

Próbáljunk megoldást keresni az alábbi feladatokra, úgy, hogy csak az összegzés programozási tételt használjuk!

1. Összegzés

Feladat: Adott egy $f:[m..n] \rightarrow H$ függvény. A H halmaz elemein értelmezett egy asszociatív, baloldali nulla elemmel rendelkező művelet (nevezzük ezt összeadásnak és jelölje a $+$). Határozzuk meg a függvény intervallumon felvett értékeinek összegét!

Specifikáció:

$$A = (m:\mathbb{Z}, n:\mathbb{Z}, s:H)$$

$$Ef = (m=m' \wedge n=n')$$

$$Uf = (Ef \wedge s = \sum_{i=m..n} f(i))$$

Algoritmus:

$s := 0$	$i:\mathbb{Z}$
$i = m .. n$	
$s := s+f(i)$	

1. Két nem-negatív szám szorzatának kiszámolása összeadásokkal: $h := x \cdot y$ helyett $z := \sum_{i=1}^x y$

Specifikáció:

$$A = (x:\mathbb{N}, y:\mathbb{N}, z:\mathbb{N})$$

$$Ef = (x=x_0 \wedge y=y_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge z = \sum_{i=1}^x y)$$

Tétel: Összegzés

$$i = m .. n \sim i = 1 .. x$$

$$f(i) \sim y$$

$$s \sim z$$

$$H, +, 0 \sim \mathbb{N}, +, 0$$

Algoritmus:

$z := 0$	$i:\mathbb{N}$
$i := 1$	
$i \leq x$	
$z := z + y$	
$i := i+1$	

vagy

$z := 0$	$i:\mathbb{N}$
$i = 1 .. x$	
$z := z + y$	

2. Nem nulla természetes szám faktoriálisának kiszámolása:

Specifikáció:

$$A = (n:\mathbb{N}, f:\mathbb{N})$$

$$Ef = (n=n_0 \wedge n>0)$$

$$Uf = (Ef \wedge f = \prod_{i=2}^n i)$$

Tétel: Összegzés

$$i = m .. n \sim i=2..n$$

$$f(i) \sim i$$

$$s \sim f$$

$$H, +, 0 \sim \mathbb{N}, \cdot, 1$$

Algoritmus:

$f:=1$	$i:\mathbb{N}$
$i=2..n$	
$f:=f \cdot i$	

3. Hatvány kiszámolása összeszorozásokkal: $y := x^n$ helyett $y := \prod_{i=1}^n x$

[1.kvíz]

Specifikáció:

$$A = (n : \mathbb{N}, x : \mathbb{R}, y : \mathbb{R})$$

$$Ef = (n = n_0 \wedge x = x_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge y = \prod_{i=1}^n x)$$

Tétel: Összegzés

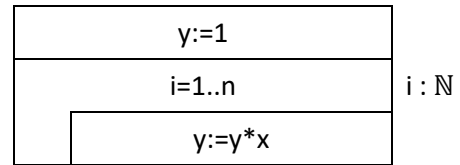
$$i = m .. n \quad \sim \quad i = 1..n$$

$$f(i) \quad \sim \quad x$$

$$s \quad \sim \quad y$$

$$H, +, 0 \quad \sim \quad \mathbb{R}, \cdot, 1$$

Algoritmus:



4. Két (valós koordinátájú) vektor skaláris szorzata:

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{R}^n, y : \mathbb{R}^n, s : \mathbb{R}) \quad [2.kvíz]$$

$$Ef = (x = x' \wedge y = y')$$

$$Uf = (Ef \wedge s = \sum_{i=1}^n x[i] * y[i])$$

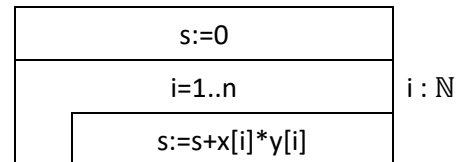
Összegzés

$$i = m .. n \quad \sim \quad i = 1..n$$

$$f(i) \quad \sim \quad x[i] * y[i]$$

$$H, +, 0 \quad \sim \quad \mathbb{R}, +, 0$$

Algoritmus:



5. Számoljuk meg egy egész számokat tartalmazó tömb páros elemeit!

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{Z}^n, db : \mathbb{N})$$

$$Ef = (x = x_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge db = \sum_{i=1}^n f(i)) \quad [3.kvíz]$$

$$f(i) = 1, \text{ ha } 2 \mid x[i], 0 \text{ egyébként}$$

Összegzés (ami itt valójában számlálás)

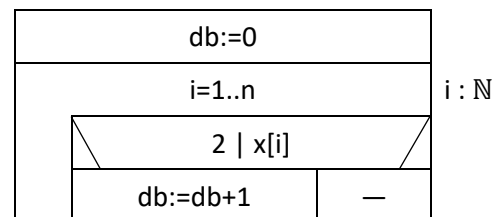
$$i = m .. n \quad \sim \quad i = 1..n$$

$$f(i) \quad \sim \quad 1, x[i] \text{ páros}, 0 \text{ egyébként}$$

$$s \quad \sim \quad db$$

$$H, +, 0 \quad \sim \quad \mathbb{N}, +, 0$$

Algoritmus:



6. Van-e egy egész számokat tartalmazó tömbben páros szám?

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{Z}^n, l : \mathbb{L})$$

$$Ef = (x = x_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge l = \bigvee_{i=1}^n 2 \mid x[i]) \quad [4.kvíz]$$

Tétel: Összegzés

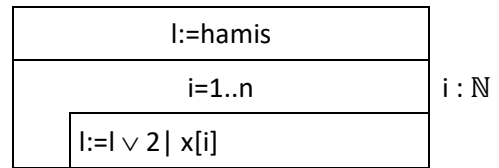
$$i = m .. n \sim i = 1..n$$

$$f(i) \sim 2 \mid x[i]$$

$$s \sim l$$

$$H, +, 0 \sim L, \vee, \text{hamis}$$

Algoritmus:



7. Vajon, minden elem páros-e egy egész számokat tartalmazó tömbben?

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{Z}^n, l : \mathbb{L})$$

$$Ef = (x = x_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge l = \bigwedge_{i=1}^n 2 \mid x[i])$$

[5.kvíz]

Összegzés

$$i = m .. n \sim i = 1..n$$

$$f(i) \sim 2 \mid x[i]$$

$$s \sim l$$

$$H, +, 0 \sim L, \wedge, \text{igaz}$$

8. Természetes számokat tartalmazó tömb maximális elemének meghatározása összegzéssel:

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{N}^n, m : \mathbb{N})$$

$$Ef = (x = x_0 \wedge n > 0)$$

$$Uf = (Ef \wedge m = \bigodot_{i=1}^n x[i])$$

$$\text{ahol } \bigodot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{és } a \bigodot b ::= (b \text{ ha } b > a, a \text{ különben})$$

(és van neutrális eleme: 0)

Összegzés

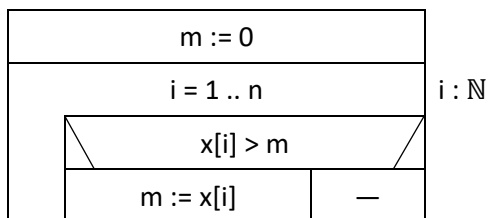
$$i = m .. n \sim i = 1..n$$

$$f(i) \sim x[i]$$

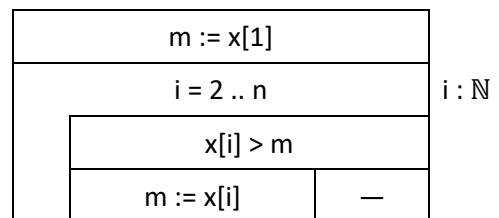
$$s \sim m$$

$$H, +, 0 \sim \mathbb{N}, \bigodot, 0$$

Összegzés:



Maximum kiválasztás:



9. Válogassuk ki egy egész számokat tartalmazó tömb páros elemeit egy sorozatba:

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{Z}^n, y : \mathbb{Z}^*)$$

$$Ef = (x = x_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge y = \bigoplus_{i=1}^n \langle x[i] \rangle)$$

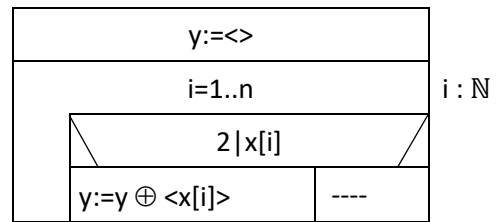
Összegzés

$$i = m .. n \quad \sim \quad i = 1 .. n$$

$$f(i) \quad \sim \quad \langle x[i] \rangle \text{ ha } 2 \mid x[i], \emptyset \text{ különben}$$

$$s \quad \sim \quad y$$

$$H, +, 0 \quad \sim \quad \mathbb{Z}^*, \oplus, \langle \rangle$$



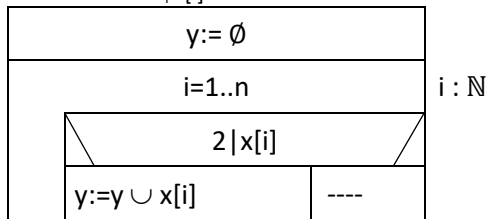
10. Válogassuk ki egy egész számokat tartalmazó tömb páros elemeit egy halmazba:

Specifikáció:

$$A = (x : \mathbb{Z}^n, y : \text{set}(\mathbb{Z}))$$

$$Ef = (x = x_0)$$

$$Uf = (Ef \wedge y = \bigcup_{i=1}^n \{x[i]\})$$



Összegzés

$$i = m .. n \quad \sim \quad i = 1 .. n$$

$$f(i) \quad \sim \quad \{x[i]\} \text{ ha } 2 \mid x[i], \emptyset \text{ különben}$$

$$s \quad \sim \quad y$$

$$H, +, 0 \quad \sim \quad \text{set}(\mathbb{Z}), \cup, \emptyset$$