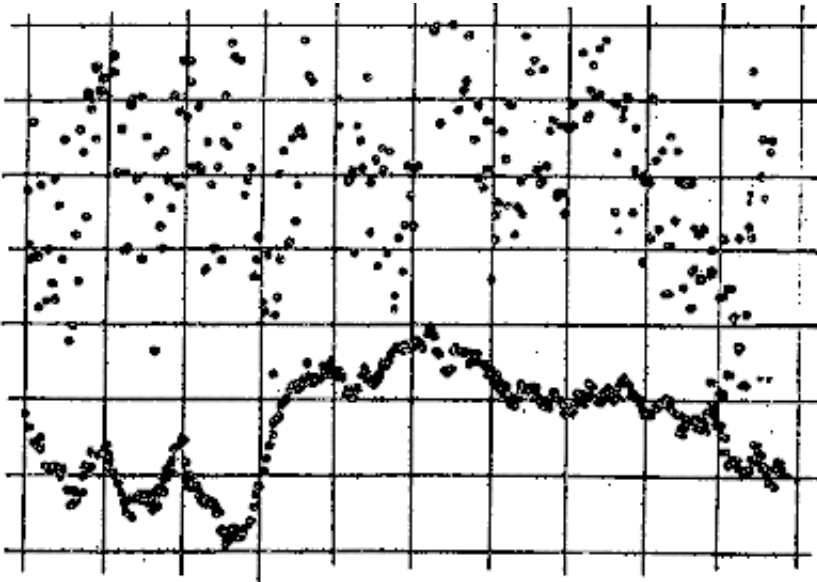
Az integrálás/összegezés megvalósításához a 71 [p 100] ábra vázlata szerint  $\mathcal{T}$  időközönként  $k$ -szor mintákat veszünk a mérendő folyamatból, és ezt  $N$ -szer megismételjük, -- a mért jeleket pedig "csatornánként" összegezzük. A mintavételi folyamatokat indítójelek kedeményezik, - ezeknek természetesen nem kell periodikusnak lenniük, ha ezek az indítójelek egyúttal a mérendő folyamatot is azonos módon triggerelik.

Az eljárás értékelésére leginkább a jel/zaj viszony vizsgálata alkalmas. Az összegezés a hasznos jel amplitudóját  $N$ -szeresére növeli, ugyancsak  $N$ -szeresére növekszik a zajokból származó szórásnégyzet is. Eredőként azt kapjuk, hogy a jel/zaj javulás mértéke  $N$  négyzetgyökével arányos. (Ismételten utalnunk kell bizonyos valószínűségszámítási ismeretekre.)



**71. Ábra:** Mérések megismétlésének hatása a  $S/N$  viszonyra

A módszer hatékonyságának illusztrálására a 72 [p 101] ábrára utalunk. Az ábra felső részén az agyból valamilyen (pl. akusztikus) inger hatására kiváltott jelet mutatunk, amelyet egy idegsejtbe bedugott kicsike elektródával detektálunk. Ez a jel kiértékelhetetlenül zajosnak látszik. 64 átlagolás után - az ábra alsó részén - azonban jól látható a tényleges hullámforma, mely már további összegezással sem változik lényegesen. - Sikerült tehát olyan folyamatot egyértelműen rögzíteni, amelyiknél a zaj mértéke az egyedi események amplitudójánál lényegesen nagyobb.

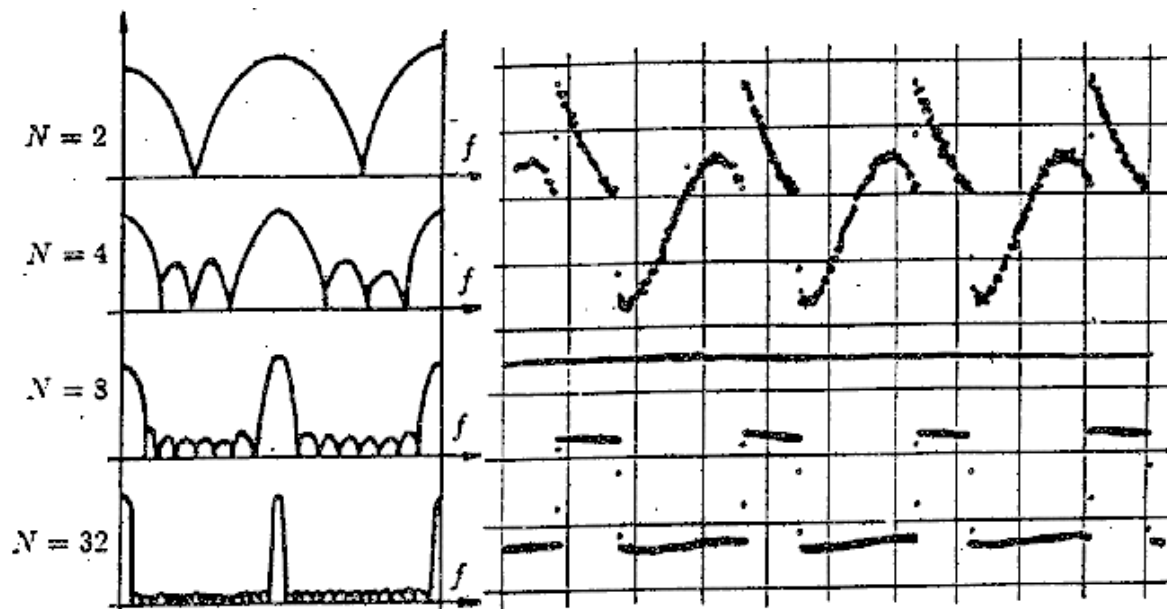


72. Ábra: A jel/zaj viszony javulása  $N=64$  átlagolás után

Az összegezési eljárás a frekvenciatartományban is értelmezhető. Ezért határozzuk meg  $N$  számú, egymást  $T$  időközzel követő delta függvényből álló jel frekvenciaspektrumát:

$$\begin{aligned}
 V(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega T n} = \frac{e^{-j\omega TN} - 1}{N(e^{-j\omega T} - 1)} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j\omega TN}}{1 - e^{-j\omega T}} \frac{e^{j\omega TN/2} e^{-j\omega T/2}}{e^{j\omega TN/2} e^{-j\omega T/2}} = \\
 &= \frac{1}{N} \frac{j2 \sin(\omega NT/2)}{j2 \sin(\omega T/2)} \quad \Rightarrow \quad |V(f)| = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi f NT)}{\sin(\pi f T)}.
 \end{aligned}$$

A frekvenciakaraktisztikák alakját a 73 [p 101] ábrán láthatjuk. Az ábra nagyon érdekes: azt mutatja, hogy a minták számának növelésével a karakterisztika egyre inkább “fésűszerű” lesz, vagyis csak olyan periodikus jelek tudnak rajta átjutni, amelyek komponensei éppen a karakterisztika “fogaiival” egyeznek meg. A 74 [p 101] ábra ennek a ténynek egy speciális alkalmazását mutatja. Itt egy 200 Hz-es négyszögjel és egy 200.1 Hz-es szinuszhullám egy szakasza látható. 16000 összegezés után csak a négyszögjel marad. A fésűs szűrő fogainak sáv szélessége ez esetben kb. 0.01 Hz !



73. **Ábra:** Négyyszögjel kiszűrése fésűsszűrővel

74. **Ábra:** A fésűsszűrő frekvenciakaraktisztikája



[p 103]



[p 96]



[p 99]

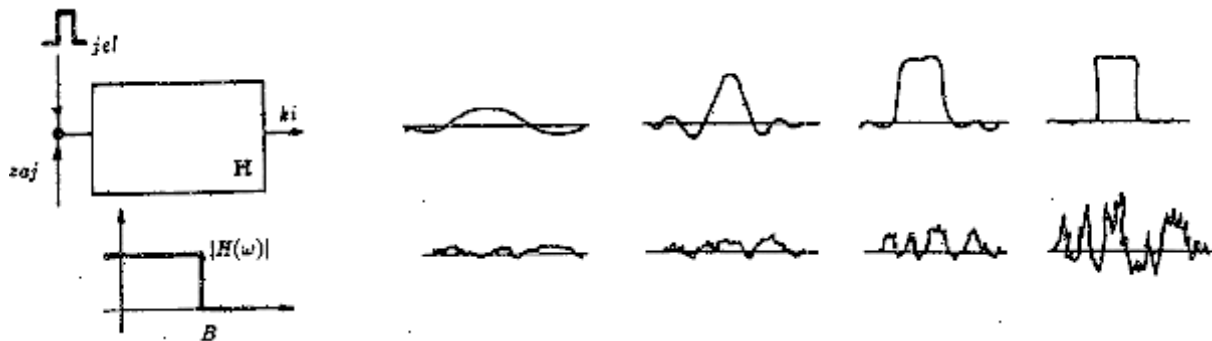
**Következő:** Ismert jelalak amplitudójának mérése [p 103] **Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző:** Integráló voltmérő [p 99]



**Következő:** Wiener szűrés [p 106] **Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző** Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében [p 100]

## Ismert jelalak amplitudójának mérése

Egy  $t$  szélességű négyszögimpulzus amplitudóját kívánjuk igen széles sávú fehérzaj környezetében megmérni. Mind a zaj, mind a jel egy  $H$  ideális aluláteresztő hálózaton halad keresztül (l. 75 [p 103] ábra). Vizsgáljuk meg kvalitatíven, hogyan változik az ideális aluláteresztő kimenetén a jelnek és a zajnak a nagysága. Az ábra jobb oldalán az látszik, hogy  $H$  sáv szélességének növelésével a kimeneten észlelhető jel amplitudója egy határig növekszik, majd gyakorlatilag állandó értékű marad. A kimeneten észlelhető zaj  $H$  sáv szélességének növelésével arányosan nő. Sejthető, hogy létezik egy optimum, amikor a jel már elég nagy, de a zaj még mérsékelt, vagyis a jel/zaj a legnagyobb értékű. A jel/zaj fogalom igen fontos, számos szakma használja.

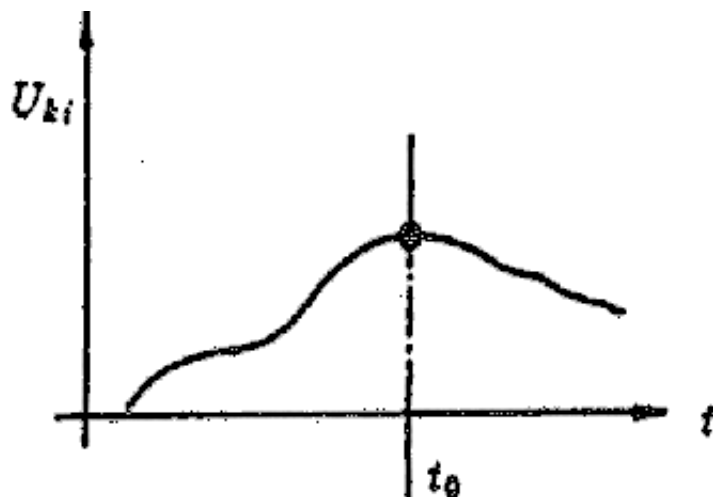


75. Ábra: Az illesztett szűrő elve

A kérdést általánosabban is fogalmazhatjuk. Ha ismerjük a bemenőjel alakját, hogyan kell a hálózat frekvenciakarakterisztikáját megválasztani, hogy a kimeneten megjelenő jel maximumából a lehető legnagyobb biztonsággal következtethessünk a bemenőjel amplitúdójára?

Keressük az alábbi összefüggés maximumát  $h(t)$  függvényében ( $S/N = \text{Signal/Noise ratio} = \text{jel/zaj}$  viszony):

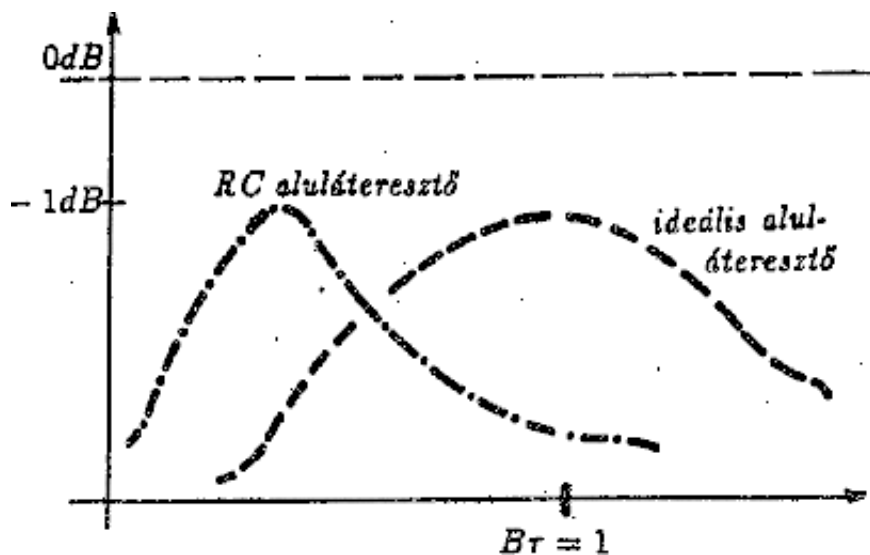
$$\frac{S}{N} = \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)h(t_0 - \tau)d\tau]^2}{n_0 \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\tau)d\tau}$$



Alaposabb - itt nem részletezett - matematikai elemzés szerint maximális értéket akkor kapunk, ha  $h(t) = v(t_0 - t)$ , vagyis optimális hálózatválasztás csak a bemenőjel ismeretében lehetséges. (Az esetleg nekünk üzenő kis-zöld-emberkék jeleit tehát semmiképpen sem tudjuk -- legalábbis kezdetben -- optimális körülmények között detektálni.) Ha a hálózat a jelhez ilyenén módon alkalmazkodik, akkor ún. illesztett-szűrős jeldetektálásról beszélünk. Természetesen a hálózat frekvenciakarakterisztikája is pontosan meghatározható a  $h(t) = v(t_0 - t)$  feltételből.

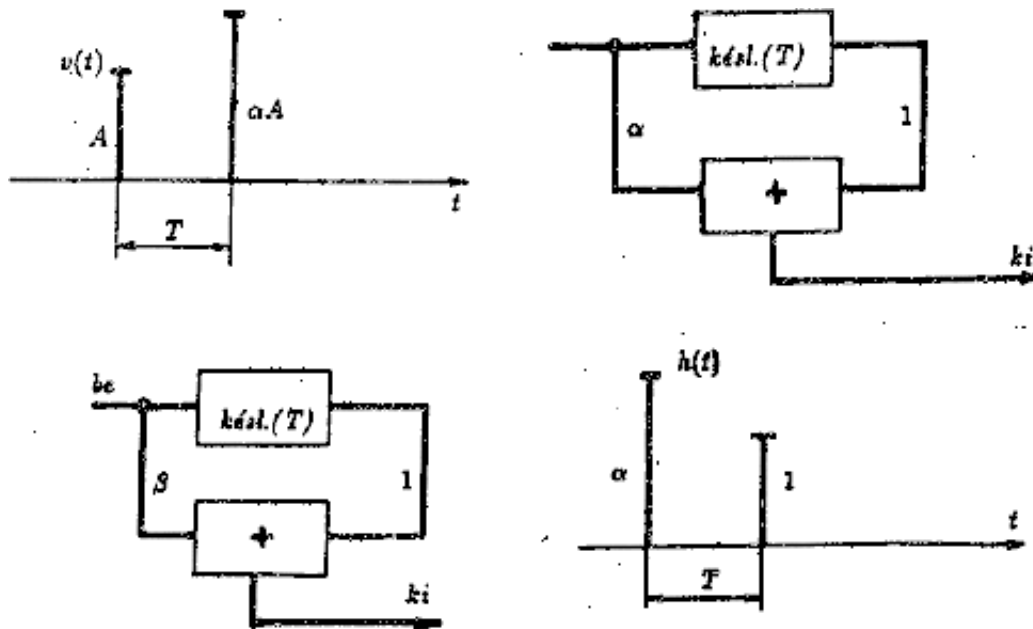
Illesztett szűrőt LRC elemekből nem minden bemenő jelalakhoz lehet készíteni, példának okáért az exponenciális lefutású triggerjel tükrözött változata fizikailag lehetetlen hálózatot tételez fel. Természetesen digitális szűrővel ez is megközelíthető, tetszőleges pontossággal.

Arra a kérdésre, hogy mennyire érdemes az illesztett szűrős optimumra törekedni, a 76 [p 104] ábráról kaphatunk némi információt. Ha egy  $\tau$  szélességű impulzust különböző  $B$  sávszélességű aluláteresztőn küldünk keresztül, akkor a jel/zaj az ideális esethez képest természetesen rosszabb lesz. A romlás mértékét az ábráról olvashatjuk le. Az is látható, hogy az ideális aluláteresztő szűrő sokkal kevésbé érzékeny az impulzus szélességére.



76. Ábra: Illesztett szűrő optimuma ideális és RC aluláteresztő szűrő esetén

Az illesztett szűrő fogalmához másfajta gondolkodással is eljuthatunk (77 [p 105] ábra). Tételezzük fel, hogy a bemenőjel két Dirac-deltából áll, amelyek egymáshoz képesti amplitúdóarányát ismerjük. Keressük azt a hálózatot, amely a két jelet -- zaj jelenlétében -- úgy kombinálja, hogy egyetlen mérésből minél pontosabb adatot kapjunk a bemenőjel amplitúdójára, A-ra.



77. Ábra: Két Dirac-deltából álló jel amplitúdómérésének optimalizálása illesztett szűrővel

$$\frac{S}{N} = \frac{(A + A\alpha\beta)^2}{n_0^2(1 + \beta)^2} = \frac{A^2(1 + \alpha\beta)^2}{n_0^2(1 + \beta^2)} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{S}{N} \right) \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$(n + \beta n_T)^2 = n^2 + 2\beta n n_T + \beta^2 n_T^2$$

A hálózatként válasszunk egy nagyon egyszerű digitális (FIR) szűrőt, amelynek egyetlen paramétere ( $\beta$ ) ismeretlen. A jel/zaj-ra felírt összefüggés szélsőérték helyének keresése a  $\beta = \alpha$  összefüggésre vezet. (Az összefüggés levezetésénél felhasználtuk azt a tényt, hogy a kellőképpen késleltetett zajjelek szorzatának átlagértéke zérus.) A hálózat súlyfüggvénye tehát a bemenőjel tükörképe lesz, - amint azt az előbbi, általánosabb megfontolásból is láttuk.


 [p 106] [p 96] [p 100]

**Következő:** Wiener szűrés [p 106] **Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző:** Kváziperiodikus jelek mérése zaj jelenlétében [p 100]

**Következő:** Főkomponens analízis [p 108] **Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző** Ismert jelalak amplitudójának mérése [p 103]

## Wiener szűrés

A 1.6 fejezetben láttuk, hogy a dekonvolúció segítségével egy  $H(\omega)$  hálózat torzítását egy  $K(\omega) = 1/H(\omega)$  korrekciós hálózattal kompenzálhatjuk a frekvenciaterben. A módszer alkalmazásának mindenképpen korlátot szabnak a zajok. Érdemes tehát megvizsgálni, hogy zaj jelenlétében hogyan lehet meghatározni az optimális szűrőt.

Legyen  $V_{ki}(\omega) = V_{be}(\omega)H(\omega)$ , és mérjük a zajos  $v_z(t) = v_{ki} + z(t)$  jelet, ahol  $z(t)$  a mérés során megjelenő zajt írja le. Az optimális  $K(\omega)$  szűrő az lesz, amelyik esetén a mért  $V_z(\omega)$ -t megsűrve, majd ezt dekonvolválva a  $H(\omega)$ -val az így kapott  $V$  a legjobban közelíti  $V_{be}$ -hez. Azaz

$$V(\omega) = V_z(\omega)K(\omega)/H(\omega)$$

esetén  $\int_{-\infty}^{\infty} |V(\omega) - V_{be}(\omega)|^2 d\omega$  minimális. Behelyettesítve  $V(\omega)$ -t kapjuk, hogy:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(V_{ki}(\omega) + Z(\omega))K(\omega)/H(\omega) - V_{ki}(\omega)/H(\omega)|^2 d\omega$$

Mivel a zaj és a jel korrelálatlan, ezért keresztszorzatuk eltűnik. Ekkor a képlet

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^{-2} (|V_{ki}(\omega)|^2 |1 - K(\omega)|^2 + |Z(\omega)|^2 |K(\omega)|^2) d\omega$$

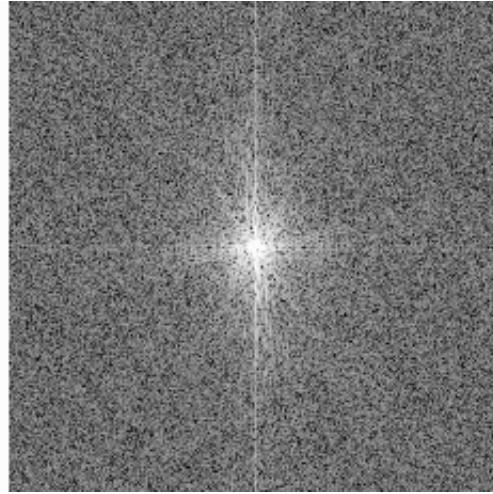
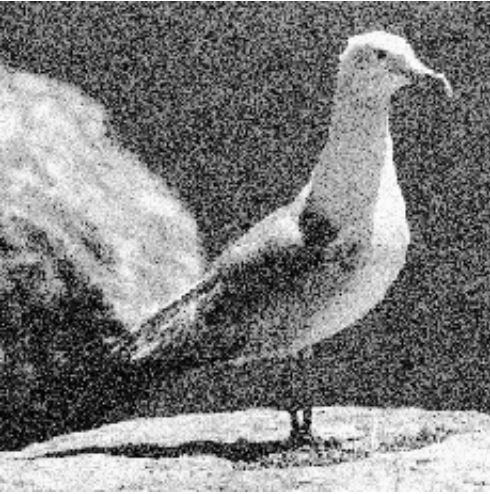
alakú lesz. Ez nyilvánvalóan csak akkor lesz minimális, ha  $K(\omega)$  minden  $\omega$  értékénél minimális.

Deriválva  $K(\omega)$  szerint megtalálhatjuk a minimumot

$$K(\omega) = |V_{ki}(\omega)|^2 / (|V_{ki}(\omega)|^2 + |Z(\omega)|^2)$$

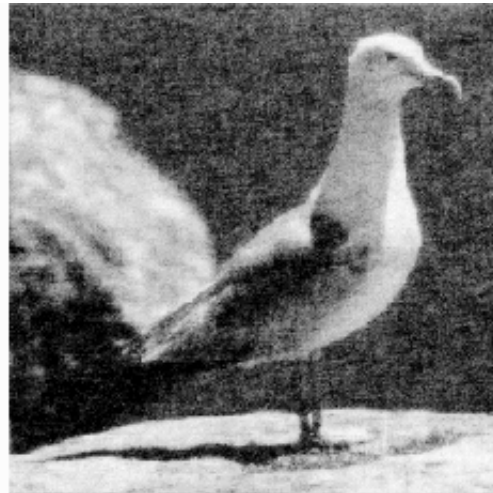
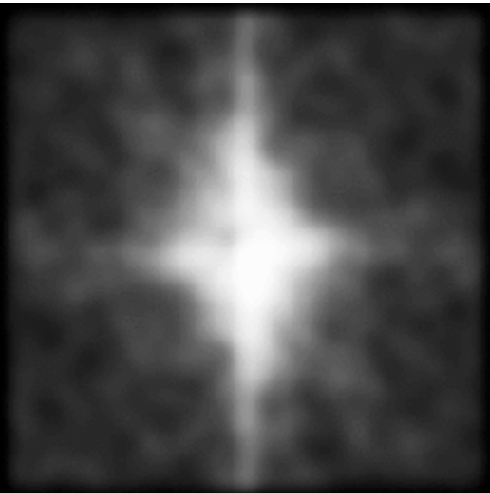
Ez lesz az optimális Wiener szűrő alakja. A szűrő úgy működik, hogy ahol  $V_{ki}(\omega)$  sokkal nagyobb, mint  $Z(\omega)$ , ott 1 körüli értéket vesz fel, ahol pedig a zaj teljesítménye sokkal nagyobb ott pedig kb. a jel/zaj viszony négyzetével csökkenti a  $V_{ki}$  értékeit.

Figyeljük meg, hogy a Wiener szűrő *nem* tartalmazza a rendszer súlyfüggvényét, csak a zaj és a jel teljesítményspektrumát. Az optimális szűrőhöz ezért meg kell határozni a zaj teljesítményspektrumát is (nem fehér-zajunk is lehet!). A legegyszerűbb esetben ezt egy  $Z(\omega) = \text{konstans}$  helyettesítéssel végezhetjük el. Nagyobb pontosságot már a  $Z(\omega)$  durva megbecslésével is könnyen elérhetünk, ui. a Wiener-szűrő másodrendben tartalmazza  $V_{ki}$ -t és  $Z$ -t.



**78. Ábra:** A kép Fourier-transzformáltja (az egyenszint a kép közepére van eltolva)

**79. Ábra:** Zajos eredeti kép



**80. Ábra:** A szűrt és visszaalakított kép

**81. Ábra:** Az alkalmazott Wiener-szűrő

## Főkomponens analízis

Alkossanak mérési adataink minden időpillanatban egy  $n$  dimenziós vektort. Tekintsük  $\mathbf{X}$  kifejtését

egy  $\phi_i$  ortonormális (azaz  $\phi_i \phi_j = \delta_{ij}$ ) bázis szerint:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \phi_i = \Phi \mathbf{Y}$$

, ahol  $\Phi = [\phi_1 \dots \phi_n]$  és  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]^T$ . Az ortonormalitás miatt igaz lesz, hogy  $\mathbf{y}_i = \phi_i \mathbf{X}$ .

Látható, hogy  $\mathbf{Y}$  egyszerűen  $\mathbf{X}$  egy elforgatottja lesz. A főkomponens analízisben  $\phi_i$ -t tulajdonságnak nevezzük, egy ilyen tulajdonság értékét az adatokon a  $\mathbf{y}_i$  komponensek mérik.

Tegyük fel, hogy ki szeretnénk választani  $m (< n)$  olyan  $\phi_i$ -t, amelyek  $\mathbf{X}$ -et legjobban közelíti. Ehhez  $\mathbf{Y}$  nem használt tagjait (előre meghatározandó)  $b_i$  konstansokkal helyettesítjük:

$$\hat{\mathbf{X}}(m) = \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i \phi_i + \sum_{i=m+1}^n b_i \phi_i$$

Minimalizálni akarjuk a  $\chi^2$  eltérés-négyzetet, ekkor (az itt szereplő  $E()$  a várható értéket adja meg):

$$\begin{aligned} \chi^2 &= E\{\|\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}(m)\|^2\} \\ &= E\left\{ \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n (\mathbf{y}_i - b_i)(\mathbf{y}_j - b_j) \phi_i^T \phi_j \right\} \\ &= \sum_{i=m+1}^n E\{(\mathbf{y}_i - b_i)^2\} \end{aligned}$$

A minimumhoz deriválnunk kell  $\chi^2$ -t  $b_i$  szerint. Innen kapjuk, hogy  $b_i = E\{\mathbf{y}_i\}$ . Ezt visszaírhatjuk  $\chi^2$ -be:

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{i=m+1}^n E\{(\mathbf{y}_i - E[\mathbf{y}_i])^2\} \\ &= \sum_{i=m+1}^n \phi_i^T E\{(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T\} \phi_i \\ &= \sum_{i=m+1}^n \phi_i^T \Sigma_{\mathbf{X}} \phi_i \end{aligned}$$

Az itt szereplő  $\Sigma_X$  az adatok ún. kovariancia mátrixa. Bebizonyítható, hogy  $\phi_i$ -re az optimális választás a

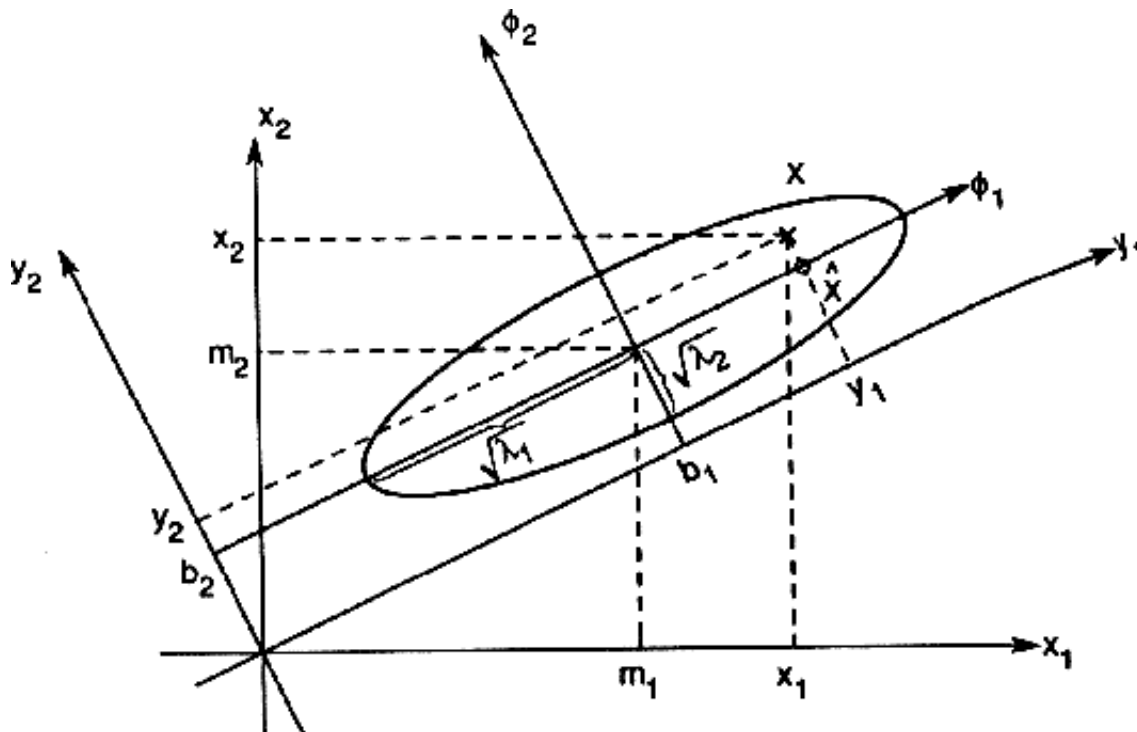
$$\Sigma_X \phi_i = \lambda_i \phi_i$$

, azaz a  $\phi_i$  a  $\lambda_i$  sajátértékhez tartozó sajátvektor. Így

$$\chi^2 = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i$$

Azt az eredményt kaptuk tehát, hogy a  $\chi^2$  közelítés értelemben a legjobb lineáris reprezentációt akkor kapjuk, ha a kovariancia mátrix sajátvektorai szerinti ortogonális transzformációt választjuk. Itt célszerű a sajátvektorokat monoton csökkenő sorba rendezni (azaz az  $i$  index szerint  $\lambda_i \geq \lambda_j$ , ha  $i > j$ ). Az eljárás neve is innen ered: ha csak az  $m$  ( $< n$ ) "fő" komponenst választjuk ki, akkor az eltérés az eredeti adatoktól minimális lesz.

A 82 [p 109] ábrán ez az analízist láthatjuk két dimenzióban. A  $\phi_1$  és  $\phi_2$  sajátvektorok az eloszlás fő tengelyeit alkotják, miközben a  $\lambda_1$  és  $\lambda_2$  sajátértékek megmondják a  $\phi_1$  és  $\phi_2$  tengelyek mentén az eloszlás varianciáját. Mivel  $y_i = \phi_i^T X$ , ezért  $y_1$  és  $y_2$  lesznek  $X$  vetületei a  $\phi_1$  és  $\phi_2$  tengelyekre.



82. Ábra: Példa két dimenzióban a főkomponens analízisre.



A  $y_i$  tulajdonságok több szempontból is vonzóak: pl. ha töröljük az  $y_i$  tulajdonságot, akkor a közelítés hibája  $\lambda_i$ -vel nő meg. Ez lehetőséget biztosít az adatok veszteséges tömörítésére is: amennyiben csak a legnagyobb  $m$  sajátkomponenst és az arra vett vetületeket tároljuk, akkor a visszaállítás során az

átlagos eltérés értéke  $\sum_{i=m+1}^n \lambda_i$  lesz. Ha ez sokkal kisebb, mint  $\sum_{i=1}^m \lambda_i$ , és  $m$  sokkal kisebb, mint  $n$ , akkor jelentős tömörítést érhetünk így el.

További jó tulajdonság az eljárásnak, hogy az egyes tulajdonságok egymástól függetlenek, azaz az  $\mathbf{y}_i$ -k egymás közötti korrelációja 0. A főkomponens analízis az adatok entrópiájára is szélsőértéket biztosít: bebizonyítható, hogy az összes lineáris transzformáció közül ez a transzformáció minimalizálja a transzformációk  $Y$  terében mért entrópiamaximumot (*minimax* viselkedés).

Érdekességként megjegyezzük, hogy stacionárius idősorok esetén a főkomponens analízis  $\mathbf{y}_i$  tulajdonság-függvényei  $e^{j\omega_i t}$  alakúak lesznek, azaz ekkor visszakapjuk a Fourier-transzformációt! Ez talán nem is annyira meglepő, ha visszagondolunk, hogy a Fourier-transzformációt  $\chi^2$  minimalizálással is bevezethetjük.

A főkomponens analízis hátrányai között említhetjük, hogy nem mindig (fizikailag) értelmes a  $\Sigma_{\mathbf{X}}$  mátrix számolásakor levonni az  $E[\mathbf{X}]$  átlagértéket. Természetesen ezt elhagyhatjuk, hiszen  $\Sigma_{\mathbf{X}}$  helyett bármilyen (nem szinguláris) szimmetrikus mátrixot vehetünk, de ekkor a korábban említett minimalizációs tulajdonság nem lesz igaz. A másik hátrány, hogy az eljárás csak lineáris tulajdonságokat képes megtalálni, pl. egy adott síkban körívet leíró adatoknál nem találja meg (legfeljebb közelíti) az adott ívnek megfelelő egydimenziós teret. Ezt a hátrányt az adatok normalizálásakor ki is használhatjuk: pl. az  $\mathbf{x}_i$  adatokat  $\|\mathbf{x}\|$  szerint normálva a főkomponens analízis  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_i / \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j$  rendben végrehajtható, míg a  $\Sigma_{\mathbf{X}}$  normálást használva ezt nem tehetjük meg, mivel  $\Sigma_{\mathbf{X}}$  szinguláris lesz.

 [p 96]  [p 106]

**Fel:** Jelek vizsgálata zaj jelenlétében [p 96] **Előző:** Wiener szűrés [p 106]